Corrections

Exercice 1. Soient M le point d'affixe z, N le point d'affixe iz et A le point d'affixe i. Dire que A, M, N sont alignés signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AN}$. On a donc

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AN} \;\Leftrightarrow\; z - i = \lambda(iz - i) \;\Leftrightarrow\; z = \frac{i(1-\lambda)}{1-\lambda i}.$$

On peut alors conjecturer, à l'aide d'un dessin, que M est sur un cercle de centre Ω d'affixe $\frac{1+i}{2}$. On calcule donc

$$\Omega M = \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \left| z - \frac{1+i}{2} \right| = \left| \frac{2i(1-\lambda) - (1+i)(1-\lambda i)}{2(1-\lambda i)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{-1-\lambda + i(1-\lambda)}{1-\lambda i} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Réciproquement, une équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est donnée par

$$x(x-1) + y(y-1) = 0.$$

Donc, si M, d'affixe $z \neq 0$ est dans ce cercle, on calcule

$$\frac{z-i}{z-iz} = \frac{z-i}{z(1-i)} = \frac{\overline{z}(z-i)(1+i)}{2|z|^2} = \frac{(x-iy)(x+i(y-1))(1+i)}{2|z|^2}$$
$$= \frac{(x^2 - ix + y(y-1))(1+i)}{2|z|^2} = \frac{(x^2 - ix + x(1-x))(1+i)}{2|z|^2} = \frac{x(1-i)(1+i)}{2|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} \in \mathbb{R},$$

donc les points d'affixes z, iz et i sont bien alignés. Ainsi, les points M, N et A sont alignés si et seulement si M appartient au cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2. Soit I le milieu du segment $[AB]$ (de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{BI}$). Par la relation de Chasles, on a

$$\left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle = \lambda \;\Leftrightarrow\; \left\langle \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM} \right\rangle = \lambda \;\Leftrightarrow\; \left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{BI} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM} \right\rangle = \lambda$$
$$\Leftrightarrow\; -\left\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BI} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IM} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{BI} \right\rangle + \|\overrightarrow{IM}\|^2 = \lambda \;\Leftrightarrow\; \|\overrightarrow{IM}\|^2 - \|\overrightarrow{IB}\|^2 = \lambda$$
$$\Leftrightarrow\; \|\overrightarrow{IM}\|^2 = \lambda + \|\overrightarrow{IB}\|^2.$$

Plusieurs cas sont alors à considérer :

- Si $\lambda > -\|\overrightarrow{IB}\|^2$, alors l'ensemble des solutions est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda + \|\overrightarrow{IB}\|^2}$.
- Si $\lambda = -\|\overrightarrow{IB}\|^2$, alors l'ensemble des solutions est $\{I\}$.
- Si $\lambda < -\|\overrightarrow{IB}\|^2$, alors il n'y a pas de solution.

Exercice 3. Pour que le triangle ABM soit équilatéral, il faut et il suffit que M soit l'image de B par une rotation de centre A et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$. Notons $z = x + iy$ (resp. $a = 1 + i$, $b = -1 + 2i$) l'affixe de M (resp. de A, B).

- Dans le premier cas, on a

$$z-a=e^{\frac{i\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i \Leftrightarrow z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right).$$

- Dans le second cas, on a

$$z-a=e^{-\frac{i\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow z=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)+1+i \Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right).$$

Ainsi le triangle ABM est équilatéral si et seulement si

$$z \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right\}$$

Exercice 4. 1. Dans le plan P identifié à $\mathbb{R}^2$, une équation cartésienne de $\mathcal{C}_1$ est donnée par

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5.$$

Donc, si $z=x+yi$, le point d'affixe z est dans $\mathcal{C}_1$ si et seulement si

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y=0 \Leftrightarrow z\overline{z}-4\frac{z+\overline{z}}{2}-2\frac{z-\overline{z}}{2i}=0 \Leftrightarrow z\overline{z}-(2-i)z-(2+i)\overline{z}=0.$$

Donc, une équation complexe de $\mathcal{C}_1$ est donnée par

$$z\overline{z}-(2-i)z-(2+i)\overline{z}=0.$$

De même, une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$ est

$$x^2+(y-3)^2=1,$$

et on trouve une équation complexe comme précédemment. On obtient l'équation complexe de $\mathcal{C}_2$:

$$z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}+8=0.$$

Pour l'intersection, reprenons les équations cartésiennes

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5, \quad x^2+(y-3)^2=1.$$

Ainsi, un points M de coordonnées (x,y) de P vérifie

$$M \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ x^2+y^2-6y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ 6y-8-4x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-2y=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(x+2)^2-4x-2x-4=0 \\ y=x+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(0,2),(1,3)\}.$$

Et réciproquement, les points de coordonnées $(0,2)$ et $(1,3)$ sont dans $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

2. Soit M un point d'affixe $z \neq \beta$. On a

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\ ;\ z-\alpha=\lambda(z-\beta) \Leftrightarrow \frac{z-\alpha}{z-\beta}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-\alpha}{z-\beta}=\frac{\overline{z-\alpha}}{\overline{z-\beta}}$$

$$\Leftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\beta})=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\alpha}) \Leftrightarrow (\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=0$$

$$\Leftrightarrow i(\overline{\alpha}-\overline{\beta})z+\overline{i(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}\overline{z}+i(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)=0.$$

Donc, une équation complexe de $\mathcal{D}$ est donnée par

$$\overline{u}z+u\overline{z}+v=0, \qquad \text{où} \begin{cases} u:=\overline{i(\overline{\alpha}-\overline{\beta})}\in\mathbb{C} \\ v:=i(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)\in\mathbb{R} \end{cases}$$

