Le Théorème de Borel-Weil-Bott

Arthur Garnier

9 novembre 2018

Table des matières

0.1 Introduction

On se propose, dans ce court exposé, de donner un apreçu d'un résultat important : le théorème de Borel-Weil-Bott. Il s'agit de réaliser géométriquement toute représentation irréductible d'un groupe réductif (connexe) G sur un corps k algébriquement clos de caractéristique zéro. Plus précisément, on construit, pour tout poids dominant λ, un fibré en droites $\mathcal{L}_\lambda$ sur la variété de drapeaux G/B de G, avec B un sous-groupe de Borel. L'espace des sections globales de $\mathcal{L}_\lambda$ est alors naturellement muni d'une structure de G-module et, puisque la variété G/B est projective (voir l'Annexe), cet espace est de dimension finie. En fait, le théorème de Borel-Weil affirme simplement que $\Gamma(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ s'identifie à la contragrédiente de la représentation irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids λ de G.

Par ailleurs, ce résultat a été précisé par Raoul Bott en 1957 : les espaces de cohomologie supérieurs de $\mathcal{L}_\lambda$ sont triviaux. Ceci peut se voir comme un résultat négatif en ce sens que la cohomologie n'apporte pas d'information supplémentaire sur les représentations de G. De manière encore plus précise, si l'on considère l'action $\star$ du groupe de Weyl W sur le dual de la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, on peut calculer la cohomologie du fibré décalé $\mathcal{L}_{w\star\lambda}$; et celle-ci vaut $V(\lambda)^*$ en degré $\ell(w)$ et est triviale ailleurs.

En plus d'être passionnant en soi et de constituer un premier lien fort entre les représentations de G et la géométrie de G/B, le théorème de Borel-Weil-Bott permet de retrouver la formule du caractère de Weyl, via le théorème $\mathfrak{n}$-cohomologique de Kostant. Ce dernier résultat décrit explicitement la décomposition en sous-espaces de poids (comme $\mathfrak{h}$-module) de la cohomologie du radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$, à coefficients dans un module de plus haut poids.

Pour fixer les idées, nous allons restreindre les preuves au cas $k = \mathbb{C}$, en gardant à l'esprit qu'elles restent valables dans le cas général.

0.2 Le résultat de Borel et Weil

Fixons G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$, T un tore maximal, B un sous-groupe de Borel contenant T, d'algèbres de Lie associées $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{h}$; cette dernière étant une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition en sous-espaces de poids

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

et si l'on note $\mathfrak{n} := [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, alors on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. D'après le Théorème 26.2 de [2], on en déduit qu'on a un produit semi-direct $B \simeq N \rtimes T$, avec N un sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ (on peut prendre $N = [B, B]$). Par ailleurs, dire que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est un poids *entier*, c'est dire que pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$, on a $\lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$. Ceci entraîne que λ provient, via l'exponentielle, d'un morphisme de groupes algébriques $T \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{G}_m$ et l'ensemble de tels morphismes est noté $X(T) = \mathrm{Hom}\,(T, \mathbb{G}_m)$. De plus, dire qu'un poids entier $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est *dominant*, c'est dire que $\lambda(\alpha^\vee) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Pi$. On note $X(T)_+$ l'ensemble de tels poids, vus comme morphismes $T \to \mathbb{C}^\times$. La décomposition $B = N \rtimes T$ montre que l'on peut étendre tout poids entier $\lambda : T \to \mathbb{C}^\times$ à B en imposant $\lambda_{|N} = 1$. Si $\lambda \in X(T)$ est entier, on définit une action de B sur $\mathbb{C}$ en posant $b \cdot z := \lambda(b)z$ et le B-espace résultant sera noté $\mathbb{C}_\lambda$.

Soient donc $\lambda \in X(T)$ un poids entier. En faisant agir B à gauche sur $\mathbb{C}_{-\lambda}$ (on voit ici λ comme un élément du dual de $\mathfrak{h}$, donc la notation $\mathbb{C}_{-\lambda}$ signifie qu'on fait agir B par $\lambda(b)^{-1}$) et par multiplication à droite sur G, on obtient une action de B sur $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ et on peut former le quotient $G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} := (G \times \mathbb{C}_{-\lambda})/B$. Puisque $B \leq G$ est fermé, on a un B-fibré principal $B \to G \to G/B$ et par le Proposition 1.4.4 de [4], on en tire que la projection canonique $\pi : G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \twoheadrightarrow G/B$ est un espace fibré, de fibre $\mathbb{C}_{-\lambda}$. Comme l'action de B sur G est libre, la B-action sur $G \times \mathbb{C}_{-\lambda}$ est libre également, donc $G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda}$ est une variété algébrique. Autrement dit, la projection $\pi : G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \to G/B$ est un fibré en droites sur la variété de drapeaux G/B. On note $\mathcal{L}_\lambda$ ce fibré. On peut remarquer de plus que ce fibré est G-équivariant, de telle sorte que toute cohomologie $H^p(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ est naturellement munie d'une structure de G-module.

Enfin, comme G est réductif, pour tout poids entier dominant $\lambda \in X(T)_+$, on peut choisir une représentation complexe irréductible $V(\lambda)$ de G, de plus haut poids λ. En fait, toute représentation irréductible de G est construite de cette manière et l'ensemble $\mathrm{Irr}(G, \mathbb{C})$ des représentations irréductibles de G est en bijection avec $X(T)_+$.

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. (Borel-Weil, [7], Theorem 4)
Soient G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$, B un sous-groupe de Borel, T un tore maximal, d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{h}$. Soit encore $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un poids entier dominant. Si l'on note $\mathcal{L}_\lambda := (G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \xrightarrow{\pi} G/B)$ le fibré en droites associé à λ et $V(\lambda)$ une représentation irréductible de plus haut poids λ de G, alors on a un isomorphisme de G-modules :

$$H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \simeq V(\lambda)^*.$$

Avant de démontrer ce résultat, donnons un lemme :

Lemme 2. ([10], Theorem 27.3.9)
Considérons l'espace

$$\mathcal{M} := \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$$

sur lequel on fait agir $G^2 = G \times G$ composante par composante. D'autre part, faisons agir G^2 sur l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G]$ de G via $((g_1, g_2) \cdot f)(g) = f(g_1^{-1} g g_2)$ et définissons $\phi := \sum_\mu \phi_\mu$ avec

$$\begin{array}{cccc} \phi_\mu & : & V(\mu)^* \otimes V(\mu) & \to & \mathbb{C}[G] \\ & & f \otimes v & \mapsto & (g \mapsto f(gv)) \end{array}$$

Alors, le morphisme

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}[G]$$

est un isomorphisme de G^2-modules.

Démonstration. Notons, en suivant [10], $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-modules rationnels simples et pour $\omega \in \widehat{G}$, on considère M_ω un représentant de ω. Alors $X(T)_+$ est en bijection avec $\widehat{G}$ via $\mu \mapsto [V(\mu)]$. Soient $\phi := \sum_{\omega \in \widehat{G}} \phi_\omega$ où $\phi_\omega : M_\omega^* \otimes M_\omega \to k[G]$ est donnée par $\phi_\omega(f \otimes v)(g) := f(gv)$. Tout d'abord, on a, pour tout $(g,h) \in G^2$, tout $f \in M_\omega^*$, tout $v \in M_\omega$ et tout $x \in G$,

$$((g,h) \cdot \phi(f \otimes v))(x) = \phi(f \otimes v)(g^{-1}xh) = f(g^{-1}xhv) = (g \cdot f)(xhv) = \phi((g \cdot f) \otimes (h \cdot v))(x),$$

donc $(g,h) \cdot \phi(f \otimes v) = \phi((g,h) \cdot (f \otimes v))$, donc ϕ est bien un morphisme de G^2-modules.

