

Présentations et Représentations
de quelques groupes de réflexions unitaires irréductibles
et des groupes polyédraux binaires

Arthur Garnier

27 juin 2017

Table des matières

Préambule	3
1 Présentations de G_4, G_{12}, $G(4, 2, 2)$ et des groupes polyédraux binaires	4
1.1 Groupe libre et présentation de groupes	4
1.2 Algorithme de Todd-Coxeter	6
1.3 Présentations des groupes considérés	12
2 Représentations linéaires des groupes de réflexions et polyédraux binaires	15
2.1 Tables de caractères	15
2.2 Quelques conséquences	27
Annexe	28
Références	34

Préambule

Dans ce travail, on se propose de donner quelques précisions sur les groupes polyédraux binaires \mathcal{T} , \mathcal{O} et \mathcal{I} , les groupes de réflexions primitifs G_4 et G_{12} , ainsi que le groupe imprimitif $G(4, 2, 2)$. Plus précisément, nous en exhibons des présentations, puis nous déterminons leurs tables de caractères (linéaires complexes). Ce texte s'inscrit dans la continuité directe du mémoire [2] concernant les groupes de réflexions unitaires de rang 2. Aussi utiliserons-nous librement les définitions, notations et résultats qui y sont exposés. Ces notions sont également développées (plus en détail) dans [4].

Mentionnons que certains calculs simples mais très fastidieux peuvent être effectués grâce au logiciel libre **GAP**, qui nous a été fort précieux pour construire les résultats ci-après exposés.

Tout d'abord, nous procédons à quelques rappels succins au sujet des groupes libres et des présentations de groupes. Cependant, ces rappels sont donnés à titre d'autonomie du texte et il est préférable que le lecteur soit déjà familier avec ces notions. Nous utiliserons par la suite une méthode systématique pour justifier les présentations avancées : l'algorithme de Todd-Coxeter, qui permet plus précisément de calculer (au-moins dans le cas des groupes finis), l'ordre d'un groupe dont on connaît une présentation. Nous expliquons l'algorithme à travers un exemple, puis nous généralisons légèrement le procédé afin de le rendre plus efficace. Le lecteur souhaitant obtenir un exposé plus détaillé de ce processus pourra consulter [1] et [6]. Cet algorithme permettrait même de justifier les présentations des groupes primitifs de rang 2 données dans le chapitre 6 de [4].

Ensuite, nous déterminons les tables de caractères de ces groupes. Nous emploierons ici des arguments *ad hoc*, qui ne permettent pas de conclure quant au cas général des groupes de réflexions, que l'on imagine bien plus complexe. Nous utiliserons notamment des isomorphismes nous ramenant parfois aux cas des groupes classiques. Nous calculerons par ailleurs les classes de conjugaison en utilisant à fond la théorie de Sylow. Pour la détermination des caractères, nous aurons également recours à la structure des sous-groupes de $SU_2(\mathbb{C})$, ainsi qu'à la représentation naturelle des groupes de réflexions, qui s'avérera être irréductible, puisque les groupes dont il est question sont irréductibles. Nous utiliserons de plus un peu de théorie de Galois, qui nous fournira un bel argument pour trouver un caractère de degré 2 du groupe icosaédral binaire. Enfin, nous tirons de ces tables quelques conséquences, comme par exemple le fait que $D(\mathcal{O}) = \mathcal{T}$, ou encore la caractérisation suivante : un groupe de réflexions unitaires irréductible de rang 2 est de type icosaédral si et seulement s'il n'est pas résoluble.

Première partie

Présentations de G_4 , G_{12} , $G(4, 2, 2)$ et des groupes polyédraux binaires

Nous commençons par quelques rappels sur l'algorithme de Todd-Coxeter, permettant de déterminer une présentation d'un groupe, sous certaines conditions. On redonne, à titre d'autonomie, la preuve de l'existence de groupes libre, tiré de celle de [3], elle-même reproduite d'après les travaux de Tits. Nous introduisons et illustrons rapidement le principe de l'algorithme sur un exemple, nous donnons ensuite un schéma de preuve de sa validité. Pour de plus amples informations, nous renvoyons à [1] ou encore [6]. Enfin, nous l'appliquons aux cas qui nous intéressent. Afin de ne pas trop surcharger le travail, nous donnerons uniquement les présentations dans le corps du texte, les tables de calculs étant reproduites en annexe pour le confort du lecteur.

1.1 Groupe libre et présentation de groupes

Définition 1. Soient F un groupe, et S un sous-ensemble de F . On dit que F est un groupe libre sur S s'il vérifie la propriété universelle suivante : pour tout groupe G et toute application $f : S \rightarrow G$, il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : F \rightarrow G$ prolongeant f , c'est-à-dire rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \uparrow \iota & \searrow \varphi \\ S & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

Théorème 1. Soit S un ensemble. Alors, il existe un groupe libre $(F(S), \iota)$ déterminé par S . De plus, ι est injective et $F(S)$ est engendré par l'image de ι .

Avant d'entamer la démonstration, nous avons besoin d'un lemme ensembliste :

Lemme 1. Il existe un ensemble d'indices I et une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$ tels que, si $g : S \rightarrow G$ est une application dans un groupe G , engendré par $g(S)$, alors G est isomorphe à l'un des G_i .

Démonstration. Tout d'abord, si S est fini, alors G est au plus dénombrable, car si $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, alors on a une application surjective naturelle

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}^n & \rightarrow & G \\ (z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} & \mapsto & \prod_{k \in \mathbb{N}} g(s_1)^{z_1^{(k)}} \cdots g(s_n)^{z_n^{(k)}} \end{array}$$

Si S est infini, le cardinal de G est inférieur ou égal à celui de G , car les éléments de G sont des produits finis d'éléments de $g(S)$. Considérons un ensemble T infini dénombrable si S est fini et équipotent à S dans le cas contraire. Pour chaque partie non vide H de T , soit Γ_H l'ensemble des structures de groupes sur H (i.e. l'ensemble des applications $\gamma : H \times H \rightarrow H$ faisant de H un groupe). Pour $\gamma \in \Gamma_H$, soit $H_\gamma := (H, \gamma)$ l'ensemble H muni de la structure γ . Alors, l'ensemble $I := \{\gamma ; \gamma \in \Gamma_H, H \in \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\}\}$ et la famille $(H_\gamma)_{\gamma \in I}$ conviennent. \square

Démonstration. (du théorème)

Reprenons les notations du Lemme précédent. Pour chaque $i \in I$, considérons l'ensemble M_i des applications $S \rightarrow G_i$ et pour chaque $\varphi \in M_i$, notons $G_{i,\varphi} := G_i \times \{\varphi\}$, produit ensembliste muni de la structure de groupe induite par celle de G_i , de sorte que $G_{i,\varphi}$ est un groupe canoniquement isomorphe à G_i , mais indexé de plus par φ . Soient le produit direct

$$F_0 := \prod_{i \in I} \prod_{\varphi \in M_i} G_{i,\varphi},$$

ainsi que l'application

$$\iota_0 : S \rightarrow F_0$$

dont la composante $S \rightarrow G_{i,\varphi}$ est φ . Étant donnée une application $g : S \rightarrow G$ dans un groupe G , il existe un morphisme $\psi_* : F_0 \rightarrow G$ telle que $\psi_* \circ \iota_0 = g$, i.e. rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota_0} & F_0 \\ & \searrow g & \downarrow \psi_* \\ & & G \end{array}$$

En effet, quitte à considérer le sous-groupe de G engendré par $g(S)$ et à composer par l'injection naturelle, on peut supposer que $g(S)$ engendre G . D'après le Lemme 1, il existe un isomorphisme $\lambda : G \rightarrow G_i$ pour un certain $i \in I$ et $\psi := \lambda \circ g$ est un élément de M_i . Soient $\pi_{i,\psi} : F_0 \rightarrow G_{i,\psi}$ la projection canonique et $\psi_* := \lambda^{-1} \circ \pi_{i,\psi}$. Alors, le morphisme ψ_* rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota_0} & F_0 \\ g \downarrow & \searrow \psi_* & \downarrow \pi_{i,\psi} \\ G & \xrightarrow{\lambda} & G_{i,\psi} \end{array}$$

Soit F le sous-groupe de F_0 engendré par l'image de ι_0 et soit ι égale à ι_0 , mais considérée comme application $S \rightarrow F$. Notons enfin g_* la restriction de ψ_* à F . Par la construction menée dans le Lemme, ι est injective. Alors, g_* est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & F \\ & \searrow g & \downarrow g_* \\ & & G \end{array}$$

Ainsi, $F(S) := F$ est bien le groupe libre cherché. \square

Remarque 1. Il peut être pratique de décrire le groupe libre $F(S)$ en termes de mots et de mots réduits, point de vue avec lequel nous supposons le lecteur familier. Aussi utiliserons nous librement dans la suite ces notions. Cependant, même si cette approche est plus pragmatique, nous avons préféré ici l'élégance de la preuve de Tits.