3. Pour simplifier, un droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne
$$ax + by + c = 0$$
sera notée ici abusivement
$$\mathcal{D} = \{ax + by + c = 0\}.$$
On notera aussi, pour $z = x + yi$, $\mathcal{C}(z, r)$ le cercle de centre (x, y) et de rayon r. En notant $t_{(0,1)}$ la translation de vecteur $(0, 1)$, μ_λ la multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$, γ la conjugaison complexe et r_θ la rotation d'angle θ,, on voit que les deux transformations f et g se décomposent
$$f = t_{(0,1)} \circ \mu_2 \circ r_{-\frac{\pi}{4}}$$
et
$$g = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ \gamma \circ t_{(0,1)}.$$
On en tire que
$$f(\mathcal{C}) = t_{(0,1)} \circ \mu_2 \circ r_{-\frac{\pi}{4}}(\mathcal{C}(1 + i, 1)) = t_{(0,1)} \circ \mu_2(\mathcal{C}(1, 1)) = t_{(0,1)}(\mathcal{C}(2, 2)) = \mathcal{C}(2 + i, 2).$$
On a aussi
$$f(\mathcal{D}) = t_{(0,1)} \circ \mu_2 \circ r_{-\frac{\pi}{4}}(\{x + y = 1\}) = t_{(0,1)} \circ \mu_2(\{x = 1/2\}) = t_{(0,1)}(\{x = 1\}) = \{x = 1\}.$$
Aussi,
$$g(\mathcal{C}) = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ \gamma \circ t_{(0,1)}(\mathcal{C}(1 + i, 1)) = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ \gamma(\mathcal{C}(1 + 2i, 1)) = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}}(\mathcal{C}(1 - 2i, 1))$$
$$= \mu_{\sqrt{2}}\left(\mathcal{C}\left(\frac{3 - i}{\sqrt{2}}, 1\right)\right) = \mathcal{C}(3 - i, \sqrt{2}).$$
Et enfin
$$g(\mathcal{D}) = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ \gamma \circ t_{(0,1)}(\{x + y = 1\}) = \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}} \circ \gamma(\{x + y = 2\})$$
$$= \mu_{\sqrt{2}} \circ r_{\frac{\pi}{4}}(\{y - x + 2 = 0\}) = \mu_{\sqrt{2}}(\{x = 1\}) = \{x = \sqrt{2}\}.$$

4. Notons $\mathcal{D}$ la droite d'équation complexe
$$\omega\overline{z} + \overline{\omega}z = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
Supposons que $\mathcal{D}^\perp_{M_0}$ soit une droite orthogonale à $\mathcal{D}$, intersectant $\mathcal{D}$ en un point M_0 d'affixe z_0. Dire qu'un point M d'affixe z est dans $\mathcal{D}^\perp_{M_0}$, c'est dire que, pour tout $N \in \mathcal{D}$ d'affixe z_N, on a
$$\left\langle \overrightarrow{M_0N}, \overrightarrow{M_0M} \right\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; (z_N - z_0)(\overline{z - z_0}) + (\overline{z_N - z_0})(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; (z_N - z_0)\left(\overline{z} - \frac{k - \overline{\omega}z_0}{\omega}\right) + \left(\frac{k - \overline{\omega}z_N}{\omega} - \frac{k - \overline{\omega}z_0}{\omega}\right)(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; (z_N - z_0)(\omega\overline{z} - k + \overline{\omega}z_0) + \overline{\omega}(z_0 - z_N)(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; k - \overline{\omega}z_0 - \omega\overline{z} + \overline{\omega}(z - z_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = k - 2z_0\overline{\omega}.$$
Ainsi, une équation complexe de la droite $\mathcal{D}^\perp_{M_0}$, orthogonale à $\mathcal{D}$ et intersectant $\mathcal{D}$ en un point M_0 d'affixe z_0 est donnée par
$$i\omega\overline{z} + \overline{i\omega}z = i(k - 2z_0\overline{\omega})$$
et, comme $M_0 \in \mathcal{D}$, on vérifie qu'on a bien $i(k - 2z_0\overline{\omega}) \in \mathbb{R}$ et donc, l'équation complexe d'une droite orthogonale à $\mathcal{D}$ est de la forme
$$i\omega\overline{z} + \overline{i\omega}z = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. 1. Cherchons les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $f(M) = M$. On a

$$f(z) = z \iff z = -i\overline{z} + 1 + i \iff x + iy = -i(x - iy) + 1 + i \iff x + iy = 1 - y + i(1 - x)$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 - x \end{cases} \iff x + y = 1 \iff (1 - i)z + (1 + i)\overline{z} - 2 = 0.$$

L'ensemble des points fixes de f est donc la droite d'équation complexe

$$(1 - i)z + (1 + i)\overline{z} - 2 = 0.$$

De même, on cherche les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $g(M) = M$. On trouve ici, avec un calcul similaire, qu'il s'agit de la droite d'équation complexe

$$(1 + i)z + (1 - i)\overline{z} + 2 = 0.$$

On peut donc calculer l'intersection de ces deux droites et montrer qu'il s'agit du point d'affixe i.

2. Soit M d'affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On calcule

$$f(g(z)) = -i(\overline{i\overline{z} - 1 + i}) + 1 + i = -z + 2i = -(z - i) + i$$

Ainsi, $f \circ g$ est une homothétie de centre d'affixe i et de rapport -1.

