Théorie de De Rham
Étude cohomologique des formes différentielles sur les variétés lisses

Arthur Garnier

22 août 2015

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous proposons une approche algébrique de l'étude des formes différentielles. Ce point de vue a été intoduit au début du siècle dernier par le mathématicien Georges de Rham et donne naissance à une théorie efficace et élégante. Elle permet de rendre compte de certaines proptiétés des variétés aux travers des structures algébriques d'espaces de formes différentielles. De plus, la cohomologie d'une variété la caractérise topologiquement, en un sens que l'on précisera. Ce travail se situe dans la continuité logique de mon précédent mémoire : "Une introduction aux formes et aux variétés différentielles".

Dans un premier temps, nous exposons quelques compléments indispensables de topologie différentielle. En particulier, nous étudions les partitions de l'unité et nous démontrons le théorème de plongement de Whitney. On effectue également quelques rappels sur les formes différentielles, dont les preuves se trouvent dans mon précédent mémoire de géométrie différentielle. Nous y énonçons nottament le théorème de Stokes, qui nous servira de lemme par la suite.

Dans un second temps, nous initions tout d'abord le lecteur à l'algèbre homologique générale et nous introduisons les espace de cohomologie de De Rham sur les variétés lisses. Nous exhibons leurs premières propriétés et nous poursuivons sur la même étude, consacrée aux formes à support compact. Ensuite, nous nous intéressons à l'invariance par homotopie des espaces de cohomologie et nous démontrons entre autres le lemme de Poincaré généralisé ainsi que le théorème de De Rham, qui affirme que la cohomologie d'une variété lisse est invariante par homéomorphisme : la cohomologie est donc un invariant topologique ; et c'est là un de ses principaux atouts. Nous étudions de plus le principe de Mayer-Vietoris qui permet, au travers de suites exactes cohomologiques, de calculer simplement les espaces de cohomologie de nombreux exemples de variétés. Enfin, nous inspectons finement les propriétés topologiques des variétés lisses afin de démontrer dans le cadre le plus général les théorèmes de dualité de Poincaré ainsi que le théorème de Künneth.

Afin de permettre une lecture autonome, nous donnons une annexe dans laquelle nous proposons une étude des immersions et submersions dans laquelle nous démontrons les théorèmes d'inversion locale et du rang constant pour les variétés, des structures différentielles des sphères euclidiennes et des espaces projectifs qui nous servent d'exemples récurrents pour les calculs d'espaces de cohomologie. Nous nous y permettons de plus une digression sur les algèbres graduées ainsi que sur la notions de points et de valeurs critiques. En particulier, nous y démontrons le théorème de Sard.

Enfin, je tiens à remercier Monsieur Jean-Baptiste Campesato pour son mémoire (M2) sur le sujet, dont je me suis très largement inspiré pour réaliser ce travail. La concision, la clarté de ses démonstrations et la précisions de son raisonnement sont remarquables...

Première partie

Compléments de géométrie différentielle

1 Partitions de l'unité

Définition 1. 1. On appelle partition de l'unité d'un espace topologique X une famille de fonctions continues $(\rho_i)_{i\in I}$ définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que pour tout $x \in X$:

   (a) Il existe un voisinage V de x tel que presque tout ρ_i est nul sur V,

   (b)
$$\sum_{i\in I} \rho_i(x) = 1.$$

2. Si M est une variété de classe $\mathcal{C}^p$, on dit que $(\rho_i)_{i\in I}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ si pour tout $i \in I$, $\rho_i \in \mathcal{C}^p(M, \mathbb{R})$.

Remarque 1. On rappelle qu'une variété de classe $\mathcal{C}^p$ et de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable, muni d'un atlas maximal de classe $\mathcal{C}^p$, de dimension n. Pour la définition d'un atlas, voir [2], Définition 15.

Lemme 1. *Toute variété admet une base dénombrable dont les éléments sont relativement compacts.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ une base dénombrable de M et $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{B \in \mathcal{B} \; ; \; \overline{B} \text{ est compact}\}.$$

Soient $U \subset M$ un ouvert et $x \in U$. Comme M est localement euclidien, il existe $V \subset M$ un ouvert relativement compact tel que $x \in V \subset U$ (voir [2], Théorème 14). $\mathcal{B}$ étant une base, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset V \subset U$. Alors $\overline{B} \subset \overline{V}$ donc $\overline{B}$ est compact en tant que fermé d'un compact. Donc $B \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est une base. □

Proposition 1. *Toute variété différentielle M admet une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts tels que*

1.
$$V_0 \subset \overline{V_0} \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset \dots$$

2. *V_n est relativement compact,*

3.
$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

Démonstration. D'après le Lemme 1, M admet une base dénombrable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement compacte. Posons $V_0 := B_0$, comme $\overline{B_0}$ est compact, il existe $i_0 > 0$ tel que $\overline{V_0} \subset B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{i_0}$. Supposons $(V_0, i_0), \dots, (V_m, i_m)$ construits. Alors, comme $\overline{V_m}$ est compact, il existe $i_{m+1} > i_m$ tel que $\overline{V_m} \subset B_0 \cup \dots \cup B_{i_{m+1}}$. Posons $V_{m+1} := \bigcup_{p=0}^{i_{m+1}} B_p$. $\overline{V_{m+1}} = \overline{B_0} \cup \dots \cup \overline{B_{i_{m+1}}}$ est compact comme réunion finie de compacts et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convient. □

Définition 2. Une fonction plateau sur M de classe $\mathcal{C}^p$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ définie sur M, à valeurs dans $[0,1]$ telle qu'il existe deux ouverts relativement compacts U et V avec $\overline{U} \subset V$ et $\mathrm{supp} f \subset V$ et $\forall x \in U,\ f(x) = 1$.

Exemple 1. Si $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sont deux boules de même centre telles que $\overline{U} \subset V$, il existe une fonction lisse égale à 1 sur U et à support inclus dans V. En effet, l'application

$$f_a : t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-a^2}}, & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est lisse.
L'application

$$g_a : t \mapsto \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(u)\mathrm{d}u} \int_{-\infty}^{t} f_a(u)\mathrm{d}u$$

est lisse et vaut 0 si $t \leq -a$ et 1 si $t \geq a$. Il suffit donc de prendre une fonction de la forme $x \mapsto g_a(b - ||x||)$.

Proposition 2. *Soit $U \subset M$ un ouvert où M est de classe $\mathcal{C}^p$. Pour tout $x \in U$, il existe un ouvert relativement compact V tel que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ et une fonction plateau valant 1 sur V et telle que $suppf \subset U$.*

Démonstration. Soit (U', φ) une carte telle que $x \in U' \subset U$.

$$\exists R_1, R_2 > 0 \ ; \ B(\varphi(x), r_1) \subset B(\varphi(x), r_2) \subset \varphi(U').$$

D'après l'Exemple 1, il existe une fonction plateau $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valant 1 sur $B(\varphi(x), r_1)$ et 0 en dehors de $B(\varphi(x), r_2)$. $\mathrm{supp}(g \circ \varphi : U' \to \mathbb{R}) \subset \varphi^{-1}(B(0, r_2)) \subset U' \subset U$, $g \circ \varphi$ se prolonge par 0 sur M en une fonction $\mathcal{C}^p$ dont le support est inclus dans U.
Et $B(\varphi(x), r_1) \subset \overline{B(\varphi(x), r_1)} \Rightarrow \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1)) \subset \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r_1)})$, comme le terme de droite est compact (image continue d'un compact), on en déduit que $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1))} \subset \varphi^{-1}(\overline{B(\varphi(x), r_1)})$ et donc $\overline{\varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1))}$ est compact comme fermé d'un compact.
$V := \varphi^{-1}(B(\varphi(x), r_1))$ convient. □

Théorème 1. *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentielle M de classe $\mathcal{C}^p$. Il existe une partition de l'unité $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe $\mathcal{C}^p$ à support compact et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists i \in I \ ; \ supp(\rho_n) \subset U_i.$$

Démonstration. Soit $(V_n)_n$ comme dans la Proposition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \overline{V_{n+1}} \setminus V_n$, il existe $i \in I$ tel que $p \in U_i$. D'après la Proposition 2, il existe une fonction plateau Ψ_p^n de classe $\mathcal{C}^p$ valant 1 sur W_p^n un voisinage

ouvert de p et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (\overline{V_{n+1}} \setminus V_n)$. $\mathrm{supp}(\Psi_p^n)$ est un fermé de $\overline{V_{n+2}}$, donc un compact.
On obtient un recouvrement ouvert $\{W_p^n,\ p \in \overline{V_{n+1}} \backslash V_n\}$ du compact $\overline{V_{n+1}} \backslash V_n$ dont on extrait un sous-recouvrement fini $\{W_{p_1}^n, \dots, W_{p_{m_n}}^n\}$. L'ensemble

$$\{\mathrm{supp}(\Psi_{p_k}^n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq m_n\}$$

est localement fini car un nombre fini d'éléments intersectent chaque V_n. On réindexe en $\{\Psi_0, \Psi_1, \dots\}$ et on pose

$$\Psi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n.$$

Ainsi, $\rho_n := \frac{\Psi_n}{\Psi}$ est une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^p$ sur M telle que $\forall n,\ \exists i \in I\ ;\ \mathrm{supp}(\rho_n) = \mathrm{supp}(\Psi_n) \subset U_i$. $\square$

Théorème 2. *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe une partition de l'unité $(\rho_i)_{i \in I}$ subordonnée à $(U_i)_{i \in I}$.*

Démonstration. Prenons la partition de l'unité du Théorème précédent. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\tau(n) \in I$ tel que $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_{\tau(n)}$ et posons

$$\forall i \in I,\ \tilde{\rho}_i := \sum_{\tau(n)=i} \rho_n.$$

$$\mathrm{supp}(\tilde{\rho}_i) = \bigcup_{\tau(n)=i} \mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_i,\ \forall i \in I.$$

Donc $(\tilde{\rho}_i)$ convient. $\square$

2 Théorème de plongement de Whitney

Proposition 3. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre variétés. On suppose que M est compacte. Alors f est un plongement si et seulement si c'est une immersion injective.*

Démonstration. C'est clair avec le théorème d'immersion de l'Annexe. $\square$

Lemme 2. *Soit M une variété lisse de dimension n. Pour tout $m \in M$, il existe un couple $(\psi_m, f_m) \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ tels que $\psi_m(m) > 0$ et $f_{m|M \setminus \psi_m^{-1}(0)}$ est un difféomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soient $m \in M$, (U, φ) une carte en m. D'après la Proposition 2, il existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse à support compact inclus dans $\varphi(U)$ et valant 1 sur un ouvert $V \subset \varphi(U)$. On pose

$$f_m(q) := \begin{cases} h(\varphi(q))\varphi(q) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sur l'ouvert $W := \varphi^{-1}(V)$, f_m coïncide avec φ et donc f_m est un difféomorphisme de W sur V. Considérons $\psi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse à support compact inclus dans V telle que $\psi_0(\varphi(m)) > 0$ et soit

$$\psi_m(q) = \begin{cases} \psi_0(\varphi(q)) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $M \setminus \psi_m^{-1}(0) \subset W$, le lemme est démontré. $\square$

Lemme 3. *Toute variété lisse compacte se plonge dans un $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Soit M une variété compacte lisse de dimension n. Par compacité et avec le Lemme précédent, on peut supposer qu'il existe des applications lisses $\psi_j : M \to \mathbb{R}$ et $f_j : M \to \mathbb{R}^n$ en nombre sini $1 \leq j \leq d$, avec :

1. $U_j = M \setminus \psi_j^{-1}(0)$ recouvrent M,
2. $f_{j|U_j}$ sont des difféomorphismes sur des ouverts $V_j \subset \mathbb{R}^n$.

Soit l'application lisse

$$\begin{array}{cccc} f & : & M & \to & \mathbb{R}^{nd+d} \\ & & q & \mapsto & (f_1(q), \ldots, f_d(q), \psi_1(q), \ldots, \psi_d(q)) \end{array}$$

Supposons $f(q_1) = f(q_2)$. 1. implique qu'il existe j tel que $q_1 \in U_j$. Alors $\psi_j(q_1) = \psi_j(q_2)$ et $q_2 \in U_j$ donc $q_1 = q_2$ d'après 2.. Donc f est injective et par compacité, $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme.
Soient $\pi_1 : \mathbb{R}^{nd+d} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ la projection sur les premières coordonnées et $\pi_2 : \mathbb{R}^{nd+d} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)d+d}$ la projection sur les dernières coordonnées.
2. montre que $\pi \circ f = f_1$ est un difféomorphisme $U_j \to V_j$. En particulier, $\pi_1 : f(U_j) \to V_j$ est une bijection. Donc $f(U_j)$ est le graphe d'une application lisse $g_j = \pi_2 \circ f \circ (f_{j[U_j})^{-1} : V_j \to \mathbb{R}^{(n-1)d+d}$. On définit le difféomorphisme

$$\begin{array}{cccc} h_j & : & \pi_1^{-1}(V_j) & \to & \pi_1^{-1}(V_j) \\ & & (x,y) & \mapsto & (x, y - g_j(x)) \end{array} \qquad x \in V_j,\ y \in \mathbb{R}^{n(d-1)+d}.$$

On obtient ainsi une bijection de $f(U_j)$ sur $V_j \times 0$.
Comme $f(U_j)$ est un ouvert de $f(M)$, $f(U_j) = M \cap W_j$, pour un ouvert $W_j \subset \mathbb{R}^{nd+d}$ que l'on choisit inclus dans $\pi_1^{-1}(V_j)$. La restriction $h_{j|W_j}$ est un difféomorphisme $W_j \to W_j'$ (ouvert). Donc $f(M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{nd+d}$. Comme $f_{|U_j} : U_j \to f(U_j)$ est un difféomorphisme (la composée de $f_{j|U_j} : U_j \to V_j$ et de l'inverse de difféomorphisme $f(U_j) \to V_j$ induit par π_1), $f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme. $\square$

Lemme 4. *Toute variété différentielle compacte de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Démonstration. On considère le plongement $f : M \to \mathbb{R}^m$ du Lemme précédent. On va montrer que l'on peut obtenir un plongement dans $\mathbb{R}^{m-1}$ en composant f avec une "bonne" projection, et ce jusqu'à $\mathbb{R}^{2n+1}$.
On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne usuelle. Pour tout $v \in \mathbb{S}^{m-1}$, soit $P_v : x \mapsto x^\perp$ la projection sur l'hyperplan orthogonal à v dans $\mathbb{R}^m$. Posons

$N := f(M)$. Pour que la restriction à N de P_v soit injective, il faut et il suffit que pour tous $x \neq y \in N$, $\frac{y-x}{||y-x||} \neq v$, ou encore

$$v \notin \operatorname{Im}\left\{(x,y) \mapsto \frac{y-x}{||y-x||},\ (x,y) \in (N \times N) \setminus \Delta\right\} \subseteq \mathbb{S}^{m-1},$$

où $\Delta = \{(x,x),\ x \in N\}$.
D'après le théorème de Sard (Annexe), il existe de tels v. Pour que $P_{v|N}$ soit une immersion, il faut et il suffit que v n'appartienne à aucun sous-espace tangent à N. Posons

$$Z := \{(x,v) \in M \times \mathbb{S}^{m-1}\ ;\ v \in T_{f(x)}N\}.$$

On vérifie qu'il s'agit d'une sous-variété de dimension $2n-1$ de $M \times \mathcal{S}^{m-1}$. En particulier, $pr_2(Z)$ est de mesure nulle dès que $2n < m$. On conclut : une immersion injective d'une variété compacte est un plongement. □

Théorème 3. *(Plongement de Whitney)*
Toute variété lisse de dimension n se plonge sur un fermé de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Démonstration. Soit $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une partition de l'unité à support compact dénombrable. Soit

$$h : x \mapsto \sum_{i>0} i\rho_i(x).$$

C'est une application lisse et propre (ie l'image réciproque de tout compact est compact). Soient

$$U_i := h^{-1}\left(\left]i-\frac{1}{4}, i+\frac{5}{4}\right[\right) \text{ et } C_i := h^{-1}\left(\left[i-\frac{1}{3}, i+\frac{4}{3}\right]\right).$$

Alors U_i est ouvert, C_i est compact et $U_i \subset \mathring{C}_i$. Remarquons que tous les C_{2i+1} (resp. tous les C_{2i}) sont disjoints.
D'après le Lemme précédent pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une application lisse $g_i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ qui est un plongement sur $\overline{U_i}$ et qui est nulle en dehors de C_i (et d'image bornée, car l'image d'un compact est compacte et qu'un compact est borné).
Considérons $f_0 := \sum_i g_{2i+1},\ f_1 := \sum_i g_{2i}$ et $f = (f_0, f_1, h) : M \to \mathbb{R}^{2n+1} \times$

$\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$. Comme f_0 et f_1 sont d'images bornées, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $\mathrm{Im}(f) \subset K \times \mathbb{R}$. Ainsi, f est propre puisque h l'est.
Si $f(x) = f(y)$, alors $h(x) = h(y)$ et il existe i tel que $x, y \in U_i$. Si i est impair, f_0 est un plongement de U_i, ce qui implique que $x = y$, idem qi i est pair. Donc f est un plongement sur un fermé (par le caractère propre de f). $\square$

Remarque 2. Le résultat reste valable pour $\mathbb{R}^{2n}$, mais c'est plus difficile à montrer (et optimal)...