Définition 2. Soient S un ensemble et $R \subset F(S)$ une famille de mots sur S . Un groupe G a pour générateurs S et pour relations R si

$$G \simeq F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle,$$

où $\langle\langle R \rangle\rangle$ désigne la clôture normale de R dans $F(S)$. On dit aussi que le couple (S, R) est une présentation de G et on écrit alors

$$G = \langle S \mid R \rangle.$$

Exemple 1. On peut vérifier directement qu'on a les présentations suivantes

$$F(S) = \langle S \mid \emptyset \rangle,$$

$$\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset \rangle,$$

$$\mathbb{Z} / n\mathbb{Z} = \langle x \mid x^n \rangle =: \langle x \mid x^n = 1 \rangle, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un autre exemple de présentation est celle du groupe diédral, qui semble raisonnable mais non immédiate. L'algorithme de Todd-Coxeter permettra de la prouver :

$$\mathcal{D}_{2n} = \langle x, y \mid x^n = 1, y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle.$$

Mentionnons enfin un exemple important de groupe donné par générateurs et relations : les groupes de tresses d'Artin

$$\mathbb{B}_n := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \forall 1 \leq i \leq n-2, [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \forall |i-j| > 1 \rangle.$$

1.2 Algorithme de Todd-Coxeter

Nous allons commencer par expliquer l'algorithme sur un exemple tiré de [6]. Considérons le groupe

$$G := \langle s, t \mid s^3 = t^2 = 1, tst = s^2 \rangle.$$

On écrit chaque relation sous forme d'un mot avec seulement les exposants ± 1

$$sss, tt, tsts^{-1}s^{-1}.$$

Pour chacun de ses mots, nous construisons les tables de relations comme suit :

$$\begin{array}{c} s \quad s \quad s \\ \hline | \quad | \quad | \end{array}$$

$$\begin{array}{c} t \quad t \\ \hline | \quad | \end{array}$$

$$\begin{array}{c} t \quad s \quad t \quad s^{-1} \quad s^{-1} \\ \hline | \quad | \quad | \quad | \quad | \end{array}$$

On écrit ensuite un 1 de part et d'autre de chaque tableaux, dans les colonnes extrêmes, ainsi qu'une seconde ligne avec un 2 au lieu d'un 1. On appose enfin un 2 juste à gauche de 1 dans la première ligne du premier tableaux. Ceci donne

s	s	s
1	2	1
2		2

t	t
1	1
2	2

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1				1
2				2

Nous devons ensuite construire des tables auxiliaires

s
1 2

s^{-1}
2 1

Maintenant, on passe en revue les tables de relations afin de les compléter en suivant les règles dictées par les tables auxiliaires, ce qui donne seulement une nouvelle entrée dans la troisième table :

s	s	s
1	2	1
2		2

t	t
1	1
2	2

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1			2	1
2				2

Comme les tables ne sont pas remplies, il nous faut écrire une troisième ligne :

s	s	s
1	2	1
2		2
3		3

t	t
1	1
2	2
3	3

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1			2	1
2				2
3				3

Puis, on ajoute aux tables auxiliaires les entrées

s
2 3

s^{-1}
3 2

En complétant les tables, on obtient de nouvelles entrées pour les tables auxiliaires :

s
3 1

s^{-1}
1 3

On remplit maintenant les tables à l'aide de ces nouvelles relations :

s	s	s
1	2	3
2	3	1
3	1	2

t	t
1	1
2	2
3	3

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1		3	2	1
2		1	3	2
3		2	1	3

La première tables est alors complète. Or, comme ce n'est pas le cas des autres, l'algorithme se poursuit. On introduit une quatrième ligne, ainsi que les relations auxiliaires :

$$\frac{t}{1 \mid 4} \qquad \frac{t^{-1}}{4 \mid 1}$$

Et on obtient alors en complétant la deuxième table les relations

$$\frac{t}{4 \mid 1} \qquad \frac{t^{-1}}{1 \mid 4}$$

On peut continuer, grâce à ces nouvelles relations, à remplir les tables :

s	s	s	
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
4			4

t	t	
1	4	1
2		2
3		3
4	1	4

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1	4		3	2
2		4	1	3
3			2	1
4	1	2		4

Puisque les tables ne sont pas pleines, on itère ce processus avec les lignes 5 et 6 pour obtenir

s	s	s	
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
4	5		4
5		4	5
6			6

t	t	
1	4	1
2	6	2
3	5	3
4	1	4
5	3	5
6	2	6

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}
1	4	5	3	2
2	6	4	1	3
3	5	6	2	1
4	1	2	6	5
5	3	1	4	
6	2	3	5	4

À présent, lorsque l'on tente d'ajouter une septième ligne, dans la quatrième ligne de la première table, le nouveau 7 suivant le 5 donne la relation auxiliaire

$$\frac{s}{5 \mid 7}$$

mais la table auxiliaire contient déjà

$$\frac{s}{5 \mid 6}$$

Ceci est un exemple de coïncidence, que l'on écrit $7 = 6$. Nous devons alors supprimer les lignes 7 de toutes les tables et remplaçons toutes les occurrences de 7 dans nos tables par 6, y compris les entrées des tables auxiliaires.

Poursuivant ce procédé, on est conduit à la situation

s	s	s	s
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
4	5	6	4
5	6	4	5
6	4	5	6

t	t	t
1	4	1
2	6	2
3	5	3
4	1	4
5	3	5
6	2	6

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}	
1	4	5	3	2	1
2	6	4	1	3	2
3	5	6	2	1	3
4	1	2	6	5	4
5	3	1	4	6	5
6	2	3	1	3	6

Les tables sont à présent toutes complètes, l'algorithme est donc terminé. La conclusion est que notre groupe G est d'ordre 6. On a évidemment $G \simeq \mathfrak{S}_3$.

Pour décrire le résultat de l'algorithme, nous le résumons avec les tables de relations, ainsi que les tables auxiliaires, toutes complètes :

s	s	s	s
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
4	5	6	4
5	6	4	5
6	4	5	6

t	t	t
1	4	1
2	6	2
3	5	3
4	1	4
5	3	5
6	2	6

t	s	t	s^{-1}	s^{-1}	
1	4	5	3	2	1
2	6	4	1	3	2
3	5	6	2	1	3
4	1	2	6	5	4
5	3	1	4	6	5
6	2	3	1	3	6

s	s
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	4

s^{-1}	s^{-1}
2	1
3	2
1	3
5	4
6	5
4	6

t	t
1	4
4	1
2	6
6	2
3	5
5	3

t^{-1}	t^{-1}
4	1
1	4
6	2
2	6
5	3
3	5

Notons que cet algorithme ne fonctionne pas toujours. En fait, on peut montrer qu'aucun algorithme ne le peut (voir [6] pour plus de précision). Cependant, nous sommes sûr qu'il se termine dès que G est fini. Nous allons à présent formaliser quelque peu ce processus, à l'aide du lemme et du théorème suivants :

Lemme 2. *Soient G un groupe fini, X un ensemble de générateurs de G , H un sous-groupe de G et Hw_1, \dots, Hw_n des classes à droite distinctes de G . Si le sous-ensemble $\bigcup_{i=1}^n Hw_i$ est stable par multiplication à droite par tout élément de $X \cup X^{-1}$, alors $G = \bigcup_{i=1}^n Hw_i$, $[G : H] = n$ et $|G| = n|H|$.*

Démonstration. Si Y est un sous-ensemble quelconque de G tel que $Ya \subseteq Y$ pour tout $a \in X \cup X^{-1}$, alors $Y = G$ puisque G est engendré par X et $w \in Y$ pour tout mot w sur X . En appliquant ceci à $Y = \bigcup_i Hw_i$, on obtient la première égalité qui entraîne que chaque classe de H doit être l'une des Hw_i et donc que $[G : H] = n$. \square

On en arrive au théorème principal, dont on donne l'esquisse de preuve de [6] :

Théorème 2. (*Tood-Coxeter, 1936*)

Soit G un groupe finiment présenté. Construisons une table pour chaque relation comme nous l'avons fait ci-dessus, ajoutons de nouvelles entrées (entières) et agrandissons les tables auxiliaires chaque fois que possible, et supprimons les plus grand entier intervenant dans des coïncidences. Si le processus se termine, avec chaque table remplie et ayant n lignes, alors le groupe G est d'ordre n .

Démonstration. Dénotons par 1 l'élément neutre de G et supposons que chaque autre entier i avec $1 \leq i \leq n$ dénote les autres éléments de G . L'entrée

$$\frac{a}{i \mid j}$$

dans n'importe quelle table est à interpréter comme l'équation $ia = j$ dans G . Ceci explique les entrées jumelles dans les tables auxiliaires : si $ia = j$, alors $ja^{-1} = i$. La construction des tables de relations n'est donc autre qu'une énumération des éléments de G . S'il y a un carré vide à droite de i avec un a séparant les deux colonnes concernées, alors j est l'élément ia . De même, s'il y a un carré vide à gauche de i , alors j est l'élément ia^{-1} . Les coïncidences apparaissent lorsque $ia = j$ et $ia = k$, auquel cas on doit avoir $j = k$. Définissons $Y \subset G$ comme étant le sous-ensemble des éléments de G qui ont été dénotés par i pour $1 \leq i \leq n$. Le fait que toutes les tables soient pleines signifie que Y est stable par multiplication à droite par tout élément de $X \cup X^{-1}$. Ainsi, sous réserve de montrer que les classes sont distinctes, le Lemme précédent s'applique à Y (avec $H = 1$) pour donner $|G| = n$. \square

Dans la pratique, nous aurons affaire à des groupes légèrement plus grands que l'exemple traité ci-dessus. Aussi l'algorithme peut-il être amélioré en énumérant non pas les éléments de G , mais les classes modulo un sous-groupe. Nous allons appliquer ceci à l'exemple du groupe des quaternions

$$\mathcal{Q}_8 := \langle x, y \mid x^4 = 1, x^2 = y^2, x^y = x^{-1} \rangle.$$

Considérons le sous-groupe $H := \langle x \rangle$. Par les relations de \mathcal{Q}_8 , H est d'ordre 4 et il suffit de compter le nombre de classes (à droite) modulo H pour obtenir l'ordre de \mathcal{Q}_8 . Nous démarrons l'algorithme comme ci-dessus, mais nous ajoutons en plus des tables de générateurs du sous-groupe, une pour chaque générateur de H . Ces nouvelles tables consistent en une ligne et elles sont complètes dès lors que leurs cases sont toutes remplies *sans ajouter d'autre ligne*. Dans notre exemple, il n'y a qu'une seule table de sous-groupe, donnée par

$$\frac{x}{1 \mid 1}$$

Dans le cas général, les lignes de la table du sous-groupe sont complétées en premier et donne des relations à ajouter aux tables auxiliaires. Après avoir complété ces tables, nous pouvons remplir les autres en suivant le même processus que celui décrit ci-dessus. Le nombre i dénote à présent les classes à droite modulo H dans G , avec 1 dénotant H . L'entrée

a	
i	j

dans une table signifie que si $i = Hw$, alors $j = Hwa$. Lorsque toutes les tables sont complètes, le Lemme précédent s'applique pour calculer $[G : H]$ et on en déduit l'ordre de G pourvu que celui de H soit connu. On voit alors bien que cette procédure est plus rapide que la première.