Exercice 6. 1. Soient z et z' les affixes respectives de M et N. Considérons $i_0 := i_{O,1}$ l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1 (i.e. $i_0(z) = 1/\overline{z}$). En notant t_z la translation de vecteur d'affixe z et μ_x la multiplication par $x \in \mathbb{R}$, on a

$$i = t_\omega \circ \mu_{k^2} \circ i_0 \circ t_{-\omega},$$

ou encore

$$i_0 = \mu_{k^{-2}} \circ t_{-\omega} \circ i \circ t_\omega.$$

Donc, si l'on montre le résultat pour i_0, on l'aura aussi pour i puisque les translation et les μ_x ne changent pas l'alignement ou la cocyclicité. On peut donc supposer que $\omega = 0$ et $k = 1$. On calcule

$$[M, N, i(M), i(N)] = \frac{i(z') - z'}{i(z') - z} \cdot \frac{i(z) - z}{i(z) - z'} = \frac{\frac{1}{\overline{z'}} - z'}{\frac{1}{\overline{z'}} - z} \cdot \frac{\frac{1}{\overline{z}} - z}{\frac{1}{\overline{z}} - z'} = \frac{1 - |z'|^2}{1 - z\overline{z'}} \cdot \frac{1 - |z|^2}{1 - \overline{z}z'}$$

$$= \frac{(1 - |z'|^2)(1 - |z|^2)}{1 - z\overline{z'} - \overline{z}z' + |zz'|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)}{1 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |zz'|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, le birapport $[M, N, i(M), i(N)]$ est réel, donc les points sont cocycliques ou alignés.

2. Soient $\mathcal{C}$ un cercle, M un point de $\mathcal{C}$ et supposons que $i(M) \in \mathcal{C}$. Soit un point quelconque $N \in \mathcal{C}$. Il s'agit de montrer que $i(N) \in \mathcal{C}$. Si $i(N) \in \{M, i(M)\}$, le résultat est clair et on peut donc supposer que $M, N, i(M)$ sont distincts. Par ce qui précède, les points $M, N, i(M), i(N)$ sont cocycliques ou alignés et comme $M, N, i(M)$ ne peuvent être alignés (ce sont trois points distincts sur un cercle), ces quatre points sont cocycliques. Or, le seul cercle contenant $M, N, i(M)$ est $\mathcal{C}$, donc nécessairement, $i(N) \in \mathcal{C}$ et donc $i(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$: le cercle $\mathcal{C}$ est globalement invariant.

Exercice 7. 1. Posons

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & GL_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{H} \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{array}$$

Ceci est bien défini car $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \Rightarrow ad - bc \neq 0 \Rightarrow \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \mathcal{H}$. De plus, φ est clairement surjective. Il reste donc à montrer que c'est un morphisme de groupes. On calcule

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \varphi\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$= \left(z \mapsto \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} = \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} = \frac{(aa'+bc')z+ab'+bd'}{(ca'+dc')z+cb'+dd'} \right)$$

$$= \varphi \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} = \varphi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right).$$

2. Calculons le noyau de φ et soit donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker \varphi$. On a

$$\varphi(M) = id_{\widehat{\mathbb{C}}} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, \ \frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \ az+b = cz^2+dz$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \ cz^2+(d-a)z-b=0 \Rightarrow c=b=(d-a)=0.$$

Donc, si $M \in \ker \varphi$, alors M s'écrit $M = aI_2 = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a

$$\ker \varphi = \mathbb{C}^\times I_2 \simeq \mathbb{C}^\times.$$

Par le théorème d'isomorphie, on obtient donc

$$\overline{\varphi} : GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$$

et on a bien identifié $\mathcal{H}$ comme un sous-quotient de $GL_2(\mathbb{C})$.
Remarque : On a en fait $\ker \varphi = Z(GL_2(\mathbb{C}))$ *et le quotient*

$$PGL_2(\mathbb{C}) := GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C}))$$

est appelé groupe projectif linéaire. On a donc un isomorphisme

$$PGL_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}$$

et comme en fait $\mathcal{H}$ est le groupe des transformations projectives de la droite projective $\mathbb{CP}^1$, ceci justifie la terminologie concernant $PGL_2(\mathbb{C})$...

Exercice 8. 1. a) Soient donc $x, y, z \in A$, que l'on décompose

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j, \quad z = \sum_{k=1}^n z_k e_k.$$

Par bilinéarité du produit ν, en supposant l'associativité vraie sur les éléments de base, on a

$$\nu(\nu(x,y),z) = \sum_k z_k \nu(\nu(x,y),e_k) = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \nu(\nu(e_i,e_j),e_k)$$

$$= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \nu(e_i, \nu(e_j,e_k)) = \sum_{j,k} \nu(x, \nu(e_j,e_k)) = \nu(x, \nu(y,z)),$$

d'où l'associativité. Remarquons qu'il est clair que, si ν est associative, alors la relation sur les éléments de base est en particulier vérifée.
Dans le cas de $\mathbb{H}_0$, on est donc ramené à vérifier les 27 relations possibles entre les éléments i, j, k (puisque celles avec 1 sont claires).

b) C'est le même raisonnement. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, soient

$$x = \sum_i x_i e_i \in A, \quad y = \sum_j y_j e_j \in A$$

et calculons, par linéarité

$$\varphi(\nu(x,y)) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(\nu(e_i,e_j)) = \sum_{i,j} x_i y_j \nu(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = \nu(\varphi(x), \varphi(y)),$$

d'où le résultat.