3 Algèbre tensorielle

Les résultats admis des trois sections suivantes sont démontrés dans [2].

Définition 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\bigotimes^k E^*$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-tenseurs de E.

Définition 4. Si $(f, g) \in \bigotimes^k E^* \times \bigotimes^l E^*$. On définit le produit tensoriel $f \otimes g$ par

$$\forall (v_1, \ldots, v_{k+l}) \in E^{k+l},\ f \otimes g(v_1, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k) g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Proposition 4. $\forall f, f' \in \bigotimes^k E^*,\ g, g' \in \bigotimes^l E^*,\ h \in \bigotimes^m E^*,\ \lambda \in \mathbb{R}$, *on a*

1. $$(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g,$$
2. $$f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g',$$
3. $$(\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda (f \otimes g),$$

4.
$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) =: f \otimes g \otimes h,$$

5.
$$\{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*,\ 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\} \text{ est une base de } \bigotimes^k E^*,$$

6.
$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\bigotimes^k E^* \right) = n^k.$$

<u>**Définition**</u> **5.** Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe une unique ${}^t f \in \mathcal{L}\left(\bigotimes^k F^*, \bigotimes^k E^*\right)$. ${}^t f$ est donnée par

$$\begin{array}{rcccl} {}^t f & : & \bigotimes^k F^* & \to & \bigotimes^k E^* \\ & & g & \mapsto & ((v_1, \ldots, v_k) \mapsto g(f(v_1), \ldots, f(v_k))) \end{array}$$

<u>*Remarque*</u> 3. Si $\alpha \in \mathcal{L}(E, F)$, on a ${}^t\alpha(f \otimes g) = {}^t\alpha(f) \otimes {}^t\alpha(g)$.

<u>**Définition**</u> **6.** $f \in \bigotimes^k E^*$ est dit <u>alterné</u> si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall (v_1, \ldots, v_k) \in E^k,\ f(v_1, \ldots, v_k) = \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

On note $\Lambda^k E^*$ l'espace vectoriel des k-tenseurs alternés.

<u>**Proposition-Définition**</u> **1.** *On appelle <u>antisymétrisé</u> de $f \in \bigotimes^k E^*$, l'application $Alt(f) \in \Lambda^k E^*$ définie par*

$$\forall (v_1, \ldots, v_k) \in E^k,\ Alt(f)(v_1, \ldots, v_k) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

<u>**Proposition**</u> **5.** *On a*

1.
$$\forall f \in \bigotimes^k E^*,\ Alt(Alt(f)) = Alt(f),$$

2.

$$\forall f \in \Lambda^k E^*, \ Alt(f) = f.$$

Proposition-Définition 2. *Si* $(f,g) \in \bigotimes^k E^* \times \bigotimes^l E^*$*, on définit le produit extérieur de* f *par* g *:*

$$f \wedge g := \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(f \otimes g) \in \Lambda^{k+l} E^*.$$

Proposition 6. $\forall \omega, \omega' \in \Lambda^k E^*, \ \eta, \eta' \in \Lambda^l E^*, \ \theta \in \Lambda^m E^*, \ \lambda \in \mathbb{R}$*, on a*

1.

$$(\omega + \omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + \omega' \wedge \eta,$$

2.

$$\omega \wedge (\eta + \eta') = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \eta',$$

3.

$$(\lambda\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda\eta) = \lambda(\omega \wedge \eta),$$

4.

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega,$$

5.

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) =: \omega \wedge \eta \wedge \theta,$$

6.

$$\{e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}, \ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\} \ \text{est une base de } \Lambda^k E^*,$$

7.

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(f_i(v_j)), \ f_i \in E^*,$$

8.

$$e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 1 \ \text{si } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k, \ 0 \ \text{sinon},$$

9.

$$\dim_{\mathbb{R}} \left(\Lambda^k E^*\right) = \binom{n}{k}.$$

10.
$$ {}^t f(\omega) \in \Lambda^k E^* \ \textit{et}\ {}^t f(\omega \wedge \eta) = {}^t f(\omega) \wedge {}^t f(\eta). $$

Notation 1.
$$ \Lambda E^* := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k E^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E^*. $$

4 Formes différentielles sur les variétés

Définition 7. Soit M une variété lisse et soient
$$ TM := \bigcup_{x \in M} T_x M $$
$$ T_x^* M := (T_x M)^* $$
$$ T^* M := \bigcup_{x \in M} T_x^* M $$
$$ \Lambda^* T^* M := \bigcup_{x \in M} \Lambda^* (T_x^* M). $$

Remarque 4. 1. Soit $x \in M$. On pose $\mathcal{C}_x^M := \{c : I \to M,\ I$ intervalle ouvert, $o \in I,\ c(0) = x,\ c \in \mathcal{C}^p(I, M)\}$. Deux courbes de $\mathcal{C}_x^M$ sont tangentes en x et on note $c_1 \sim c_2$ s'il existe une carte (U, φ) en x telle que
$$ (\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0). $$
Cette condition ne dépend pas du choix de la carte car, si (V, ψ) est une autre carte, alors
$$ (\psi \circ c_i)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_i)'(0) = d_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_i)'(0)). $$
On a ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_x^M$. Une classe d'équivalence est appelé un vecteur tangent à M en x et on nomme espace tangent à M en x l'espace quotient
$$ T_x M := \mathcal{C}_x^M / \sim . $$

C'est un espace vectoriel. En effet, si (U,φ) est une carte en x, on pose

$$\begin{array}{rccc} \theta_\varphi & : & T_xM & \to & \mathbb{R}^n \\ & & \overline{c} & \mapsto & (\varphi \circ c)'(0) \end{array}$$

où $n = \dim M$. Alors θ_φ est injective par définition et surjective car, si $v \in \mathbb{R}^n$, en posant $c : t \mapsto \varphi^{-1}(tv + \varphi(x))$, on a $\theta_\varphi(c) = v$.
Si $\xi, \eta \in T_xM,\ \lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\xi + \eta := \theta_\varphi^{-1}(\theta_\varphi(\xi) + \theta_\varphi(\eta)),$$

$$\lambda\xi := \theta^{-1}(\lambda\theta_\varphi(\xi)).$$

Si (V,ψ) est une aure carte en x, alors

$$(\theta_\varphi \circ \theta_\psi^{-1})(v) = (d_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}))(v).$$

On obtient bien une structure d'espace vectoriel indépendante de la carte et $\theta_\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, on a $\dim T_xM = \dim M$. De plus, si U est un ouvert de M, alors $T_xU = T_xM$ et on a $T_{(x,y)}(M \times N) = T_xM \oplus T_yN$.

2. Si $f : M \to N$ est une application différentiable entre variétés, alors pour tout $x \in M$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_x^M & \to & \mathcal{C}_{f(x)}^N \\ c & \mapsto & f \circ c \end{array}$$

passe au quotient en une application linéaire $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ appelée application linéaire tangente de f en x.

3. Si M est une variété de classe $\mathcal{C}^p,\ p > 0$ et si (U,φ) est une carte de M, on pose $TU := \bigcup_{x \in U} T_xU = \bigcup_{x\in U} T_xM$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & TU & \to & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ & & (m,\xi) & \mapsto & (\varphi(x), T_x\varphi(\xi)) \end{array}$$

est une bijection ($T_x\varphi$ ne dépend pas de x mais de U et $T_x\varphi(\xi)$ donne les coordonnées de ξ dans la base usuelle). Ensuite, si $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ est l'atlas maximal de M, on munit TU d'une topologie en imposant

   (a) TU_i sont des ouverts,

   (b) Φ_i sont des homéomorphismes.

Ainsi, $\Omega \subset TM$ est ouvert si et seulement si pour tout i, $\Phi_i(\Omega \cap TU_i)$ est ouvert dans $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} & : & \Phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \to & \Phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ & & (y, v) & \mapsto & ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme. Ainsi, $(TU_i, \Phi_i)_{i \in I}$ munit TM d'une structure de variété de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, de dimension $2n$.

4. Si $n = \dim M$ et si (U, φ) est une carte, alors $\theta_\varphi = T_x\varphi : T_xM = T_xU \to \mathbb{R}^n$ donc $\theta_\varphi^{-1}(e_i) = T_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})(e_i)$ est une base de T_xM et $T_x\varphi_i$ est la base duale où $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Définition 8. Une k-forme différentielle sur M est une application lisse

$$\begin{array}{rcccc} \omega & : & M & \to & \Lambda^k T^* M \\ & & x & \mapsto & \omega(x) \in \Lambda^k T_x^* M \end{array}$$

On note $\Omega^k(M)$ l'ensemble des k-formes différentielles sur M. C'est un espace vectoriel réel.

Proposition 7. *Si (U, φ) est une carte de M et si $\omega \in \Omega^k(M)$, alors ω s'écrit de façon unique sur U :*

$$\forall x \in U,\ \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1, \ldots, i_k}(x) d\varphi_{i_1, x} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k, x},$$

ou encore

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1, \ldots, i_k} d\varphi_{i_1, x} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k, x},\ \ a_{i_1, \ldots, i_k} : U \to \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. $\{d\varphi_{i_1, x} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k, x},\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est une base de $\Lambda^k(T_xM)$ d'après la Proposition 6-6 en remarquant que $(d\varphi_{i,x})$ est une base duale de T_xM d'après la remarque précédente. $\square$

Remarque 5. Si $\omega \in \Omega^k(U)$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, alors

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Proposition 8. *Si (U, φ) et (V, ψ) sont deux cartes et si $I := (i_1, \ldots, i_k)$, $J := (j_1, \ldots, j_k)$, alors*

$$(d\psi_J)(x) = \sum_I \det((d\psi_{j_n}(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_{i_m})))_{m,n})(d\varphi_I)(x), \ \forall x \in U \cap V.$$

Ou encore, sur $U \cap V$,

$$d\psi_J = \sum_I a_I d\varphi_I, \ a_I(x) = d\psi_J(f_I) = \det(d\psi_{j_n}(f_{i_m}))_{m,n}.$$

Démonstration. $f_i := T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_i)$ base de T_xM associée à (U, φ) et de base duale $d\varphi_i$). Sur $U \cap V$, on écrit ψ_J dans les coordonnées de (U, φ), $d\psi_J = \sum_I a_I d\varphi_I$, donc $(d\psi_J)(x) = \sum_I a_I(x)(d\varphi_I)(x)$. D'après la Proposition 6, en appliquant f_I, on a

$$a_I(x) = d\psi_J(f_I)(x) = \det((d\psi_{j_n}(T_{\varphi(x)}\varphi^{-1}(e_{i_m})))_{m,n}).$$

□

Notation 2.

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M).$$

Pour $\omega \in \Omega^*(M)$, $\mathrm{supp}(\omega) := \overline{\{x \ ; \ \omega(x) \neq 0\}}$, si $\mathrm{supp}(\omega)$ est compact, on dit que ω est à support compact et on note leur ensemble $\Omega^*_c(M)$.

Définition 9. Pour tout $(\omega, \eta) \in \Omega^k(M) \times \Omega^l(M)$, on pose $(\omega \wedge \eta)(x) := \omega(x) \wedge \eta(x)$ et $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(M)$.

Proposition 9. *Si $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$, $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$, et $\wedge$ est distributif et associatif.*

Proposition-Définition 3. *Il existe un unique endomorphisme linéaire $d \in \mathcal{L}(\Omega^*(M))$ tel que*

1. $$\omega \in \Omega^k(M) \;\Rightarrow\; d\omega \in \Omega^{k+1}(M),$$
2. *d restreinte à $\Omega^0(M)$ coïncide avec la différentielle usuelle,*
3. $$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge d\eta,$$
4. $$d^2 = 0.$$

Cet endomorphisme est appelé la différentielle extérieure.

Remarque 6. 1. $\Omega^*(M)$ est donc une algèbre graduée différentielle et anticommutative.(voir Annexe).
2. On a
$$d\left(\sum_I a_I dx_I\right) = \sum_I da_I \wedge dx_I.$$

Définition 10. 1. $\omega \in \Omega^k(M)$ est fermée si $d\omega = 0$,
2. $\omega \in \Omega^k(M)$ est exacte s'il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $\omega = d\alpha$.

Remarque 7. Toute forme exacte est fermée car $d^2 = 0$.

Théorème 4. *(Lemme de Poincaré) Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, alors toute forme différentielle fermée sur U est exacte.*

Définition 11. Soient M, N deux variétés lisses, $f : M \to N$ une application lisse et si $\omega \in \Omega^k(N)$, on définit $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ par

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(f(x))T_x(f(v_1), \ldots, f(v_k)), \ \forall x \in M.$$

On a

$$(f^*\omega)(x) = {}^tT_x(f(\omega(f(x))).$$

Proposition 10. *$\forall \omega, \omega' \in \Omega^k(M), \ \eta \in \Omega^l(M), \ (f, g) \in \mathcal{C}^\infty(N, M) \times \mathcal{C}^\infty(L, N), \ \lambda \in \mathbb{R}$, on a*

1. $$f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega',$$
2. $$f^*(\lambda\omega) = \lambda(f^*\omega),$$
3. $$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta,$$
4. $$g^*(f^*\omega) = (f \circ g)^*\omega,$$
5. *$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ si f est un difféomorphisme,*
6. $$d(f^*\omega) = f^*(d\omega),$$
7. *Si $U \subset M$ est un ouvert, alors $(d\omega)_{|U} = d(\omega_{|U})$.*

5 Intégration et théorème de Stokes

Définition 12. Soit M une variété. M est orientable si on peut choisir un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de l'atlas $\mathcal{A}$ de M tel que

$$\forall x \in M,\ \forall (U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{O}\ ;\ x \in (U \cap M) \cap (V \cap M),\ \det(T_x(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0.$$

$\mathcal{O}$ est alors appelée une orientation de M et $(M,\mathcal{O})$ est une variété orientée.

Définition 13.

1. Un champ de vecteurs sur M est une application $X : M \to TM$ telle que $P \circ X = id_M$ où $p : TM \twoheadrightarrow M$ est la projection canonique.
2. Un repère sur un ouvert U de M est un n-uplet de champs de vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ tel que $\forall x \in U,\ (X_{1,x}, \dots, X_{n,x})$ est une base de T_xM.
3. Un repère global est un repère sur M.
4. Une orientation ponctuelle est la donnée d'une orientation de T_xM pour tout $x \in M$: il s'agit d'une classe déquivalence de repères.
5. Une orientation ponctuelle μ est dite continue en $x \in M$ s'il existe un ouvert U de M contenant x tel que l'orientation est continue sur U, ie il existe un repère continue $(Y_1, \dots, Y_n)$ sur U qui en tout point de U donne une base de l'orientation de l'espace tangent compatible avec l'orientation : $\mu_x = (Y_{1,x}, \dots, Y_{n,x})$. μ est continue si elle l'est en tout $x \in M$.