Pour revenir à notre exemple, le premier algorithme aurait nécessité huit lignes pour se terminer, alors qu'avec le second, deux lignes suffisent. L'algorithme, une fois terminé, donne les tables (respectivement du sous-groupe, des relations et auxiliaires)

x	
1	1

x	x	x	x	x
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2

y	y	$x^{-1}x^{-1}$	$x^{-1}x^{-1}$	$x^{-1}x^{-1}$
1	2	1	1	1
2	1	2	2	2

y	x	$y^{-1}x^{-1}$	$y^{-1}x^{-1}$	$y^{-1}x^{-1}$
1	2	2	1	1
2	1	1	2	2

x	
1	1
2	2

x^{-1}	
1	1
2	2

y	
1	2
2	1

y^{-1}	
2	1
1	2

Un des intérêts de cet algorithme et de prouver qu'un groupe est isomorphe à un groupe de présentation donnée et ainsi de trouver des présentations de groupes. Plus précisément, nous utiliserons le résultat suivant, dont l'hypothèse centrale est que l'on connaît l'ordre du groupe dont la présentation nous est donnée ; ordre que l'algorithme de Todd-Coxeter permet de calculer.

Proposition 1. *Soit une présentation $\tilde{G} := \langle S \mid R \rangle$, où l'on suppose \tilde{G} fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ et $R = \{r_i(s_1, \dots, s_k), 1 \leq i \leq l\}$. Soit G un groupe fini quelconque. Pour que (S, R) soit une présentation de G , il faut et il suffit*

1. *qu'il existe des éléments $g_1, \dots, g_k \in G$ tels que*
 - (a) *g_1, \dots, g_k engendrent G*
 - (b) *on ait $r_i(g_1, \dots, g_k) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq l$,*
2. *que G soit d'ordre n .*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Pour la suffisance, considérons l'application

$$f : S \rightarrow G$$

$$s_i \mapsto g_i$$

Par propriété universelle du groupe libre, il existe un unique morphisme $\varphi_0 : F(S) \rightarrow G$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow & \nearrow \varphi_0 & \\ F(S) & & \end{array}$$

Comme les g_j engendrent G , le morphisme φ_0 est de plus surjectif. Ensuite, comme on a $r_i(g_1, \dots, g_k) = 1$ pour tout i , on a $\varphi_0(r) = 1$ pour tout $r \in R$. Ceci entraîne que $\langle R \rangle \leq \ker \varphi_0$ mais comme $\ker \varphi_0 \trianglelefteq F(S)$, on a aussi $N := \langle\langle R \rangle\rangle \leq \ker \varphi_0$. On en déduit que φ_0 se factorise en un morphisme surjectif φ :

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\varphi_0} & G \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ F(S)/N & & \end{array}$$

et comme $\tilde{G} = F(S)/N$ on a $[F(S) : N] = |\tilde{G}| = |G|$ et donc φ est un isomorphisme, d'où le résultat. \square

1.3 Présentations des groupes considérés

Munis de ce puissant algorithme, nous sommes maintenant en mesure de déterminer les présentations annoncées. Comme preuve de ces présentations, nous donnons en annexe les sous-groupes choisis ainsi que les tables de Todd-Coxeter de chacun de ces groupes. Le résultat est le suivant :

Théorème 3. *On a les présentations suivantes :*

$$\mathcal{T} = \langle x, y \mid x^3 = y^4 = 1, y^2x = xy^2, (yx^{-1})^2 = xy \rangle,$$

$$\mathcal{O} = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^3xy^{-1}x = 1, (yx^{-1}y)^2x = 1 \rangle,$$

$$\mathcal{I} = \langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1, y^2x = xy^2, (yx^{-1})^2 = xy \rangle,$$

$$G_4 = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = 1, xyx = yxy \rangle,$$

$$G_{12} = \langle x, y, z \mid x^8 = y^3 = z^2 = xyz = [x^4, y] = 1 \rangle,$$

$$G(4, 2, 2) = \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = [y, z] = [y, x] = (xzy^{-1})^2 = 1 \rangle.$$

Corollaire 1. *On a les isomorphismes suivants :*

$$G_4 \simeq \mathcal{T} \simeq SL(2, 3),$$

$$G_{12} \simeq GL(2, 3),$$

$$\mathcal{I} \simeq SL(2, 5).$$

Démonstration. Les isomorphismes $\mathcal{T} \simeq SL(2, 3)$ et $\mathcal{I} \simeq SL(2, 5)$ ont déjà été démontrés dans []. Ensuite, les générateurs de $SL(2, 3)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

montrent que la présentation de G_4 est aussi une présentation de $SL(2, 3)$, d'où $G_4 \simeq SL(2, 3)$. De même, les générateurs de $GL(2, 3)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montrent que la présentation de G_{12} est aussi une présentation de $GL(2, 3)$, d'où le résultat. \square

Notons que l'on peut, à l'aide d'une jolie action de groupes, montrer que l'on a $G_4 \simeq SL(2, 3)$:

Lemme 3. 1. *Notons $\mathcal{Q}_8 := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions d'ordre 8. On définit une action par automorphisme θ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur \mathcal{Q}_8 en décrétant que $\theta(1)$ envoie i sur j , j sur k et k sur i . On a alors l'isomorphisme*

$$SL(2, 3) \simeq \mathcal{Q}_8 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

2. *On a de plus un isomorphisme*

$$G_4 \simeq SL(2, 3) \simeq \mathcal{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Démonstration. 1. On vérifie immédiatement que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{Q}_8 &\rightarrow SL(2, 3) \\ i &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ j &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ k &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un monomorphisme de groupes. On a alors $[SL(2, 3) : \psi(\mathcal{Q}_8)] = 3$, d'où une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathcal{Q}_8 \xrightarrow{\psi} SL(2, 3) \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

On remarque alors que si l'on pose

$$m := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, 3),$$

alors $m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application $1 \mapsto m$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $SL(2, 3)$ est une section de la suite ci-dessus. De plus, on a bien

$$mim^{-1} = j, \quad mjm^{-1} = k, \quad mkm^{-1} = i,$$

d'où le premier isomorphisme annoncé. On en déduit en particulier que $SL(2, 3)$ est engendré par $\psi(i)$ et m .

2. Posons à présent

$$\begin{array}{ccc} \varphi : SL(2, 3) & \rightarrow & G_4 \\ \psi(i) & \mapsto & r'_1 r_1^{-1} r_1'^{-1} r_1 = -b \\ m & \mapsto & r_1 \end{array}$$

Alors $\varphi(imi^{-1}) = br_1b = rr_1r = r'_1$, on en déduit par calculs directs que $\mathcal{Q}_8 = \langle i, j \rangle \simeq \langle b, r_1 br_1^{-1} \rangle \trianglelefteq G_4$ et on obtient une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathcal{Q}_8 \longrightarrow G_4 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Comme ci-dessus, $1 \mapsto r_1$ en est une section et il vient finalement

$$G_4 \simeq \mathcal{Q}_8 \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq SL(2, 3),$$

d'où le résultat. □

Remarque 2. On peut montrer que les groupes polyédraux binaires sont également présentés par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^3 \rangle = \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle, \\ \mathcal{O} &= \langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^4 \rangle = \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^4 = rst \rangle, \\ \mathcal{I} &= \langle s, t \mid (st)^2 = s^3 = t^5 \rangle = \langle r, s, t \mid r^2 = s^3 = t^5 = rst \rangle, \end{aligned}$$

Deuxième partie

Représentations linéaires des groupes de réflexions et polyédraux binaires

2.1 Tables de caractères

Nous allons ici déterminer les tables de caractère des groupes \mathcal{T} , \mathcal{O} , \mathcal{I} , G_4 , G_{12} et $G(4, 2, 2)$. Nous allons commencer par les groupes de réflexions. Notons

$$\begin{aligned} \varpi &:= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \\ \omega &:= e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad r_1 := \omega\varpi, \quad r := (\sqrt{-1})i, \quad r'_1 := rr_1r, \\ \gamma &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \quad \sigma := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1}-i & \tau \\ -\tau & \tau^{-1}+i \end{pmatrix} \quad \text{où } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_3 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r'_3 := rr_3r, \quad r''_3 := (r_1^2 r_4)^{-1} r_3 (r_1^2 r_4) \quad \text{avec } r_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Théorème 4. *La table des caractères de $G_4 \simeq SL(2, 3) =: S$ s'écrit*

$I(S) \backslash s^S$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$I(G_4) \backslash g^{G_4}$	1_1	-1_1	b_6	$(r_1)_4$	$(r_1^2)_4$	$(br_1b)_4$	$(br_1^2)_4$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1
χ'	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ''	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_1	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_2	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
$\overline{\chi_2}$	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω
$\tilde{\chi}$	3	3	-1	0	0	0	0

TABLE 1

Démonstration.

Nous utilisons l'isomorphisme $G_4 \simeq SL(2, 3)$ du Lemme 3 et nous allons montrer que $S := SL(2, 3)$ admet pour table de caractères

$I(S) \backslash s^S$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_6$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_4$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_4$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1
χ'	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
χ''	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
χ_1	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_2	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
$\overline{\chi_2}$	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω
$\widetilde{\chi}$	3	3	-1	0	0	0	0

TABLE 1B

Comme $\mathcal{Q}_8 \trianglelefteq S$, la classe de $\psi(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ contient six éléments, tous d'ordre 4.

Ensuite, comme $S \simeq \mathcal{Q}_8 \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, si un élément $(q, z) \in S$ est dans $Z(S)$, alors $\theta(1)(q) = q$ donc $q = \pm 1$ et on doit aussi avoir $\theta(z) = 1$ donc $z = 0$ et réciproquement, on a directement que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Z(S)$ et donc

$$Z(S) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Pour les autres classes, S possède quatre 3-Sylow et ils sont conjugués, donc un élément d'ordre 3 est conjugué à au-moins trois autres éléments. De plus, on a huit éléments d'ordre 3 et leurs opposés donnent au-moins huit éléments d'ordre 6; donc parmi les éléments qui ne sont pas dans \mathcal{Q}_8 , huit sont d'ordre 3 et huit sont d'ordre 6. Si tous les éléments d'ordre 3 étaient conjugués, il n'y aurait qu'un seul 3-Sylow, ce qui est faux, on a donc au-moins deux classes d'éléments d'ordre 3. Mais par calculs directs, on voit qu'au-moins quatre des éléments d'ordre 3 sont conjugués, donc on obtient deux classes de cardinal 4. Ensuite, si $s \in S$ est d'ordre 6, alors s^2 est d'ordre 3 et on a donc deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6, de cardinal 4; et le compte est bon puisque $|S| = 24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 1 + 1$. Par ailleurs, m et m^{-1} (resp. mi et $(mi)^{-1}$) sont des représentants des classes d'éléments d'ordre 3 (resp. 6).