2. a) D'après la question 1.(a), il suffit de vérifier les relations suivantes

$$\begin{cases} \sigma(ij) = \sigma(i)\sigma(k) \\ \sigma(ji) = \sigma(j)\sigma(i) \\ \sigma(ik) = \sigma(i)\sigma(k) \\ \sigma(ki) = \sigma(k)\sigma(i) \\ \sigma(jk) = \sigma(j)\sigma(k) \\ \sigma(kj) = \sigma(k)\sigma(j) \end{cases}$$

On a

$$\sigma(ij) = \sigma(k) = i = jk = \sigma(i)\sigma(j), \quad \sigma(ji) = \sigma(-k) = -i = kj = \sigma(j)\sigma(i)...$$

et les quatre autres relations se démontrent de même.

b) On procède comme pour la question précédente ; il n'y a aucune subtilité.

c) Parmi les vingt-sept relations à vérifier entre les éléments de base, il y en a six qui font intervenir seulement $i, k,$:

$$\begin{cases} (ij)k = i(jk) \\ (ik)j = i(kj) \\ (jk)i = j(ki) \\ (ji)k = j(ik) \\ (ki)j = k(ij) \\ (kj)i = k(ji) \end{cases}$$

puis, six qui font intervenir un 1 en première position :

$$\begin{cases} (1j)k = 1(jk) \\ (1k)j = 1(kj) \\ (1k)i = 1(ki) \\ (1i)k = 1(ik) \\ (1i)j = 1(ij) \\ (1j)i = 1(ji) \end{cases}$$

et de même six qui font intervenir un 1t en deuxième position et six qui font intervenir un 1 en troisième position. Les trois relations restantes font intervenir deux 1, qui peuvent être à n'importe quelle position. On remarque que si l'on vérifie la première relation

$$(ij)k = k^2 = -1 = i^2 = i(jk),$$

alors toutes les relations du premier type s'en déduisent par applications successives de σ et τ. De même, la relation

$$(1i)j = ij = k = 1k = 1(ij)$$

entraîne toutes les relations avec un 1 en première position, par applications successives de σ et τ. Il en va de même des relations avec un 1 en deuxième ou troisième position. Enfin, les relations avec deux 1 se ramènent aux trois cas

$$\begin{cases} (11)i = 1(1i) \\ (11)j = 1(1j) \\ (11)k = 1(1k) \end{cases}$$

et, en appliquant σ, ces trois relations sont réduite à la seule première. Ainsi, les applications successives de σ et τ permettent de ramener la vérification des vingt-sept relations aux cinq relations suivantes, qui sont évidentes

$$\begin{cases} (11)i = 1(1i) \\ (ij)1 = i(j1) \\ (i1)k = i(1k) \\ (1j)k = 1(jk) \\ (ij)k = i(jk) \end{cases}$$

Exercice 9. 1. Soit $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$. On a

$$q^2 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2a(bi + cj + dk).$$

Ainsi, si $q \in \mathcal{P}$, on a $q^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \in \mathbb{R}_-$. Réciproquement, si $q^2 \in \mathbb{R}_-$, alors on a $ab = ac = ad = 0$. Si $a \neq 0$, alors $b = c = d = 0$ et $q^2 = a^2 \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$, donc $a = 0$ et $q = 0$ est bien un quaternion pur. Sinon, on a $a = 0$ et q est aussi un quaternion pur. Ceci montre bien que $q^2 \in \mathbb{R}_-$ si et seulement si $q \in \mathcal{P}$.

2. Si $q^2 \in \mathbb{R}^+$, alors $ab = ac = ad = 0$ et, si $a = 0$, alors $q^2 \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$ donc $q = 0 \in \mathbb{R}$. Sinon, $b = c = d = 0$ et $q = a \in \mathbb{R}$. La réciproque est évidente.

3. On va utiliser la formule de l'exercice 2 du TD4. Si on représente $q \in \mathbb{H}$ via partie réelle et quaternionique pure $q = (u, x)$ et si l'on identifie $\mathcal{P}$ avec $\mathbb{R}^3$, alors on a la formule de multiplication

$$(u, x) \cdot (v, y) = (uv - \langle x, y \rangle, vx + uy + u \wedge v).$$

Ainsi, pour deux quaternions purs, on a

$$(0, x) \cdot (0, y) = (-\langle x, y \rangle, x \wedge y).$$

Soit maintenant un quaternion quelconque $q = (\alpha, z) \in \mathbb{H}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathcal{P}$. L'équation

$$x \wedge y = z$$

admet clairement au-moins une solution $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, avec $x \neq 0$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$z = x \wedge (y + \lambda x).$$

On a aussi

$$\langle x, y + \lambda x \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \|x\|^2.$$

On pose $\lambda := -\frac{\alpha + \langle x,y \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$ et il vient alors

$$(0, x) \cdot (0, y + \lambda x) = (-\langle x, y \rangle - \lambda \|x\|^2, x \wedge (y + \lambda x)) = (\alpha, z) = q,$$

d'où le résultat.

4. Considérons la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}.$$

Celle-ci est inversible, puisqu'on peut s'inspirer de la formule $M^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{Com}(M)}{\det M}$ (attention, ce n'est plus vrai ici car $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif, mais on peut quand-même bricoler un inverse à partir de ça) et prendre

$$M^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & j \\ i & k \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a bien $MM^{-1} = M^{-1}M = I_2$. Mais, on a

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & j \\ i & k \end{pmatrix},$$

et alors,

$${}^tM \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et donc ${}^tM$ ne peut être inversible.