Définition 14. $\omega \in \Omega^{\dim M}(M)$ est une forme volume si

$$\forall x \in M,\ \omega(x) \neq 0.$$

Théorème 5. *Les assertions suivantes sont éqquivalentes :*

1. *M est orientable,*
2. *M admet une orientation ponctuelle continue,*
3. *M admet une forme volume.*

Définition 15. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et si $\omega \in \Omega_c^n(U)$, on écrit

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et on pose

$$\int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Proposition 11. *Si $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ouverts, si $\varphi : U \to V$ est un difféomorphisme et si $\omega \in \Omega_c^n(V)$, alors*

$$\int_U \varphi^* \omega = \pm \int_V \omega.$$

En particulier, si φ préserve l'orientation (ie si $\det d\varphi > 0$), alors

$$\int_U \varphi^* \omega = \int_V \omega.$$

Définition 16. Soient M une variété lisse, orientée, de dimension n et $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Soit $(\rho_j)_{j \in I}$ une partition de l'unité subordonnée aux domaines de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. On pose

$$\int_M \omega := \sum_{j \in I} \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^* (\rho_j \omega).$$

Proposition 12. *Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, alors*

$$\forall \omega \in \Omega_c^n(N), \ \int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

Théorème 6. *(Théorème de Fubini)*
Soient M, N deux variétés orientées. On munit $M \times N$ de l'orientation produit. Alors

$$\forall (\omega, \eta) \in \Omega^{\dim M}(M) \times \Omega^{\dim N}(N), \ \int_{M \times N} \omega \wedge \eta = \left(\int_M \omega \right) \left(\int_N \eta \right).$$

Démonstration. Grâce à une partition de l'unité, on se ramène au cas où $M = \mathbb{R}^n$ $N = \mathbb{R}^m$ et $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ $\eta = g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$. Le théorème de Fubini classique donne alors

$$\left(\int_M \omega\right)\left(\int_N \eta\right) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n\right)\left(\int_{\mathbb{R}^m} g d\lambda_m\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} fg \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m = \int_{M \times N} \omega \wedge \eta.$$

□

<u>Théorème</u> 7. *(Théorème de Stokes)*
Soient M une variété différentielle orientée, à bord, de dimension n, ω une $(n-1)$-forme différentielle sur M, à support compact, et l'injection canonique $i : \partial M \hookrightarrow M$. Alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

Deuxième partie

Théorie de De Rham

6 Notions d'algèbre homologique

Les modules considérés seront des A-modules, avec A un anneau commutatif.

Définition 17. Une suite de morphismes de modules

$$\cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

est dite exacte si

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Ker} f_{n+1} = \mathrm{Im} f_n.$$

De plus, une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

est appelée suite exacte courte.

Proposition 13. *Si la suite*

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

est une suite exacte d'espaces vectoriels de dimensions finies, alors

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n :
$\underline{n=1}$: c'est immédiat.
$\underline{n=2}$. Si $0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \longrightarrow 0$ est exacte, alors $E_2 \simeq E_1/\mathrm{Ker} f_1$ car f_1 est surjective et

$$\dim E_2 = \dim E_1 - \mathrm{rg} f_0 = \dim E_1 - \dim E_0$$

car f_0 est injective.
$\underline{n-1 \to n}$. On découpe la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0$$

en

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} \mathrm{Im} f_{n-2} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker} f_{n-1} \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \longrightarrow 0 .$$

Par hypothése de récurrence, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim E_i + (-1)^{n-1} \dim \mathrm{Im} f_{n-2} = 0$$

et d'après le cas $n = 2$,

$$\dim \mathrm{Ker} f_{n-1} - \dim E_{n-1} + \dim E_n = 0.$$

On conclut en faisant la somme ou la différence (selon la parité de n) de ces deux termes, en se rappelant que $\dim \mathrm{Im} f_{n-2} = \dim \mathrm{Ker} f_{n-1}$. $\square$

<u>Proposition</u> 14. *(Lemme des cinq)*
Soit la diagramme commutatif dont les lignes sont supposées exactes :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i_1"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "i_2"] & X_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "i_3"] & X_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "i_4"] & X_5 \arrow[d, "i_5"] \\
X'_1 \arrow[r, "f'_1"'] & X'_2 \arrow[r, "f'_2"'] & X'_3 \arrow[r, "f'_3"'] & X'_4 \arrow[r, "f'_4"'] & X'_5
\end{tikzcd}$$

Si i_2, i_4 sont des isomorphismes, si i_1 est injective et i_5 surjective, alors i_3 est un isomorphisme.
En particulier, si i_1, i_2 et i_4, i_5 sont des isomorphismes, alors i_3 est un isomorphisme.

Démonstration. Montrons que i_3 est injective. Soit donc $x \in \mathrm{Ker} i_3$. On a $0 = f_3'(i_3(x)) = i_4(f_3(x))$ donc $f_3(x) = 0$ car i_4 est injective. Donc $x \in \mathrm{Ker} f_3 = \mathrm{Im} f_2$. Il existe donc $y \in X_2$ tel que $f_2(y) = x$ et $f_2'(i_2(y)) = i_3(f_2(y)) = i_3(x) = 0$ donc $i_2(y) \in \mathrm{Ker} f_2' = \mathrm{Im} f_1'$ et il existe $z' \in X_1'$ tel que $f_1'(z') = i_2(y)$. i_1 est surjective, donc il existe $z \in X_1$ tel que $z' = i_1(z)$. Puis, $i_2(f_1(z)) = f_1'(i_1(z)) = f_1'(z') = i_2(y)$. i_2 est injective, donc $y = f_1(z)$. Ainsi, $x = f_2(y) = f_2(f_1(z)) = 0$ car $\mathrm{Im} f_1 = \mathrm{Ker} f_2$.
Montrons que i_3 est surjective. Soit $x' \in X_3'$. i_4 est surjective donc il existe $y \in X_4$ tel que $f_3'(x) = i_4(y)$. $\mathrm{Im} f_3' = \mathrm{Ker} f_4'$ donc $i_5(f_4(y)) = f_4'(i_4(y)) = f_4'(f_3'(x')) = 0$. Comme i_5 est injective, $f_4(y) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker} f_4 = \mathrm{Im} f_3$ et $y = f_3(x),\ x \in X_3$. On a $f_3'(i_3(x)) = i_4(f_3(x)) = i_4(y) = f_3'(x')$ donc $f_3'(i_3(x) - x') = 0$. Ainsi, $i_3(x) - x' \in \mathrm{Ker} f_3' = \mathrm{Im} f_2'$ donc il existe $z' \in X_2'$ tel que $i_3(x) - x' = f_2'(z')$ et comme i_2 est surjective, il existe $z \in X_2'$ tel que $z' = i_2(z)$. Finalement, $i_3(x - f_2(z)) = i_3(x) - i_3(f_2(z)) = i_3(x) - f_2'(i_2(z)) = i_3(x) - f_2'(z') = x'$. □

Définition 18. Un complexe de cochaînes $C = (C^*, \partial^*)$ est une suite de modules $(C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et de morphismes de modules $(\partial^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.
On nomme opérateurs de cobord les ∂^n.
Les éléments de C^n sont les cochaînes de degré n.
Les éléments de $Z^n(C) := \mathrm{Ker}\partial^n$ sont les cocycles de degré n.
Enfin, les éléments de $B^{n+1}(C) := \mathrm{Im}\partial^n$ sont les cobords de degré n.

Remarque 8.

1. $$\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0 \ \Rightarrow\ B^n(C) \subset Z^n(C).$$
2. On peut aussi définir les complexes de chaînes $(C_n, \partial_n)_{n\ in\mathbb{Z}}$ où $(\partial_n : C_{n+1} \to C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont tels que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ pour tout n. Les ∂_n sont les opérateurs de bord, les éléments de $Z_n(C) = \mathrm{Ker}\partial_n$ sont les cycles et ceux de $B_n(C) = \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ sont les bords.
3. Les morphismes de complexes de cochaînes sont les applications de degré 0 au sens où une application de degré p est de la forme $f^n : C^n \to D^{n+p}$. La composition se fait de la façon suivante :
$$\left.\begin{array}{l}\deg(f^*) = p\\ \deg(g^*) = q\end{array}\right\} \Rightarrow\ h^* = g^* \circ f^* \text{ de degré } p+q \text{ où } h^n = g^{n+p} \circ f^n.$$

Définition 19. Un morphisme de complexe de cochaînes $\varphi^* : C \to D$ est une suite $(\varphi^n : C^n \to D^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de morphismes de A-modules telle que

$$\partial^n \circ \varphi^n = \varphi^{n+1} \circ \partial^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cela revient à imposer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & C^n \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\varphi^n"] & C^{n+1} \arrow[r, "\partial^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & D^n \arrow[r, "\partial^n"] & D^{n+1} \arrow[r, "\partial^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque 9. (Catégories et foncteurs)
Une catégorie $\mathcal{A}$ est la donnée d'une collection d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, d'ensembles $\mathrm{Hom}(A, B)$ appelés ensemble des homomorphismes de A dans B pour tous objets $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et, pour tous $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ d'une loi de composition

$$\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

telle que

1. $\mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(A', B') \neq \emptyset$ si et seulement si $A = A'$ et $B = B'$ avec égalité dans ce cas,
2. Pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, il existe un élément $id_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ qui se comporte comme l'identité à gauche et à droite pour les éléments de $\mathrm{Hom}(A, B)$ et $\mathrm{Hom}(B, A)$ respectivement, pour tout $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.
3. La loi est associative quand cela a un sens : ie pour tous $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$,

$$\forall (f, g, h) \in \mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(C, D), \ (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note $f \in \mathrm{Ar}(\mathcal{A})$ s'il existe $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ tels que $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.
Un foncteur covariant F entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est une application double

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \\ & & A & \mapsto & F(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} F & : & \mathrm{Ar}(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{Ar}(\mathcal{B}) \\ & & f \in \mathrm{Hom}(A, B) & \mapsto & F(f) : F(A) \to F(B) \end{array}$$

telle que

1.
$$\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}),\ F(id_A) = id_{F(A)},$$

2.
$$\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}),\ f \in \mathrm{Hom}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}(B, C),\ F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Enfin, un foncteur contravariant est également une application double

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \\ & & A & \mapsto & F(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathrm{Ar}(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{Ar}(\mathcal{B}) \\ & & f \in \mathrm{Hom}(A, B) & \mapsto & F(f) : F(B) \to F(A) \end{array}$$

vérifiant 1. ainsi que

$$\forall f \in \mathrm{Hom}(A, B),\ g \in \mathrm{Hom}(B, C),\ F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Le caractère covariant sera dénoté par f_* tandis que le caractère contravariant le sera par f^*.

Exemple 2.
1. Nous avons par exemple les catégories Ens, Mon, Grp, Mod_A, Man_p respectivement des ensembles, monoïdes, groupes, A-modules, variétés de classe $\mathcal{C}^p$ etc.
2. On a aussi la catégorie $K(A)^*$ des complexes de cochaînes de A-modules.
3. Si à chaque groupe nous associons son ensemble sous-jacent, nous obtenons un foncteur covariant de Grp dans Ens qui associe à chaque morphisme de groupes l'application entre ensembles associée. Un tel foncteur est appelé foncteur d'oubli.
4. On a un foncteur contravariant Ω^* de Man_∞ dans la catégorie des algèbres graduées anticommutatives et associatives donnée sur les objets par $M \mapsto \Omega^*(M)$ et sur les morphismes par $f \mapsto f^*$.

Définition 20. Soit C un complexe de cochaînes. Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un sous-module $D^n \subset C^n$. Dès que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\partial^n(D^n) \subset D^{n+1}$, ∂^* se factorise par i^*, où $i^n : D^n \hookrightarrow C^n$ et définit $\widetilde{\partial^*}$ par $\partial^n \circ i^n = i^{n+1} \circ \widetilde{\partial^n}$. On obtient un complexe de cochaînes $D = (D^*, \widetilde{\partial^*})$ appelé sous-complexe de C. L'application $i^* : D \to C$ est alors un morphisme de complexes de cochaînes.

Définition 21. Si C est un complexe de cochaînes, on nomme $n^{\text{ième}}$ module de cohomologie le module quotient

$$H^n(C) := Z^n(C)/B^n(C).$$

Ainsi, la suite

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} C^n \xrightarrow{\partial^n} C^{n+1} \xrightarrow{\partial^{n+1}} \cdots$$

du complexe C est exacte si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ H^n(C) = 0$$

et dans ce cas, le complexe C est dit acyclique.

Remarque 10. Comme un morphisme de complexes de cochaînes $\varphi^* : C \to D$ envoie un cocycle sur un cocycle et un cobord sur un cobord, il induit pour tout n un morphisme de modules

$$H^n(\varphi^*) : H^n(C) \to H^n(D).$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ un foncteur

$$H^n : K(A)^* \to Mod_A.$$

Définition 22.

1. Un morphisme de complexes φ est un quasi-isomorphisme si pour tout n, $H^n(\varphi)$ est un isomorphisme.
2. Une suite exacte courte de complexes de cochaînes

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi^*} D \xrightarrow{\psi^*} E \longrightarrow 0$$

est la donnée de trois complexes C, D, E et de morphismes de complexes $\varphi^* : C \to D$ et $\psi^* : D \to E$ tels que pour tout n, la suite de modules $0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{\varphi^n} D^n \xrightarrow{\psi^n} E^n \longrightarrow 0$ soit exacte. Ce qui revient à demander l'égalité des sous-complexes $\mathrm{Im}\varphi^* = \mathrm{Ker}\psi^*$ où $\mathrm{Im}\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\mathrm{Ker}\psi^* = (\mathrm{Ker}\psi^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

<u>Théorème</u> 8. *Une suite exacte courte de complexes*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi^*} D \xrightarrow{\psi^*} E \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue :

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n+1}(C) \arrow[r] & \cdots \\
 & H^n(C) \arrow[r, "H^n(\varphi^*)"] & H^n(D) \arrow[r, "H^n(\psi^*)"] & H^n(E) \arrow[ull, rounded corners, "\delta^n"'] \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}(E) \arrow[u, rounded corners, "\delta^{n-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On construit d'abord $\delta^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$:

$$\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
0 \arrow[r] & C^{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi^{n+1}"] & D^{n+1} \arrow[u] \arrow[r, "\psi^{n+1}"] & E^{n+1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^n \arrow[u, "\partial^n"'] \arrow[r, "\varphi^n"] & D^n \arrow[u, "\partial^n"'] \arrow[r, "\psi^n"] & E^n \arrow[u, "\partial^n"'] \arrow[r] & 0 \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Soit $z \in E^n$ un n-cocycle. Par surjectivité de ψ^n, il existe $y \in D^n$ tel que $z = \psi^n(y)$. Comme $\psi^{n+1}(\partial^n y) = \partial^n \psi^n(y) = \partial^n z = 0$, ie $\partial^n y \in \mathrm{Ker}\psi^{n+1} = \mathrm{Im}\varphi^{n+1}$ il existe $x \in C^{n+1}$ tel que $\partial^n y = \varphi^{n+1}(x)$. À y fixé, ce x est unique du fait que φ^{n+1} est injective. Alors $\varphi^{n+2}(\partial^{n+1}x) = \partial^{n+1}(\varphi^{n+1}(x)) = \partial^{n+1} \circ \partial^n y = 0$. Par injectivité de φ^{n+2}, on a $\partial^{n+1}x = 0$ donc x est un $(n+1)$-cocycle.
Vérifions que la classe de cohomologie de x ne dépend pas du choix de y. Soit $y' \in D^n$ convenant aussi et x' se déduisant du choix de y'.
Ensuite, $0 = \psi^n(y-y')$ donc $y-y' \in \mathrm{Ker}\psi^n = \mathrm{Im}\varphi^n$ et donc il existe $a \in C^{n+1}$ tel que $y - y' = \varphi^n(a)$ ce qui implique que $\varphi^{n+1}(x - x') = \partial^n(y - y') = \partial^n \varphi^n(a) = \varphi^{n+1}(\partial^n a)$, d'où $x - x' = \partial^n a$ par injectivité de φ^{n+1}. En notant $\delta^n(z)$ la classe de cohomologie de x, on a bien une application A-linéaire $\delta^n : Z^n(E) \to H^{n+1}(C)$.