Fixons $f \in M_\omega^* \setminus \{0\}$. Pour $v \in M_\omega$, on a $(1,g)(f \otimes v) = f \otimes (gv)$ et ainsi, $f \otimes M_\omega$ est un G-modules simple isomorphe à M_ω. Puisqu'en notant ρ la représentation de G sur $k[G]$ par multiplication à droite, on a $\rho_g(\phi(f \otimes v)) = \phi(f \otimes (gv))$, ϕ induit un morphisme de G-modules $f \otimes M_\omega \to k[G]$. Il est clair que $\phi(f \otimes M_\omega) \neq 0$, donc ce dernier est isomorphe à M_ω et est contenu dans la composante ω-isotypique $k[G]_{(\omega)}$ de $k[G]$. On en tire que

$$\forall \omega \in \widehat{G},\ k[G]_{(\omega)} \neq 0.$$

Soit maintenant V un sous-modules simple de $k[G]$, isomorphe à M_ω et soit $x \mapsto u_x$ un G-isomorphisme $M_\omega \to V$. Définissons $f \in M_\omega^*$ via $f(x) := u_x(1)$, pour $x \in M_\omega$. Alors, pour $g \in G$ et $x \in M_\omega$, on a $\phi(f \otimes x)(g) = f(gx) = u_{gx}(1) = (g \cdot u_x)(1) = u_x(g)$. On en déduit que $\phi(f \otimes M_\omega) = V$. Puisque $\phi(M_\omega^* \otimes M_\omega) \subset k[G]_{(\omega)}$, le premier point ci-dessus entraîne que

$$\phi(M_\omega^* \otimes M_\omega) = k[G]_{(\omega)}.$$

Ceci implique la surjectivité de ϕ, puisqu'on a (par [10], Theorem 27.3.6, (ii)) la décomposition en composante isotypiques

$$k[G] = \bigoplus_{\omega \in \widehat{G}} k[G]_{(\omega)}.$$

Fixons temporairement $\omega \in \widehat{G}$ et posons $M := M_\omega$. Si V est un sous-module de M, son orthogonal (au sens de la dualité) est un sous-module de M^* ; donc M^* est un G-module simple. Nous prétendons que $M^* \otimes M$ est un G^2-module simple. Pour le voir, notons σ (resp.

σ') la représentation de G sur M (resp. sur M^*). Notons aussi θ la représentation de G^2 sur $M^* \otimes M$. Par le théorème de Burnside (voir [10], Theorem 10.8.11), la sous-algèbre de $\mathrm{End}\,(M)$ (resp. de $\mathrm{End}\,(M^*)$) engendrée par $\sigma(G)$ (resp. par $\sigma'(G)$)) est égale à $\mathrm{End}\,(M)$ (resp. à $\mathrm{End}\,(M^*)$). Puisque $\mathrm{End}\,(M^* \otimes M) \simeq \mathrm{End}\,(M) \otimes \mathrm{End}\,(M^*)$, on en déduit que la sous-algèbre de $\mathrm{End}\,(M^* \otimes M)$ engendrée par $\theta(G^2)$ est égale à $\mathrm{End}\,(M^* \otimes M)$. Ceci montre que le G^2-module $M^* \otimes M$ est simple.

Enfin, si ϕ n'était pas injective, comme on a $k[G] = \bigoplus_\omega k[G]_{(\omega)}$, on aurait que $\phi_\omega : M_\omega^* \otimes M_\omega \to k[G]_{(\omega)}$ ne serait pas injective pour un certain ω et, comme $M_\omega^* \otimes M_\omega$ est simple, ceci entraînerait que $\phi_\omega = 0$ et donc que $k[G]_{(\omega)} = \phi(M_\omega^* \otimes M_\omega) = 0$, ce qui contredirait le premier point. $\square$

Démonstration. (du théorème de Borel-Weil)

Considérons le fibré en droites $\mathcal{L} := \mathcal{L}_\lambda$, ainsi que son changement de base via $G \to G/B$:

$$\begin{tikzcd} G \times \mathbb{C}_{-\lambda} \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\pi}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r] & G/B \end{tikzcd}$$

On note $\widehat{\mathcal{L}} = (G \times \mathbb{C}_{-\lambda} \overset{\widehat{\pi}}{\twoheadrightarrow} G)$ le fibré résultant (c'est le fibré en droites trivial sur G). On va comparer les sections de $\mathcal{L}$ et de $\widehat{\mathcal{L}}$. On voit immédiatement que

$$\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}}) = \{\sigma : G \to G \times \mathbb{C}_{-\lambda}\ ;\ \widehat{\pi} \circ \sigma = id_G\}$$

$$= \{\sigma : G \to G \times \mathbb{C}_{-\lambda}\ ;\ \exists f : G \to \mathbb{C}_{-\lambda}\ ;\ \sigma(g) = (g, f(g))\} \simeq \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}.$$

On a une action canonique de B sur $\mathbb{C}[G]$ donnée par $(b \cdot f)(g) = f(gb)$ et en considérant l'action diagonale, on obtient une action de B sur $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$. Puisque $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}[G]$, on obtient une nouvelle B-action sur $\mathbb{C}[G]$ donnée par

$$(b \cdot f)(g) := \lambda(g)^{-1} f(gb). \tag{1}$$

Cette action fait de $\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})$ un B-module.
Ensuite, les sections de $\mathcal{L}$ sont de la forme $\sigma(gB) = [g, f(g)]$ pour une fonction régulière $f : G \to \mathbb{C}_{-\lambda}$. Pour que σ soit bien définie, on doit avoir pour tout $g \in G$ et tout $b \in B$,

$$[g, f(g)] = \sigma(gB) = \sigma((gb)B) = [gb, f(gb)] = [g, \lambda(b)^{-1} f(gb)]$$

et donc, f doit vérifier $f(g) = \lambda(b)^{-1} f(gb)$ pour tout $(g, b) \in G \times B$. On obtient alors un isomorphisme de G-modules

$$\Gamma(G/B, \mathcal{L}) \simeq \Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})^B.$$

Il reste donc à montrer que $\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})^B \simeq V(\lambda)^*$.

Pour ceci, on remarque que $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ possède une action diagonale de $G \times B$, dans laquelle on oublie l'action de G lorsque l'on fait agir le produit sur $\mathbb{C}_{-\lambda}$ et l'action sur la premier facteur est la restriction à $G \times B$ de l'action de $G \times G$ sur $\mathbb{C}[G]$. Puisqu'on a un isomorphisme de G-modules $\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}}) \simeq \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ (où $g \in G$ agit comme $(g, 1)$ sur $\mathbb{C}[G]$: $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$) et que cette action de G sur $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ commute à l'action de B donnée par (1), on obtient, grâce au Lemme 2, un isomorphisme de G-modules

$$\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})^B \simeq (\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B \simeq (\mathcal{M} \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B = \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} (V(\mu)^* \otimes V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B.$$

De plus, vu l'action de B sur $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$, l'action restreinte sur $V(\mu)^* \otimes V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ se fait sur les deux dernièrs facteurs, d'où

$$\Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})^B \simeq \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes (V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B.$$

Ensuite, pour $\mu \in X(T)_+$, en raisonnant sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$, on voit que si l'on considère un vecteur primitif $v_\mu \in V(\mu)$ de plus haut poids μ, alors $V(\mu) = G \langle v_\mu \rangle$ et $V(\mu)$ possède une unique droite B-stable (qui est $\mathbb{C} \langle v_\mu \rangle$) sur laquelle B agit comme T : via $\mu(t)$. Ainsi, si $v \otimes z \in (V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B$ alors la droite $\mathbb{C} \langle v \rangle$ doit être B-stable, donc est égale à $\mathbb{C} \langle v_\mu \rangle$ et donc

$$(V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B = (\mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B = (\mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^T.$$

Enfin, comme T agit sur $\mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ par $t \cdot (z \otimes z') = (\mu(t) z) \otimes (\lambda(t)^{-1} z') = \mu(t)\lambda(t)^{-1}(z \otimes z')$, l'espace $\mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_{-\lambda}$ ne peut avoir de T-invariants que si $\mu = \lambda$, auquel cas on a $(\mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^T \simeq \mathbb{C}_1$. On obtient donc finalement un isomorphisme de G-modules

$$\begin{aligned} \Gamma(G/B, \mathcal{L}) \simeq \Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}})^B &\simeq \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} (V(\mu)^* \otimes V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B \simeq \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes (V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^B \\ &= \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes (\mathbb{C}_\mu \otimes \mathbb{C}_{-\lambda})^T = V(\lambda)^* \otimes \mathbb{C} = V(\lambda)^*, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

0.3 Extension à la cohomologie supérieure : la généralisation de Bott

Dans la suite, pour un B-module M de dimension finie, on désignera abusivement par M^P le fibré en droites $P \times_B M \to P/B$ pour un sous-groupe parabolique standard P. On notera également $H^p(P/B, M) = H^p(P/B, M^P)$ la cohomologie du faisceau inversible associé au fibré M^P (on confond allègrement faisceaux localement libres de rang fini et fibré vectoriels). On notera également B_S le sous-groupe de Borel de $SL_2(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