Ensuite, on a $[im, jm] = j \in \mathcal{Q}_8$ et de même, on a

$$\forall q, q' \in \mathcal{Q}_8, [qm, q'm] \in \mathcal{Q}_8$$

et comme S est engendré par \mathcal{Q}_8 et $\langle m \rangle$, on a que $S' = D(S) \leq \mathcal{Q}_8$. Des calculs analogues au premier ci-dessus montrent de plus que $\mathcal{Q}_8 \subseteq S'$ et donc

$$S' = \mathcal{Q}_8 \Rightarrow S^{ab} := S/S' \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

S possède donc exactement trois caractères irréductibles de degré 1, que l'on note $\mathbb{1}$, χ' et χ'' , dont on peut calculer les valeurs à l'aide de la Table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Notons χ_k , $1 \leq k \leq 4$, les caractères restants. Comme on a

$$\sum_{\chi \in I(S)} \deg \chi^2 = |S| = 24 = 3 + \sum_{k=1}^4 \deg \chi_k^2,$$

la seule possibilité est, quitte à changer l'ordre, $\deg \chi_1 = \deg \chi_2 = \deg \chi_3 = 2$ et $\deg \chi_4 = 3$. Notons $\widetilde{\chi} := \chi_4$.

En utilisant l'isomorphisme $SL(2, 3) \simeq G_4$, et le fait que G_4 soit un groupe de réflexions irréductible (primitifs de rang 2), on obtient que la représentation de réflexion

$$SL(2, 3) \simeq G_4 \hookrightarrow U_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C}),$$

est irréductible, de degré 2. Il suffit donc de prendre la trace des représentants des classes de conjugaison de G_4 pour évaluer χ_2 . Mais, $\overline{\chi_2}$ est aussi irréductible de degré 2 et on peut noter $\chi_3 := \overline{\chi_2}$. De plus, $\chi_2 \otimes \chi'$ est irréductible réel, de degré 2 et on peut noter $\chi_1 := \chi_2 \otimes \chi''$.

Enfin, l'isomorphisme exceptionnel $PSL(2, 3) \simeq \mathfrak{A}_4$ entraîne le fait suivant : si $\rho : \mathfrak{A}_4 \rightarrow GL(V)$ est une représentation irréductible, on obtient une représentation irréductible $\tilde{\rho} : SL(2, 3) \rightarrow GL(V)$ par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} SL(2, 3) - \tilde{\rho} & \twoheadrightarrow & GL(V) \\ \downarrow & & \uparrow \rho \\ PSL(2, 3) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{A}_4 \end{array}$$

Ainsi, si ρ est la représentation de \mathfrak{A}_4 donnée par l'action de \mathfrak{A}_4 sur un tétraèdre régulier, alors ρ est irréductible et la représentation correspondante de $SL(2, 3)$ est irréductible de degré 3, donc son caractère est $\tilde{\chi}$, ce qui termine la Table 1B. Remarquons que l'on aurait pu obtenir également les caractères de degré 1 de $SL(2, 3)$ de cette manière. \square

Théorème 5. *La table des caractères de $G_{12} \simeq GL(2, 3) =: G$ s'écrit*

$I(G) \backslash g^G$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$I(G_{12}) \backslash g^{G_{12}}$	1_1	-1_1	$(r_3)_{12}$	$(r'_3 r''_3)^2_8$	$-(r'_3 r''_3)^2_8$	$r_3 r'^{-1}_3$	$r''_3 r_3 r'^{-1}_3$	$(r''_3 r_3 r'^{-1}_3)^{-1}_6$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\tilde{\varepsilon} = \det$	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
$\chi_s^{(1)}$	2	2	0	-1	-1	2	0	0
$\chi_s^{(2)}$	3	3	-1	0	0	-1	1	1
$\chi_s^{(3)}$	3	3	1	0	0	-1	-1	-1
χ_0	2	-2	0	-1	1	0	$-i\sqrt{2}$	$i\sqrt{2}$
$\chi_1 = \chi_0^* = \overline{\chi_0}$	2	-2	0	-1	1	0	$i\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
$\chi_2 = \chi_0 \otimes \chi_s^{(1)}$	4	-4	0	1	-1	0	0	0

TABLE 2

Démonstration. Nous utiliserons à loisir l'isomorphisme $G_{12} \simeq GL(2, 3)$. Commençons par déterminer les classes de conjugaison de $G := GL(2, 3)$. Considérons le morphisme

$$\varphi : G \xrightarrow{\pi} G / Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} PGL(2, 3) \simeq \mathfrak{S}_4$$

et soit $n_p := |\text{Syl}_p(G)|$ pour $p = 2, 3$.

Si $n_2 = 1$, soit $\{S\} := \text{Syl}_2(G)$, alors S contient tous les éléments d'ordre 2 de G , donc $Z(G) < S$ et φ induit un morphisme $\tilde{\varphi} : S \rightarrow \mathfrak{S}_4$ et $\ker \tilde{\varphi} = \ker \varphi = Z(G)$ entraîne $|\tilde{\varphi}(S)| = |\varphi(S)| = \frac{|S|}{2} = 8$ donc $\varphi(S) \in \text{Syl}_2(\mathfrak{S}_4)$. De plus, comme $|\varphi(S)| = 8$, $\varphi(S)$ n'est pas distingué mais comme $S \trianglelefteq G$, on doit avoir $\varphi(S) \trianglelefteq \mathfrak{S}_4$ puisque φ est surjectif donc cette

contradiction implique $n_2 \neq 1$ et comme $n_2|3$ on a $n_2 = 3$. Ensuite, si $T \in \text{Syl}_3(G)$, alors $\varphi(T) \simeq T$ donc $|\varphi(T)| = 3$ et $\varphi(T)$ n'est donc pas distingué dans \mathfrak{S}_4 et donc T n'est pas distingué dans G donc $n_3 \neq 1$. Or, $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ et $n_3|16$ donc $n_3 \in \{4, 16\}$. Si $n_3 = 16$, il y a 32 éléments d'ordre 3, donc 16 éléments d'ordre divisant 16, qui formeraient l'unique 2-Sylow de G , ce qui est exclu. Donc $n_3 = 4$.

Soit

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

alors

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $n_3 = 4$, si $g \in G$ est d'ordre 3, alors $g \in M^G \cup (M^{-1})^G$ donc $g \in M^G$ et donc M^G est la seule classe d'éléments d'ordre 3 et $|M^G| = 8$.

* M est d'ordre 3 donc $-M$ est d'ordre 6 et comme M^G est de cardinal 8, $(-M)^G$ est de cardinal au-moins 8. Mais, il y a 8 3-cycles dans \mathfrak{S}_4 , donc 8 éléments d'ordre 6 dans G et donc $|(-M)^G| = 8$ et $(-M)^G$ est la seule classe d'éléments d'ordre 6.

* Les matrices

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont trois éléments d'ordre 8 et si $1 \leq i \neq j \leq 3$, alors $M_i \notin \{\pm M_j^{\pm 1}\}$. Par définition de φ , on en déduit que les trois doubles transpositions de \mathfrak{S}_4 , $\varphi(M_i^2)$, sont distinctes. Ainsi, si $g \in G$ est tel que $\varphi(g)$ soit une double transposition, alors g est d'ordre 4, donc si $g \in G \setminus Z(G)$ est d'ordre 2, $\varphi(g)$ est une transposition. Alors, si $\{g_1, \dots, g_6\}$ est un système de représentants de $\varphi^{-1}(\{(i, j), 1 \leq i, j \leq 3\})$, alors les douze éléments $\{\pm g_1, \dots, \pm g_6\}$ sont distincts et d'ordre 2, donc G a au-moins douze éléments d'ordre 2. De même, G a au-moins douze éléments d'ordre 8 et au-moins six éléments d'ordre 4.

Comme on sait que G a huit éléments d'ordre 6 et huit d'ordre 3, que $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et que $|G| = 48$, G a exactement douze éléments d'ordre 2, douze d'ordre 8 et six d'ordre 4.

* Si $g \in G$ est d'ordre 4, $\varphi(g)$ est une double transposition et donc $|C_{\mathfrak{S}_4}(\varphi(g))| = 4$ et φ induit un épimorphisme $\varphi : C_G(g) \twoheadrightarrow \varphi(C_G(g)) \subset C_{\mathfrak{S}_4}(\varphi(g))$, donc $|C_G(g)| \leq 2|C_{\mathfrak{S}_4}(\varphi(g))| \leq 2 \cdot 4 = 8$ et donc $|g^G| \geq 6$. Or, il y a six éléments d'ordre 4, donc on a une seule classe d'éléments d'ordre 4, de cardinal 6, c'est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^G$.

* Ensuite, si $g_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors g_0 est d'ordre 2 et si $M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in C_G(g_0)$, alors $\alpha = \delta$ et $\beta = \gamma$ donc

$$M \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm g_0 \right\} \subset C_G(g_0),$$

donc $|C_G(g_0)| = 4$ et donc $|g_0^G| = 12$, donc on a une seule classe d'éléments d'ordre 2 non centraux : g_0^G , de cardinal 12.

* Par le même raisonnement que dans le troisième point, si $g \in G$ est d'ordre 8, alors $|g^G| \geq 6$. Soit $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et par calculs, on a

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset C_G(N),$$

donc $8 \leq |C_G(N)| \leq 8 \Rightarrow |C_G(N)| = 8$ et donc $|N^G| = 6$. La dernière classe est donc de cardinal 6 et c'est $(N^{-1})^G$ (on a $N^{-1} \notin N^G$), donc on a deux classes d'éléments d'ordre 8, de cardinal 6 chacune, et ce sont $(N^{\pm 1})^G$. Le compte est bon.

