

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $0 < R \leq +\infty$, $C := \{z \in \mathbb{C} ; r < |z - z_0| < R\}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur C , de développements de Laurent

$$\forall z \in C, f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(z - z_0)^n \text{ et } g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

les convergences étant uniforme sur tout compact de C . Alors fg est holomorphe sur C et son développement de Laurent¹ s'écrit

$$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

où

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k.$$

Preuve : Soit $r < \rho < R$ et soit $\gamma = \gamma_\rho$ l'arc paramétrant le cercle de centre z_0 et de rayon ρ , parcouru une fois dans le sens direct (i.e. $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, mais on peut en fait prendre n'importe quelle courbe de Jordan parcourue dans le sens direct). Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

En remplaçant f par son développement de Laurent, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k dz + \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} a_{-\ell-1} (z - z_0)^{-\ell-1} dz + \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k dz. \end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformément sur tout compact de C , ce qui revient à

dire que les séries $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{-\ell-1} (z - z_0)^{-\ell-1}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ aussi et on peut donc intervertir série et intégrale dans les deux termes (puisque l'image de γ est compacte) pour obtenir

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_k}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k}. \end{aligned}$$

□

1. source : <https://math.stackexchange.com/questions/359921/multiplying-laurent-series>

- Le cas $h(z) = f(z)g(z)$ avec $f(z) = e^z$ et $g(z) = e^{1/z}$, sur $C = |z| > 0$. Sur C , f et g s'écrivent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k/k! \text{ et } g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!z^k} = \sum_{\ell=-\infty}^0 \frac{1}{-\ell!} z^\ell,$$

autrement dit, on a

$$a_k = \begin{cases} 1/k! & \text{si } k \geq 0, \\ a_k = 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \text{ et de même, } b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0, \\ b_k = 1/(-k!) & \text{si } k \leq 0. \end{cases}$$

Du coup, les c_k sont donnés par (attention, k et n sont échangés par rapport aux notations du résultat ci-dessus)

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{k-n} b_n.$$

Or, on a $a_{k-n} = 0$ dès que $k-n < 0$, i.e. dès que $k < n$, donc cette somme se réécrit

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^k a_{k-n} b_n = \sum_{n=-\infty}^k \frac{b_n}{(k-n)!}.$$

Comme $b_n = 0$ si $n > 0$, on distingue deux cas :

* Si $k \geq 0$, alors on obtient

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{b_n}{(k-n)!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(k-n)!(-n)!} \stackrel{m:=-n}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(k+m)!}.$$

* Maintenant, si $k < 0$, on trouve

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^k \frac{1}{(k-n)!(-n)!} = \sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{1}{n!(k+n)!} \stackrel{m:=k+n}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m-k)!m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!(m+|k|)!}$$

Finalement, on trouve bien

$$\forall k \in \mathbb{Z}, c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+|k|)!}$$

et en particulier, on a $c_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que la singularité en 0 de fg est *essentielle*.

- Pour le deuxième cas $h(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, la différence entre les deux couronnes vient du fait que la première $C_1 = \{|z| < 1\}$ n'entoure pas de singularité de h , alors que $C_2 = \{1 < |z| < 2\}$ oui. Du coup, on s'attend à ce qu'il n'y ait pas de termes négatifs dans le développement de Laurent de h sur C_1 , et qu'il y en ait dans le dév de h sur C_2 . On est donc d'accord sur le développement sur C_1 donné par

$$\forall z \in C_1, h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^{-n-1}) z^n,$$

qui en effet ne contient pas de termes négatifs. Ce développement ne peut plus être valable sur C_2 , tout simplement parce que la série ne converge nulle-part sur C_2 (comme $\sum z^n/(2^{n+1})$ est de rayon de convergence 2, si la série convergeait alors la série $\sum z^n$

aussi, or cette dernière est de rayon 1, donc ne peut converger nulle-part sur C_2). C'est pourquoi on a besoin de la réécriture astucieuse

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} -z^m$$

et cette série converge normalement sur tout compact de $\{|z| > 1\}$ et donc on a bien

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-z^n}{2^{n+1}}$$

et ce, uniformément sur tout compact de C_2 , c'est donc bien le développement de Laurent de h sur C_2 .

Exercice instructif : Montrer que le développement de Laurent de h sur $C_3 := \{|z| > 2\}$ (qui entoure maintenant 2 singularités de h) est donné par

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (2^{-n-1} - 1)z^n.$$

Morale : Le développement de Laurent dépend de la couronne choisie ou plus précisément, il dépend du nombre de singularités entourées par la couronne. C'est tout le principe du développement de Laurent : on retire un petit ouvert autour d'une (ou plusieurs) singularité d'une fonction holomorphe et on obtient une couronne. On ne peut plus développer la fonction en série entière sur la couronne, mais on peut toujours la développer en série, quitte à admettre des puissances négatives de z dans la série. Ce sont ces puissances négatives (ou plutôt les coefficients) qui contiennent les infos sur la/les singularité(s) qu'on a retirée(s). Exemple : l'ordre d'un pôle est la plus grande puissance négative qui apparaît dans le développement.