Lemme 3. *Soient $\alpha \in \Pi$ une racine simple et $\mu \in X(T)$ un poids entier. Soit aussi $P_\alpha := \langle \dot{s_\alpha}, B \rangle$ le sous-groupe parabolique standard minimal associé à α. On sait (voir [4], Lemme 2.3.32) que l'on a un isomorphisme de variété projectives $\varphi : P_\alpha/B \xrightarrow{\sim} SL_2(\mathbb{C})/B_S \xrightarrow{\sim} \mathbb{CP}^1 =: \mathbb{P}^1$. Alors, on a*

$$\varphi_*(\mathbb{C}_\mu^{P_\alpha}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\mu(\alpha^\vee)).$$

Démonstration. On rappelle que pour identifier P_α/B et SL_2/B_S, on choisit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)$ dans $\mathfrak{g}$ est on condière l'inclusion $\mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Cette injection donne un plongement $\iota : SL_2 \hookrightarrow G$ et comme $\dot{s_\alpha} \in \mathrm{im}(\iota)$, on a $P_\alpha = \iota(SL_2)B$. On obtient alors

$$P_\alpha / B = \iota(SL_2)B / B \simeq \iota(SL_2) \Big/ \iota(SL_2) \cap B \simeq SL_2 / B_S.$$

Sous cette identification, le poids μ est envoyé sur un poids de SL_2, encore noté μ, la racine α est envoyée sur la racine simple de SL_2 et $\mathbb{C}_\mu^{P_\alpha}$ est envoyé sur $\mathbb{C}_\mu^{SL_2} =: \mathbb{C}_\mu$, avec des notations évidentes. Il suffit donc de regarder le cas de SL_2. On a l'isomorphisme de variétés

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & SL_2/B_S & \to & \mathbb{P}^1 \\ & & \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] & \mapsto & [a:c] \end{array}$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\psi_*(\mathbb{C}_\mu) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\mu(\alpha^\vee)).$$

Rappelons que l'on a

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \psi_*(\mathbb{C}_\mu)) = \Gamma(SL_2, \widetilde{\psi_*(\mathbb{C}_\mu)})^{B_S} = \{f : SL_2 \to \mathbb{C}_\mu \, ; \, f(gb) = \mu(b)^{-1} f(g), \, \forall g \in SL_2, \, \forall b \in B_S\}$$

On va s'intéresser aux section de $\psi_*(\mathbb{C}_\mu)$ (vu comme fibré en droites) sur les ouverts affines standard $U_j = \{x_j \neq 0\} = D^+(X_j)$ $(j = 0, 1)$ de $\mathbb{P}^1$. Soit donc $\sigma \in \Gamma(U_0, \psi_*(\mathbb{C}_\mu)) = \Gamma(\pi^{-1}(U_0), \widetilde{\psi_*(\mathbb{C}_\mu)})^{B_S}$ où l'on a posé $\pi : SL_2 \twoheadrightarrow SL_2/B_S \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^1$. La section σ s'identifie donc à une fonction $f : \pi^{-1}(U_0) \to \mathbb{C}_\mu$ telle que

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = \mu\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

La coracine $\alpha^\vee$ est envoyé dans SL_2 sur la coracine

$$\begin{array}{cccc} \alpha^\vee & : & \mathbb{C}^\times & \to & T_S \\ & & c & \mapsto & \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

et dans ce cas, $\mu \circ \alpha^\vee : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est une puissance, disons $x \mapsto x^k$ et on a $k = \mu(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$. On obtient alors

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a^{-k} f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci signifie qu'en voyant f comme étant définie sur U_0, on a

$$f([a:c]) = a^{-k} f([1 : c/a]),$$

soit encore

$$f([ax:ay]) = a^{-k} f([x:y]).$$

On peut faire la même chose sur U_1 et obtenir le même résultat. Or, on sait qu'il existe un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\psi_*(\mathbb{C}_\mu) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ et, sur U_j, une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ est un quotient d'un polynôme homogène par une puissance de X_j, de degré total d. Par la formule ci-dessus, le degré total ici ne peut être que $d = -k$, soit

$$\psi_*(\mathbb{C}_\mu) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\mu(\alpha^\vee)).$$

□

Lemme 4. *Soient $\alpha \in \Pi$ une racine simple, P_α le sous-groupe parabolique standard associé, M un P_α-module et $\mu \in X(T)$ un poids entier tel que $\mu(\alpha^\vee) = 1$. Alors, on a*

$$\forall i \geq 0, \; H^i(G/B, M \otimes \mathbb{C}_\mu) = 0.$$

Démonstration. Nous allons utiliser la suite spectrale de Leray. On commence par faire la remarque générale suivante :

Si ξ est un fibré vectoriel algébrique sur une variété projective X et si $\eta = (X \times F \overset{\mathrm{pr}_1}{\twoheadrightarrow} X)$ est un fibré trivial, alors on a

$$\forall i \geq 0,\ H^i(X, \eta \otimes \xi) \simeq F \otimes H^i(X, \xi).$$

Maintenant, puisque M est un P_α-module par hypothèse, l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} P_\alpha \times_B M & \to & P_\alpha/B \times M \\ [pB, m] & \mapsto & (pB, pm) \end{array}$$

induit un isomorphisme de fibrés vectoriels entre M^{P_α} et le fibré trivial de fibre M. Par le remarque précédente, ceci entraîne

$$\forall q \geq 0,\ H^q(P_\alpha/B, M \otimes \mathbb{C}_\mu) \simeq M \otimes H^q(P_\alpha/B, \mathbb{C}_\mu).$$

De plus, par le Lemme 3, P_α/B s'identifie à $\mathbb{P}^1$ et, sous cette identification, le fibré $\mathbb{C}_\mu = \mathbb{C}_\mu^{P_\alpha}$ est envoyé sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\mu(\alpha^\vee))$ et on obtient, avec [5], III, Theorem 5.1,

$$\forall q \geq 0,\ H^q(P_\alpha/B, \mathbb{C}_\mu) \simeq H^q(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-\mu(\alpha^\vee))) = H^q(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0.$$

Ainsi, on a

$$\forall q \geq 0,\ H^q(P_\alpha/B, M \otimes \mathbb{C}_\mu) = 0.$$

Ceci étant, on a un fibré $P_\alpha/B \overset{\iota}{\hookrightarrow} G/B \overset{f}{\twoheadrightarrow} G/P_\alpha$ et en considérant le faisceau $\mathcal{F} := \iota_*(\mathbb{C}_\mu \otimes M) = \iota_*(\mathbb{C}_\mu^{P_\alpha} \otimes M^{P_\alpha})$ sur G/B, on a la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(G/P_\alpha, R^q f_* \mathcal{F}) \implies H^{p+q}(G/B, \mathcal{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} H^{p+q}(G/B, M \otimes \mathbb{C}_\mu).$$

Or, on a que $R^q f_* \mathcal{F}$ est le faisceau constant

$$R^q f_* \mathcal{F} = R^q (f\iota)_* (\mathbb{C}_\mu \otimes M) = R^q \Gamma(P_\alpha/B, \mathbb{C}_\mu \otimes M) = \underline{H^q(P_\alpha/B, \mathbb{C}_\mu \otimes M)} = 0.$$

Ainsi, on a

$$\forall p, q \geq 0,\ E_2^{p,q} = 0.$$

On obtient donc le résultat par convergence. □

On définit l'action $\star$ du groupe de Weyl W sur $\mathfrak{h}^*$ de la façon suivante

$$\forall w \in W,\ \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ w \star \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho,$$

où ρ est la demi-somme des racines positives, qui se trouve être aussi la somme des poids fondamentaux ω_α :

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta = \sum_{\alpha \in \Pi} \omega_\alpha.$$

On a alors l'important résultat suivant :

Proposition 5. *Soit $\mu \in X(T)$ un poids entier. S'il existe une racine simple $\alpha \in \Pi$ telle que $\mu(\alpha^\vee) \geq -1$, alors on a*

$$\forall p \geq 0,\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \simeq H^{p+1}(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha \star \mu}).$$

Démonstration. Commençons par supposer que $\mu(\alpha^\vee) \geq 0$. Considérons le fibré en droites $\mathcal{L}_{\mu+\rho}$ sur P_α/B, ainsi que $\mathcal{H} := H^0(P_\alpha/B, \mathcal{L}_{\mu+\rho})$. Rappelons que si $\iota : SL_2 \to G$ est le plongement relatif à un $\mathfrak{sl}_2$-triplet associé à α, alors d'après [9], Proposition 8.1.1, il existe un sous-groupe connexe U_α de P_α, d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\alpha = \bigoplus_{\beta\in\Phi^+\setminus\{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta$ et c'est un sous-groupe de B par [9], Corollary 8.1.3. De plus, on a $P_\alpha = \langle \iota(SL_2), B\rangle$ et si l'on pose $M_\alpha := \langle \iota(SL_2), T\rangle$, alors on a un produit semi-direct $P_\alpha = U_\alpha \rtimes M_\alpha$ (voir [4], Proposition 2.3.21). En fait, d'après [9], Theorem 8.4.3, on a $U_\alpha = R_u(P_\alpha)$, de telle sorte que le groupe $M_\alpha \simeq P_\alpha/U_\alpha$ est réductif.