Pour trouver les représentants des classes de $G \simeq G_{12} = \langle r_3, r'_3, r''_3 \rangle = \langle r_3^{\mathbb{O}} \rangle < \mathbb{O}$, il suffit de raisonner sur les ordre des éléments de G_{12} . Par exemple, $r_3 \in G_{12}$ est d'ordre 2 et non central, donc $r_3^{G_{12}}$ correspond à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^G$, donc c'est la seule classe d'éléments d'ordre 2 non centraux de G_{12} , de cardinal 12. On obtient la table des classes de G et G_{12} :

G	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
G_{12}	1	-1	(r_3)	$(r'_3 r''_3)^{-1}$	$-(r'_3 r''_3)^{-1}$	$r_3 r_3^{-1}$	$r''_3 r_3 r_3^{-1}$	$(r''_3 r_3 r_3^{-1})^{-1}$
\mathfrak{S}_4	1	1	(12)	(123)	(123)	(12)(34)	(1234)	(1234)
$ \mathcal{C}(g) $	1	1	12	8	8	6	6	6
o	1	2	2	3	6	4	8	8

Pour les caractères de $G \simeq G_{12}$, on a déjà ceux provenant de \mathfrak{S}_4 via le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_{12} \simeq G & \overset{\tilde{\rho}}{\dashrightarrow} & GL(V) \\ & \searrow & \nearrow \rho \\ & \mathfrak{S}_4 & \\ & \uparrow \sim & \\ G/Z(G) & \xrightarrow{\sim} & PGL(2,3) \end{array}$$

ce qui donne cinq caractères irréductibles. On a aussi celui correspondant à la représentation (fidèle) de réflexion

$$\rho_0 : G_{12} \hookrightarrow \mathbb{O} \hookrightarrow U_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C}),$$

qui est irréductible car G_{12} est un groupe de réflexions unitaires irréductible. On a encore la contragrédiente de ρ_0 , qui donne une autre représentation irréductible de degré 2. Il reste un caractère, de degré 4, que l'on obtient comme $\chi_2 := \chi_0 \otimes \chi_s^{(1)}$, ou grâce aux relations d'orthogonalité. On en déduit la table des caractères de G_{12} et ceci achève la preuve. \square

Théorème 6. *La table des caractères de $G := G(4, 2, 2)$ s'écrit :*

$I(G) \backslash g^G$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}_2$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_2$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
χ_2	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
χ_5	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_6	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
χ_7	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
χ'	2	-2	$-2i$	$2i$	0	0	0	0	0	0
χ''	2	-2	$2i$	$-2i$	0	0	0	0	0	0

TABLE 3

Démonstration. Notons

$$A := A(4, 2, 2) = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mu_4^2 ; (\theta_1 \theta_2)^2 = 1\}$$

et faisons agir naturellement \mathfrak{S}_2 sur A ; on obtient un morphisme $\alpha : \mathfrak{S}_2 \rightarrow \text{Aut}(A)$ et le produit semi-direct

$$G(4, 2, 2) := A \rtimes_{\alpha} \mathfrak{S}_2.$$

On peut commencer par faire la liste des éléments de $G = A \rtimes_{\alpha} \mathfrak{S}_2$. On a

$$G(4, 2, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ensuite, on se rappelle que l'on a

$$|G| = 16, \quad Z(G) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \text{et} \quad G/Z(G) \simeq K_4,$$

où $K_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ désigne le groupe de Klein.

Montrons que $G' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En effet, par calculs directs, si $d \in G$ est diagonale, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} d & \text{si } d \in Z(G) \\ -d & \text{si } d \notin Z(G) \end{cases}$$

donc, pour tout $g \in G$, on a

$$d^g = \begin{cases} d & \text{si } d \in Z(G) \\ -d & \text{si } d \notin Z(G) \end{cases}$$

De plus, on voit que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^d = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } d \in Z(G) \\ -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } d \notin Z(G) \end{cases}$$

Comme on a

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

on obtient que

$$\forall g, h \in G, [g, h] \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

et comme

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a bien $G' = \left\langle - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, $|G^{ab}| = 8$, donc G possède 8 caractères irréductibles de degré 1.

Comme on a

$$\sum_{\chi \in \mathcal{I}(G)} |\chi(1)|^2 = |G| = 16,$$

G a en plus deux caractères irréductibles de degré 2.

On en déduit que G admet $10(= 8 + 2)$ classes de conjugaison. De plus, on a

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}$$

d'où

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^G \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^G \right| = \left| \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^G \right| = \left| \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^G \right| = 1$$

et comme le cardinal d'une classe de conjugaison divise $|G|$, les autres classes sont de cardinal au plus 2, donc exactement 2 et les classes de conjugaison de G sont alors représentées par

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut alors démarrer la Table 3.

* Comme G est un groupe de réflexions irréductible, la représentation fidèle

$$\iota : G(4, 2, 2) \hookrightarrow U_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

est irréductible. Quitte à changer la notation, on peut supposer que $\chi'' = \chi_\iota$ et on obtient la dixième ligne de la Table 3.

* Ensuite, $\det : G \rightarrow \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ est un morphisme, donc une représentation de degré 1, donc irréductible et on peut alors supposer que $\det = \chi_1$, d'où la première ligne.

* Comme $\chi'' \otimes \chi_1 \in \{\chi'', \chi'\}$ et que l'on ne peut avoir

$$-2i = \chi'' \otimes \chi_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \chi_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i,$$

on doit avoir $\chi'' \otimes \chi_1 = \chi'$ et on obtient les valeurs de χ' .

* Par ailleurs, on a que le carré de tout élément est scalaire, d'ordre 2, donc pour tout $g \in G$, on a $g^2 \in G'$ et comme G^{ab} est abélien d'ordre 8, il vient

$$G^{ab} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,$$

puis on utilise la table de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ pour conclure.

□

Nous poursuivons ensuite avec les tables des groupes polyédraux binaires.

Théorème 7. *La table des caractères de $\mathcal{T} \simeq SL(2, 3) =: S$ s'écrit*

$I(S) \backslash s^S$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$I(\mathcal{T}) \backslash t^{\mathcal{T}}$	1_1	-1_1	i_6	$(-\varpi^{-1}i)_4$	$(i\varpi)_4$	$(-\varpi^{-1})_4$	$(-\varpi)_4$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_a^{(1)}$	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
$\chi_a^{(2)}$	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
$\chi_a^{(3)}$	3	3	-1	0	0	0	0
χ_0	2	-2	0	-1	-1	1	1
$\chi_1 = \chi_0 \otimes \chi_a^{(1)}$	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
$\chi_2 = \chi_0 \otimes \chi_a^{(2)}$	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω

TABLE 4

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'isomorphisme $\mathcal{T} \simeq SL(2, 3) \simeq G_4$ et d'appliquer le Théorème 4. Nous donnons cependant la correspondance entre les classes de \mathcal{T} et de $SL(2, 3)$:

$SL(2, 3)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
\mathcal{T}	1	-1	i	$-\varpi^{-1}i$	$i\varpi$	$-\varpi^{-1}$	$-\varpi$
\mathfrak{A}_4	1	1	(12)(34)	(142)	(124)	(243)	(234)
$ \mathcal{C}(g) $	1	1	6	4	4	4	4
o	1	2	4	3	3	6	6

□

Théorème 8. *La table des caractères de \mathcal{O} est donnée par*

$I(\mathcal{O}) \backslash o^{\mathcal{O}}$	1_1	-1_1	i_6	ϖ_8	$-\varpi_8$	γ_6	$-\gamma_6$	$\varpi\gamma\varpi_{12}$
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\tilde{\varepsilon} = \det$	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_s^{(1)}$	2	2	2	-1	-1	0	0	0
$\chi_s^{(2)}$	3	3	-1	0	0	1	1	-1
$\chi_s^{(3)}$	3	3	-1	0	0	-1	-1	1
χ_0	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
$\chi_1 = \chi_0 \otimes \tilde{\varepsilon}$	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
χ_2	4	-4	0	-1	1	0	0	0

TABLE 5

Démonstration. Déterminons les classes de conjugaison de $\mathcal{O} = \langle \gamma, \varpi \rangle$. Notons

$$\psi : \mathcal{O} \xrightarrow{\pi} \mathcal{O} / Z(\mathcal{O}) = \mathcal{O} / \langle -1 \rangle \simeq \mathfrak{S}_4.$$

On remarque que

$$\forall r \in \mathcal{O}, |C_{\mathcal{O}}(r)| \leq 2|C_{\mathfrak{S}_4}(\psi(r))|. \quad (1)$$

On note toujours $n_p = |\text{Syl}_p(\mathcal{O})|$.

- * Ici, on a $n_3 \in \{4, 16\}$ car $\langle \varpi \rangle$ n'est pas distingué dans \mathcal{O} et si $n_3 = 16$ alors \mathcal{O} possède trente-deux éléments d'ordre 3 et pour tous $S, T \in \text{Syl}_3(\mathcal{O})$ alors $S \cap T = 1$ et donc $n_2 = 1$ et donc tout élément de \mathcal{O} est d'ordre 1, 3 ou divisant 16, mais $-\varpi$ est d'ordre 6, ce qui est absurde, donc $n_3 = 4$. Il y a donc au-plus deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 3, de cardinal ≥ 4 . Mais on a $(i\varpi\gamma)\varpi(i\varpi\gamma)^{-1} = \varpi^{-1}$ et on a donc une seule classe d'éléments d'ordre 3, de cardinal 8 et c'est $\varpi^{\mathcal{O}}$.
- * Ensuite, $-\varpi$ est d'ordre 6 et $|(-\varpi)^{\mathcal{O}}| \geq 8$. Si $s \in \mathcal{O}$ est d'ordre 6, alors s^2 est d'ordre 3 et $s^2 \in (\varpi^{-1})^{\mathcal{O}}$, donc s^2 s'écrit $s^2 = x\varpi x^{-1} = (-x\varpi x^{-1})^2$ donc $s = \pm x\varpi x^{-1}$ et comme s est d'ordre 6, $s = -x\varpi x^{-1} \in (-\varpi)^{\mathcal{O}}$. Ainsi, tous les éléments d'ordre 6 sont conjugués et ils forment une seule classe et comme à chaque élément d'ordre 3 correspond un et un seul élément d'ordre 6, cette classe est de cardinal 8.
- * Par ailleurs, il y a six 4-cycles dans \mathfrak{S}_4 , qui sont exactement ses éléments d'ordre 4, donc il y a au plus douze éléments d'ordre 8 dans \mathcal{O} . De plus, si $x \in \mathcal{O}$ est d'ordre 8, alors $\psi(x)$ est un 4-cycle, donc $|C_{\mathfrak{S}_4}(\psi(x))| = 8$ et donc $|x^{\mathcal{O}}| = 6$. Maintenant, $\pm\gamma$ sont d'ordre 8 et si l'on montre que $(-\gamma)^{\mathcal{O}} \cap \gamma^{\mathcal{O}} = \emptyset$, alors $(-\gamma)^{\mathcal{O}}$ et $\gamma^{\mathcal{O}}$ seront les deux seules classes d'éléments d'ordre 8 de \mathcal{O} , chacune de cardinal 6. Si $-\gamma \in \gamma^{\mathcal{O}}$, $-\gamma$ s'écrit $-\gamma = o\gamma o^{-1}$ avec $o \neq \pm 1$ et donc $\psi(o) \in \langle (1234) \rangle$ et si $\psi(o) = (1234)$ alors $o = \pm\gamma$, ce qui est exclu. Si $\psi(o) = (12)(34)$, alors $o = \pm i$ et ceci est aussi exclu. Enfin si $\psi(o) = (1432)$, alors $o = \pm\gamma^{-1}$ et si $\psi(o) = 1$, alors $o = \pm 1$: contradiction.
- * Comme $(12)(34)$ et (12) ne sont pas conjugués dans \mathfrak{S}_4 , on a au-moins deux classes d'éléments d'ordres 4. Soit $x := \varpi\gamma\varpi \in \mathcal{O}$, d'ordre 4. On a $|C_{\mathcal{O}}(x)| \in \{4, 8, 16\}$. En effet, puisque $\psi(x) = (123)(1234)(123) = (24)$, on a $|C_{\mathfrak{S}_4}(\psi(x))| = 4$, donc $|C_{\mathcal{O}}(x)| \leq 8$ d'après (1) et $|C_{\mathcal{O}}(x)|$ doit être un multiple de 4 divisant 48 ; les seules possibilités sont donc 4, 8 ou 16. Posons $S := \langle \varpi\gamma\varpi, \gamma \rangle =: \langle x, y \rangle$. x et y vérifient $y^{-1}xy^{-1}x^{-1} = 1$ et $xy^{-1}xy^3 = 1$, donc S doit être contenu dans le groupe de présentation