Il nous reste à vérifier que δ^n annule les cobords pour passer au quotient en une application $\delta^n : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$.
Supposons que $z = \partial^{n-1}c$ et soit $c = \psi^{n-1}(b)$ par surjectivité. Alors $\psi^n(\partial^{n-1}(b)) = \partial^{n-1}\psi^{n-1}(b) = \partial^{n-1}c = z$. Alors, pour construire $\delta^n(z)$, on pose $y := \partial^{n-1}b$ mais alors $\varphi^{n+1}(x) = \partial^n y = \partial^n\partial^{n-1}c = 0$, donc $x = 0$ par injectivité de φ^{n+1}.
Vérifions l'exactitude en $H^{n+1}(C)$, pour fixer les idées.

1. $H^{n+1}(\varphi^*) \circ \delta^n = 0$. Soit $z \in E^n$ un n-cocycle. Soient x et y de la construction de δ^n. Alors $H^{n-1}(\varphi^*) \circ \delta^n(\overline{z}) = \overline{\varphi^{n+1}(x)} = \overline{\partial^n y} = 0$.
2. $\mathrm{Ker}H^{n+1}(\varphi^*) \subset \mathrm{Im}\delta^n$. Soit $x \in C^{n+1}$ un $(n+1)$-cocycle. Dire que $H^{n+1}(\varphi^*)(\overline{x}) = 0$ revient à dire que $\overline{\varphi^{n+1}(x)} = 0$, ie que $\varphi^{n+1}(x)$ est un cobord de D^{n+1}. Donc, si $\overline{x} \in \mathrm{Ker}H^{n+1}(\varphi^*)$, il existe $y \in Z^n(D)$ tel que $\varphi^{n+1}(x) = \partial^n y$. Posons $z := \psi^n(y)$, alors $\partial^n z = \partial^n(\psi^n(y)) = \psi^{n+1}(\partial^n y) = \psi^{n+1}(\varphi^{n+1}(x)) = 0$. Par définition de δ^n, on a alors $\delta^n(\overline{z}) = \overline{x}$.

□

<u>Définition</u> 23. Deux morphismes de complexes $\varphi^*, \psi^* : C^* \to D^*$ sont <u>homotopes</u> s'il existe une application $K : C^* \to D^*$ de degré -1 telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ K^{n+1}\partial^n + \partial^{n-1}K^n = \psi^n - \varphi^n.$$

L'application K est appelée <u>opérateur d'homotopie</u> (ou simplement <u>homotopie</u>) de φ à ψ.

<u>Remarque</u> 11. C'est une relation d'équivalence :

1. $$\varphi^* \sim \varphi^*,\ K^* = 0,$$
2. $$\varphi^* \sim \psi^* \ \Leftrightarrow\ \psi^* \sim \varphi^*,\ L^* = -K^*,$$
3. $$\varphi^* \sim \psi^* \text{ et } \psi^* \sim \chi^* \ \Rightarrow\ \varphi^* \sim \chi^*,\ L^* = K_1^* + K_2^*.$$

<u>Proposition</u> 15. *Si $\varphi^*, \psi^* : C^* \to D^*$ sont deux morphismes homotopes, alors*

$$H^n(\varphi^*) = H^n(\psi^*),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Soit x un n-cocycle, alors $\psi^n(x) - \varphi^n(x) = \partial^{n-1}K^n(x)$, donc $\varphi^n(x)$ et $\psi^n(x)$ diffèrent d'un cobord, donc $\overline{\varphi^n(x)} = \overline{\psi^n(x)}$ dans $H^n(D)$. $\square$

Corollaire 1. *Si $id : C^* \to C^*$ est homotope à 0, alors C^* est acyclique.*

Démonstration. Comme H^n est un foncteur, $H^n(id) = id$, mais aussi $H^n(id) = H^n(0) = 0$. Donc, $id_{H^n(C)} = 0$, et donc $H^n(C) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 2. *Si $f^* : C^* \to D^*$ et $g^* : D^* \to C^*$ vérifient $f \circ g \sim id$ et $g \circ f \sim id$ (on dit que C^* et D^* ont même type d'homotopie), alors*

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ H^n(C) \simeq H^n(D).$$

7 Cohomologie de De Rham

Désormais, sauf mention contraire, toutes les variétés seront supposées lisses.

Soit M une variété différentielle lisse. Alors l'algèbre graduée $\Omega^*(M)$ est un complexe de cochaînes :

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

On parle du complexe de De Rham. Les cocycles sont les formes différentielles fermées et les cobords sont les formes différentielles exactes.

Définition 24. On appelle $n^{\text{ème}}$ espace de cohomologie de De Rham de M l'espace vectoriel quotient

$$H^n(M) = H^n_{DR}(M) := Z^n(\Omega^*(M))/B^n(\Omega^*(M)).$$

Remarque 12. Si f est lisse, alors f^* est un morphisme de complexes de cochaînes et passe à la cohomologie. Le foncteur contravariant Ω^* va donc de la catégorie des variétés lisses dans la catégorie $K(\mathbb{R})^*$ des complexes de cochaînes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3. 1.
$$H^n(\{a\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $\operatorname{Ker} d^0 \cap \Omega^0(\mathbb{R}) = \{\text{fonctions constantes}\}$ donc $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Sur $\Omega^1(\mathbb{R})$, $\operatorname{Ker} d^1 = \Omega^1(\mathbb{R})$ et si $\omega = g(x)dx \in \operatorname{Ker} d^1$, alors en posant $f : x \mapsto \int_0^x g(u)\mathrm{d}u$, on trouve $df = \omega$. Donc toute 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}$ est exacte : $H^1(\mathbb{R}) = 0$.
3. On généralise avec Poincaré :
$$H^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 5. *L'image réciproque passe à la cohomologie.*

Démonstration. En effet, elle envoie une forme fermée sur une forme fermée et une forme exacte sur une forme exacte. □

Proposition 16. *Deux variétés difféomorphes ont même cohomologie.*

Démonstration. Par fonctorialité de l'image réciproque. □

Proposition 17. *Soit M une variété différentielle et $p > \dim M$, alors $H^p(M) = 0$.*

Démonstration. $n := \dim M,\ p > n$. Pour tout $x \in M,\ \dim(T_xM) = n$ donc
$$\omega \in \Omega^p(M) \;\Rightarrow\; \omega(x) \in \Lambda^p T_x^*M = \{0\}$$
d'après la Proposition 6. □

Lemme 6. *1. Le produit extérieur de deux formes fermées est fermée.*

2. $\overline{\omega \wedge \eta}$ ne dépend pas du choix du représentant de $\overline{\omega}$ ou de $\overline{\eta}$.

Le produit extérieur passe donc à la cohomologie et induit une structure d'algèbre graduée différentielle, associative et anticommutative :

$$H^*(M) := \bigoplus_{n=0}^{\dim M} H^n(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(M).$$

Remarque 13. 1. On a (en utilisant la propriété d'antidérivation de $\wedge$) que $Z^*(M) \subset \Omega^*(M)$ est un sous-anneau et $B^*(M) \subset Z^*(M)$ est un idéal.

2. Si $f : M \to N$ est lisse, alors $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ est un morphisme d'algèbres graduées.

Proposition 18. *Si M est une variété à c composantes connexes, alors*

$$H^0(M) \simeq \mathbb{R}^c.$$

Démonstration. Comme $B^0(M) = \{0\}$, $H^0(M) = Z^0(M)$. Si $f \in Z^0(M)$, ie si $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $df = 0$. Dans une carte (U, φ), $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} d\varphi_i = 0$ donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = 0$ sur U et f est localement constante sur U. Ainsi les 0-formes fermées sur M sont les applications localement constantes sur M. □

Remarque 14. Comme une variété admet une base dénombrable, le nombre c est au plus dénombrable.

Exemple 4. 1. (Cohomologie de $\mathbb{S}^1$). On a

$$H^0(\mathbb{S}^1) \simeq H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}.$$

En effet, $\mathbb{S}^1$ est connexe, on a $H^*(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$. De plus, $\dim \mathbb{S}^1 = 1$, donc $\Omega^1(\mathbb{S}^1) = Z^1(\mathbb{S}^1)$. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \Omega^1(\mathbb{S}^1) & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \int_{\mathbb{S}^1} \omega \end{array}$$

Posons aussi

$$\begin{array}{rcccc} h & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & & \theta & \mapsto & (\cos\theta, \sin\theta) \end{array}$$

(a) φ est surjective. En effet, si $\omega_0 := -ydx + xdy$, alors $h^*\omega_0 = d\theta$. Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{S}^1} \frac{x}{2\pi}\omega_0 = \frac{x}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\omega_0 = \frac{x}{2\pi}\int_{h([0,2\pi])} h^*\omega_0 = \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = x$.

(b) D'après le Théorème de Stokes, $B^1(\mathbb{S}^1) \subset \mathrm{Ker}\varphi$.

(c) Montrons que $\mathrm{Ker}\varphi \subset B^1(\mathbb{S}^1)$. Soit donc $\omega \in \mathrm{Ker}\varphi$. On a

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} h^*\omega = 0$$

et $h^*\omega = f(t)dt$ avec f 2π-périodique. En effe, ω_0 est une forme volume sur $\mathbb{S}^1$, donc toute $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ s'écrit $\omega = f\omega_0$, avec f lisse sur $\mathbb{S}^1$ (pour tout $x \in \mathbb{S}^1, \dim(\Lambda^1 T_x\mathbb{S}^1) = 1$, puis on regarde la régularité des coefficients). Puis $h^*\omega_0 = dt$ donc $h^*\omega = h^*fh^*\omega_0 = hfdt$ qui est 2π-périodique.

Lemme 7. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lisse 2π-périodique et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ 2π-périodique telle que $fdt = dg$.*

Démonstration. Posons $g(t) := \int_0^t f(u)du$, $g(t+2\pi) = \int_0^{t+2\pi} f(u)du = \int_0^{2\pi} f(u)du + \int_{2\pi}^{t+2\pi} f(u)du = 0 + g(t)$ et $dg = g'dt = fdt$. □

Donc $fdt = dg$ avec g 2π-périodique. Alors $g = h^*\eta$. En effet, si $p \in \mathbb{S}^1$, comme h est un difféomorphisme local et il existe V un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{S}^1$ et U un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $h_{|U} : U \to V$ est un difféomorphisme. Soit $s := h_{|U}^{-1}$. Posons alors $\eta = f \circ s$. η est bien définie : si s' est un autre difféomorphisme (on change V), alors s et s' diffèrent d'un multiple de 2π, mais g est 2π-périodique. Nous avons donc bien $g = \eta \circ s^{-1} = g \circ h = h^*\eta$ sur $h^{-1}(U)$. En faisant varier $p \in \mathbb{S}^1$, on obtient η sur $\mathbb{S}^1$.

Lemme 8. *Si $h : M \to N$ est lisse, surjective et est une submersion, alors $h^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ est injective.*

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega^k(N)$ telle que $h^*\omega = 0$. Soient $p \in N$; $v_1, \dots, v_k \in T_pN$. h est surjective, donc il existe $\tilde{p} \in M$ tel que $h(\tilde{p}) = p$. h est une submersion, donc il existe $\widetilde{v_1}, \dots, \widetilde{v_k} \in T_{\tilde{p}}M$ tels que $T_{\tilde{p}}h(\widetilde{v_i}) = v_i$. Donc $0 = (h^*\omega)(\tilde{p})(\widetilde{v_1}, \dots, \widetilde{v_k}) = \omega(p)(v_1, \dots, v_k)$ donc $\omega = 0$. $\square$

Ainsi, $dg = d(h^*\eta) = h^*(d\eta)$ mais $dg = f dt = h^*\omega$. h^* est injectif donc $\omega = \eta$, donc ω est exacte.
Ainsi, par le théorème d'isomorphie,

$$H^*(\mathbb{S}^1) = Z^1(\mathbb{S}^1)/B^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}.$$

De plus, un générateur de $H^1(\mathbb{S}^1)$ est $\overline{\omega}$ où $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega \neq 0.$$

2. (Cohomologie d'une union disjointe). Soient M une variété lisse et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ des ouverts disjoints de M. Alors

$$H^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \simeq \prod_{\alpha \in A} H^*(U_\alpha).$$

En effet, $i_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\beta \in A} U_\beta$ induit un morphisme $i_\alpha^* : \Omega^*\left(\bigsqcup_{\beta \in A} U_\beta\right) \to \Omega^*(U_\alpha)$ et on montre aisément que

$$i^* : \Omega^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \to \prod_{\alpha \in A} \Omega^*(U_\alpha)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées. Cet isomorphisme induit l'isomorphisme :

$$\begin{array}{cccc} i^* & : & H^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) & \to & \prod_{\alpha \in A} H^*(U_\alpha) \\ & & \overline{\omega} & \mapsto & \overline{(i_\alpha^*\omega)}_{\alpha \in A} \end{array}$$

En particulier, on a

$$H^p\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \simeq \prod_{\alpha \in A} H^p(U_\alpha).$$

Remarque 15. Si l'union est finie, ces deux derniers résultats se retrouvent avec la suite de Mayer-Vietoris.

8 Cohomologie de De Rham à support compact

Remarque 16. Si M est une variété lisse, $\Omega^*(M)$ est un complexe de cochaînes (c'est même une algèbre graduée associative et anticommutative. En effet, $\mathrm{supp}(\omega \wedge \eta) \subset \mathrm{supp}\omega \cap \mathrm{supp}\eta$). On note

$$H_c^n(M) = Z_c^n(M)/B_c^n(M)$$

l'espace vectoriel de cohomologie de ce complexe. On note que si M est compacte, alors

$$\Omega_c^*(M) = \Omega^*(M)$$

et

$$H_c^*(M) = H^*(M).$$

Exemple 5.

1. $$H_c^n(\{a\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $$H_c^0(M) = \mathbb{R}^{|\{\text{composantes connexes compactes}\}|}.$$

3. Sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de fonction constante non nulle à support compact donc $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$. $\int_{\mathbb{R}} : \Omega_c^1(M) \to \mathbb{R}$ est surjective. Montrons que $\mathrm{Ker} \int_{\mathbb{R}} = \mathrm{Im} d^0$ et par quotientage, on aura

$$H_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R})/\mathrm{Ker} \int_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

Si $g(x)dx \in \mathrm{Ker} \int_{\mathbb{R}}$, on pose $f : x \mapsto \int_{-\infty}^x g(u)du$ et $f \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$. (Attention : si $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x \neq 0$, f n'est pas à support compact). Alors $df = g(x)dx$ donc $\mathrm{Ker} \int_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Im} d^0$. Réciproquement, si $df = f(x)dx \in \mathrm{Im} d^0$, alors $\int_{\mathbb{R}} df = f(b) - f(a) = 0$ avec $[a, b] \supsetneq \mathrm{supp} f$.

4. On généralise :

$$H_c^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 17.

1. Si $\omega, \eta \in \Omega_c^*(N)$, alors $\omega \wedge \eta \in \Omega_c^*(M)$ et $\wedge$ passe à la cohomologie à support compact et $H_c^*(M)$ est une algèbre graduée.
2. Attention : $\omega \in \Omega_c^*(M)$ n'implique pas que $f^*\omega \in \Omega_c^*(M)$, donc on ne peut pas définir de foncteur Ω_c^* comme précédemment. Cependant, on peut :
   (a) Soit construire Ω_c^* comme Ω^* en se restreignant aux applications propres (ie f^{-1} d'un compact est compact),
   (b) Soit on construit un foncteur covariant Ω_c^* pour l'inclusion des ouverts : Si $U \subset M$ est un ouvert, et si $i : U \hookrightarrow M$, on pose $i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(M)$ qui étend une forme différentielle par 0.

   À partir de maintenant, c'est ce foncteur covariant qu'on désignera par Ω_c^*. Le caractère covariant nous servira pour la dualité de Poincaré et la suite de Mayer-Vietoris à support compact.

Exemple 6. (Union disjointe)
Soient M une variété lisse et $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ des ouverts disjoints de M. Alors

$$H_c^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} H_c^*(U_\alpha).$$

En effet, $i_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\beta \in A} U_\beta$ induit un morphisme
$i_{\alpha^*} : \Omega_c^*(U_\alpha) \to \Omega_c^*\left(\bigsqcup_{\beta \in A} U_\beta\right)$ qui permet de construire le morphisme d'algèbres graduées donné par

$$\begin{array}{rccc} i_* & : & \bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^*(U_\alpha) & \to & \Omega_c^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \\ & & \sum_{\nu=1}^p \omega_{\alpha_\nu} & \mapsto & \sum_{\nu=1}^p i_{\alpha_\nu *}\omega_{\alpha_\nu} \end{array}$$

dont on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme (en effet, une forme à support compact ne peut être non nulle sur un nombre infini d'ouvert U_α), d'où le résultat.