Ensuite, l'action de P_α sur $\mathcal{H}$ est donnée par $(p\cdot\sigma)(p'B) = p\sigma(p^{-1}p'B)$. Or, on peut identifier $\mathcal{H}$ avec l'ensemble des fonctions régulières $\tau : P_\alpha \to \mathbb{C}$ telles que $\tau(pb) = (\mu+\rho)(b)\tau(p)$ pour tous $p \in P_\alpha$, $b \in B$ et P_α agit sur τ par $(p\cdot\tau)(p') = \tau(p^{-1}p')$. Si $p \in P_\alpha$ et $u \in U_\alpha \trianglelefteq P_\alpha$, alors $p^{-1}u^{-1}p \in U_\alpha \leq B$ et on a

$$(u\cdot\tau)(p) = \tau(u^{-1}p) = \tau(p(p^{-1}u^{-1}p)) = (\mu+\rho)(u)^{-1}\tau(p) = \tau(p),$$

donc $u\cdot\tau = \tau$ et l'action de U_α sur $\mathcal{H}$ est donc triviale.

En considérant le fibré $\mathcal{L}_{\mu+\rho}$ sur le groupe réductif M_α et $V_\alpha(\mu+\rho)^*$ le module simple de plus haut poids $\mu+\rho$ de M_α, le Théorème 1 de Borel-Weil assure qu'on a un isomorphisme de M_α-modules

$$\mathcal{H} \simeq V_\alpha(\mu+\rho)^*.$$

Ainsi, en tant que T-modules, on a une décomposition en sous-espaces de poids

$$\mathcal{H} \simeq V_\alpha(\mu+\rho)^* = \bigoplus_{j=0}^{(\mu+\rho)(\alpha^\vee)} \mathbb{C}_{j\alpha-(\mu+\rho)}.$$

On en tire que la projection $\mathcal{H} \to \mathbb{C}_{-(\mu+\rho)}$ est un morphisme de B-modules et en notant K son noyau, on obtient une suite exacte courte de B-modules

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}_{-(\mu+\rho)} \longrightarrow 0\,.$$

Puisque le B-module $\mathbb{C}_\rho$ est projectif, on peut tensoriser par ce dernier pour obtenir une nouvelle suite exacte

$$0 \longrightarrow K\otimes\mathbb{C}_\rho \longrightarrow \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho \longrightarrow \mathbb{C}_{-\mu} \longrightarrow 0\,.$$

La suite exacte longue induite en cohomologie s'écrit

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & & \\
H^p(G/B, \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[r] & H^p(G/B, \mathbb{C}_{-\mu}) \arrow[r] & H^{p+1}(G/B, K\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[r] & H^{p+1}(G/B, \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[d] \\
& & & \vdots
\end{tikzcd}$$

D'après le Lemme 4, on a

$$\forall p \geq 0,\ \ H^p(G/B, \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho) = 0$$

et donc

$$\forall p \geq 0,\ \ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \overset{\text{def}}{=} H^p(G/B, \mathbb{C}_{-\mu}) \simeq H^{p+1}(G/B, K\otimes\mathbb{C}_\rho). \tag{2}$$

Ensuite, considérons l'inclusion de B-modules $\mathbb{C}_{-s_\alpha(\mu+\rho)} \to K$, M son conoyau et la suite exacte courte qui en résulte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_{-s_\alpha(\mu+\rho)} \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

On tensorise encore par $\mathbb{C}_\rho$ pour obtenir une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_{-s_\alpha\star\mu} \longrightarrow K\otimes\mathbb{C}_\rho \longrightarrow M\otimes\mathbb{C}_\rho \longrightarrow 0\ .$$

En passant à nouveau à la suite exacte longue de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & & \\
H^{p-1}(G/B, M\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[r] & H^p(G/B, \mathbb{C}_{-s_\alpha\star\mu}) \arrow[r] & H^p(G/B, K\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[r] & H^p(G/B, M\otimes\mathbb{C}_\rho) \arrow[d] \\
& & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Or, en tant de B-module, on a

$$M \simeq \bigoplus_{j=1}^{(\mu+\rho)(\alpha^\vee)-1} \mathbb{C}_{j\alpha-(\mu+\rho)}.$$

On peut donc considérer M comme un P_α-module et alors le Lemme 4 en traîne

$$\forall p \geq 0,\ H^p(G/B, M\otimes\mathbb{C}_\rho) = 0$$

et donc

$$\forall p \geq 1,\ H^p(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha\star\mu}) \overset{\text{def}}{=} H^p(G/B, \mathbb{C}_{-s_\alpha\star\mu}) \simeq H^p(G/B, K\otimes\mathbb{C}_\rho). \tag{3}$$

En combinant (2) et (3), on obtient alors

$$\forall p \geq 0,\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \simeq H^{p+1}(G/B, K\otimes\mathbb{C}_\rho) \simeq H^{p+1}(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha\star\mu}).$$

Ceci termine la preuve de la proposition dans le cas $\mu(\alpha^\vee) \geq 0$.

Si $\mu(\alpha^\vee) = -1$, alors on a $s_\alpha\star\mu = s_\alpha(\mu+\rho)-\rho = s_\alpha(\mu)-\alpha = \mu$ et la proposition revient à prouver que

$$\forall p \geq 0,\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) = 0.$$

Mais, dans ce cas on a $K = 0$ et $\mathcal{H} = \mathbb{C}_{-(\mu+\rho)}$, donc $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho = \mathbb{C}_{-\mu}$ et comme $\mathcal{H}$ est un P_α-module, on a, par le Lemme 4,

$$\forall p \geq 0,\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \overset{\text{def}}{=} H^p(G/B, \mathbb{C}_{-\mu}) = H^p(G/B, \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}_\rho) = 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Corollaire 6. *Soient $w \in W$ et $\mu \in X(T)_+$ un poids entier dominant. Alors, on a des isomorphismes de G-modules*

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \simeq H^{p+\ell(w)}(G/B, \mathcal{L}_{w\star\mu}).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la longeur $\ell(w)$ de w. Si $\ell(w) = 1$, alors $w = s_\alpha$ pour une racine simple $\alpha \in \Pi$ et on conclut avec la Proposition 5. Supposons le résultat vrai pour tout $v \in W$ tel que $\ell(v) < \ell(w)$. Écrivons $w = s_\alpha v$, avec $\ell(v) < \ell(w)$ et $\alpha \in \Pi$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) \simeq H^{p+\ell(v)}(G/B, \mathcal{L}_{v\star\mu}).$$

Maintenant, on a $(v \star \mu)(\alpha^\vee) = v(\mu+\rho)(\alpha^\vee) - \rho(\alpha^\vee) = (\mu+\rho)(v^{-1}\alpha^\vee) - 1 \geq -1$ car $\mu + \rho$ est dominant et $v^{-1}\alpha^\vee$ est une coracine positive. En appliquant la Proposition 5, on obtient alors

$$\begin{aligned}\forall p \in \mathbb{Z},\ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) &\simeq H^{p+\ell(v)}(G/B, \mathcal{L}_{v\star\mu}) \\ \simeq H^{p+\ell(v)+1}(G/B, \mathcal{L}_{s_\alpha\star(v\star\mu)}) &= H^{p+\ell(w)}(G/B, \mathcal{L}_{w\star\mu}).\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant prouver le