$$\tilde{S} := \langle x, y \mid y^8 = 1, x^4 = 1, y^{-1}xy^{-1}x^{-1} = 1, xy^{-1}xy^3 = 1 \rangle.$$

L'algorithme de Todd-Coxeter permet alors de montrer que \tilde{S} est d'ordre 16 (grâce au sous-groupe $\langle x \rangle$ d'ordre 8). Mais S est d'ordre strictement plus grand que 8 et divisant 16, donc d'ordre exactement 16 et donc $S \simeq \tilde{S}$; nous avons prouvé que $S \in \text{Syl}_2(\mathcal{O})$. On a ensuite $n_2 \mid 3$ et si $n_2 = 1$, alors $S \trianglelefteq \mathcal{O}$ et comme $\gamma \in S$, S contient tous les éléments d'ordre 8 (au nombre de douze) et par le théorème de Cauchy il doit contenir au-moins un élément d'ordre 2 et donc au-plus deux éléments d'ordre 4 et donc \mathcal{O} aurait au-plus deux éléments d'ordre 4, ce qui est faux puisque i , $-i$ et $\varpi i \varpi^{-1}$ sont d'ordre 4 et distincts. On en tire que $n_2 = 3$ et alors $S^{\varpi} \neq S$ car sinon, \mathcal{O} étant engendré par γ et ϖ , on aurait $S \trianglelefteq \mathcal{O}$ ce qui est exclu. Ainsi, on a

$$\text{Syl}_2(\mathcal{O}) = \left\{ S, S^{\varpi}, S^{\varpi^{-1}} \right\}.$$

Par le second théorème de Sylow, comme $C_{\mathcal{O}}(x)$ est un 2-groupe, il existe $h \in \{-1, 0, 1\}$ tel que $C_{\mathcal{O}}(x) \leq S^{\varpi^h}$. Si $|C_{\mathcal{O}}(x)| = 8$, alors $[S^{\varpi^h} : C_{\mathcal{O}}(x)] = 2$ et ceci entraînerait

$\{i\} \cup \{i^\varpi\} \cup \{i^{\varpi^{-1}}\} \subset C_{\mathcal{O}}(x)$, ce qui est manifestement faux. Si $|C_{\mathcal{O}}(x)| = 16$, on a la même condition absurde. Finalement, $|C_{\mathcal{O}}(x)| = 4$ et donc $|x^{\mathcal{O}}| = 12$.

* On a

$$i^{\mathcal{O}} \supset \{i, -i = (\varpi i \varpi^{-1})i(\varpi i \varpi^{-1})^{-1}, \varpi i \varpi^{-1} \neq \pm i\}$$

donc $|i^{\mathcal{O}}| \geq 6$ et comme il ne reste que six éléments, il vient $|i^{\mathcal{O}}| = 6$ et ceci termine le calcul des classes. On a la table suivante :

\mathcal{O}	1	-1	i	ϖ	$-\varpi$	γ	$-\gamma$	$\varpi\gamma\varpi$
\mathfrak{S}_4	1	1	(12)(34)	(123)	(123)	(1234)	(1234)	(12)
$ \mathcal{C}(g) $	1	1	6	8	8	6	6	12
o	1	2	4	3	6	8	8	4

Les caractères vont maintenant s'obtenir facilement. On a déjà cinq caractères provenant de \mathfrak{S}_4 par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & GL(V) \\ \downarrow & & \uparrow \rho \\ \mathcal{O}/Z(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{S}_4 \end{array}$$

On les notes $\mathbf{1}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\chi_s^{(1)}$, $\chi_s^{(2)}$ et $\chi_s^{(3)}$.

On a aussi la représentation fidèle

$$\rho_0 : \mathcal{O} \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow U_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C}),$$

qui se trouve être irréductible comme on le vérifie par calcul de la norme L^2 de son caractère χ_0 . De plus, celle-ci ne provient pas de \mathfrak{S}_4 car si l'on note ρ_s la représentation irréductible de \mathfrak{S}_4 de degré 2, on a $\chi_{\rho_s}((12)(34)) = 2$ donc $\rho_s((12)(34)) = 1$ et $\tilde{\rho}(i) = 1$, donc $\tilde{\rho}$ ne serait pas fidèle. On note $\rho_1 := \rho_0 \otimes \tilde{\varepsilon}$, ce qui donne une nouvelle représentation irréductible de degré 2. Enfin, le caractère restant doit être de degré 4 puisque

$$\sum_{\chi \in I(\mathcal{O})} \deg(\chi)^2 = |\mathcal{O}| = 48.$$

On trouve ses valeurs par orthogonalité sur les colonnes, puis sur les lignes ; et ceci achève la preuve. \square

Théorème 9. *La table de caractères de $\mathcal{I} \simeq SL(2, 5) =: S$ est donnée par*

$I(S)$	g^{S^5}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$I(G_{12})$	$g^{G_{12}}$	1_1	-1_1	ϖ_{20}	σ_{12}	$(\sigma^2 i \sigma)_{12}^2$	$-\varpi_{20}$	$-\sigma_{12}$	$-(\sigma^2 i \sigma)_{12}^2$	i_{30}
$\mathbf{1}$		1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_a^{(1)}$		3	3	0	τ	$-\tau^{-1}$	0	τ	$-\tau^{-1}$	-1
$\chi_a^{(2)}$		3	3	0	$-\tau^{-1}$	τ	0	$-\tau^{-1}$	τ	-1
$\chi_a^{(3)}$		4	4	1	-1	-1	1	-1	-1	0
$\chi_a^{(4)}$		5	5	-1	0	0	-1	0	0	1
χ_0		2	-2	-1	τ^{-1}	$-\tau$	1	$-\tau^{-1}$	τ	0
χ_{Gal}		2	-2	-1	$-\tau$	τ^{-1}	1	τ	$-\tau^{-1}$	0
χ_1		4	-4	1	-1	-1	-1	1	1	0
$\chi_2 = \chi_0 \otimes \chi_a^{(1)}$		6	-6	0	1	1	0	-1	-1	0

TABLE 6

Démonstration. Rappelons que l'on a $\mathcal{I} = \langle \mathcal{T}, \sigma \rangle = \langle i, \sigma \rangle$ et $|\mathcal{I}| = 120$. On considère

$$\phi : \mathcal{I} \xrightarrow{\pi} \mathcal{I} / Z(\mathcal{I}) = \mathcal{I} / \langle -1 \rangle \simeq \mathfrak{A}_5.$$

On commence par déterminer les sous-groupes de Sylow de \mathcal{I} . Comme à l'accoutumée, on note $n_p = |\text{Syl}_p(\mathcal{I})|$. On a $n_5 \equiv 1 \pmod{5}$ et $n_5 | 24$, donc $n_5 \in \{1, 6\}$ et $\langle \sigma \rangle \in \text{Syl}_5(\mathcal{I})$ mais $\langle \sigma \rangle$ n'est pas distingué, donc $n_5 \neq 1$ et donc $n_5 = 6$. Ensuite, on a $n_3 \equiv 1 \pmod{3}$ et $n_3 | 40$ d'où $n_3 \in \{1, 4, 10\}$ et comme $\langle \sigma i \rangle$ n'est pas distingué donc $n_3 \neq 1$ et si $n_3 = 4$, alors $[\mathcal{I} : N_{\mathcal{I}}(\sigma i)] = 4$ donc $\sigma \in N_{\mathcal{I}}(\sigma i)$, ce qui est absurde. Ainsi, $n_3 = 10$. On peut par ailleurs montrer que $n_2 = 5$, mais nous n'aurons pas besoin de cela ici.

Déterminons les classes de conjugaison. Nous avons bien-sûr les deux classes d'éléments centraux.

