

Exercice 5

Soient $1 \leq p < +\infty$, $N \geq 1$, λ la mesure de Lebesgue N -dimensionnelle et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $\lambda(\Omega) < +\infty$.

Soit E un sous-ev fermé du $\mathbb{R}$ -espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$. On suppose de plus que $E \subset L^\infty(\Omega)$.

On se propose de démontrer que E est de dimension finie.

1) Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall f \in E \quad C^{-1} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \leq C \|f\|_p.$$

(Penser aux Grands Théorèmes des espaces de Banach).

2) Démontrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que :

$$\forall f \in E \quad \|f\|_\infty \leq M \|f\|_2.$$

(Distiquer les cas $1 \leq p \leq 2$ et $p > 2$).

3) En déduire que E est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$.

On suppose $\dim(E) = +\infty$ et on considère dans E une suite orthonormée $(e_j)_{j \geq 1}$ pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Justifier l'existence d'une telle suite.

4) On fixe un entier $k \geq 1$. Démontrer qu'il existe $\omega \subset \Omega$, ω λ -négligeable tel que :

$$\forall x \in \Omega \setminus \omega, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \quad \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j(x) \leq M \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Commencer avec $\alpha \in \mathbb{Q}^k$).

5) En déduire que :

$$\forall x \in \Omega \setminus \omega, \quad \sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \leq M^2. \quad (*)$$

6) Conclure en utilisant (*).

Proposition de rédaction

1) Il s'agit de montrer que $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On a

$$\forall f \in E, \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f|^p d\lambda} \leq \sqrt[p]{\int_{\Omega} \|f\|_\infty^p d\lambda} = \|f\|_\infty \sqrt[p]{\int_{\Omega} d\lambda} = \sqrt[p]{\lambda(\Omega)} \|f\|_\infty.$$

De plus, $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach et $E \subset L^p$ est fermé par hypothèse, donc $(E, \|\cdot\|_p)$ est un Banach. Pour pouvoir utiliser le théorème de Banach assurant l'équivalence des normes considérées, il reste à montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach. Il suffit pour cela de montrer que $E \subset L^\infty$ est fermé. Soit donc (f_n) une suite de E qui converge dans L^∞ . Alors, (f_n) converge dans L^p car $\|\cdot\|_p \leq \sqrt[p]{\lambda(\Omega)} \|\cdot\|_\infty$ et E est fermé dans L^p , donc la limite est dans E et donc (f_n) converge dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, d'où le résultat.

2) Distinguons trois cas :

- Supposons que $p < 2$. D'après l'inégalité de Hölder, pour $f \in E$, on a

$$\frac{1}{C^p} \|f\|_\infty^p \leq \|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p \cdot 1 d\lambda \leq \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{2}{2-p}} d\lambda \right)^{\frac{2-p}{2}} \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{p}{2}} = \lambda(\Omega)^{1-\frac{p}{2}} \|f\|_2^p$$

d'où

$$\|f\|_\infty \leq C \lambda(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

- Si $p = 2$, 1) donne directement le résultat.
- Il reste à examiner le cas $p > 2$. Soit $f \in E \subset L^\infty(\Omega)$. Pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{p-2} |f(x)|^2 \leq \|f\|_\infty^{p-2} |f(x)|^2,$$

et en intégrant ceci sur Ω , il vient

$$\int_{\Omega} |f|^p d\lambda \leq \|f\|_\infty^{p-2} \int_{\Omega} |f|^2 d\lambda \Rightarrow \|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2,$$

d'où, avec 1),

$$C^{-p} \|f\|_\infty^p \leq \|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} \|f\|_2^2 \Rightarrow C^{-p} \|f\|_\infty^2 \leq \|f\|_2^2,$$

et donc

$$\|f\|_\infty \leq C^{\frac{p}{2}} \|f\|_2.$$

Il suffit maintenant de prendre M comme étant la plus grande des trois constantes fournies par la discussion que nous venons d'effectuer.

3) Ceci découle directement de 1) et 2). En effet, si (f_n) est une suite de E qui converge vers f dans L^2 , alors (f_n) converge vers f dans L^∞ d'après 2) et comme E est fermé dans L^∞ , on a $f \in E$ et donc E est fermé dans L^2 .

