Proposition 1. *Le théorème de Cayley est conséquence du Lemme de Yoneda.*

Démonstration. Soit donc G un groupe fini, d'ordre $n \geq 1$ et notons G^S l'ensemble sous-jacent de G. On considère $\mathfrak{G}$ le groupoïde à un seul objet $\bullet$, avec $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{G}}(\bullet, \bullet) := G$. On considère aussi le foncteur

$$h := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, -) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}.$$

Plus précisément, $h(\bullet) = G^S$ et, si $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{G}}(\bullet, \bullet)$, alors

$$\begin{array}{rccc} h(f) & : & G^S & \to & G^S \\ & & x & \mapsto & h(f)(x) = f(x) \end{array} \quad \text{et} \quad (h(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S))$$

et soit

$$\begin{array}{rcccc} \widetilde{h} & : & G & \to & \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S) \\ & & g & \mapsto & h(g) \end{array}$$

Pour tout $g \in G$, $\widetilde{h}(g) \in \mathfrak{S}(G^S) \simeq \mathfrak{S}_n$. En effet, on a

$$\widetilde{h}(g) \circ \widetilde{h}(g^{-1}) = \widetilde{h}(g \circ g^{-1}) = \widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(g^{-1} \circ g) = \widetilde{h}(g^{-1}) \circ \widetilde{h}(g),$$

et

$$\widetilde{h}(1) = id_{G^S},$$

car $1 = id_\bullet$ et car h est un foncteur. De plus, comme h est un foncteur, $\widetilde{h}$ est un morphisme de groupes $G \to \mathfrak{S}_n$. Montrons que $\widetilde{h}$ est injectif. Soit $x \in G$ tel que $\widetilde{h}(x) = id_{G^S}$. D'après le Lemme de Yoneda, on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(h, h) = \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, -), h) & \overset{\alpha}{\to} & G^S \\ \eta & \mapsto & \eta_\bullet(1) \end{array}.$$

Ainsi, il existe un unique $\eta \in \mathcal{N}(h, h)$ tel que $\alpha(\eta) = x$. Soit $y \in G^S$. On a

$$y = id_{G^S}(y) = \widetilde{h}(x)(y) = \widetilde{h}(\eta_\bullet(1))(y) = \eta_\bullet(1)(y)$$

d'où

$$\eta_\bullet(1) = 1 \ \Rightarrow \ x = \alpha(\eta) = \eta_\bullet(1) = 1$$

et $\widetilde{h}$ est un monomorphisme

$$G \overset{\widetilde{h}}{\hookrightarrow} \mathfrak{S}_n,$$

comme voulu. $\square$

Démonstration. (Voir [41])
Soit donc G un groupe fini, d'ordre $n \geq 1$, et notons G^S l'ensemble sous-jacent de G. On considère $\mathfrak{G}$ le groupoïde à un seul objet $\bullet$, avec $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\bullet, \bullet) := G$. On considère aussi le foncteur

$$h := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, -) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}.$$

Plus précisément, $h(\bullet) = G^S$ et, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\bullet, \bullet)$, alors $h(f) := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, f)$. Définissons ensuite un foncteur

$$F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$$

par

$$\begin{cases} F(\bullet) & := & G^S \\ F(g) & := & \eta^g_\bullet \end{cases}$$

où $\eta^g \in \mathcal{N}(h, h)$ est un morphisme fonctoriel ($\eta^g_\bullet \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S)$) tel que $\eta_\bullet(1) = g$. Ce morphisme existe car, d'après le Lemme de Yoneda, l'application

$$\begin{array}{cccc} \alpha & : & \mathcal{N}(h,h) & \to & G^S = h(\bullet) \\ & & \eta & \mapsto & \eta_\bullet(1) \end{array}$$

est surjective. On rappelle que dans la preuve du Lemme de Yoneda, on a défini η^g comme étant

$$\begin{array}{cccc} \eta^g_\bullet & : & G^S & \to & G^S \\ & & x & \mapsto & h(x)(g) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, x)(g) = g \circ x \end{array}$$

Alors, pour $f, g \in G$ et $x \in G^S$, on a

$$F(f \circ g)(x) = \eta^{f \circ g}_\bullet(x) = f \circ g \circ x = f \circ (g \circ x) = \eta^f_\bullet(g \circ x) = (\eta^f_\bullet \circ \eta^g_\bullet)(x) = (F(f) \circ F(g))(x),$$

d'où

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

De plus, on voit immédiatement que $F(1) = id_{G^S}$ donc F est bien un foncteur fidèle car, d'après le Lemme de Yoneda, l'application α est injective. On peut donc voir F comme un monomorphisme de monoïdes $F : G \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S)$ et comme un foncteur préserve les isomorphismes, on peut considérer que F est un monomorphisme de groupes

$$F : G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G^S) \simeq \mathfrak{S}_n$$

et F est ainsi un plongement

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n,$$

comme souhaité. □

Remarque 1.
1. Notons que la plus grande partie de la puissance du Lemme de Yoneda n'a pas été employée ; en particulier, nous n'avons pas utilisé le fait que η^g est une transformation naturelle. Cependant il est intéressant d'observer de quelle manière notre groupoïde $\mathfrak{G}$ se mue en un groupe dans la catégorie $\mathfrak{Ens}$ via le foncteur F.
2. Si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que pour $f \in G$, $F(f)$ peut être interprétée comme un application

$$\begin{array}{cccc} F(f) & : & G & \to & G \\ & & g & \mapsto & fg \end{array}$$

et il s'agit de l'action par translation à gauche sur G. On voit alors (de façon peut-être un peu décevante) que la démonstration développée ci-dessus n'est guère différente de la preuve habituelle utilisant le fait qu'une action par translation est fidèle. Néanmoins, il reste instructif de voir comment l'on peut utiliser le formalisme des catégories pour répondre à des questions relativement concrètes.

Références

[1] A Fixpoint of Identity, *Yoneda's lemma and Cayley's theorem*, (2012), (`https://y0o0y.wordpress.com/2012/07/19/yonedas-lemma-and-cayleys-theorem/#respond`).