- * Ensuite, ϖ est d'ordre 3 et $\phi(\varpi) = (345)$ et $|C_{\mathfrak{A}_5}(\phi(\varpi))| = |\langle (345) \rangle| = 3$ et comme $\phi : C_{\mathcal{I}}(\varpi) \rightarrow \phi(C_{\mathcal{I}}(\varpi)) \subset C_{\mathfrak{A}_5}(\phi(\varpi))$, on a $|C_{\mathcal{I}}(\varpi)| \leq 2|\phi(C_{\mathcal{I}}(\varpi))| \leq 6$ et $-\varpi \in C_{\mathcal{I}}(\varpi)$ ce qui entraîne $|C_{\mathcal{I}}(\varpi)| = 6$ et donc $|\varpi^{\mathcal{I}}| = 20$. De plus, $\varpi^{\mathcal{I}}$ est exactement l'ensemble des éléments d'ordre 3 de \mathcal{I} puisque $n_3 = 10$. On a donc une seule classe d'éléments d'ordre 3, de cardinal 20.
- * Si $x \in \mathcal{I}$ est d'ordre 5, alors $\phi(x)$ est aussi d'ordre 5, donc son centralisateur est d'ordre 5 et $|C_{\mathcal{I}}(x)| \leq 10$ donc $|x^{\mathcal{I}}| \geq 12$. Il y a au-moins deux classes d'éléments d'ordre 5 et $n_5 = 6$, donc il y a vingt-quatre éléments d'ordre 5 dans \mathcal{I} , donc on a au plus deux classes, donc exactement deux, de cardinal 12, représentées par σ et $(\sigma^2 i \sigma)^2$.
- * Si $x \in \mathcal{I}$ est d'ordre 6, alors x^2 est d'ordre 3 et il y a donc vingt éléments d'ordre 6, qui sont conjugués (comme pour \mathcal{O}); de plus, si x est d'ordre 3, alors $-x$ est d'ordre 6. On a donc une seule classe d'éléments d'ordre 6, représentée par $-\varpi$, de cardinal 20.
- * De même, on a deux classes d'éléments d'ordre 10, de cardinal 12 chacune, représentées par $-\sigma$ et $-(\sigma^2 i \sigma)^2$.
- * Il reste trente éléments. On a $|C_{\mathcal{I}}(i)| \leq |C_{\mathfrak{A}_5}((23)(45))| = 8$ et donc $|i^{\mathcal{I}}| \geq 15$. On a donc au plus deux classes d'éléments d'ordre 4. Or, on a $\phi(\sigma(\sigma i \sigma^2)^2) = (24)(35) \in C_{\mathfrak{A}_5}(\phi(i))$ et $\pm \sigma(\sigma i \sigma^2)^2 \notin C_{\mathcal{I}}(i)$ et ceci entraîne $\phi(C_{\mathcal{I}}(i)) \neq C_{\mathfrak{A}_5}(\phi(i))$ et donc $|C_{\mathcal{I}}(i)| \leq 4$, donc $|i^{\mathcal{I}}| \geq 30$. Ainsi, les trente éléments restant forment une seule classe : $i^{\mathcal{I}}$.

On a la table des classes suivante :

$SL(2,5)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
\mathcal{I}	1	-1	ϖ	σ	$(\sigma^2 i \sigma)^2$	$-\varpi$	$-\sigma$	$-(\sigma^2 i \sigma)^2$	i
\mathfrak{A}_5	1	1	(123)	(12345)	(21345)	(123)	(12345)	(21345)	(12)(34)
$ C(g) $	1	1	20	12	12	20	12	12	30
o	1	2	3	5	5	6	10	10	4

On a cinq caractères irréductible (notés $\mathbf{1}$, $\chi_a^{(1)}$, $\chi_a^{(2)}$, $\chi_a^{(3)}$ et $\chi_a^{(4)}$) qui proviennent de \mathfrak{A}_5 via le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & GL(V) \\ \downarrow & & \uparrow \rho \\ \mathcal{I} / Z(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{A}_5 \end{array}$$

et on a la représentation naturelle fidèle

$$\rho_0 : \mathcal{I} \hookrightarrow SU_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow U_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

qui est irréductible (car $\|\chi_0\|_2 = 2$). Il reste alors trois caractères que l'on note provisoirement χ_1 , χ_2 et χ_3 , pour lesquels on a $(\deg \chi_1)^2 + \deg(\chi_2)^2 + (\chi_3)^2 = 56$.

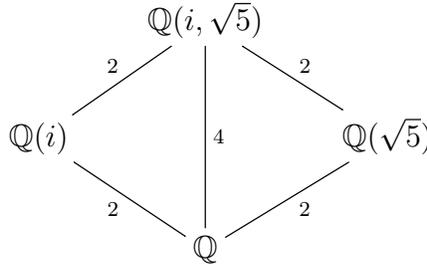
- Si $\chi_1(1) = 1$, alors $55 = 5 \times 11$ est somme de deux carrés et $11 \equiv 3 \pmod{4}$ contredit le théorème des deux carrés.
- Si $\chi_1(1) = 2$, alors $52 = \chi_2(1)^2 + \chi_3(1)^2$ et donc $\chi_2(1) = 4$ et $\chi_3(1) = 6$.
- Si $\chi_1(1) = 3$, alors 47 est somme de deux carrés, or $47 \equiv 3 \pmod{4}$ et ceci contredit également le théorème des deux carrés.
- Si $\chi_1(1) = 4$, on a $\chi_2(1) = 2$ et $\chi_3(1) = 6$.
- Si $\chi_1(1) = 5$, 31 serait somme de deux carrés.
- Si $\chi_1(1) = 6$, on a $\chi_2(1) = 4$ et $\chi_3(1) = 2$.
- Si $\chi_1(1) = 7$, alors $7 \equiv 3 \pmod{4}$ serait somme de deux carrés.

Ceci montre que, quitte à permuter les indices, on a $\chi_1(1) = 2$, $\chi_2(1) = 4$ et $\chi_3(1) = 6$. On remarque que $\chi_0 \otimes \chi_a^{(1)}$ est irréductible et de degré 6, donc $\chi_3 = \chi_0 \otimes \chi_a^{(1)}$. Ainsi, si nous trouvons χ_1 , nous obtiendrons χ_2 grâce aux relations d'orthogonalité sur les colonnes puis sur les lignes. Il nous reste donc à trouver χ_1 pour compléter la table et terminer la preuve du théorème. Pour calculer χ_1 , nous allons utiliser un argument de théorie de Galois.

Soit

$$P(X) := X^4 - 4X^2 - 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 5) \in \mathbb{Q}[X]$$

et considérons $K := \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$ son corps de décomposition contenu dans \mathbb{C} . Alors $[K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})][\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$ et $P = (X - i)(X + i)(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5}) \in K[X]$ est séparable, donc K/\mathbb{Q} est une extension galoisienne finie et soit $G := \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. On a $|G| = 4$ et les extensions intermédiaires



Ainsi, G possède au-moins $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(i))$ et $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$ comme sous-groupes d'ordre 2, d'après la correspondance de Galois et donc G n'est pas cyclique. Ceci montre que $G \simeq K_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Choisissons $\alpha \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ d'ordre 2 ne fixant pas $\sqrt{5}$. Alors, α induit un automorphisme $GL(\alpha) \in \text{Aut}(GL_2(K))$. Considérons la représentation matricielle de \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \langle \sigma, i \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} - i & \tau \\ -\tau & \tau^{-1} + i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$$

En fait, on voit immédiatement que $\mathcal{I} \hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q}(i, \sqrt{5}))$. ρ_0 est donnée naturellement par

$$\rho_0 : \mathcal{I} \hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

et on peut considérer

$$\rho_1 : \mathcal{I} \hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})) \xrightarrow{GL(\alpha)} GL_2(\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C}).$$

Comme ρ_0 est irréductible, ρ_1 l'est aussi et $\alpha \neq id$ entraîne $\rho_1 \neq \rho_0$. On calcule le caractère de ρ_1 et c'est alors χ_1 . \square

2.2 Quelques conséquences

Pour terminer, nous donnons quelques propriétés élémentaires des groupes considérés, obtenues par simple exploitation de leurs tables de caractères.

- De la table de $\mathcal{I} \simeq SL(2, 5)$, on déduit que \mathcal{I} est parfait (i.e. $\mathcal{I}' = \mathcal{I}$) et on retrouve le fait que $SL(2, 5)$ est parfait.
- On tire des tables de \mathcal{T} est \mathcal{O} que pour tout sous-groupe H de \mathcal{O} , si $[\mathcal{O} : H] = 2$, alors $H = \mathcal{T}$ et que $\mathcal{O}^{ab} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc $[\mathcal{O} : \mathcal{O}'] = 2$ et donc que $\mathcal{O}' = \mathcal{T}$. On en tire de plus que pour tout $8 \leq i \leq 15$, $G'_i \simeq \mathcal{T}$ et on retrouve alors que G_{12} a deux caractères de degré 1 et que $GL(2, 3)' = SL(2, 3)$, ainsi que $SL(2, 3)' \neq SL(2, 3)$ puisque $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$.
- En fait, on a mieux : si $G < U_2(\mathbb{C})$ est un groupe de réflexions unitaires irréductible primitif, alors G est de type \mathcal{T} (resp. \mathcal{O} , \mathcal{I}) si et seulement si son groupe dérivé est (isomorphe à) \mathcal{Q}_8 (resp. \mathcal{T} , \mathcal{I}) ; fait plutôt surprenant. En particulier, parmi les groupes de réflexions unitaires irréductibles primitifs de rang 2, ceux de type \mathcal{I} sont exactement ceux qui ne sont pas résolubles !

Annexe

Preuve du théorème 3

Nous allons ici justifier les présentations données dans la première partie. Le squelette de la preuve sera toujours le même :

1. Tout d'abord, nous donnons la correspondance entre les générateurs connus des groupes considérés et ceux dont il est questions dans les présentations prétendues. Ces correspondances ont été trouvées grâce au logiciel **GAP**, mais elles sont facilement vérifiables par calculs directs; les éléments des groupes donnés s'identifiant à des matrices. Cependant, ces calculs sont longs et fastidieux et nous laissons au lecteur le soin de les confirmer.
2. Ensuite, l'algorithme de Todd-Coxeter permet de déterminer l'ordre des groupes finiment présentés du théorème.
3. Enfin, nous invoquons la Proposition 1 pour conclure que les présentations données sont effectivement des présentations des groupes de réflexions considérés.

Nous commençons avec le groupe polyédral $\mathcal{T} = \langle i, \varpi \rangle$.
Nous affirmons qu'une présentation de \mathcal{T} est

$$G := \langle x, y \mid x^3 = 1, y^4 = 1, y^2x = xy^2, (yx^{-1})^2 = xy \rangle.$$

Les éléments de \mathcal{T} correspondant à x et y sont respectivement ϖ et i . Il nous reste à trouver l'ordre de G .

Nous choisissons le sous-groupe $H := \langle y^2x \rangle$ d'ordre 6. Il s'agit donc de montrer que $[G : H] =$

4. Les tables de Todd-Coxeter s'écrivent alors

y	y	x
1	2	1
1	1	1

x	x^{-1}	y	y^{-1}
1 1	1 1	1 2	2 1
2 3	3 2	2 1	1 2
3 4	4 3	4 3	3 4
4 2	2 4	3 4	4 3

x	x	x	y	y	y	y	y	y	x	$y^{-1}y^{-1}x^{-1}$	y	$x^{-1}y$	$x^{-1}y^{-1}x^{-1}$
1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	4
2	3	4	2	1	2	1	2	2	2	3	4	3	2
3	4	2	3	4	3	4	3	3	3	4	3	4	3
4	2	3	4	4	3	4	3	4	2	1	2	4	4

Et ceci permet de conclure.