Remarque 18. On peut retrouver ce résultat avec Mayer-Vietoris si l'union est finie.

9 Invariance par homotopie

Définition 25.
1. Deux applications lisses $f, g : M \to N$ sont différentiablement homotopes s'il existe une application lisse $F : M \times \mathbb{R} \to N$ telle que $f = F(\cdot, \leq 0)$, $g = F(\cdot, \geq 1)$.
   C'est une relation d'équivalence.
2. Soit M une variété lisse. On dit que M est contractile en $p_0 \in M$ si id et l'application constante égale à p_0 sont différentiablement homotopes.
3. On dit que M est contractile si elle est contractile en au moins l'un de ses points.

Théorème 9. *Si $f, g : M \to N$ sont lisses et différentiablement homotopes, alors*
$$f^* = g^* : H^*(N) \to H^*(M).$$

Démonstration. Posons
$$\begin{array}{rcccc} i_t & : & M & \hookrightarrow & M \times \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & (x, t) \end{array}$$
alors $f = F \circ i_0$ et $g = F \circ i_1$. Par fonctorialité de l'image réciproque, $f^* = i_0^* \circ F^* : H^n(N) \to H^n(M)$ et $g^* = i_1^* \circ F^* : H^n(N) \to H^n(M)$. Il suffit donc de montrer que $i_0^* : i_1^* : H^n(M \times \mathbb{R}) \to H^n(M)$. Pour cela, nous allons montrer que $i_0^*, i_1^* : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^*(M)$ sont des morphismes de complexes de cochaînes homotopes, et on appliquera la Proposition 15.
Nous sommes donc ramenés à construire un opérateur d'homotopie K où $K^n : \Omega^n(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{n-1}(M)$ et
$$K^{n-1}d^n + d^{n-1}K^n = i_1^n - i_0^n. \tag{1}$$
Considérons le champ de vecteurs
$$\begin{array}{rcccc} T := \frac{d}{dt} & : & M \times \mathbb{R} & \to & T(M \times \mathbb{R}) = TM \oplus T\mathbb{R} \\ & & (m, x) & \mapsto & (0, x) \end{array}$$
Si $\omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$, la contraction $\iota_T\omega \in \Omega^{n-1}(M \times \mathbb{R})$ où $(\iota_T\omega)(p)(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega(p)(0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ et donc $\widetilde{\omega} = i_t^*(\iota_T\omega) \in \Omega^{n-1}(M)$. Ensuite, si $\widetilde{\omega}^t \in$

$\Omega^{n-1}(M)$ dépend de t, $\int_0^1 \widetilde{\omega}^t dt \in \Omega^{n-1}(M)$ (écrire $\widetilde{\omega}$ dans une carte). Ainsi, on définit K :

$$\forall \omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R}),\ K^n\omega = \int_0^1 i_t^*(\iota_T\omega)\mathrm{d}t \in \Omega^{n-1}(M).$$

Remarquons ensuite que tout $\omega \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $\omega = \alpha + \beta \wedge dt$, $\alpha \in \Omega^n(M \times \mathbb{R})$ et $\beta \in \Omega^{n-1}(M \times \mathbb{R})$ sont de la forme $p^*\eta$ où $p : M \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow M$ et $\eta \in \Omega^*(M)$, ie α et β n'ont en aucun point un terme en dt. Il nous reste à vérifier (1) sur les formes différentielles de la forme α et $\beta \wedge dt$.

1. Soit $\eta \in \Omega^n(M)$, pour une carte (U, φ) de M,

$$\alpha = p^*\eta = \sum_{I=(i_1,\dots,i_n)} f_I(x,t)p^*d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge p^*d\varphi_{i_n}.$$

   On peut donc supposer $\alpha = f(x,t)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$.

$$\iota_T\alpha = 0 \ \Rightarrow\ dK^n\alpha = 0,$$

   puis

$$K^{n+1}(d\alpha) = K^{n+1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} + \text{termes sans } dt\right)$$

$$= K^{n+1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}\right) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t\right) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$$
$$= (f(x,1) - f(x,0))dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = i_1^*\alpha - i_0^*\alpha.$$

2. Soit $\beta = p^*\eta \wedge dt$. Comme précédemment, localement, on peut supposer $\beta = f(x,t)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{n-1}}$ comme forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a

$$i_1^*dt - i_0^*dt = 0 = i_1^*\beta - i_0^*\beta.$$

   De plus, on a

$$d\beta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{n-1}}$$

donc

$$K^{n+1}(d\beta)(p) = -\sum_J \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}t\right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{n-1}},$$

et

$$\begin{aligned} d(K^n\beta)(p) &= d\left(\left(\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{n-1}}\right) \\ &= \sum_j \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathrm{d}t\right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$dK^n\beta + K^{n-1}(d\beta) = i_1^*\beta - i_0^*\beta,$$

et donc (1) est vraie.

□

<u>Corollaire</u> 3. *(Lemme de Poincaré)*
Si M est une variété lisse contractile, alors toute forme différentielle fermée sur M est exacte.

Démonstration. Soit $p_0 \in M$ tel que M soit contractile en p_0. On note $\widetilde{p_0}$ l'application constante égale à p_0. Alors $\widetilde{p_0}$ et id sont différentiablement homotopes et les applications

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{p_0}^* : & H^*(M) & \to & H^*(M) \\ & \overline{\omega} & \mapsto & \overline{p_0^*\omega} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} id^* : & H^*(M) & \to & H^*(M) \\ & \overline{\omega} & \mapsto & \overline{\omega} \end{array}$$

sont égales. Ainsi, pour toute $\omega \in Z^*(M)$, $\overline{\omega} = 0$ donc il existe $\alpha \in \Omega^*(M)$ telle que $d\alpha = \omega$. □

On va à présent voir que, malgré le fait que la construction de formes différentielles soit intimement liée à la structure différentielle des variétés, la cohomologie de De Rham est invariante par homéomorphisme.

Lemme 9. *Soient M, N deux variétés.*

1. *Toute application continue $M \to N$ est continûment homotope à une application lisse.*
2. *Deux applications lisses continûment homotopes sont différentiablement homotopes.*

Pour démontrer ce lemme, on procède en plusieurs étapes :

Lemme 10. *Il existe $\xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, [0,1])$ telle que*

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad ||x|| \leq 1 \\ 1 & si \quad ||x|| \geq 2 \end{cases}$$

Démonstration. La fonction

$$\begin{array}{rcll} h & : & \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

est lisse et on pose alors

$$\xi : x \mapsto \frac{h(||x|| - 1)}{h(||x|| - 1) + h(2 - ||x||)}.$$

□

Lemme 11. *Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert relativement compact et soit $\overline{U} \subset V \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert. Il existe $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, [0,1])$ telle que*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \overline{U} \\ 0 & si \quad x \notin V \end{cases}$$

Démonstration. Il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^m$ et il existe $r_1, \ldots, r_p > 0$ tels que $\widetilde{B_i} := \overline{B}(a_i, r_i) \subset V$ pour tout i et $B_i := \overline{B}(a_i, r_i)$ telles que $\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^p B_i$. On pose

$$\zeta : x \mapsto 1 - \prod_{i=1}^{p} \xi\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right).$$

□

Lemme 12. *Il existe une famille dénombrable $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de cartes de M et une famille dénombrable $(V_p, \psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de cartes de N telles que*

1. *U_p (resp V_p) est un ouvert relativement compact de M (resp N),*
2. *φ_p (resp. ψ_p) est un difféomorphisme de U_p (resp. V_p) sur $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{H}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$).*
3. *$f(U_p) \subset V_p$,*
4. *$(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert localement fini de M,*
5. *$M = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p,\ D_p := \varphi_p^{-1}(\mathbb{B}^m)$.*

Démonstration. Soit (W_i, θ_i) une famille de cartes de N telle que

1. W_i est un ouvert relativement compact de N,
2. (W_i) est un recouvrement ouvert localement fini de N,
3. θ_i est un difféomorphisme de W_i sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{H}^n$.

On peut trouver une famille dénombrable $(U_p, \varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de cartes de M telle que

1. U_p est un ouvert relativement compact de M,
2. $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une recouvrement ouvert localement fini de M,
3. φ_p est un difféomorphisme de U_p sur $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{H}^m$,
4. $M = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} D_p$ où $D_p := \varphi_p^{-1}(\mathbb{B}^m)$,
5. $\forall p \in \mathbb{N},\ \exists i(p)\ ;\ f(U_p) \subset W_{i(p} = V_p$.

Les familles (U_p, φ_p) et (V_p, ψ_p) où $\psi_p := \theta_{i(p)}$ vérifient les conditions imposées. □

Théorème 10. *Si $f : M \to N$ est continue et différentiable sur un fermé F de M, alors il existe une homotopie H relativement à F de f à une application différentiable $g : M \to N$.*

Démonstration. Soient avec les notations du Lemme 12, $A_0 := F,\ A_p := A_{p-1} \cup D_p,\ p \geq 1$. À partir de l'application continue $H_0 : (x,t) \mapsto f(x)$ de $M \times [0,1]$ dans N, on va construire par récurrence une suite $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'applications continues de $M \times [0,1]$ dans N telle que

1. $H_p = H_{p-1}$ sur $A_{p-1} \times [0,1] \subset M \times [0,1]$,
2. $H_p(x,0) = f(x)$,
3. $x \mapsto H_p(x,1)$ est différentiable sur A_p.

Supposons $x \mapsto H_{p-1}(x,1)$ différentiable sur un voisinage ouvert Ω_p de A_{p-1} et soit $K_p := D_p \setminus (D_p \cap \Omega_p)$. On peut trouver deux ouverts W_p et W'_p de M tels que

1. $K_p \subset W_p \subset \overline{W_p} \subset W'_p \subset \overline{W'_p} \subset U_p$,
2. $\overline{W'_p} \cap A_{p-1} = \emptyset$.

Soit alors (Lemme 11) ζ_p différentiable sur U_p égale à 1 sur $\overline{W_p}$ et à 0 sur $U_p \setminus W'_p$. L'application $H_p : M \times [0,1] \to N$ définie par

$$H_p(x,t) : \begin{cases} H_{p-1}(x,t) & \text{si} \quad x \notin \overline{W'_p} \\ \psi_p^{-1}((1 - t\zeta_p(x))\psi_p(H_{p-1}(x,t)) & \text{si} \quad x \in U_p \end{cases}$$

satisfait aux conditions voulues ($x \mapsto H_p(x,1)$ est différentiable). Puisque $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est localement fini, on peut définir une application continue $H : M \times [0,1] \to N$ par

$$H(x,t) := \lim_{p\to\infty} H_p(x,t).$$

C'est une homotope relativement à F de f à $g : x \mapsto H(x,1)$ différentiable de M dans N. □

<u>Corollaire</u> 4. *Toute $f : M \to N$ continue est homotope à une application différentiable.*

Démonstration. On applique le Théorème précédent avec $F = \emptyset$. □

<u>Théorème</u> 11. *Deux applications différentiables continûment homotopes sont différentiablement homotopes.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq \frac{1}{4} \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Si $H : M \times [0,1] \to N$ est une homotopie (continue) de f à g, l'application $H' : (x,t) \mapsto H(x, \alpha(t))$ de $M \times \mathbb{R}$ dans N est différentiable sur le fermé $F := M \times (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[)$: elle vérifie

$$\begin{cases} H'(x,t) = f(x), & t \leq 0 \\ H'(x,t) = g(x), & t \geq 1 \end{cases}$$

Il existe donc une application différentiable $K : M \times \mathbb{R} \to N$ égale à H' sur F : K est alors une homotopie différentiable de f à g. □

Les deux derniers Théorèmes donnent exactement le Lemme 9.

Lemme 13. *Une application continue entre variétés $f : M \to N$ induit un morphisme $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$.*

Démonstration. Soit $f : M \to N$ continue, alors il existe $\widetilde{f} : M \to N$ lisse continûment homotope à f. On pose $f^* := \widetilde{f}^*$. Alors f^* est bien définie : en effet, si $\widetilde{\widetilde{f}} : M \to N$ est lisse et aussi continûment homotopes à f, alors $\widetilde{f}$ et $\widetilde{\widetilde{f}}$ sont continûment homotopes, donc différentiablement homotopes et donc $\widetilde{f}^* = \widetilde{\widetilde{f}}^*$. □

Lemme 14. *Si $f : M \to N$ et $g : N \to L$ sont continues entre variétés différentielles, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Démonstration. Si f est homotope à $\widetilde{f}$ lisse et si g est homotope à $\widetilde{g}$, alors on vérifie que $g \circ f$ est homotope à $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$. □

Définition 26.
1. Une application continue $f : M \to N$ est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : N \to M$ telle que $g \circ f$ est continûment homotope à id_M et $f \circ g$ est continûment homotope à id_N.

2. Deux variétés M, N ont <u>même type d'homotopie</u> s'il existe une équivalence d'homotopie $f : M \to N$.

<u>Théorème</u> 12. *Deux variétés M et N ayant même type d'homotopie ont des espace de cohomologie isomorphes.*

Démonstration. Soit $f : M \to N$ une équivalence d'homotopie. Soit aussi g comme dans la définition précédente. $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) est continûment homotope à id_M (resp. id_N) donc $(g \circ f)^* = id_{H^*(M)}$ et $(f \circ g)^* = id_{H^*(N)}$ ie $f^* \circ g^* = id_{H^*(M)}$ et $g^* \circ f^* = id_{H^*(N)}$. Donc f^* est un homomorphisme bijectif $H^*(N) \to H^*(M)$, c'est un isomorphisme. $\square$

<u>Corollaire</u> 5. *(Théorème de De Rham)*
Deux variétés homéomorphes ont même cohomologie.

<u>Exemple</u> 7. 1. Si M est le ruban de Möbius, alors on a un retract de M sur son cerlce médiant $\mathbb{S}^1$, ainsi

$$H^n(M) \simeq H^n(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.

$$H^n(\mathbb{R}^p) = H^n(\{a\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

<u>Corollaire</u> 6. *Si $U \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert étoilé, alors U a le type d'homotopie du point et*

$$H^n(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & si\ n = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Donc, toute forme fermée sur U y est exacte (lemme de Poincaré).

Démonstration. On va montrer un résultat plus général :
Soit $Y \subset \mathbb{R}^n$ et soient $f_0, f_1 : X \to Y$ continues telles que

$$\forall x \in X,\ [f_0(x), f_1(x)] \subset Y.$$

Alors f_0 et f_1 sont homotopes. Il suffit de considérer

$$\begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \to & Y \\ (x,t) & \mapsto & (1-t)f_0(x) + tf_1(x) \end{array}$$

□

10 Lemme de Poincaré à support compact

Théorème 13. *Soit M une variété différentielle lisse. Alors*

$$H_c^n(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{n-1}(M).$$

Démonstration. Toute forme de $\Omega_c^*(M \times \mathbb{R})$ s'écrit comme combinaison linéaire de termes de la forme $f(x,t)p^*\eta$ et $f(x,t)p^*\eta \wedge dt$ où $\eta \in \Omega^*(M)$, f lisse à support compact et $p : M \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow M$. On définit π_* de la façon suivante : $\pi_n : \Omega_c^n(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{n-1}(M)$ où $\pi_n(f(x,t)p^*\eta) = 0$ et $\pi_n(f(x,t)p^*\eta \wedge dt) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt\eta$.