Exercice 10. 1. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $q_1', q_2' \in \mathbb{H}$,

$$T_q(q_1' + \lambda q_2') = q(q_1' + \lambda q_2') = qq_1' + \lambda(qq_2') = T_q(q_1') + \lambda T_q(q_2'),$$

donc T_q est bien $\mathbb{R}$-linéaire. De plus, si $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on a

$$\begin{cases} T_q(1) = a + bi + cj + dk \\ T_q(i) = -b + ai + dj - ck \\ T_q(j) = -c - di + aj + bk \\ T_q(k) = -d + ci - bj + ak \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

2. On en déduit directement que

$$\mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Considérons l'application

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

définie par

$$\psi(q) = \mathrm{Mat}_{(1,i,j,k)}(T_q).$$

Puisqu'on vérifie directement que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathrm{End}(\mathbb{R}^4) \\ q & \mapsto & T_q \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres, l'application ψ est un morphisme d'algèbres. Par définition, on a $\mathcal{H} = \mathrm{im}(\psi)$ et donc $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. De plus, on voit clairement que ψ est injective et donc définit un isomorphisme

$$\psi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H},$$

comme souhaité.

Exercice 11. 1. On va d'abord montrer que $\mathbb{R}$ est u-stable. Soit $q \in \mathbb{R} = Z(\mathbb{H})$ et montrons que $u(q) \in Z(\mathbb{H})$, ce qui montrera que $u(q) \in \mathbb{R}$. On prend donc $q' \in \mathbb{H}$ quelconque, que l'on peut écrire $q' = u(q_1)$, puisque u est surjectif. On a

$$u(q)q' = u(q)u(q_1) = u(qq_1) = u(q_1 q) = u(q_1)u(q) = q'u(q).$$

Comme $q' \in \mathbb{H}$ est arbitraire, on en déduit que $u(q)$ commute à tous les éléments de $\mathbb{H}$, donc est dans $z(\mathbb{H})$, donc est réel. Ainsi, $u_{|\mathbb{R}}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$, c'est donc l'identité : $u_{|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$.

2. On va utiliser l'exercice 9. Soit $q \in \mathcal{P}$ un quaternion pur. Comme $u_{|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$ et que $q^2 \in \mathbb{R}_-$, on a $u(q^2) = q^2 \in \mathbb{R}_-$ et donc
$$u(q)^2 = u(q^2) = q^2 \in \mathbb{R}_-,$$
donc $u(q) \in \mathcal{P}$ et donc $\mathcal{P}$ est u-stable. Ensuite, si $p \in \mathcal{P}$, on a $N(p) = -p^2$ et, comme $u(p) \in \mathcal{P}$, il vient $N(u(p)) = -u(p)^2 = u(-p^2) = -p^2 = N(p)$, comme souhaité.

3. D'après la question précédente, on a
$$u_{|\mathcal{P}} \in O(N_{|\mathcal{P}}) \simeq O_3(\mathbb{R}).$$
Or, puisque (i, j, k) est une base N-orthonormée de $\mathcal{P}$, la famille $(u(i), u(j), u(k)) = (i', j', k')$ est aussi une base orthonormée. Si elle est directe, on prend $\varepsilon = 1$ et sinon, on prend $\varepsilon = -1$.

4. Le prolongement par linéarité de l'application qui envoie la base (i, j, k) sur la base $(i', j', \varepsilon k')$ est une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$, donc s'écrit s_q pour un certain $q \in G$. Ceci donne bien ce que l'on veut ici.

5. On a
$$k' = u(k) = u(ij) = u(i)u(j) = i'j'$$
et
$$\varepsilon k' = s_q(k) = s_q(ij) = s_q(i)s_q(j) = i'j' = k',$$
donc $\varepsilon = 1$ et, comme u et s_q coïncident sur la base orthonormée (i, j, k) de $\mathcal{P}$, on a $u_{|\mathcal{P}} = s_q = S_{q|\mathcal{P}}$. De plus, comme $u_{|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}} = S_{q|\mathbb{R}}$ et que $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{P}$, on a bien $u = S_q$, ce qui prouve le résultat.

Exercice 12. 1. On peut montrer directement que les 27 relations à vérifier sont satisfaites. On peut aussi utiliser l'exercice 8 : ce qui laisse seulement 5 relations à vérifier ; et celles-ci sont évidentes.

2. Si $q = x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}_{\alpha,\beta}$, on pose bien-sûr $\overline{q} := x - yi - zj - tk$, ainsi que
$$N(q) := q\overline{q} = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta t^2.$$

3. Soit donc $q = a + bi + cj + dk \in Z(\mathbb{H}_{\alpha,\beta})$. On doit avoir
$$ai + b\alpha - ck - d\alpha j = qi = iq = ai + b\alpha + ck + d\alpha j \;\Rightarrow\; ck + d\alpha j = 0 \;\Rightarrow\; c = d = 0$$
et
$$aj + bk = qj = jq = aj - bk \;\Rightarrow\; b = 0.$$
Ainsi, $q = a \in \Bbbk$, d'où $Z(\mathbb{H}_{\alpha,\beta}) = \Bbbk \cdot 1 \simeq \Bbbk$ et le résultat.

4. Puisque $\Bbbk$ est algébriquement clos, les polynômes $X^2 - \alpha$ et $X^2 - \beta$ admettent des racines respectives a et b, que l'on fixe. Posons
$$I := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad K := IJ = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix}$$
et considérons
$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{H}_{\alpha,\beta} & \to & \mathcal{M}_2(\Bbbk) \\ & & i & \mapsto & I \\ & & j & \mapsto & J \\ & & k & \mapsto & K \end{array}$$
Puisqu'on a les relations
$$I^2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad IJ = -JI = K,$$

on constate que φ est un morphisme d'algèbres. En particulier, c'est une application $\Bbbk$-linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension 4. Ainsi, pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit donc $q = x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ tel que $\varphi(q) = 0$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varphi(q) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay & b(z + at) \\ b(z - at) & x - ay \end{pmatrix}$$

et on doit donc avoir

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x - ay = 0 \\ b(z + at) = 0 \\ b(z - at) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ay \\ ay = -ay \\ z = at \\ at = -at \end{cases} \Rightarrow x = y = z = t = 0,$$

cette dernière implication provenant du fait que, dans $\Bbbk$, aucun $x \neq 0$ n'ést égal à son opposé, puisqu'on a supposé $1 \neq -1$. Ainsi, $q = 0$ et φ est injectif, donc un isomorphisme.