Théorème 7. (Borel-Weil-Bott, [7], Theorem 7)
Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, G un groupe réductif connexe sur k, B un sous-groupe de Borel de G, T un tore maximal contenu dans B, $\lambda \in X(T)_+$ un poids entier dominant et $w \in W$ un élément du groupe de Weyl. Si l'on note $\mathcal{L}_{w\star\lambda} := (G \times_B k_{-w\star\lambda} \xrightarrow{\pi} G/B)$ le fibré en droites associé à $w \star \lambda$ et $V(\lambda)$ la représentation irréductible de plus haut poids λ de G, alors on a des isomorphismes de représentations

$$\forall p \in \mathbb{N},\ H^p(G/B, \mathcal{L}_{w\star\lambda}) \simeq \begin{cases} V(\lambda)^* & si\quad p = \ell(w) \\ 0 & si\quad p \neq \ell(w) \end{cases}$$

Démonstration. Par le Corollaire 6, on a

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ H^p(G/B, \mathcal{L}_{w\star\lambda}) \simeq H^{p-\ell(w)}(G/B, \mathcal{L}_\lambda).$$

Nous prétendons que

$$\forall i \neq 0,\ H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = 0.$$

Ceci est vrai par convention si $i < 0$. Soit ensuite $w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur, de telle sorte que $\ell(w_0) = |\Phi^+| = \dim(G/B)$ (cette dernière égalité peut se voir comme conséquence de la décomposition de Bruhat de G/B). D'après le Corollaire 6 et le théorème de dimension cohomologique de Grothendieck (voir [5], III, Theorem 2.7), on obtient

$$\forall i > 0,\ H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \simeq H^{i+\dim(G/B)}(G/B, \mathcal{L}_{w_0\star\lambda}) = 0,$$

comme souhaité. Ainsi, on a obtenu

$$H^p(G/B, \mathcal{L}_{w\star\lambda}) = \delta_{p,\ell(w)} H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \simeq \delta_{p,\ell(w)} V(\lambda)^*,$$

ce dernier G-isomorphisme provenant du Théorème 1 de Borel-Weil. On peut recopier les preuves précédentes *mutatis mutandis* dans le cas où G est défini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique zéro et ceci termine de démontrer le théorème. □

Remarque 8. On peut même montrer que, si $\mu \notin W \star (X(T)_+)$ n'est pas image par W d'un poids entier dominant, alors on a

$$\forall p \geq 0, \ \ H^p(G/B, \mathcal{L}_\mu) = 0.$$

Exemple 9. Prenons $G = SL_2(\mathbb{C})$, de sous-groupe de Borel $B = B_S$ formé des matrices triangulaires supérieures de G et de tore maximal T formé des matrices diagonales de G. Notons α la seule racine simple de G. Un poids entier dominant $\lambda \in X(T)_+$ s'écrit

$$\lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^n, \quad n = \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{N}.$$

Donc les représentations irréductibles de G sont en bijection avec $\mathbb{N}$. De plus, la variété de drapeaux SL_2/B est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Le théorème de Borel-Weil donne dans ce cas

$$V_n^* := V(\lambda)^* \simeq \Gamma(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = \Gamma(SL_2/B, \mathbb{C}_{-\lambda}) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\lambda(\alpha^\vee))) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \mathbb{C}[Y, X]_n,$$

ce dernier espace étant formé des polynômes homogènes de degré n en X et Y. On obtient en particulier que $\dim(V_n) = n + 1$. De plus, en inspectant l'action de T sur V_n, on voit que les vecteurs de poids sont les $X^i Y^{n-i}$, $0 \leq i \leq n$ et que leurs poids sont les $2i - n$. En fait, si l'on considère de façon standard $V_n^{\mathfrak{s}} = \mathbb{C}[X, Y]_n$ comme un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules irréductible, avec action donnée par

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X\partial_Y, \ \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Y\partial_X, \ \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X\partial_X - Y\partial_Y,$$

alors on a

$$\begin{cases} e(X^i Y^{n-i}) = iX^{i-1} Y^{n-i+1} \\ f(X^i Y^{n-i}) = (n-i) X^{i+1} Y^{n-i-1} \\ h(X^i Y^{n-i}) = (2i - n) X^i Y^{n-i} \end{cases}$$

Ceci montre qu'en notant $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}$ la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^2$, on a

$$V_n^{\mathfrak{s}} \simeq \mathrm{Sym}^n(\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}).$$

On a donc aussi, en tant que représentations de SL_2,

$$V_n \simeq \mathrm{Sym}^n(\mathcal{R}),$$

où $\mathcal{R}$ est la représentation standard de SL_2 sur $\mathbb{C}^2$.

0.4 Applications : le théorème de Kostant et la formule du caractère de Weyl

Nous allons appliquer ici le théorème de Borel-Weil-Bott à la cohomologie des algèbres de Lie à coefficients dans un module de plus haut poids, puis nous en déduirons la formule du caractère de Weyl et la formule de dimension associée. On utilise les même notations que précédemment, à ceci près que l'on suppose désormais G semi-simple et simplement connexe. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est donc complexe semi-simple.

Commençons par quelques rappels sur la cohomologie des algèbres de Lie.

Définition 10. *([11], Definition 7.2.2)*
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro k et V un $\mathfrak{g}$-module. On pose

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \ ; \ \forall x \in \mathfrak{g},\ xv = 0\}.$$

On obtient ainsi un foncteur exact à gauche $(-)^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} - \mathfrak{Mod} \to k - \mathfrak{Mod}$. On définit alors

$$\forall i \geq 0,\ H^i(\mathfrak{g}, V) := R^i(-)^{\mathfrak{g}}(V).$$

Remarque 11. 1. En considérant l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, on a une équivalence de catégories ([11], Theorem 7.3.3)

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) - \mathfrak{Mod} \simeq \mathfrak{g} - \mathfrak{Mod}$$

et, en considérant k comme le $\mathfrak{g}$-module trivial, on a

$$V^{\mathfrak{g}} = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(k, V) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, V)$$

et donc

$$H^*(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{Ext}^*_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(k, V).$$

2. On peut faire de même avec les coinvariants $V_{\mathfrak{g}} = V/\mathfrak{g}V$ et on peut alors considérer

$$H_*(\mathfrak{g}, V) := L_*(-)_{\mathfrak{g}}(V) = L_*(k \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} -)(V) = \operatorname{Tor}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}_*(k, V).$$

Avant d'énoncer le théorème de Kostant, donnons un résultat important qui nous sera utile

Théorème 12. (Chevalley-Eilenberg, [11], Corollary 7.7.3)
Pour un $\mathfrak{g}$-module V, considérons le complexe de cochaînes $\operatorname{Hom}_k(\Lambda^*\mathfrak{g}, V)$, dont la différentielle $\delta^n : \operatorname{Hom}_k(\Lambda^n\mathfrak{g}, V) \to \operatorname{Hom}_k(\Lambda^{n+1}\mathfrak{g}, V)$ est donnée par

$$(\delta^n f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i f(x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_{n+1}).$$

Alors, ce complexe calcule la cohomologie de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans V : on a

$$H^*(\mathfrak{g}, V) = H^*(\operatorname{Hom}_k(\Lambda^*\mathfrak{g}, V), \delta).$$

Rappelons que si M est un P-module, avec P un sous-groupe parabolique, on peut former le fibré vectoriel $\mathcal{L}(M) := (G \times_P M \to G/P)$. Donnons encore un lemme

Lemme 13. ([8], Exercise 8.3E (4))
Soient P un sous-groupe parabolique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{u}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{l}$ un facteur de Levi de $\mathfrak{p}$ (i.e. une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$: ceci existe, voir [10], Theorem 29.5.7). Si M est un P-module rationnel de dimension finie, alors on a un isomorphisme de G-modules

$$H^p(G/P, \mathcal{L}(M)) \simeq \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes H^p(\mathfrak{u}, V(\mu) \otimes M)^{\mathfrak{l}}.$$

En particulier, si $P = B$, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{u} = \mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$, donc, pour tout B-module M on a

$$H^p(G/B, \mathcal{L}(M)) \simeq \bigoplus_{\mu\in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes H^p(\mathfrak{n}, V(\mu)\otimes M)^{\mathfrak{h}}.$$