Ensuite, nous prétendons que le groupe $\mathcal{O} = \langle \gamma, \varpi \rangle$ admet pour présentation

$$G := \langle x, y \mid x^3 = 1, y^3xy^{-1}x = 1, (yx^{-1}y)^2x = 1 \rangle,$$

les éléments x et y s'identifiant respectivement à ϖ et γ . Nous considérons alors le sous-groupe $H := \langle y \rangle$ qui est d'ordre 8 et montrons que $[G : H] = 6$. Nous avons les tables

$$\frac{y}{1 \mid 1}$$

y	
1	1
3	2
2	4
4	5
5	3
6	6

y^{-1}	
1	1
2	3
4	2
5	4
3	5
6	6

x	
1	2
2	3
3	1
5	4
4	6
6	5

x^{-1}	
2	1
3	2
1	3
4	5
6	4
5	6

x	x	x	
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
4	6	5	4
5	4	6	5
6	5	4	6

y	y	y	x	$y^{-1}x$			
1	1	1	1	2	3	1	
2	4	5	3	1	1	2	
3	2	4	5	4	2	3	
4	5	3	2	3	5	4	
5	3	2	4	6	6	5	
6	6	6	6	5	4	6	

y	$x^{-1}y$	y	$x^{-1}y$	x				
1	1	3	2	4	5	3	1	
2	4	5	3	2	1	1	2	
3	2	1	1	1	3	2	3	
4	5	6	6	6	4	5	4	
5	3	2	4	5	6	6	5	
6	6	4	5	3	2	4	6	

D'où le résultat.

Nous pouvons à présent inspecter le cas de $\mathcal{I} = \langle i, \sigma \rangle$, dont nous avançons une présentation

$$G := \langle x, y \mid x^5 = 1, y^4 = 1, y^2x = xy^2, (yx^{-1})^2 = xy \rangle.$$

x et y correspondent respectivement à σ et i . Nous choisissons le sous-groupe $H := \langle y^2x \rangle$, comme pour \mathcal{T} . H est d'ordre 10, il nous faut donc montrer que $[G : H] = 12$. Nous avons les tables

y	y	x
1	2	1
1	1	1

x		x^{-1}		y		y^{-1}	
1	1	1	1	1	2	2	1
2	3	3	2	2	1	1	2
4	2	2	4	3	4	4	3
3	5	5	3	4	3	3	4
5	6	6	5	5	7	7	5
6	4	4	6	7	5	5	7
7	8	8	7	6	8	8	6
8	10	10	8	8	6	6	8
9	7	7	9	9	10	10	9
10	11	11	10	10	9	9	10
11	9	9	11	11	12	12	11
12	12	12	12	12	11	11	12

x	x	x	x	x	y	y	y	y
1	1	1	1	1	1	2	1	2
2	3	5	6	4	2	1	2	1
3	5	6	4	2	3	4	3	4
4	2	3	5	6	4	3	4	3
5	6	4	2	3	5	7	5	7
6	4	2	3	5	6	8	6	8
7	8	10	11	9	7	5	7	5
8	10	11	9	7	8	6	8	6
9	7	8	10	11	9	10	9	10
10	11	9	7	8	10	9	10	9
11	9	7	8	10	11	12	11	12
12	12	12	12	12	12	11	12	11

y	y	x	y^{-1}	y^{-1}	x^{-1}	y	$x^{-1}y$	$x^{-1}y^{-1}$	x^{-1}
1	2	1	1	2	1	1	2	4	3
2	1	2	3	4	3	2	1	1	2
3	4	3	5	7	5	3	4	6	8
4	3	4	2	1	2	4	3	2	1
5	7	5	6	8	6	5	7	9	10
6	8	6	4	3	4	6	8	7	5
7	5	7	8	6	8	7	5	3	4
8	6	8	10	9	10	8	6	5	7
9	10	9	7	9	7	9	10	8	6
10	9	10	11	12	11	10	9	11	10
11	12	11	9	10	9	11	12	11	12
12	11	12	12	11	12	12	11	10	9

Passons maintenant au cas du groupe irréductible primitif $G_4 \leq U_2(\mathbb{C})$, engendré par les réflexions

$$r_1 := \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}, \quad r'_1 := rr_1r = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -1-i & -1+i \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix},$$

où

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega := e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Nous prétendons alors que G_4 est présenté par

$$G := \langle x, y \mid x^3 = y^3 = 1, \quad xyx = yxy \rangle =: 3[3]3,$$

la dernière notation ayant été introduite dans [2]. Dans G_4 , x et y correspondent respectivement à r_1 et r'_1 (ou l'inverse, la situation étant symétrique). Nous choisissons $H := \langle xy \rangle$, qui est d'ordre 6 et nous avons alors les tables

x	y
1	2
2	1

x	x^{-1}	y	y^{-1}
1 2	2 1	2 1	1 2
2 3	3 2	1 4	4 1
3 1	1 3	4 2	2 4
4 4	4 4	3 3	3 3

x	x	x	y	y	y	x	y	x	$y^{-1}x$	y^{-1}		
1	2	3	1	4	2	1	2	1	2	4	4	1
2	3	1	2	1	4	2	3	3	1	2	1	2
3	1	2	3	3	3	3	1	4	4	1	3	3
4	4	4	4	4	2	1	4	2	3	3	2	4

Nous rappelons ensuite que le groupe primitif G_{12} est engendré par les réflexions

$$r_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r'_3 := rr_3r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r''_3 := (r_1^2 r_4)^{-1} r_3 (r_1^2 r_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$r_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad r_1 = \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La présentation supposée de G_{12} serait alors

$$G := \langle x, y, z \mid x^8 = y^3 = z^2 = xyz = [x^4, y] = 1 \rangle.$$

Dans G_{12} , on peut représenter x , y et z respectivement par

$$\begin{cases} x \rightarrow r_3'' r_3' r_3^{-1} r_3''^{-1} r_3 r_3'^{-1} r_3'' r_3' r_3^{-1} (r_3' r_3''^{-1})^3 \\ y \rightarrow r_3' r_3''^{-1} r_3 r_3'^{-1} \\ z \rightarrow r_3'' r_3' r_3''^{-1} r_3' r_3^{-1} r_3''^{-1} r_3 r_3'^{-1} r_3'' r_3' r_3^{-1} \end{cases}$$

et ces éléments engendrent bien G_{12} puisque l'on a

$$\begin{cases} r_3 \rightarrow zy(xzy^{-1})^3 \\ r_3' \rightarrow zy^2z[x^{-1}, z]y^{-1}z \\ r_3'' \rightarrow zy^3z[x^{-1}, z]y^{-1}z(xzy^{-1})^2 \end{cases}$$

Nous prenons $H := \langle x \rangle$ d'ordre 8 et nous avons les tables

$$\frac{x}{1 \mid 1}$$

x	x^{-1}	y	y^{-1}	z	z^{-1}
1	1	1	2	1	2
2	3	2	3	2	1
3	5	3	1	3	4
4	2	4	6	4	3
5	4	5	4	5	6
6	6	6	5	6	5

x	y	y	y	z	z									
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1
2	3	5	4	2	3	5	4	2	2	2	3	1	2	2
3	5	4	2	3	5	4	2	3	3	3	1	2	3	3
4	2	3	5	4	2	3	5	4	4	4	6	5	4	4
5	4	2	3	5	4	2	3	5	5	5	4	6	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	4	6	6

x	y	z	x	x	x	x	y	x^{-1}	x^{-1}	x^{-1}	x^{-1}	y^{-1}
1	1	2	1	1	1	1	2	4	5	3	2	1
2	3	1	2	3	5	4	1	1	1	1	1	2
3	5	4	3	5	4	2	1	1	1	1	1	3
4	2	3	4	2	3	5	4	6	6	6	6	4
5	4	6	5	4	2	3	5	4	5	3	2	4
6	6	5	6	6	6	6	5	3	2	4	5	6

Enfin, pour ce qui est du cas du groupe imprimitif $G(4, 2, 2)$, nous affirmons qu'il est présenté par

$$G := \langle x, y, z \mid x^2 = y^4 = z^2 = [y, z] = [y, x] = (xzy^{-1})^2 = 1 \rangle.$$

$G(4, 2, 2) \simeq A(4, 2, 2) \rtimes \mathfrak{S}_2$ est engendré par les éléments

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que l'on peut faire correspondre respectivement à x , y et z . Nous choisissons le sous-groupe $H := \langle y \rangle$ d'ordre 4 et nous pouvons construire les tables

$$\frac{y}{1 \mid 1}$$

x	
1	2
2	1
4	3
3	4

x^{-1}	
2	1
1	2
3	4
4	3

y	
1	1
3	3
2	2
4	4

y^{-1}	
1	1
3	3
2	2
4	4

z	
1	3
3	1
2	4
4	2

z^{-1}	
3	1
1	3
4	2
2	4

x	x	
1	2	1
2	1	2
3	4	3
4	3	4

z	z	
1	3	1
2	4	2
3	1	3
4	2	4

y	y	y	y	
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

y	z	$y^{-1}z^{-1}$		
1	1	3	3	1
2	2	4	4	2
3	3	1	1	3
4	4	2	2	4

y	x	$y^{-1}x^{-1}$		
1	1	2	2	1
2	2	1	1	2
3	3	4	4	3
4	4	3	3	4

x	z	$y^{-1}x$	z	y^{-1}		
1	2	4	4	3	1	1
2	1	3	3	4	2	2
3	4	2	2	1	3	3
4	3	1	1	2	4	4

Ceci achève la démonstration du théorème 3. □

Références

- [1] H. S. M Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, 1957.
- [2] A. Garnier, *Groupes de réflexions complexes de rang deux*, Mémoire de Master 2 Agrégation Externe, UPJV, 2017.
- [3] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, 2002.
- [4] G. I. Lehrer and D. E. Taylor, *UNITARY REFLECTION GROUPS*, Cambridge University Press, 2009.
- [5] G. Rauch, *LES GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS*, Ellipses, 2000.
- [6] J. J. Rotman, *AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF GROUPS*, Springer-Verlag, 1995.