Théorème de Résolubilité de Burnside

Arthur Garnier

3 juillet 2016

Théorème de Burnside. *Tout groupe fini dont l'ordre est divisible par au plus deux nombres premiers est résoluble.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que G soit un groupe fini non résoluble d'ordre $p^\alpha q^\beta$ minimal, avec p et q premiers.

Tout d'abord, G n'est pas trivial. Si $1 \neq H \trianglelefteq G$, alors $H = G$, car autrement, H et ${}^G/_H$ seraient résolubles et donc G aussi, contrairement à l'hypothèse. G est donc simple. De plus, G étant simple et non abélien (car non résoluble) et on en déduit que $Z(G) = 1$. Par ailleurs, un q-groupe étant résoluble, on peut supposer que α est non nul.

Comme $\alpha \neq 0$, le premier théorème de Sylow assure l'existence d'un p-sous-groupe de Sylow S de G. $S \neq 1$ est un p-groupe, donc son centre $Z(S)$ n'est pas trivial, de telle sorte que l'on puisse choisir un élément $g \neq 1$ central dans S. Le cardinal de la classe de conjugaison $\mathcal{C}l_G(g)$ de g est l'indice $[G : C_G(g)]$ de son centralisateur. Comme g est central dans S, on a $S \leq C_G(g)$ et il vient

$$q^\beta = [G : S] = [G : C_G(g)][C_G(g) : S],$$

donc il existe $d \geq 0$ tel que $|\mathcal{C}l_G(g)| = q^d$ et $d \neq 0$ puisque $g \neq 1$ n'est pas central dans G.

On note $\mathcal{I}(G)$ la famille des caractères irréductibles de G. Si χ_r désigne le caractère de la représentation triviale de G, comme $g \neq 1$, on a

$$0 = \chi_r(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}(G)} (\dim \chi)\chi(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}(G)} \chi(1)\chi(g) = 1 + \sum_{\chi \neq \mathbb{1}} \chi(1)\chi(g),$$

où les $\chi(g)$ sont des entiers algébriques. Si tout caractère irréductible $\chi \neq \mathbb{1}$ tel que $\chi(g) \neq 0$ avait une dimension divisible par q, alors le nombre

$$-\frac{1}{q} = \sum_{\chi \neq \mathbb{1}} \frac{\chi(1)}{q}\chi(g)$$

serait un entier algébrique et rationnel, donc un entier, ce qui est absurde. Il existe alors un caractère irréductible non trivial χ_0 tel que $\chi_0(g) \neq 0$ et q ne divise pas $\chi_0(1) = \dim \chi_0$. On note ρ_0 la représentation irréductible associée.

Définissons $u := \sum_{s \in \mathcal{C}l_G(g)} s \in Z(\mathbb{C}G)$. Alors, u est un entier algébrique et on en déduit que le complexe

$$\frac{1}{\chi_0(1)} \sum_{s \in G} u_s \chi_0(s) = \frac{1}{\chi_0(1)} \sum_{s \in \mathcal{C}l_G(g)} \chi_0(g) = \frac{q^d \chi_0(g)}{\chi_0(1)}$$

est un entier algébrique. Ensuite, q et $\chi_0(1)$ étant premiers entre eux, le théorème de Bézout montre l'existence de $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aq^d + b\chi_0(1) = 1$ et on en déduit que

$$\zeta := \frac{\chi_0(g)}{\chi_0(1)} = a\frac{q^d \chi_0(g)}{\chi_0(1)} + b\chi_0(g)$$

est un entier algébrique.

Soit ensuite P le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$ et introduisons $K := \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}(P)$ un corps de décomposition de P sur $\mathbb{Q}$. P se factorise sur K en

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$$

et chaque x_i étant un enier algébrique, $P \in \mathbb{Q}[X]$ est à coefficients entiers algébriques, d'où $P \in \mathbb{Z}[X]$. Ainsi, le complexe

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\zeta) = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \sigma(\zeta)$$

est un entier non nul, donc $|N_{K/\mathbb{Q}}(\zeta)| \geq 1$. Or, ζ est moyenne arithmétique de racines de l'unité, donc ses conjugués aussi, puisque l'action de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ sur les racines de P est transitive car l'extension $K/\mathbb{Q}$ est galoisienne. On en déduit que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $|x_i| \leq 1$, mais comme $|N_{K/\mathbb{Q}}(\zeta)| \geq 1$, on a $|x_i| = 1$ et en particulier, $|\zeta| = 1$. Ainsi, toutes les valeurs propres de $\rho_0(g)$ sont égales et on en conclut que $\rho_0(g)$ est une homothétie.

Soit enfin $N := \ker(\rho_0)$ le noyau de $\rho_0 : G \to \mathrm{GL}(V)$. $\rho_0(g)$ est une homothétie, donc est central dans $\mathrm{im}\,(\rho_0) \simeq {}^{G}/_{N}$ mais g n'est pas central dans G, donc $N \neq 1$. Or, G étant simple, ceci implique que $N = G$ et ρ_0 est donc triviale. Ceci contredit la non banalité du caractère χ_0 et cette absurdité achève la démonstration. $\square$

Références

[1] Josette Calais, Extensions de Corps - Théorie de Galois, Ellipses, 2006.

[2] Gérard Rauch, Les Groupes Finis et leurs Représentations, Ellipses, 2000.

[3] Jean-Pierre Serre, Représentations linéaires des Groupes Finis, Hermann, 1998.