5. Supposons que $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ soit une algèbre à division et soit $q \neq 0$ dans $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$. Comme la norme N est multiplicative, si q est inversible, on doit avoir

$$1 = N(1) = N(qq^{-1}) = N(q)N(q^{-1}),$$

donc $N(q) \neq 0$ et N est donc anisotrope.
Réciproquement, supposons N anisotrope et soit $q \in \mathbb{H}_{\alpha,\beta} \setminus \{0\}$. Alors, on a $N(q) \neq 0$ et on a

$$q(\overline{q}N(q)^{-1}) = N(q)N(q)^{-1} = 1 = (\overline{q}N(q)^{-1})q,$$

donc q est inversible, d'inverse $\frac{\overline{q}}{N(q)}$ (comme pour les quaternions classiques) et donc $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division.

6. Puisqu'on est sur un corps $\Bbbk$ fini, la forme quadratique N est isotrope, donc il existe $q \in \mathbb{H}_{\alpha,\beta} \setminus \{0\}$ tel que $q\overline{q} = N(q) = 0$ et, comme $\overline{q} \neq 0$, on a bien que $\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

Exercice 13. 1. Pour $q \in G$ et $q' \in \mathbb{H}$, on pose

$$S_q(q') := qq'q^{-1} = qq'\overline{q}$$

et ceci donne un morphisme

$$\begin{array}{rccc} S & : & G & \to & GL_4(\mathbb{R}) \\ & & q & \mapsto & S_q \end{array}$$

On montre que l'espace $\mathcal{P}$ des quaternions purs est S_q-stable et on note $s_q := S_{q|\mathcal{P}}$ On montre ensuite que s_q préserve la norme et donc $s_q \in O_3(\mathbb{R})$. Un argument de connexité utilisant le déterminant permet de s'assurer qu'en fait, $s_q \in SO_3(\mathbb{R})$ et on obtient alors le morphisme

$$s : G \to SO_3(\mathbb{R}).$$

On démontre qu'il est surjectif, de noyau $\{\pm 1\}$ et on en déduit l'isomorphisme

$$\overline{s} : G/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R}).$$

2. Montrons que f est continue pour les normes usuelles $\|\cdot\|$ et $\sqrt{N}$. Fixons $A = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. On veut trouver un $\eta > 0$ tel que, pour tout $X \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tel que $\|A - X\| < \eta$, on ait $\sqrt{N(f(A) - f(X))} < \varepsilon$. Posons $\eta := \frac{\varepsilon\|A\|}{2} > 0$ et soit $X := (x, y, z, t) \neq 0$ tel que $\|A - X\| < \eta$. On calcule

$$N(f(A) - f(X)) = N\left(\frac{a + bi + cj + dk}{\|A\|} - \frac{x + yi + zj + tk}{\|X\|}\right)$$

$$= \frac{1}{\|A\|^2\|X\|^2} N(\|X\|(a + bi + cj + dk) - \|A\|(x + yi + zj + tk))$$

$$= \frac{1}{\|A\|^2\|X\|^2} \|\|X\|(a,b,c,d) - \|A\|(x,y,z,t)\|^2 = \left(\frac{\|\|X\|A - \|A\|X\|\|}{\|A\|\|X\|}\right)^2 = \left(\frac{\left\|A - \frac{\|A\|}{\|X\|}X\right\|}{\|A\|}\right)^2.$$

Donc, il vient

$$d(f(A), f(X)) = \sqrt{N(f(A) - f(X))} = \frac{\left\|A - \frac{\|A\|}{\|X\|}X\right\|}{\|A\|} = \frac{\left\|A - X + X - \frac{\|A\|}{\|X\|}X\right\|}{\|A\|}$$

$$\leq \frac{\|A - X\| + \|X\| \left|1 - \frac{\|A\|}{\|X\|}\right|}{\|A\|} \leq \frac{\|A - X\| + |\|X\| - \|A\||}{\|A\|} \leq \frac{2\|A - X\|}{\|A\|} < \frac{2\eta}{\|A\|} = \varepsilon$$

donc

$$\|A - X\| < \eta \;\Rightarrow\; d(f(A), f(X)) < \varepsilon$$

et f est bien continue.

3. Supposons que $(a', b', c', d') = \lambda(a, b, c, d)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors on a

$$\frac{a' + b'i + c'j + d'k}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}} = \frac{\lambda(a + bi + cj + dk}{|\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{a + bi + cj + dk}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} = \pm \frac{a + bi + cj + dk}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}.$$

Donc, (a', b', c', d') et (a, b, c, d) ont même image par f, modulo le sous-groupe $\{\pm 1\}$ et donc f passe au quotient en $\overline{f}$. Il reste à montrer que $\overline{f}$ est continue. Soit donc $U \subset G/\{\pm 1\}$ un ouvert. Ceci signifie que $\pi'^{-1}(U) \subset G$ est un ouvert et, comme f est continue, entraîne que $f^{-1}(\pi'^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est ouvert. Mais, comme $\pi' \circ f = \overline{f} \circ \pi$, on a que $\pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(\pi'^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^4\{\setminus\{0\}$ est ouvert. Par définition de la topologie sur $\mathbb{RP}^3$, ceci signifie que $\overline{f}^{-1}(U) \subset \mathbb{RP}^3$ est ouvert. Ainsi, pour tout ouvert U de $G/\{\pm 1\}$, $\overline{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^3$; ce qui est exactement dire que $\overline{f}$ est continue.