Démonstration. Considérons les foncteurs

$$F := \Gamma(G/P, \mathcal{L}(-)) : P - \mathfrak{Mod} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(G/P) \xrightarrow{\Gamma} G - \mathfrak{Mod}$$

ainsi que

$$G(\mu) : P{-}\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{p}{-}\mathfrak{Mod} \overset{V(\mu)\otimes -}{\to} \mathfrak{u}{-}\mathfrak{Mod} \overset{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\mathbb{C},-)}{\to} \mathfrak{l}{-}\mathfrak{Mod} \overset{(-)^{\mathfrak{l}}}{\to} \mathfrak{Ab} \overset{V(\mu)^*\otimes -}{\to} \mathfrak{g}{-}\mathfrak{Mod} \overset{\exp}{\to} G{-}\mathfrak{Mod},$$

et

$$G = \bigoplus_{\mu\in X(T)_+} G(\mu) = \bigoplus_{\mu} V(\mu)^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\mathbb{C}, V(\mu)\otimes -)^{\mathfrak{l}}.$$

Alors, F et G sont deux foncteurs exacts à gauche $P - \mathfrak{Mod} \to G - \mathfrak{Mod}$, donc leurs foncteurs dérivés sont des ∂-foncteurs universels et pour montrer qu'ils sont isomorphes, il suffit de montrer que $R^0F(M) = R^0G(M)$ pour tout $M \in P - \mathfrak{Mod}$. Or, d'après le Lemme 2 et la preuve du Théorème 1, on a

$$F(M) = \Gamma(G/P, \mathcal{L}(M)) = \Gamma(G, \widehat{\mathcal{L}(M)})^{\mathfrak{p}} = (\mathbb{C}[G]\otimes M)^{\mathfrak{p}} = \left(\bigoplus_{\mu\in X(T)_+} V(\mu)^*\otimes V(\mu)\otimes M\right)^{\mathfrak{p}}$$

$$= \bigoplus_{\mu} (V(\mu)^*\otimes V(\mu)\otimes M)^{\mathfrak{p}} = V(\mu)^* \otimes (V(\mu)\otimes M)^{\mathfrak{p}}$$

$$= \bigoplus_{\mu} V(\mu)^* \otimes ((V(\mu)\otimes M)^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{l}} = \bigoplus_{\mu} V(\mu)^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\mathbb{C}, V(\mu)\otimes M)^{\mathfrak{l}} = G(M),$$

d'où le résultat. □

Théorème 14. (Kostant, [8], Exercise 8.3E (6))
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, avec la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Soient encore $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un poids entier dominant et $V(\lambda)$ une représentation irréductible de plus haut poids λ de $\mathfrak{g}$. Alors, on a

$$\forall p \geq 0,\ \ H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda)) = \bigoplus_{w\in W\ ;\ \ell(w)=p} \mathbb{C}_{w\star\lambda}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que pour $\mu \in X(T)$ et un $\mathfrak{b}$-module M de dimension 1, tel que le $\mathfrak{n}$ agisse trivialement sur M, on a $V(\mu)\otimes M \overset{\mathfrak{n}}{\simeq} V(\mu)$, donc $H^p(\mathfrak{n}, V(\mu)\otimes M) \simeq H^p(\mathfrak{n}, V(\mu)) \simeq H^p(\mathfrak{n}, V(\mu))\otimes M$ et si l'on considère que $\mathfrak{h}$ agit par restriction sur M et sur $H^p(\mathfrak{n}, V(\mu)\otimes M)$, alors on a un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules

$$H^p(\mathfrak{n}, V(\mu)\otimes M) \simeq H^p(\mathfrak{n}, V(\mu))\otimes M.$$

Maintenant, en tant que $\mathfrak{h}$-modules, on a une décomposition en sous-espaces de poids

$$H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda)) = \bigoplus_{\nu \in \mathfrak{h}^*} H_\nu = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{W}} H_\nu = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{W}} \mathbb{C}_\nu,$$

où $H_\nu = \{x \in H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda))\ ;\ hx = \mu(h)x\}$ et $\mathcal{W} = \{\nu \in \mathfrak{h}^*\ ;\ H_\nu \neq 0\}$ est l'ensemble des poids du $\mathfrak{h}$-module $H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda))$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{W} = \{w \star \lambda,\ w \in W\ ;\ \ell(w) = p\}$. Soit donc $\nu_0 \in \mathcal{W}$. Par ce qui précède avec $M = \mathbb{C}_{-\nu_0}$, on a

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{\nu_0} \otimes \mathbb{C}_{-\nu_0})^{\mathfrak{h}} = \left(\bigoplus_{\nu \in \mathcal{W}} \mathbb{C}_\nu \otimes \mathbb{C}_{-\nu_0}\right)^{\mathfrak{h}} = (H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda)) \otimes \mathbb{C}_{-\nu_0})^{\mathfrak{h}} = H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{-\nu_0})^{\mathfrak{h}}$$

et par le Lemme 13, on en tire que

$$0 \neq V(\lambda)^* \otimes H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{-\nu_0})^{\mathfrak{h}} \subset H^p(G/B, \mathcal{L}_{\nu_0}).$$

Par la remarque 8, ceci entraîne que $\nu_0 = \widetilde{w} \star \mu_0$ pour un $\mu_0 \in X(T)_+$. Par le Théorème de Borel-Weil-Bott, ceci entraîne que $\ell(\widetilde{w}) = p$ et alors

$$V(\lambda)^* \subset H^p(G/B, \mathcal{L}_{\widetilde{w} \star \mu_0}) \simeq V(\mu_0)^*$$

donc $\mu_0 = \lambda$ et alors $\nu_0 \in W \star \lambda$ et donc $\mathcal{W} \subseteq \{w \star \lambda,\ \ell(w) = p\}$. Réciproquement, si $w \in W$ tel que $\ell(w) = p$, montrons que $w \star \lambda \in \mathcal{W}$. Par le Théorème de Borel-Weil-Bott, on a

$$V(\lambda)^* = H^p(G/B, \mathcal{L}_{w \star \lambda}) = \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes H^p(\mathfrak{n}, V(\mu) \otimes \mathbb{C}_{-w \star \lambda})^{\mathfrak{h}},$$

donc

$$\mathbb{C} = H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda) \otimes \mathbb{C}_{-w \star \lambda})^{\mathfrak{h}} = (H^p(\mathfrak{n}, V(\lambda)) \otimes \mathbb{C}_{-w \star \lambda})^{\mathfrak{h}} = \bigoplus_{\nu \in \mathcal{W}} (\mathbb{C}_\nu \otimes \mathbb{C}_{-w \star \lambda})^{\mathfrak{h}}$$

et $\mathbb{C}_\nu \otimes \mathbb{C}_{-w \star \lambda}$ ne peut avoir de $\mathfrak{h}$-invariants que si $\nu = w \star \lambda$. Par conséquent, $w \star \lambda \in \mathcal{W}$. $\square$

Nous pouvons maintenant étudier les caractères. Avec les même notations que ci-dessus (G un groupe algébrique semi-simple complexe simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, etc), considérons le *réseau de poids* Λ de $\mathfrak{g}$, i.e. l'ensemble des poids entier, qui s'identifie à $X(T)$ et formons le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[\lambda]$. Pour $\lambda \in \Lambda$, on note $e^\lambda \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ l'élément de base correspondant à λ. On définit une multiplication sur $\mathbb{Z}[\Lambda]$ par $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ et convenons que $e^0 = 1$. Pour une représentation V de $\mathfrak{g}$, on a la décomposition en sous-espaces de poids $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ et on pose

$$\mathrm{ch}(V) := \sum_{\lambda \in \Lambda} (\dim V_\lambda) e^\lambda.$$

Ceci est le *caractère formel* de V. Si on définit $R(\mathfrak{g}) := K_0(\mathfrak{g} - \mathfrak{Mod})$ comme le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathfrak{g}$, avec multiplication donnée par le produit tensoriel, alors on obtient un morphisme d'anneaux (voir [3], §23.2) :

$$\mathrm{ch} : R(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Z}[\Lambda].$$

Si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation rationnelle de G, alors on a une représentation $d\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ et on a alors

$$\forall x \in \mathfrak{g},\ \mathrm{tr}(\rho(e^x)) = \mathrm{tr}(e^{d\rho(x)}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\dim V_\lambda) e^{\lambda(x)}.$$

Ceci justifie le terme de "caractère". La formule de Weyl permet de calculer explicitement le caractère d'une représentation irréductible de plus haut poids $\lambda \in X(T)_+$. On a

Théorème 15. (Formule du caractère de Weyl, [12])
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et $V(\lambda)$ une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, de plus haut poids λ, entier dominant. Alors on a

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \frac{A_{\lambda+\rho}}{A_\rho} = \frac{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star\lambda}}{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star 0}} = \frac{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\rho)-\rho}},$$

où $A_\mu := \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w(\mu)}$.