Ensuite, justifions l'existence de la suite orthonormée $(e_j)_{j \geq 1}$. On sait que $L^2(\Omega)$ est séparable, donc $E \subset L^2(\Omega)$ est séparable. De plus, E est fermé dans $L^2(\Omega)$ qui est un espace

de Hilbert, donc E est un espace de Hilbert. Ainsi, E est un espace de Hilbert séparable, il admet donc une base hilbertienne $(e_j)_j$. De plus, (e_j) ne saurait être presque nulle. En effet, si tel était le cas, l'espace engendré serait de dimension finie, donc fermé, et son adhérence valant E , E serait de dimension finie, ce qui est contraire à notre hypothèse.

4) Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Q}^k$. Tout d'abord, on a

$$\left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq k} \alpha_i \alpha_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2,$$

d'où

$$\left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite, pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j(x) \leq \left| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j(x) \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\|_{\infty} \leq M \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j \right\|_2 = M \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

la dernière inégalité provenant de 2). On en déduit l'existence, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^k$, d'une partie (mesurable) négligeable $\omega_\alpha \subset \Omega$ telle que l'inégalité considérée soit valable pour tout $x \in \Omega \setminus \omega_\alpha$. Posons

$$\omega := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^k} \omega_\alpha.$$

Alors, ω est mesurable, l'inégalité voulue est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^k$ et tout $x \in \Omega \setminus \omega$ et on a

$$\lambda(\omega) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^k} \lambda(\omega_\alpha) = 0 \Rightarrow \lambda(\Omega \setminus \omega) = \lambda(\Omega).$$

Alors, ω donne le résultat voulu. En effet, soient $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Par densité de $\mathbb{Q}^k$ dans $\mathbb{R}^k$, il existe $\beta \in \mathbb{Q}^k$ tel que $|\alpha - \beta| = \max_{1 \leq i \leq k} |\alpha_i - \beta_i| \leq \varepsilon$. Alors, si $x \in \Omega \setminus \omega$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i(x) &= \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) e_i(x) + \sum_{i=1}^k \beta_i e_i(x) \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i - \beta_i| e_i(x) + M \left(\sum_{i=1}^k \beta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^k e_i(x) + M \left(\sum_{i=1}^k \beta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon M \sqrt{k} + M \left(\sum_{i=1}^k \beta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varepsilon M \sqrt{k} + M \left(\sum_{i=1}^k (\beta_i - \alpha_i)^2 + \alpha_i^2 + 2(\beta_i - \alpha_i) \alpha_i \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon M \sqrt{k} + M \left(k \varepsilon^2 + 2\varepsilon \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i(x) \leq M \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où le résultat.

5) Si $x \in \Omega \setminus \omega$ est fixé, posons $\alpha_j := e_j(x)$, $1 \leq j \leq k$. On calcule

$$\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 = \sum_{j=1}^k e_j(x)e_j(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j e_j(x) \leq M \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M \left(\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\left(\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \right)^2 \leq M^2 \sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2.$$

Si $\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 = 0$, le résultat est clair. Sinon, on peut diviser l'inégalité précédent par $\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2$ pour obtenir

$$\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \leq M^2,$$

et ceci étant vrai pour tout $x \in \Omega \setminus \omega$, on a le résultat.

6) Soit $k \geq 1$ et $\omega_k \subset \Omega$, λ -négligeable tel que, pour tout $x \in \Omega \setminus \omega_k$, on a

$$\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \leq M^2.$$

Alors, on peut écrire

$$k = \sum_{j=1}^k 1 = \sum_{j=1}^k \|e_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} |e_j(x)|^2 d\lambda(x) = \int_{\Omega \setminus \omega_k} \left(\sum_{j=1}^k |e_j(x)|^2 \right) d\lambda(x) \leq \int_{\Omega} M^2 d\lambda = \lambda(\Omega) M^2,$$

avec M indépendant de k . Donc, pour tout $k \geq 1$, on a

$$k \leq \lambda(\Omega) M^2$$

et ceci est absurde. Donc E est de dimension finie. □