4. On va trouver une réciproque à $\overline{f}$. Posons

$$\begin{array}{cccc} g & : & G & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \\ & & a + bi + cj + dk & \mapsto & (a, b, c, d) \end{array}$$

Pour tous $q = a + bi + cj + dk \in G$ et $q' = a' + b'i + c'j + d'k \in G$, on a

$$\|g(q) - g(q')\|^2 = \|(a - a', b - b', c - c', d - d')\|^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 + (d - d')^2 = N(q - q'),$$

d'où

$$\|g(q) - g(q')\| = d(q, q').$$

Ainsi, g préserve les distances, donc est continue. De plus, on voit clairement que g passe au quotient et définit

$$\overline{g} : G/\{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{RP}^3.$$

En procédant exactement de la même façon que dans l'exercice 3, en remplaçant f par g, on montre que $\overline{g}$ est continue. On calcule enfin (en notant $[x]$ la classe dans $G/\{\pm 1\}$ d'un élément x de G et $\overline{y}$ celle dans $\mathbb{RP}^3$ d'un élément $y \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$)

$$\overline{f}(\overline{g}([a + bi + cj + dk])) = \left[\frac{a + bi + cj + dk}{N(a + bi + cj + dk)}\right] = [a + bi + cj + dk], \quad (\text{car } N(a + bi + cj + dk) = 1)$$

et

$$\overline{g}(\overline{f}(\overline{(a, b, c, d)})) = \overline{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}(a, b, c, d)} = \overline{(a, b, c, d)}.$$

Ainsi, $\overline{f} \circ \overline{g} = id_{G/\{\pm 1\}}$ et $\overline{g} \circ \overline{f} = id_{\mathbb{RP}^3}$ et comme $\overline{f}$ et $\overline{g}$ sont continues, ce sont des homéomorphismes, réciproque l'un de l'autre.

5. On sait que $\overline{s}$ et $\overline{f}$ sont des homéomorphismes, donc l'application

$$\overline{s} \circ \overline{f} : \mathbb{RP}^3 \to SO_3(\mathbb{R})$$

est aussi un homéomorphisme, d'où le résultat.

Exercice 14. 1. On considère les matrices de ρ_n et σ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\rho_n) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\sigma\rho_n\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\rho_n^{-1}),$$

d'où le résultat.

2. La relation ci-dessus montre que tout élément $\sigma^{i_{1,1}}\rho_n^{i_{2,1}}\sigma^{i_{1,2}}\cdots\sigma^{i_{1,k}}\rho_n^{i_{2,k}}$ (avec $i_{1,j} \in \{0,1\}$ et $i_{2,j} \in \{0,\ldots,n-1\}$) s'écrit en fait sous la forme $\sigma^i\rho_n^j$ avec $i \in \{0,1\}$ et $j \in \{0,\ldots,n-1\}$. Ainsi, en notant $R_n := \langle\rho_n\rangle$ le sous-groupe de $\mathcal{D}_n$ engendré par ρ_n (et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), on obtient

$$\mathcal{D}_n = R \sqcup \sigma R,$$

où l'on a noté $\sigma R := \{\sigma x,\ x \in R\}$ et $\sqcup$ l'union disjointe. Comme $|R| = n$, il vient finalement

$$|\mathcal{D}_n| = 2n.$$

3. Soit donc $G \leq SO_2(\mathbb{R})$ fini et fixons un point A_1 de P. Considérons $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ l'ensemble des images de A_1 par les éléments de G. Tout élément $g \in G$ permute les A_i, donc fixe leur isobarycentre O. Fixons donc un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} := (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ de P, qui nous permet de l'identifier à $\mathbb{C}$. Alors, tout $g \in G$ est une rotation qui fixe O et donc s'identifie dans $\mathbb{C}$ à une application $z \mapsto e^{i\theta_g}z$. Alors, l'ensemble $\{e^{i\theta_g},\ g \in G\}$ est un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$ d'ordre n, donc c'est le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. En reprenant les notations précédentes et en particulier l'isobarycentre O et le repère $\mathcal{R}$, l'anti-déplacement s laisse O fixe et est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathcal{D}$ passant par O. Par ce qui précède, le sous-groupe $G^+ = G \cap SO_2(\mathbb{R})$ est cyclique, disons engendré par une rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a alors

$$G = G^+ \sqcup sG^+.$$

Puisque la transformation ρs est un anti-déplacement laissant O fixe, c'est une symétrie orthogonale et donc $(\rho s)^2 = id_P$; soit $s\rho s = \rho^{-1}$. D'après ce qui précéde, ceci assure que l'application

$$\begin{array}{ccccc} \psi & : & G & \to & \mathcal{D}_n \\ & & \rho & \mapsto & \rho_n \\ & & s & \mapsto & \sigma \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes, d'où le résultat.

5. C'est évident, d'après ce qui précède.

Exercice 15. 1. Vu l'énoncé, il existe une similitude s qui envoie $\mathcal{K}_0$ sur $\mathcal{K}$. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccccc} \phi & : & G^+ & \to & G_0^+ \\ & & f & \mapsto & s^{-1} \circ f \circ s \end{array}$$

est clairement un isomorphisme de groupes.