- Pour les résidus, on reprend étape par étape : soit $f(z) := 1/(1+z^6)$, méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles effectivement donnés par $z_k = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{6}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (il vaut mieux prendre $0 \leq k \leq 5$ que $1 \leq k \leq 6$ pour que $\pi(2k+1)/6 \in [0, 2\pi]$). Pour $R > 0$, on considère également le contour $\gamma_R = \sigma_R * C_R$, avec σ_R le segment $[-R, R]$ et C_R le demi-cercle supérieur centré en 0 et de rayon R . On paramètre σ_R par $t \mapsto t$ ($-R \leq t \leq R$) et C_R par $t \mapsto Re^{it}$ (pour $0 \leq t \leq \pi$, et en effet avec tes notations γ arrive dans $\mathbb{C}$, pas dans $\mathbb{R}$) et on a bien

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\sigma_R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = \int_{-R}^R f(t)dt + \int_0^\pi iRe^{it}f(Re^{it})dt$$

On majore d'abord le second terme pour montrer qu'il tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$. Pour ce faire, on peut supposer que $R > 1$. Dans ce cas, pour $z = Re^{it} \in \text{im}(C_R)$, on a $|z^6 + 1| \geq ||z^6| - 1| = |R^6 - 1| = R^6 - 1$ (on peut virer la valeur absolue car $R > 1$) et on peut donc écrire

$$\left| \int_0^\pi iRe^{it}f(Re^{it})dt \right| \leq \int_0^\pi R|f(Re^{it})|dt = \int_0^\pi \frac{R}{|1 + R^6e^{6it}|}dt \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^6 - 1}dt = \frac{\pi R}{R^6 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t)dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_R} f(z)dz.$$

Maintenant, les résidus. On fixe $R > 1$ et on a

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{\Im(z_k) > 0} \text{Res}(f, z_k) \text{Ind}_{\gamma_R}(z_k) = 2i\pi \sum_{\Im(z_k) > 0} \text{Res}(f, z_k),$$

on somme sur les $0 \leq k \leq 5$ tels que $\Im(z_k) > 0$ car, comme $R > 1$ et $|z_k| = 1$ pour tout k , les z_k qui sont à l'intérieur de γ_R sont en effet ceux de partie imaginaire positive. Pour $0 \leq k \leq 5$, on a

$$\begin{aligned}\Im(z_k) &= \Im(\exp(i\pi(2k+1)/6)) = \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right) > 0 \stackrel{\text{car } \frac{(2k+1)\pi}{6} \in [0, 2\pi]}{\iff} 0 < \frac{(2k+1)\pi}{6} < \pi \\ &\iff 0 < (2k+1) < 6 \iff k \in \{0, 1, 2\}.\end{aligned}$$

(Si on avait pris $1 \leq k \leq 6$, on aurait trouvé $k \in \{1, 2, 6\}$). On obtient

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2i\pi(\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)).$$

Ensuite, comme on a

$$z^6 + 1 = (z - z_0) \cdots (z - z_5)$$

i.e. les racines de $z^6 + 1$ sont simples, chaque pôle z_k de f est simple. On a donc la formule suivante pour le calcul des résidus²

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)f(z).$$

Et en effet, on va appliquer la règle de l'Hôpital dans chaque cas :

$$\text{Res}(f, z_0) = \text{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{6}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{6}}}{1 + z^6} = \frac{1}{6(e^{\frac{i\pi}{6}})^5} = \frac{1}{6e^{\frac{5i\pi}{6}}} = \frac{e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{6},$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \text{Res}(f, e^{\frac{3i\pi}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3i\pi}{6}}} \frac{z - e^{\frac{3i\pi}{6}}}{1 + z^6} = \frac{1}{6(e^{\frac{3i\pi}{6}})^5} = \frac{1}{6i^5} = \frac{1}{6i} = \frac{-i}{6}$$

et

$$\text{Res}(f, z_2) = \text{Res}(f, e^{\frac{5i\pi}{6}}) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{5i\pi}{6}}} \frac{z - e^{\frac{5i\pi}{6}}}{1 + z^6} = \frac{1}{6(e^{\frac{5i\pi}{6}})^5} = \frac{1}{6e^{\frac{25i\pi}{6}}} = \frac{1}{6e^{\frac{i\pi}{6}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{6}$$

car $e^{\frac{25i\pi}{6}} = e^{\frac{24i\pi}{6} + \frac{i\pi}{6}} = e^{4i\pi + \frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{6}}$. Jusqu'ici, tout va bien ! On somme

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_R} f(z)dz &= 2i\pi \left(\frac{e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{6} - \frac{i}{6} + \frac{e^{-\frac{i\pi}{6}}}{6} \right) = \frac{i\pi}{3} (e^{-\frac{5i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} - i) = \frac{i\pi}{3} (-e^{\frac{6i\pi}{6} - \frac{5i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} - i) \\ &= \frac{i\pi}{3} (-e^{\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{6}} - i) = \frac{i\pi}{3} (2i \sin(-\pi/6) - i) = \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

(résultat indépendant de $R > 1$) et comme $\sin(\pi/6) = \sin(\pi/2 - \pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$, on obtient finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi}{3} \sin(\pi/6) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

En particulier, c'est le prof qui s'est trompé quand il a écrit $\oint_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi}{3} \sin(\pi/6)$.

2. La formule générale pour un pôle d'ordre m est $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z))$.