Démonstration. Considérons $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, $V := V(\lambda)$ et commençons par remarquer que, si l'on reprend le complexe $(\mathrm{Hom}\,(\Lambda^*\mathfrak{n}, V), \delta)$ du théorème 12, et $B^n := \mathrm{im}\,\delta^{n-1}$ et $Z^n := \ker\delta^n$, alors $H^n(\mathfrak{n}, V) = Z^n/B^n$, donc

$$\mathrm{ch}(H^n(\mathfrak{n}, V)) = \mathrm{ch}(Z^n) - \mathrm{ch}(B^n) \tag{4}$$

Ensuite, puisqu'on a la suite exacte courte $0 \to Z^n \to \mathrm{Hom}\,(\Lambda^n\mathfrak{n}, V) \xrightarrow{\delta^n} B^{n+1} \to 0$, il vient

$$\mathrm{ch}(\mathrm{Hom}\,(\Lambda^n\mathfrak{n}, V)) = \mathrm{ch}(B^{n+1}) + \mathrm{ch}(Z^n) \tag{5}$$

On déduit de (4) (5) que

$$\sum_p (-1)^p \mathrm{ch}(H^p(\mathfrak{n}, V)) = \sum_p (-1)^p \mathrm{ch}(\mathrm{Hom}\,(\Lambda^p\mathfrak{n}, V)).$$

Ensuite, puisqu'on a $\mathrm{Hom}\,(\Lambda^n\mathfrak{n}, V) \simeq (\Lambda^n\mathfrak{n})^*\otimes V$, il vient même

$$\sum_p (-1)^p \mathrm{ch}(H^p(\mathfrak{n}, V)) = \sum_p (-1)^p \mathrm{ch}((\Lambda^p\mathfrak{n})^*)\mathrm{ch}(V). \tag{6}$$

D'un côté, d'après le Théorème de Kostant, on a

$$H^p(\mathfrak{n}, V) = \bigoplus_{w\in W\ ;\ \ell(w)=p} \mathbb{C}_{w\star\lambda},$$

de telle sorte que

$$\mathrm{ch}(H^p(\mathfrak{n}, V)) = \sum_{w\in W\ ;\ \ell(w)=p} e^{w\star\lambda},$$

d'où

$$\sum_p (-1)^p \mathrm{ch}(H^p(\mathfrak{n}, V)) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\star\lambda} = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star\lambda}.$$

D'un autre côté, l'équation (6) évaluée en $\lambda = 0$ donne

$$\sum_p (-1)^p \mathrm{ch}((\Lambda^p\mathfrak{n})^*) = \sum_p (-1)^p \mathrm{ch}(H^p(\mathfrak{n}, \mathbb{C})) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star 0},$$

cette dernière égalité provenant du Théorème de Kostant. Finalement, on obtient

$$\left(\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star 0}\right)\mathrm{ch}(V) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{w\star\lambda}.$$

$\square$

On peut enfin en déduire la formule de la dimension de Weyl. Mais avant, donnons la formule du dénominateur

Lemme 16. (Formule du dénominateur de Weyl, [3], Lemma 24.3)
Avec les même notations que ci-dessus, on a

$$A_\rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w\in W} \varepsilon(w) e^{w(\rho)} = \prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) = e^\rho \prod_{\alpha\in\Phi^+}(1-e^{-\alpha}) = e^{-\rho}\prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^\alpha - 1).$$

Démonstration. Puisque $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$, on a $e^\rho = \prod_{\alpha\in\Phi^+} e^{\frac{\alpha}{2}}$ et donc l'égalité entre les trois derniers membres de droite de la formule du lemme est évidente.

Posons

$$A := \prod_{\alpha\in\Phi^+}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = e^\rho \prod_\alpha (1-e^{-\alpha}) = e^{-\rho}\prod_\alpha (e^\alpha - 1).$$

Si $s_\alpha \in W$ est une réflexion simple, alors on a $s_\alpha(A) = -A$ et on en tire que

$$\forall w \in W,\ w(A) = \varepsilon(w)A.$$

De même, on a $s_\alpha(A_\rho) = -A_\rho$, donc en calculant formellement l'inverse de A :

$$\frac{1}{A} = e^{-\rho}\prod_\alpha (1-e^{-\alpha})^{-1} = e^{-\rho}\prod_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha},$$

on voit que A_ρ/A est une somme formelle (infinie) $\sum m_\mu e^\mu$, invariante par W. De plus, comme le plus haut poids de A est ρ, de même que A_ρ, le quotient A_ρ/A doit être de poids 0. Il s'ensuit que A_ρ/A est constant, donc vaut 1 puisque A et A_ρ ont même terme dominant. □

Théorème 17. (Formule de la dimension de Weyl, [3], Corollary 24.6)
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et λ un poids entier dominant de $\mathfrak{g}$. Alors, on a

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{\langle \lambda+\rho, \alpha\rangle}{\langle \rho, \alpha\rangle}.$$

Démonstration. Considérons l'anneau des séries formelle $\mathbb{C}[[t]]$, ainsi que le morphisme d'augmentation

$$\begin{array}{cccc} \epsilon & : & \mathbb{C}[[t]] & \to & \mathbb{C} \\ & & f(t) & \mapsto & f(0) \end{array}$$

Considérons également, pour $\mu \in \Lambda$, le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \Psi_\mu & : & \mathbb{Z}[\Lambda] & \to & \mathbb{C}[[t]] \\ & & e^\alpha & \mapsto & e^{\langle \mu,\alpha\rangle t} \end{array}$$

et soit enfin $\Psi := \Psi_\rho$. Alors, on a

$$\dim V(\lambda) = \epsilon \circ \Psi(\mathrm{ch}(V(\lambda))).$$

Par W-invariance de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on a pour tout $\mu\in\Lambda$,

$$\Psi(A_\mu) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{\langle \rho, w(\mu)\rangle t} = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{\left\langle w^{-1}(\rho),\mu\right\rangle t} = \sum_{w\in W}\varepsilon(w)e^{\langle w(\rho),\mu\rangle t} = \Psi_\mu(A_\rho)$$

et, par la formule du dénominateur 16, il vient alors

$$\Psi(A_\mu) = \Psi_\mu(A_\rho) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \left(e^{\frac{\langle\mu,\alpha\rangle t}{2}} - e^{-\frac{\langle\mu,\alpha\rangle t}{2}}\right)$$

$$= \left(\prod_{\alpha\in\Phi^+} \langle\mu,\alpha\rangle\right) t^{|\Phi^+|} + \text{termes de plus haut degré en } t.$$

On en tire, via la formule du caractère

$$\Psi(\mathrm{ch}(V(\lambda))) = \Psi\left(\frac{A_{\lambda+\rho}}{A_\rho}\right) = \frac{\Psi(A_{\lambda+\rho})}{\Psi(A_\rho)} = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{\langle\lambda+\rho,\alpha\rangle}{\langle\rho,\alpha\rangle} + \text{termes de degré positif en } t,$$

d'où le résultat. □

Remarque 18. En vertu du Théorème de Borel-Weil-Bott, on a

$$\dim V(\lambda) = \dim H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = \chi(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$$

et on peut espérer calculer cette dimension directement en utilisant la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch

$$\dim V(\lambda) = \chi(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = \int_{G/B} \mathrm{ch}(\mathcal{L}_\lambda)\mathrm{td}(T(G/B)),$$

avec $\mathrm{td}(T(G/B))$ la classe de Todd du fibré tangent de G/B et $\mathrm{ch}(\mathcal{L}_\lambda) = \exp(c_1(\mathcal{L}_\lambda))$ le caractère de Chern du fibré en droites $\mathcal{L}_\lambda$.