1. $\pi_* \circ d = d \circ \pi_*$ donc π_* passe au quotient $\pi_n : H_c^n(M \times \mathbb{R}) \to H_c^{n-1}(M)$.
2. Soit $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse d'intégrale 1 et soit e_* définie par $e_n : \Omega_c^n(M) \to \Omega_c^{n+1}(M \times \mathbb{R})$ où $e_n(\omega) = p^*\omega \wedge e(t)dt$. De même, $d \circ e_* = e_* \circ d$ et on a $e_n : H_c^n(M) \to H_c^{n+1}(M \times \mathbb{R})$.
3. On va construire une homotopie entre e_* et π_*. Posons K_* définie par $K_n : \Omega_c^n(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{n-1}(M \times \mathbb{R})$ où $K_n(f(x,t)p^*\eta) = 0$ et $K_n(f(x,t)p^*\eta \wedge dt) = p^*\eta \left(\int_{-\infty}^t f(x,u)du\right) - p^*\eta A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)du$ avec $A(t) := \int_{-\infty}^t e(u)du$.
4. Montrons que

$$id - e_{n-1}\pi_n = (-1)^{n-1}(d^{n-1}K_n + K_{n+1}d^n)$$

sur $\Omega_c^n(M \times \mathbb{R})$, ce qui permettra de conclure avec la Proposition 15.

5. Sur les formes du type $f(x,t)p^*\eta$ avec $\deg\eta = n$, on a

$$(id - e_{n-1}\pi_n)(f(x,t)p^*\eta) = f(x,t)p^*\eta.$$

D'autre part,

$$(d^{n-1}K_n + K_{n+1}d^n)(f(x,t)p^*\eta) = -K_{n+1}d^n(f(x,t)p^*\eta)$$

$$= -K_{n+1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt \wedge p^*\eta + \text{termes sans } dt\right) = -K_{n+1}\left((-1)^n\frac{\partial f}{\partial t}p^*\eta \wedge dt\right)$$

$$= (-1)^{n+1}\left(p^*\eta\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t - p^*\eta A(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= (-1)^{n+1}p^*\eta f(x,t)$$

car f est à support compact.

6. Sur les formes du type $f(x,t)p^*\eta \wedge dt$, $\deg\eta = n-1$, on a

$$(id - e_{n-1}\pi_n)(f(x,t)p^*\eta \wedge dt) = f(x,t)p^*\eta \wedge dt - p^*\eta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t\right)\wedge e(t)dt.$$

D'autre part,

$$d^{n-1}K_n(f(x,t)p^*\eta \wedge dt)$$

$$= d^{n-1}\left(p^*\eta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t\right) - p^*\eta A(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t\right)$$

$$= p^*(d^{n-1}\eta)\int_{-\infty}^{t}f(x,t)\mathrm{d}t + (-1)^{n-1}p^*\eta f(x,t)$$

$$+(-1)^{n-1}p^*\eta\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t\right)dx - p^*(d^{n-1}\eta)A(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t$$

$$-(-1)^{n-1}p^*\eta\left(e(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t + A(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\right)dx\right)$$

et

$$(K_{n+1}d^n)(f(x,t)p^*\eta \wedge dt)$$

$$= K_{n+1}\left(p^*(d\eta)\wedge f(x,t)dt + (-1)^{n-1}p^*\eta \wedge \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dt\right)$$

$$= p^*(d\eta)\int_{-\infty}^{t}f(x,t)\mathrm{d}t - p^*(d\eta)A(t)\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t$$

$$+(-1)^{n-1}\left(p^*\eta\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\right)dx - p^*\eta A(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\right)dx\right),$$

d'où le résultat.

□

Remarque 19. La dualité de Poincaré permet de retrouver ce résultat.

Exemple 8.

$$H_c^n(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ici, le morphisme $H_c^p(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}$ est obtenu en itérant π_* par intégration sur $\mathbb{R}^p$. Nous allons déterminer un générateur de $H_n^p(\mathbb{R}^p)$. On prend la fonction constante égale à 1 que l'on itère avec e_*. On obtient $e(x_1)dx_1 \wedge e(x_2)dx_2 \wedge \cdots \wedge e(x_p)dx_p$. Un générateur de $H_c^p(\mathbb{R}^p)$ est donc une forme du type $\alpha(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ avec $\int_{\mathbb{R}^p} \alpha(x)dx_1 \cdots dx_p = 1$. Le support de α peut être choisi aussi petit que souhaité.

Remarque 20. La cohomologie à support compact n'est pas invariante par homotopie.

Proposition-Définition 4. *(Degré d'une application propre)*
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est lisse, propre, alors $f^* : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to H_c^n(\mathbb{R}^n)$ est bien définie. Par la dimension, ce morphisme envoie un générateur (ie un élément $\omega \in Z_c^n(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$) sur un multiple d'un générateur. On nomme ce multiple le degré de f. Donc, si α est un générateur, $f^*\alpha = (\deg f)\alpha$ d'où $\int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \deg f$. Alors

$$\deg f \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. On rappelle que p est un point critique de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si $T_pf : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ n'est pas surjective, on dit que $f(p)$ est la valeur critique. En particulier, un $x \notin \mathrm{Im} f$ est une valeur régulière (ie non critique). On a (voir Annexe)

Théorème 14. *(Théorème de Sard)*
L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse est de mesure nulle.

1. Si f n'est pas surjective, alors $\deg f = 0$. En effet, comme f est propre, alors $\mathrm{Im} f$ est fermé, donc si $x \notin \mathrm{Im} f$, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathrm{Im} f \cap U = \emptyset$. Si on prend α un générateur à support compact dans U, alors $f^*\alpha = 0$ et donc
$$\deg f = 0 \in \mathbb{Z}.$$
2. Si f est surjective, le théorème de Sard montre que presque tous les points de l'image sont des valeurs régulières. Soit $x \in \mathrm{Im} f$ une valeur régulière, alors $T_x f$ est surjective (et donc c'est un isomorphisme car on est en dimension finie), d'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en x, donc $f^{-1}(x)$ est discret. Comme f est propre, $f^{-1}(x)$ est fini. Si α est un générateur à support dans le voisinage de x, alors $f^*\alpha$ est une n-forme différentielle proche de $f^{-1}(x)$. Comme un difféomorphisme conserve l'intégrale au signe près, l'intégrale de $f^*\alpha$ au voisinage d'un point de $f^{-1}(x)$ vaut ± 1 et donc
$$\deg f = \int_{\mathbb{R}^n} f^*\alpha = \sum_{f^{-1}(x)} \pm 1 \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

11 Suites de Mayer-Vietoris

Soit M une variété lisse recouverte par deux de ses ouverts U, V ($M = U \cup V$). On note

$$\begin{tikzcd}
 & U \cap V \arrow[dl, hook', "i_U"'] \arrow[dr, hook, "i_V"] & \\
U \arrow[dr, hook, "j_U"'] & & V \arrow[dl, hook', "j_V"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Remarque 21. Si $i : A \hookrightarrow B$ est l'inclusion, alors $i^* : \Omega^*(B) \to \Omega^*(A)$ est la restriction des formes différentielles.

<u>Théorème</u> 15. *On pose*

$$\begin{array}{cccc} \alpha^n & : & \Omega^n(M) & \to & \Omega^n(U)\oplus\Omega^n(V) \\ & & \omega & \mapsto & (j_U^*\omega, j_V^*\omega) \end{array} \quad et \quad \begin{array}{cccc} \beta^n & : & \Omega^n(U)\oplus\Omega^n(V) & \to & \Omega^n(U\cap V) \\ & & (\omega,\eta) & \mapsto & i_U^*\omega - i_V^*\eta \end{array}$$

Alors la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U)\oplus\Omega^*(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U\cap V) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. 1. $\mathrm{Ker}\alpha^n = 0$. C'est évident.

2. $\mathrm{Im}\alpha^n = \mathrm{Ker}\beta^n$. On a

$$\beta^n(j_U^*\omega, j_V^*\omega) = (j_U\circ i_U)^*\omega - (j_V\circ i_V)^*\omega = i_{U\cap V}^*\omega - i_{U\cap V}^*\omega = 0$$

où $i_{U\cap V} : U\cap V \hookrightarrow M$. Donc $\mathrm{Im}\alpha^n \subset \mathrm{Ker}\beta^n$. Si $(\omega,\eta)\in\mathrm{Ker}\beta^n$, alors $i_U^*\omega = i_V^*\eta$ donc ω et η coïncident sur $U\cap V$, on peut donc poser la forme différentielle sur M :

$$\theta(x) := \begin{cases} \omega(x) & \text{si} \quad x\in U \\ \eta(x) & \text{si} \quad x\in V \end{cases}$$

et alors $(\omega,\eta) = \alpha^n\theta$, d'où le résultat.

3. β^n surjectif : Soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $M = U\cup V$. Soit $\omega\in\Omega^n(U\cap V)$ et posons

$$\eta(x) := \begin{cases} \rho_V(x)\omega(x) & \text{si} \quad x\in U\cap V \\ 0 & \text{si} \quad x\in U\setminus \mathrm{supp}\rho_V \end{cases}$$

sur U et

$$\theta(x) := \begin{cases} -\rho_U(x)\omega(x) & \text{si} \quad x\in U\cap V \\ 0 & \text{si} \quad x\in V\setminus \mathrm{supp}\rho_U \end{cases}$$

sur V, alors $\eta\in\Omega^n(U)$, $\theta\in\Omega^n(V)$ et $\omega = \beta^n(\eta,\theta)$.

□

En utilisant les Théorèmes 8 et 15, on obtient alors

Théorème 16. *(Mayer-Vietoris)*
Si M est une variété différentielle lisse recouverte par deux ouverts U et V, on a la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{tikzcd}
H^{k+1}(M) \arrow[r, "\alpha^{n+1}"] & \cdots & \\
H^k(M) \arrow[r, "\alpha^n"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r, "\beta^n"] & H^k(U \cap V) \arrow[llu, "\delta^n"'] \\
& \cdots \arrow[r, "\beta^{n-1}"] & H^{k-1}(U \cap V) \arrow[llu, "\delta^{n-1}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 22. α et β passent au quotient. On va donner rapidementδ^n en suivant la construction du Théorème 8. Soit $\omega \in Z^n(U \cap V)$. D'après le Théorème 15, $\omega = \beta^n(\xi)$, $\xi = (\rho_V \omega, -\rho_U \omega) \in \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V)$. Comme $d\omega = 0$ et $d^n \beta^n = \beta^{n+1} d^n$, on a $\beta^{n+1} d^n \xi = d^n \beta^n \xi = d^n \omega = 0.$, ie $d(\rho_V \omega)$ et $-d(\rho_U \omega)$ coïncident sur $U \cap V$. Puis, $d\xi = \alpha^{n+1}(\eta)$ où $\eta = \begin{cases} d(\rho_V \omega) & \text{sur } U \\ -d(\rho_U \omega) & \text{sur } V \end{cases}$. Comme dans le Théorème 8, cette construction assure $d\eta = 0$: $\alpha^{n+2}(d^{n+1}\eta) = d^{n+1}\alpha^{n+1}\eta = d^{n+1} d^n \xi = 0$, et par injectivité, $d\eta = 0$. Enfin, $\delta^n(\overline{\omega}) = \overline{\eta}$. Le Théorème 8 montre alors que δ^n est bien définie.

Exemple 9. (Cohomologie de $\mathbb{S}^1$ avec Mayer-Vietoris)
$\mathbb{S}^1$ est connexe, donc $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$. Soient $U := \mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ et $V := \mathbb{S}^1 \setminus \{S\}$. Alors $\mathbb{S}^1 = U \cup V$ et U et V ont une composante connexe et $U \cap V$ en a deux, donc $H^0(U) \simeq H^0(V) \simeq \mathbb{R}$ et $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$. Nous avons donc la suite de cohomologie de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

D'après la Proposition 13, on a $H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$.
Une analyse plus approfondie de la suite de Mayer-Vietoris nous donne un générateur de $H^1(\mathbb{S}^1)$. L'application $i_U^* : Z^0(U) \simeq \mathbb{R} \to Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ restreint une application constante aux deux composantes connexes de $U \cap V$, donc $i_U^*(x) = (x, x)$. De même, $i_V^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $y \mapsto (y, y)$. Ensuite, $\beta^0 : Z^0(U) \oplus Z^0(V) \simeq \mathbb{R}^2 \to Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ est donnée par $\beta^0(x, y) =$

$i_U^*(x)-i_V^*(y)=(x,x)-(y,y)=(x-y,x-y)$ donc $\mathrm{Im}\beta^0=\Delta:=\{(x,x),\ x\in\mathbb{R}\}$. Par exactitude de la suite, $H^1(\mathbb{S}^1)=\mathrm{Im}\delta^0\simeq\mathbb{R}^2/\mathrm{Ker}\delta^0=\mathbb{R}^2/\mathrm{Im}\beta^0=\mathbb{R}^2/\Delta=\mathbb{R}$, et on retrouve le résultat. Ensuite, $H^1(\mathbb{S}^1)=\langle\omega\rangle$ où $\omega\neq 0$ car $\dim(H^1(\mathbb{S}^1))=1$. Un tel élément s'obtient en prenant $\delta^0(a,b)$ où $(a,b)\notin\mathrm{Ker}\delta^0=\mathrm{Im}\beta^0=\Delta$. Par exemple, $(a,b)=(1,0)$. Soit $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ lisse valant 1 sur la première composante connexe de $U\cap V$ et 0 sur la seconde. Soit $\{\rho_U,\rho_V\}$ une partition de l'unité de $\mathbb{S}^1$ subordonnée au recouvrement $\{U,V\}$. Alors $\beta^0(\rho_V f,-\rho_U f)=f_{|U\cap V}=(1,0)$. Puis, $\delta^0(1,0)=\delta^0(\overline{\beta^0(\rho_V f,-\rho_U f)})=\overline{\eta}$ où
$\eta=\left\{\begin{array}{ll} d(\rho_V f) & \text{sur } U\\ -d(\rho_U f) & \text{sur } V\end{array}\right.$. □

<u>Exemple</u> 10. (Cohomologie de $\mathbb{S}^n$)
On a

$$H^k(\mathbb{S}^0)=H^k(\{\pm1\})=\left\{\begin{array}{cc}\mathbb{R}^2 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right. \quad\text{et}\quad H^k(\mathbb{S}^1)=\left\{\begin{array}{cc}\mathbb{R} & \text{si } k=0,1\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$$

On va montrer par récurrence sur $n\geq 1$ que

$$H^k(\mathbb{S}^n)=\left\{\begin{array}{cc}\mathbb{R} & \text{si } k=0,n\\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$$

$\underline{n=1}$ C'est déjà fait.
$\underline{n-1\to n}$. Par connexité ; $H^0(\mathbb{S}^n)\simeq\mathbb{R}$ et par dimension, $H^k(\mathbb{S}^n)=0,\ \forall k>n$.
Soient $U:=\mathbb{S}^n\setminus\{N\},\ V:=\mathbb{S}^n\setminus\{S\}$, et alors, pour $1<k\leq n$, le morceau de la suite de Mayer-Vietoris

$$H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V)\longrightarrow H^{k-1}(U\cap V)\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n)\longrightarrow H^k(U)\oplus H^k(V)$$

donne

$$0\longrightarrow H^{k-1}(U\cap V)\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n)\longrightarrow 0$$

puisque U et V dont le type d'homotopie du point.

<u>Lemme</u> 15. *La sphère privée de deux points $U\cap V=\mathbb{S}^n\setminus\{N,S\}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}\times]-1,1[$.*

Démonstration. En effet, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \setminus \{N,S\} & \to & \mathbb{S}^{n-1}\times]-1,1[\\ (x_0,\ldots,x_n) & \mapsto & \left(\frac{(x_1,\ldots,x_n)}{\sqrt{1-x_0^2}}, x_0\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme. □

Comme $]-1,1[$ est contractile, $\mathbb{S}^{n-1}\times]-1,1[$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ ont même type d'homotopie et donc $H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H^{k-1}(U\cap V)$. On en déduit que la suite

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

est exacte, ce qui permet de calculer $H^k(\mathbb{S}^n)$ pour $1 < k \leq n$. Il reste à calculer $H^1(\mathbb{S}^n)$, ce qui se fait en appliquant la Proposition 13 à la suite

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^0(U)\oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U\cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

et en remarquant que $H^0(U\cap V) = H^0(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R}$. □

Remarque 23. Soit $n \geq 1$, comme $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie, on en déduit que

$$H^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } k=0,\ n=1 \\ \mathbb{R} & \text{si } k=0, n-1,\ (n>1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 11. (Cohomologie de $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, $n \geq 1$). $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ est une variété lisse, $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ (voir Annexe), c'est une variété de dimension $2n$. Montrons que

$$H^{2k}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R} \ \text{ et } \ H^{2k+1}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) = 0,\ 0 \leq k \leq n.$$

Posons $p := [1:0:\ldots:0]$.