2. Soit $f \in G^+$. Comme f préserve les distances, on a $f(A)f(G) = AG = \sqrt{3}$ et ceci est la distance maximale possible entre deux points de $\mathcal{K}$. Comme cette distance n'est réalisée que par les diagonales de $\mathcal{K}$ (c'est la définition d'une diagonale !), la diagonale $[AG]$ est nécessairement envoyée sur une autre diagonale de $\mathcal{K}$. Ainsi, f permute les diagonales et ceci fournit une action de G^+ sur Δ et un morphisme structurel d'action
$$\psi : G^+ \to \mathfrak{S}(\Delta) \simeq \mathfrak{S}_4.$$

3. Comme tout $f \in G^+$ permute les diagonales, il permute aussi les sommets de $\mathcal{K}$, donc fixe leur isobarycentre O, qui est l'origine. Ceci assure que tout $f \in G^+$ est en fait une transformation linéaire, qui est une isométrie positive. Ceci entraîne que G^+ est un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$.

4. Supposons, pour fixer les idées, que $i = 1$ et $j = 2$. On veut donc un $f \in G^+$ qui échange $[AG]$ et $[BH]$ et qui fixe les autres diagonales. Considérons M le milieu de $[GH]$ et N le milieu de $[AB]$ et prenons pour f le retournement (i.e. la rotation d'angle π) d'axe (MN). Alors f échange bien δ_1 et δ_2 et fixe δ_3 et δ_4. De la même façon, on peut échanger n'importe quelle paire de diagonales tout en fixant les autres et ceci montre que les transpositions sont dans $\mathrm{im}(\psi)$.

5. Le fait que ψ soit surjectif résulte du fait que les transpositions soient dans son image et engendrent $\mathfrak{S}_4$.

6. Soit donc $f \in \ker\psi$ tel que $f(A) = G$. Dire que f est dans le noyau de ψ signifie que pour tout $1 \leq i \leq 4$, on a $f(\delta_i) = \delta_i$. Ainsi, on a $f(C) \in \{C, E\}$. Mais, comme f est une isométrie, la distance $f(C)f(G) = f(C)A$ doit être égale à $CG = 1$ et comme on a $AE = 1$ et $AC = \sqrt{2} \neq 1$, la seule possibilité pour $f(C)$ est E. On procède de même pour montrer que $f(D) = F$ et $f(B) = H$. Ainsi, le repère cartésien $(O, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}))$ sur le repère cartésien $(O, (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE}))$, tout comme la symétrie $\sigma : x \mapsto -x$. Ceci montre que $f = \sigma$ est négative, ce qui est absurde puisqu'on a supposé f positive. Ainsi, si $f \in \ker\psi$, on doit avoir $f(A) = A$ et, par le même raisonnement que ci-dessus, en regardant les distances entre les sommets, on voit qu'on a aussi $f(B) = B$ et $f(C) = C$, donc f fixe le repère cartésien $(O, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}))$, donc c'est l'identité. De tout ceci, on tire que $\ker\psi = \{id\}$, i.e. ψ est injectif.

7. Par ce qui précède, ψ est injectif et surjectif : c'est un isomorphisme.

8. Reprenons $\sigma : x \mapsto -x$ la symétrie centrale par rapport à l'origine O et remarquons que $\sigma^2 = id$, ainsi que $\sigma \in \widetilde{G}$. Considérons l'application
$$\widetilde{\psi} : \widetilde{G} \to G^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
définie par
$$\widetilde{\psi}(f) := \begin{cases} (f, 0) & \text{si } \det(f) > 0 \\ (f\sigma, 1) & \text{sinon} \end{cases}$$
Alors, $\widetilde{\psi}$ est un morphisme de groupes. Pour le montrer, soient $f, g \in \widetilde{G}$ et distinguons plusieurs cas :

   - Si f et g sont positives, alors fg est positive et on a
   $$\widetilde{\psi}(fg) = (fg, 0) = (f, 0)(g, 0) = \widetilde{\psi}(f)\widetilde{\psi}(g).$$
   - Si f est positive et g négative, alors fg est négative et on a
   $$\widetilde{\psi}(fg) = (fg\sigma, 1) = (f, 0)(g\sigma, 1) = \widetilde{\psi}(f)\widetilde{\psi}(g).$$
   - Si f est négative et g positive, alors fg est négative et on a
   $$\widetilde{\psi}(fg) = (fg\sigma, 1) = (f\sigma(\sigma g\sigma), 1) = (f\sigma, 1)(\sigma g\sigma, 0) = (f\sigma, 1)(g, 0) = \widetilde{\psi}(f)\widetilde{\psi}(g),$$
   l'avant-dernière égalité provenant du fait que σ et g commutent, puisque la matrice de σ dans n'importe quelle base est $-I_3$, donc commute à celle de g.

- Si f et g sont négatives, alors fg est positive et on a

$$\widetilde{\psi}(fg) = (fg, 0) = (f\sigma^2 g, 0) = (f\sigma g\sigma, 1+1) = (f\sigma, 1)(g\sigma, 1) = \widetilde{\psi}(f)\widetilde{\psi}(g).$$

Dans tous les cas, on a $\widetilde{\psi}(fg) = \widetilde{\psi}(f)\widetilde{\psi}(g)$, donc $\widetilde{\psi}$ est bien un morphisme de groupes. De plus, il est clair que $\widetilde{\psi}$ est injectif et surjectif : c'est un isomorphisme. On en tire que

$$\widetilde{G} \simeq G^+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ce qui achève la preuve.