Annexe

A Projectivité de la variété de drapeaux

On va donner une jolie manière (trouvée dans [7], §4) de voir la variété de drapeaux d'un groupe réductif connexe G comme une variété projective. Soit donc un Borel B et choisissons un poids *régulier* (i.e. entier strictement dominant) $\lambda \in X(T)_+$, où T est un tore maximal de G. On considère également le groupe de Weyl W engendré par les réflexions simples $(s_i)_{1\leq i\leq \ell}$ où $\ell = |\Pi| = \dim \mathfrak{h}$ est le rang de G. Dans la représentation irréductible $V(\lambda)$, choisissons un vecteur primitif v_λ de plus haut poids λ. Puisque B agit de façon scalaire sur $\mathbb{C}\langle v_\lambda \rangle$, la représentation $G \to GL(V(\lambda))$ fournit une application

$$\begin{array}{rccl} u & : & G/B & \to & \mathbb{P}V(\lambda) \\ & & gB & \mapsto & [g \cdot v_\lambda] \end{array}$$

Puisque la composée $G \to G/B \xrightarrow{u} \mathbb{P}V(\lambda)$ est un morphisme de variétés algébriques, par propriété universelle du quotient G/B, l'application u est un morphisme de variétés algébriques. De plus, u est injectif. Pour le voir, il suffit de montrer que le stabilisateur de $[v]$ est exactement B. Soit donc $P := \mathrm{Stab}_G([v])$. Le sous-groupe P est parabolique standard (par construction), donc $P = P_I$ pour un $I \subset \{1, \dots, \ell\}$. Si $I = \emptyset$, alors $P = B$. Sinon, supposons par l'absurde que $s_i \in P$. Alors s_i stabilise λ, mais on a $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha_i^\vee)\alpha_i$, donc on doit avoir $\lambda(\alpha_i^\vee) = 0$, ce qui contredirait la stricte dominance de λ. On obtient donc $P = B$ et u est donc injectif.
On montre maintenant que $X := u(G/B)$ est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}V(\lambda)$. Pour ceci, on remarque que $\overline{X}$ est un sous-espace G-stable de $\mathbb{P}V(\lambda)$ et il s'ensuit que $\overline{X} \setminus X$ est G-stable. Si $\overline{X} \setminus X \neq \emptyset$, par le théorème du point fixe de Borel ([10], Theorem 26.3.4), $\overline{X} \setminus X$ doit posséder un point B-fixe, ce qui contredit l'existence d'un unique vecteur primitif de plus haut poids λ. Ainsi $\overline{X} \setminus X = \emptyset$, donc X est un fermé de $\mathbb{P}V(\lambda)$.
Enfin, $u : G/B \to X$ est un isomorphisme. En effet, comme toute variété possède des points lisses et que G préserve les points lisses, le fait que X soit une G-orbite entraîne immédiatement que c'est une variété lisse, donc normale. Ainsi, $u : G/B \to X$ est un morphisme bijectif de variétés irréductibles et X est normale, c'est donc un isomorphisme par le Corollaire 17.4.8 de [10]. On a ainsi obtenu le

Théorème 1. *Si G est un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$, B est un sous-groupe de Borel de G et λ est un poids régulier, alors on a un plongement fermé*

$$\begin{array}{ccc} G/B & \hookrightarrow & \mathbb{P}V(\lambda) \\ gB & \mapsto & [g \cdot v_\lambda] \end{array}$$

avec v_λ un vecteur primitif de plus haut poids λ de la représentation irréductible $V(\lambda)$. En particulier, le quotient G/B est une variété algébrique projective.

Remarque 2. En prenant $\lambda = \rho$ ci-dessus et en utilisant la formule de la dimension de Weyl, on a un plongement

$$G/B \hookrightarrow \mathbb{P}^r,$$

avec $r \leq 2^{|\Phi^+|} - 1$.

B Autre preuve du Lemme 2

On peut indiquer une deuxième démonstration du Lemme 2, en utilisant une forme réelle compact K de G (qui est un groupe de Lie), les *fonctions représentantes* et la dualité de Tannaka-Krein. Rappelons le résultat, en reprenant les notations de la section 1 :

Lemme 3. *Considérons le G^2-module*

$$\mathcal{M} := \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$$

ainsi que $\phi := \sum_\mu \phi_\mu$ où

$$\begin{array}{cccc} \phi_\mu & : & V(\mu)^* \otimes V(\mu) & \to & \mathbb{C}[G] \\ & & f \otimes v & \mapsto & (g \mapsto f(gv)) \end{array}$$

Alors, le morphisme

$$\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}[G]$$

est un isomorphisme de G^2-modules.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Peter-Weyl et la dualité de Tannaka-Krein. Puisque G est réductif connexe, on peut considérer une forme réelle K de G, i.e. un groupe de Lie compact connexe dont G est une complexification. Pour (V, π_V) une représentation complexe de K, on regarde l'ensemble

$$\mathcal{F}_V(K, \mathbb{C}) := \{f : K \to \mathbb{C}\ ;\ \exists \psi : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}\ ;\ f = \psi \circ \pi_V\}$$

$$= \{f : K \to \mathbb{C}\ ;\ \exists u \in \mathrm{End}\,(V)\ ;\ f(x) = \mathrm{tr}\,(u \circ \pi_V(x))\} = \{f : K \to \mathbb{C}\ ;\ \dim(K \cdot f) < \infty\}$$

des *fonctions représentantes de la représentation* V, ainsi que l'algèbre des *fonctions représentantes* $\mathcal{F}(K, \mathbb{C}) := \bigcup_V \mathcal{F}_V(K, \mathbb{C})$. C'est une algèbre de Hopf. On peut définir de même $\mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$. Par dualité de Tannaka-Krein ([1], III, §7, Theorem 7.15), on a

$$G \simeq G_{\mathbb{C}} := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}}(\mathcal{F}(G, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Alg}}(\mathcal{F}(K, \mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

ce dernier isomorphisme provenant de la propriété universelle de la complexification et il en découle (via les remarques du §8 du chapitre III de [1]) que l'on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf

$$\mathbb{C}[G] \simeq \mathcal{F}(K, \mathbb{C}).$$

Par ailleurs, d'après la Proposition 1.5 du §1 du chapitre III de [1] (qui découle essentiellement du théorème de Peter-Weyl), on a que ϕ réalise un isomorphisme de G^2-modules

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{V \in \mathrm{Irr}(K, \mathbb{C})} V^* \otimes_{\mathrm{End}\,(V)} V = \bigoplus_{\mu \in X(T)_+} V(\mu)^* \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$$

et on obtient finalement que ϕ est un isomorphisme. Mentionnons enfin que l'on peut aussi utiliser la *cotransformée de Fourier* pour le démonter, comme dans [6], §4, Corollary 5. $\square$

Références

[1] T. Bröckner, T. tom Dieck - REPRESENTATIONS OF COMPACT LIE GROUPS, Springer, 1985.

[2] D. Bump - LIE GROUPS, Second Edition, Springer-Verlag, 2013.

[3] W. Fulton, J. Harris - REPRESENTATION THEORY - A FIRST COURSE, Springer-Verlag, 1991.

[4] A. Garnier - *Cohomologie équivariante des groupes topologiques - cas des groupes de Lie et de leur variété de drapeaux*, Mémoire de Master 2, UPJV, 2018.

[5] R. Hartshorne, ALGEBRAIC GEOMETRY, Springer-Verlag, 1977.

[6] A. Joyal, R. Street - *An introduction to Tannaka duality and quantum groups* in CATEGORY THEORY, PROCEEDINGS, COMO 1990, Lecture notes in Mathematics, 1488, Springer-Verlag, 1991, 411-492.

[7] S. Kumar - *Geometry of Schubert varieties and Demazure character formula*, Lecture at the Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, Germany, April 2011.

[8] S. Kumar - KAC-MOODY GROUPS, THEIR FLAG VARIETIES AND REPRESENTATION THEORY, Birkhäuser, 2002.

[9] T. A. Springer, LINEAR ALGEBRAIC GROUPS, Second Edition, Birkhäuser, 1998.

[10] P. Tauvel, R. W. T. Yu - LIE ALGEBRAS AND ALGEBRAIC GROUPS, Springer-Verlag, 2005.

[11] C. Weibel - AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Cambridge University Press, 1994.

[12] P. Woit, *Lie algebra cohomology and the Borel-Weil-Bott theorem*, from *Lie groups and representations : Mathematics G4344*, Lectures at Columbia University of New York, 2012.