Lemme 16. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} j & : & \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C} & \to & \mathbb{P}^n\mathbb{C}\setminus\{p\} \\ & & [x_1:\ldots:x_n] & \mapsto & [0:x_1:\ldots:x_n] \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie.

Démonstration. En effet, posons

$$\begin{array}{cccc} k & : & \mathbb{P}^n\mathbb{C}\setminus\{p\} & \to & \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C} \\ & & [x_0:\ldots:x_n] & \mapsto & [x_1:\ldots:x_n] \end{array}$$

Alors, $k\circ j = id$ et $j\circ k$ est homotope à $id_{\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}}$ par $H(t,[x_0:\ldots:x_n]) = [tx_0:x_1:\ldots:x_n]$. □

Alors $\mathbb{P}^n\mathbb{C} = U\cup V$ où $U := \{[x_0:x_1:\ldots:x_n]\in\mathbb{P}^n\mathbb{C}\ ;\ x_0\neq 0\}$ et $V = \mathbb{P}^n\mathbb{C}\setminus\{p\}$. Alors $U\cap V = \mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}$ puisque

$$\begin{array}{cccc} \varphi_0 & : & U = U_0 & \to & \mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n} \\ & & [x_0:\ldots:x_n] & \mapsto & \left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme qui envoie $[1:0:\ldots:0]$ sur 0. On procède alors par récurrence sur n
Pour l'initialisation, le résultat est vrai pour $n=1$ d'après ce qui précède puisque $\mathbb{P}^1\mathbb{C}\simeq\mathbb{S}^2$. Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie au rang $n-1$, $n>1$. Par connexité de $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, $H^0(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) = \mathbb{R}$. Étudions la portion suivante de la suite de Mayer-Vietoris

$$H^{k-1}(U\cap V)H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^k(U)\oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U\cap V)\ ,\ 1<k<2n-1$$

qui donne

$$0 \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

ce qui permet de calculer $H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$. Si $k=1$,

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^0(U)\oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U\cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(U)\oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U\cap V) \longrightarrow \cdots$$

donne

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

et on conclut avec la Proposition 13.
Pour $k = 2n-1$,

$$\cdots \longrightarrow H^{2n-2}(U\cap V) \longrightarrow H^{2n-1}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-1}(U)\oplus H^{2n-1}(V) \longrightarrow \cdots$$

donne

$$0 \longrightarrow H^{2n-1}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Enfin, pour $k = 2n$,

$$\cdots \longrightarrow H^{2n-1}(U) \oplus H^{2n-1}(V) \longrightarrow H^{2n-1}(U \cap V) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n}(U) \oplus H^{2n}(V) \longrightarrow \cdots$$

donne

$$0 \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

ce qui permet de calculer $H^{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$. $\square$

<u>Théorème</u> 17. *Soit M une variété recouverte par deux ouverts U et V. Posons*

$$\alpha(\omega, \eta) = j_{U*}\omega + j_{V*}\eta \quad \textit{et} \quad \beta(\omega) = (i_{U*}\omega, -i_{V*}\omega).$$

Alors, la suite

$$0 \longleftarrow \Omega^*_c(M) \xleftarrow{\alpha} \Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V) \xleftarrow{\beta} \Omega^*_c(U \cap V) \longleftarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Vérifions la dernière étape. Si $\omega \in \Omega^*(M)$, alors $\omega = \alpha(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ et $\mathrm{supp}(\rho_U\omega) \subset \mathrm{supp}\rho_U \cap \mathrm{supp}\omega$ est compact comme fermé d'un compact dans un espace séparé. $\square$

On en déduit :

<u>Corollaire</u> 7. *Si M est une variété lisse recouverte par deux ouverts U, V, alors on a la suite exacte longue :*

$$\begin{tikzcd}
& H^{n+1}_c(U \cap V) \arrow[r, "\alpha"] & \cdots \\
& H^n_c(U \cap V) \arrow[r, "\alpha"] & H^n_c(U) \oplus H^n_c(V) \arrow[r, "\beta"] & H^n_c(M) \arrow[ulll, "\delta^n"'] \\
& & \cdots \arrow[r, "\beta"] & H^{n-1}_c(M) \arrow[ulll, "\delta^{n-1}"']
\end{tikzcd}$$

12 Recouvrements simples

Définition 27. 1. Un recouvrement simple est un recouvrement ouvert d'une variété dont les intersections non vides sont contractiles.

2. Une variété est dite de type fini si elle admet un recouvrement simple fini.

3. Soient $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ et $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ deux recouvrements ouverts d'un espace topologique. On dit que $\mathcal{V}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$ et on note $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si tout V_j est contenu dans un U_i, ie il existe une application $\varphi : J \to I$ telle que $\forall j \in J,\ V_j \subset U_{\varphi(j)}$.

Théorème 18. *Tout recouvrement ouvert d'une variété admet un raffinement simple.*

Démonstration. Soit M une variété lisse. D'après le Théorème de plongement de Whitney, on peut supposer que M est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^N$ avec sa structure euclidienne usuelle. Pour tout $x \in M$, T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ et on considère la projection linéaire $\pi_x : \mathbb{R}^N \twoheadrightarrow T_xM$.

Lemme 17. *Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert (pour la topologie induite) U de x tel que, pour tout $y \in U$:*

1. *$\pi_y : U \to U_y = \pi_y(U)$ est un difféomorphisme,*
2. *Pour tous $z_1, z_2 \in U$, $d(z_1, z_2) \leq 2d(\pi_y(z_1), \pi_y(z_2))$,*
3. *Pour tout $z_0 \in U$, l'application*

$$h_{y,z_0} \ : \ \begin{array}{ccc} U_y & \to & \mathbb{R} \\ \pi_y(z) & \mapsto & (d(z, z_0))^2 \end{array}$$

est convexe.

Démonstration. 1. Par un changement de repère, on peut supposer que $\mathbb{R}^N = T_xM \oplus E$, de coordonnées (t, w) et alors T_xM est le plan $w = 0$. D'après le théorème d'inversion locale (Annexe), il existe un ouvert U tel que $\pi_x : U \to \pi_x(U)$ soit un difféomorphisme. La réciproque $f : V \to U$ est un paramétrage $w = f(t)$ de M au voisinage de x par un voisinage de 0 dans T_xM. Donc $f(0) = 0$ et comme $T_xM = \{w = 0\}$,

$df_x = 0$. Donc $w = o(t)$. Soit $y \in U$, alors $y = (t, f(t))$ alors par l'espace tangent au graphe d'une fonction $T_Y M = \{t + h \ ; \ f(t) + df_t(h)\}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur le voisinage, $||df|| < \varepsilon$, donc p_y est injectif. Soit $z \in U$, alors $d(p_y)_z : T_z M \to T_y M$ coïncide avec la projection orthogonale $T_z M \to T_y M$; $p_y : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N \to T_y M$ donc $d(p_y)_z = T_z M \hookrightarrow \mathbb{R}^N \to T_y M$. Donc p_y est un difféomorphisme sur U.

2. Comme précédemment, on suppose $\mathbb{R}^N = T_y M \oplus E$ et M s'écrit $\{(t, w) \ ; \ w = f(t)\}$ avec $f(0) = 0$ et $T_y M = \{w = 0\}$, donc $df_y = 0$. Et ainsi, $w = o(t)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||w|| < \varepsilon ||t||$ pour tout $z = (t, w) \in U$. Quitte à prendre U assez petit pour que ε soit assez petit, pour tous $z_1 = (t_1, w_1), \ z_2 = (t_2, w_2) \in U$, on a $d(z_1, z_2) \leq 2d(t_1, t_2)$.
3. La hessienne de $h_{x,x}$ en x est l'identité. On peut prendre U assez petit pour que la hessienne soit aussi proche que l'on veut du cas précédent. On conclut en remarquant qu'une application lisse est convexe si et seulement si sa hessienne est positive.

$\square$

Comme tout recouvrement ouvert admet une partition de l'unité subordonnée, tout recouvrement ouvert admet un raffinement $(V_i)_{i \in I}$ localement fini dont les ouverts dont relativement compacts. On suppose que les V_i sont des ouverts de M pour la topologie induite. Dans la suite, on travaille dans la topologie induite sur M. Pour tout $i \in I$, V_i est recouvert par un nombre fini d'ouverts (U_j) vérifiant les propriétés du Lemme précédent, par relative compacité. Notons r_i le nombre de Lebesgue du recouvrement (U_j) (ie $\forall x \in \overline{V_i}, \ \exists j_0 \ ; \ B(x, r_i) \subset U_{j_0}$). Comme V_i est ouvert, on peut supposer $B(x, r_i) \subset V_i$ (quitte à intersecter les U_j avec V_i), en particulier, $B(x, r_i)$ est relativement compacte. Comme $B(x, r_i) \subset U_{j_0}$, $B(x, r_i)$ hérite des propriétés 1. 2. et 3. du Lemme 17.

<u>Lemme</u> 18.

$$\forall x \in \overline{V_i}, \ \left\{ y \in T_x M \ ; \ d(y, x) < \frac{r_i}{2} \right\} \subset \pi_x(B(x, r_i)).$$

Démonstration. En effet, soit $z' \in \partial \pi_x(B(x, r_i))$, alors $z' = \lim z'_i, \ z'_i = \pi_x(z_i), \ z_i \in B(x, r_i)$. Par relative compacité de $B(x, r_i)$, on peut extraire une sous-suite $z_{\sigma(i)}$ convergeant vers $z \in \overline{B(x, r_i)}$ et par continuité, $z' = \pi_x(z)$. D'après 1., tout point intérieur de $B(x, r_i)$ s'envoie sur un point intérieur, donc $z \in \partial B(x, r_i)$, donc $d(x, z) = r_i$ et d'après 2., $d(x, z') = d(\pi_x(x), \pi_x(z)) \geq \frac{r_i}{2}$. $\square$

<u>Lemme</u> 19. *Soient $x \in \overline{V_i}$, $r \leq \frac{r_i}{4}$, alors pour tout $y \in B(x,r)$, $\pi_x : B(y,r) \to T_xM$ induit un difféomorphisme sur un convexe.*

Démonstration. En effet, soient $z_1', z_2' \in \pi_x(B(y,r))$, alors $z_1' = \pi_x(z_1)$ et $z_2' = \pi_x(z_2)$ avec $d(z_k, y) < r \ \Rightarrow \ d(z_k, x) < 2r$ puisque $d(x,y) < r$. Comme une projection diminue les distances, $d(z_k', x) = d(\pi_x(z_k), \pi_x(x)) \leq d(z_k, x) < 2r$. Donc, pour tout $z' \in [z_1', z_2']$, $d(z', x) = ||z_1't + z_2'(1-t) - x(t + (1-t))|| < td(z_1', x) + (1-t)d(z_2', x) < 2tr + 2(1-t)r = 2r$. D'après le Lemme 18, $z' \in \pi_x(B(x, r_i))$. D'après le 3. du Lemme 17,

$$\begin{array}{rcl} \pi_x(B(x,r_i)) & \to & \mathbb{R} \\ z' = \pi_x(z) & \mapsto & (d(z,y))^2 \end{array}$$

est convexe, et comme en z_1' et z_2' la fonction est inférieure à r^2, il en va de même pour tout $z' \in [z_1', z_2']$. □

Construction du recouvrement :
On recouvre chaque V_i par un nombre fini (relative compacité) de $B\left(x_{i,j}, \frac{r_i}{4}\right)$, on obtient ainsi un raffinement de (V_i) et donc du recouvrement initial. Ensuite, ce recouvrement est localement fini car (V_i) l'est. Montrons que ce recouvrement est simple. Soit $x \in Z := \bigcap_{\text{fini}} B\left(x_{i,j} \frac{r_i}{4}\right)$. Alors, chaque boule de l'intersection est de la forme $B(y,s)$, $s < r$, $y \in B(x,r)$ et sur cette boule, π_x est un difféomorphisme. D'après le Lemme 19, chaque $\pi_x\left(B\left(x_{i,j} \frac{r_i}{4}\right)\right)$ est convexe, et donc l'image de Z par π_x est convexe comme intersection finie de convexes. L'homotopie se relève par le difféomorphisme π_x et ainsi Z est convexe. □

<u>Corollaire</u> 8. *Toute variété différentielle lisse admet un recouvrement simple.*

13 Dimension finie de la cohomologie de De Rham

Théorème 19. *Si M est une variété de type fini, alors $H^n(M)$ est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $H^*(M)$ est de dimension finie. C'est vrai en particulier si M est compacte.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le cardinal d'un recouvrement simple de M.
Si ce cardinal est 1, M est contractile et on a le résultat.
Supposons le résultat vrai pour toute variété ayant un recouvrement simple de moins de p ouverts et soit M une variété admettant un recouvrement simple $\{U_0, \ldots, U_p\}$ et $p+1$ éléments. Alors $V := \bigcup_{0 \leq i \leq p-1} U_i$ est un ouvert admettant un recouvrement simple $\{U_0, \ldots, U_{p-1}\}$, ainsi, sa cohomologie est de dimension finie. U_p est contractile, sa cohomologie est donc de dimension finie. Et enfin, $V \cap U_p = \left(\bigcup_{0 \leq i \leq p-1} U_i\right) \cap U_p$ est un ouvert admettant $\{U_0 \cap U_p, \ldots, U_{p-1} \cap U_p\}$ comme recouvrement simple. Ainsi, sa cohomologie est de dimension finie. Comme $M = V \cup U_p$, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U_p) \oplus H^0(V) \longrightarrow \cdots$$

nous indique que $H^0(M)$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $H^0(U_p) \oplus H^0(V)$. Pour $k > 0$, étudions la portion suivante de la suite de Mayer-Vietoris :

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(V \cap U_p) \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k(M) \xrightarrow{\alpha^k} H^k(U_p) \oplus H^k(V) \longrightarrow \cdots$$

Nous obtenons que

$$H^k(M) \simeq \operatorname{Ker}(\alpha^k) \oplus \operatorname{Im}(\alpha^k) = \operatorname{Im}(\delta^{k-1}) \oplus \operatorname{Im}(\alpha^k),$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 24. En adaptant la preuve précédente (ou simplement en remarquant que $H_c^*(M)$ est une sous-algèbre de $H^*(M)$), on a que si M est de type fini, alors $H_c^*(M)$ est de dimension finie.

<u>Définition</u> 28. Si M est une variété de type fini, les dimensions

$$b_p(M) := \dim(H^p(M))$$

s'appellent les <u>nombres de Betti</u> de M.

14 Dualité de Poincaré

Pour une variété différentielle orientée M de dimension n et pour un entier k, on considère l'application bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}_M^k & : & H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) & \to & \mathbb{R} \\ & & (\overline{\omega}, \overline{\eta}) & \mapsto & \int_M \omega \wedge \eta \end{array}$$

qui est bien définie car $\wedge$ et $\int_M$ passent à la cohomologie. L'application $\mathcal{P}_M^k$ induit une application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_M^k & : & H^k(M) & \to & H_c^{n-k}(M)^* \\ & & \overline{\omega} & \mapsto & \left(\overline{\eta} \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\right) \end{array}$$

<u>Théorème</u> 20. *(Dualité de Poincaré)*
Soit M une variété orientée et soit $0 \leq k \leq n$ un entier. Alors $\mathcal{D}_M^k$ est un isomorphisme. Ainsi

$$H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant : Si U, V sont deux ouverts de M, nous avons les suites de Mayer-Vietoris suivantes :

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{k-1}} H^k(U \cup V) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta^k} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\cdots \xleftarrow{\delta_c^{n-k}} H_c^{n-k}(U \cup V) \longleftarrow H_c^{n-k}(U) \oplus H_c^{n-k}(V) \longleftarrow H_c^{n-k}(U \cap V) \xleftarrow{\delta_c^{n-k-1}} H_c^{n-k-1}(U \cup V) \longleftarrow \cdots$$

En remplaçant δ^k par $(-1)^{k+1}\delta^k$ et en passant au dual de la seconde ligne, nous obtenons le diagramme suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "(-1)^k\delta^{k-1}"] & H^k(U\cup V) \arrow[r, "\alpha^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cup V}"] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r, "\beta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_U\oplus\mathcal{D}^k_V"] & H^k(U\cap V) \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta^k"] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{U\cap V}"] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{D}^{k+1}_{U\cup V}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r, "{}^t\alpha_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r, "{}^t\beta_{n-k}"'] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "{}^t\delta_c^{n-k-1}"'] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u> 20. *Ce diagramme commute.*

Démonstration. La commutativité des deux premiers carrés est aisée à vérifier. Intéressons-nous au troisième carré. Rappelons que si $\overline{\omega} \in H^k(U\cap V)$ avec $d\omega = 0$, alors $\delta^k(\overline{\omega}) = \overline{\eta} \in H^{k+1}(U\cup V)$ où $d\eta = 0$ et telle que $\eta_{|U} = d(\rho_V\omega)$ et $\eta_{|V} = -d(\rho_U\omega)$. De même, si $\overline{\theta} \in H^{n-k-1}(U\cup V)$ avec $d\theta = 0$, alors $\delta_c^{n-k-1}(\overline{\theta}) = \overline{\tau} \in H_c^{n-k}(U\cap V)$ avec $d\tau = 0$ et telle que $(i_{U*}\tau, -i_{V*}\tau) = (d(\rho_U\theta), d(\rho_V\theta))$ en notant que comme $i_U : U\cup V \hookrightarrow U$, $i_{U*}\tau$ est l'extension de τ par 0 sur U. Remarquons que comme ω et τ sont fermées, on a $d(\rho_V\omega) = (d\rho_V)\omega$ et $d(\rho_U\omega) = (d\rho_U)\omega$. Ainsi,

$$({}^t\delta_c^{n-k-1} \circ \mathcal{D}^k_{U\cap V}(\overline{\omega}))(\overline{\theta})$$

$$= \int_{U\cap V} \omega\wedge\tau = -\int_{U\cap V} \omega\wedge(d\rho_V)\theta = (-1)^{k+1}\int_{U\cap V}(d\rho_V)\omega\wedge\theta$$

$$= (-1)^{k+1}\int_{U\cap V}\eta\wedge\theta \text{ (car supp}\eta \subset U\cup U) = (-1)^{k+1}(\mathcal{D}^{k+1}_{U\cup V}\circ\delta^k(\overline{\omega}))(\overline{\theta}).$$

□

<u>Remarque</u> 25. On peut supposer que M admet une base dénombrable stable par intersection finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de M, alors $\mathcal{B}' = \{U_1\cap\cdots\cap U_m,\ U_i \in \mathcal{B}\}$ est encore une base dénombrable. Jusqu'à la fin de la preuve de la dualité de Poincaré, si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable de M, stable par intersection finie, alors on note $\mathcal{B}_f$ l'ensemble des ouverts de M qui s'écrivent comme union finie d'éléments de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_s$ l'ensemble des ouverts de M qui sécrivent comme union (dénombrable) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$.

Lemme 21. *Si, pour tout $O \in \mathcal{B}$ et pour tout k, $\mathcal{D}_O^k$ est un isomorphisme, alors, pour tout $O \in \mathcal{B}_f$ et tout k, $\mathcal{D}_O^k$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Tout élément de $\mathcal{B}_f$ s'écrit $O = \bigcup_{l \leq i \leq m} O_i,\ O_i \in \mathcal{B}$. On procède par récurrence sur m.
Si $m = 1$, c'est vrai par hypothèse.
Supposons le résultat vrai pour tout ouvert de $\mathcal{B}_f$, réunion d'au plus $m-1$ éléments de $\mathcal{B}$ et soit $O = \bigcup_{1 \leq i \leq m} O_i \in \mathcal{B}$. Posons $U := \bigcup_{1 \leq i \leq m-1} O_i,\ V := O_m$, alors $U \cap V = (O_1 \cap O_m) \cup \cdots \cup (O_{m-1} \cap O_m)$ et le résultat est vrai pour U, V et $U \cap V$ par hypothèse de récurrence et donc pour $U \cup V = O$ en appliquant le Lemme des cinq (Proposition 14) au diagramme du Lemme 20. $\square$

Lemme 22. *Si, pour tout $O \in \mathcal{B}$ et pour tout k, $\mathcal{D}_O^k$ est un isomorphisme, alors il en est de même pour tout $O \in \mathcal{B}_s$ et tout k.*

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{B}_s$, alors $O = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} O_i,\ O_i \in \mathcal{B}$. D'après l'exemple 4-2), on a $H^k(O) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i)$. De même, d'après l'exemple 6, on a $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i) \xrightarrow{\sim} H_c^{n-k}(O)$, qui induit, en passant au dual, $H_c^{n-k}(O)^* \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^*$. On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H^k(O) \arrow[r, "\mathcal{D}_O^k"] \arrow[d, "\sim"] & H_c^{n-k}(O)^* \arrow[d, "\sim"] \\
\prod_{i=0}^{\infty} H^k(O_i) \arrow[r, "\sim", "\prod_i \mathcal{D}_{O_i}^k"'] & \prod_{i=0}^{\infty} H_c^{n-k}(O_i)^*
\end{tikzcd}$$

Ce qui permet de conclure. $\square$

Lemme 23. *Tous les ouverts de M sont contenus dans $((\mathcal{B}_f)_s)_f$ (il s'agit de l'ensemble des ouverts de M).*

Démonstration. Soit $O \subset M$ un ouvert, alors O est une variété. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'ouverts de la Proposition 1 pour O. Nous allons construire une suite d'ouverts $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

1.
$$\overline{V_n} \subset \bigcup_{m\leq n} W_m \subset V_{n+1} \ \Rightarrow \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = \emptyset,$$

2.
$$W_n \in \mathcal{B}_f,$$

3.
$$W_n \cap W_{n+2} = \emptyset, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

V_1 est ouvert donc V_1 s'écrit comme une réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$, on extrait un nombre fini de ces ouverts recouvrant $\overline{V_0}$, et on note W_0 la réunion de ces ouverts. Supposons W_m construits, pour $m < n$. Alors $\overline{V_n} \setminus \bigcup_{m<n} W_m$ est un compact inclus dans l'ouvert $V_{n+1} \setminus \overline{V_{n-1}}$, cet ouvert s'écrit comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ dont on extrait un recouvrement fini de $\overline{V_n} \setminus \bigcup_{m<n} W_m$ et on note W_n la réunion des ouverts de ce recouvrement. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \in \mathcal{B}_f$. Le premier point est ainsi vrai car

$$\bigcup_{m\leq n} W_m = W_m \cup \bigcup_{m<n} W_m \supset \left(\overline{U_n} \setminus \bigcup_{m<n} W_m\right) \cup \bigcup_{m<n} W_m = \overline{U_n}.$$

Le troisième point est vrai car

$$W_n \subset V_{n+1} \setminus \overline{V_{n-1}} \text{ et } W_{n+2} \subset V_{n+3} \setminus \overline{V_{n+1}}$$

et car ces ensembles sont disjoints. Enfin, posons

$$U_1 := \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} W_{2n} \in (\mathcal{B}_f)_s$$

et

$$U_2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} W_{2n+1} \in (\mathcal{B}_f)_s,$$

alors $O = U_1 \cup U_2 \in ((\mathcal{B}_f)_s)_f$. □

Démonstration. (de la dualité de Poincaré)

1. $\underline{M = \mathbb{R}^n}$:
   Comme
   $$H^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   et
   $$H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$
   il suffit de vérifier que $\mathcal{D}^0_{\mathbb{R}^n} : H^0(\mathbb{R}^n) \to H_c^n(\mathbb{R}^n)^*$ est un isomorphisme. D'après les dimensions, il suffit de vérifier que $\mathcal{D}^0_{\mathbb{R}^n} \neq 0$. Or,
   $$(\mathcal{D}^0_{\mathbb{R}^n}(1)(\overline{\eta}) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta,$$
   donc $\mathcal{D}^0_{\mathbb{R}^n}(1) \neq 0$ et $\mathcal{D}^0_{\mathbb{R}^n} \neq 0$ (prendre $\eta = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ avec f à support compact).

2. $\underline{M \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n}$:
   Les ensembles $O := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ a_i < x_i < b_i\}$ forment une base stable par intersection finie pour le topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ et sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ par $f : \mathbb{R}^n \to O$. Comme f^{-1} est propre, on peut considérer $(f^{-1})^* : H_c^*(\mathbb{R}^n) \to H_c^*(O)$. On vérifie alors que le diagramme suivant commute
   $$\begin{tikzcd} H^k(O) \arrow[r, "f^*", "\sim"'] \arrow[d, "\mathcal{D}^k_O"'] & H^k(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "\mathcal{D}^k_{\mathbb{R}^n}", "\sim"'] \\ H_c^{n-k}(O)^* \arrow[r, "\sim", "{}^t((f^{-1})^*)"'] & H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n)^* \end{tikzcd}$$
   Et d'après de 1) (pour $\mathcal{D}^k_{\mathbb{R}^n}$) et d'après les Lemmes précédents, la dualité de Poincaré est vraie pour tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}^k_{\mathbb{R}^n}$ est un isomorphisme.

3. $\underline{M \text{ est une variété orientée de dimension } n}$:
   Remarquons que M admet une base dénombrable stable par intersection finie dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (on prend $\mathcal{B}$ une base dénombrable stable par intersection finie et $\mathcal{A}$ l'ensemble des cartes d'un atlas, alors $\mathcal{B}' = \{U \cap V_1 \cap \cdots \cap V_k,\ U \in \mathcal{B},\ V_i \in \mathcal{A}\}$ convient : si O est un ouvert et si $x \in O$, il existe $U \in \mathcal{B}$ tel que

$x \in U \subset O$ et il existe $V \in \mathcal{A}$ tel que $x \in V$ et donc $x \in V \cap U \subset O$). Ainsi, d'après le cas précédent et avec un diagramme commutatif similaire, on voit que tout ouvert de cette base vérifie la dualité de Poincaré. Donc, d'après les Lemmes précédents, tout ouvert de M, et donc M elle-même, vérifient la dualité de Poincaré ; ce qu'il fallait démontrer.

□

Remarque 26. En général, on n'a pas $H_c^*(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$, car le dual d'une somme directe est un produit directe mais le dual d'un produit direct n'est pas une somme directe.

Corollaire 9. *Si M est une variété connexe et orientée de dimension n, alors*

$$H_c^n(M) \simeq \mathbb{R}$$

et

$$H^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M \text{ est compacte} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. La première égalité est évidente et donne la seconde si M est compacte. Supposons donc M non compacte, alors $H^n(M) \simeq H_c^0(M)^*$ et $H_c^0(M) \simeq 0$ puisque les formes constantes sur M ne sont pas à support compact par connexité de M. □

Remarque 27. On retrouve le Lemme de Poincaré à support compact :

$$H_c^k(M)^* \simeq H^{n-k}(M) \simeq H^{n-k}(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})^*$$

puisque $\mathbb{R}$ est contractile, et donc

$$H_c^k(M) \simeq H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}).$$

Corollaire 10. *Si M est une variété compacte et orientée de dimension $n \geq 1$, alors, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a l'isomorphisme linéaire*

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) & \to & H^{n-k}(M)^* \\ \overline{\omega} & \mapsto & \left(\overline{\eta} \ \mapsto \ \int_M \omega \wedge \eta\right) \end{array}$$

Corollaire 11. *Soit M une variété compacte, connexe et orientée de dimension $n \geq 1$, alors on a l'isomorphisme linéaire*

$$\begin{array}{ccc} H^n(M) & \to & \mathbb{R} \\ \overline{\omega} & \mapsto & \int_M \omega \end{array}$$

Démonstration. On applique le Corollaire précédent pour $k = 0$, alors

$$H^0(M) \simeq \mathbb{R}.$$

□

Corollaire 12. *Si M est compacte, connexe, orientée, de dimension n, alors*

$$\forall \omega \in \Omega^n(M), \int_M \omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega \in B^n(M).$$

Corollaire 13. *Soit M une variété connexe et orientée de dimension n, alors on a l'isomorphisme linéaire*

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & : & H_c^n(M) & \to & \mathbb{R} \\ & & \overline{\omega} & \mapsto & \int_M \omega \end{array}$$

Démonstration. On a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_M^0 & : & \mathbb{R} \simeq H^0(M) & \to & H_c^n(M)^* \\ & & \lambda & \mapsto & \left(\overline{\omega} \mapsto \lambda \int_M \omega\right) \end{array}$$

et $\varphi = \mathcal{D}_M^0(1)$, donc $\varphi \neq 0$ et c'est un isomorphisme car $\dim(H_c^n(M)^*) = 1$. □

Remarque 28. Le résultat change complètement si M n'est pas orientable. On peut même montrer que dans ce cas, $H_c^n(M) = \{0\}$.

Exemple 12. (Structure d'anneau de $H^*(\mathbb{P}^*\mathbb{C})$).
Le dualité de Poincaré va nous permettre de calculer la structure d'anneau de
$$H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}).$$
On va montrer que
$$H^*(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}[u]/(u^{n+1}),$$
avec u de degré 2. Cela signifie que si u est un générateur de $H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ (ie $\neq 0$), alors $u^k \neq 0$ pour $k \leq n$. On montre ce résultat par récurrence sur n :
Pour $n = 1$, c'est immédiat.
Supposons la propriété vraie pour $n-1$:
$$H^*(\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}[v]/(v^n)$$

Lemme 24. *L'inclusion $j : \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C} \to \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ du Lemme 16 (exemple 11) induit un isomorphisme*
$$j^* : H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^k(\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}),\ \ k < 2n.$$

Démonstration. Nous avons en effet vu ce résultat dans la preuve de l'exemple 11 :
$$0 \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} H^k(\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$
est exacte pour $1 < k < 2n-1$, utiliser ensuite $H^{2n-1}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) = 0$ pour $k = 2n$ et pour $k = 1$, il suffit de remarquer que $H^0(U) \to H^0(U \cap V)$ est surjective. Au passage, on note que pour $k = 2n$, on avait $H^{2n-1}(\mathbb{S}^{2n-1}) \simeq H^{2n}(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$. □

Il existe donc $u \in H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})$ tel que $j^*(u) = v$. Ensuite, pour $k < n$, on a $j^*(u^k) = (j^*(u))^k = v^k \neq 0$ donc $u^k \neq 0$. D'après la dualité de Poincaré, on a l'isomorphisme
$$\mathcal{D}^{2(n-1)} : H^{2(n-1)}(\mathbb{P}^n\mathbb{C}) \to H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C})^*$$
donné par
$$\mathcal{D}^{2(n-1)}(\omega)(u) = \omega u.$$
Il doit être non nul pour tous les $\omega \neq 0$, en particulier pour $\omega = u^{n-1}$, donc $u^n \neq 0$. □

15 Théorème de Künneth

Soient M et N deux variétés différentielles. On considère les projections π_M et π_N :

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\pi_M"'] \arrow[dr, "\pi_N"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Alors, l'application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) & \to & \Omega^*(M \times N) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & \pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta \end{array}$$

induit le morphisme d'algèbres graduées

$$\kappa : \Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*(N) \to \Omega^*(M \times N).$$

On vérifie qu'il sagit d'un morphisme de complexes de cochaînes : si $\omega \in \Omega^n(M),\ \eta \in \Omega^m(N)$ alors

$$\kappa(d^{n+m}\omega \otimes \eta) = \kappa((d^n\omega) \otimes \eta + (-1)^n \omega \otimes (d^m\eta))$$
$$= \pi_M^*(d^n\omega) \wedge \pi_N^*\eta + (-1)^n \pi_M^*\omega \otimes \pi_N^*(d^m\eta)$$
$$= (d^n(\pi_M^*\omega)) \wedge \pi_N^*\eta + (-1)^n \pi_M^*\omega \wedge (d^m(\pi_N^*\eta))$$
$$= d^{m+n}(\pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta) = d^{n+m}\kappa(\omega \otimes \eta),$$

donc

$$\kappa \circ d = d \circ \kappa$$

et donc κ passe à la cohomologie en

$$\begin{array}{ccccc} \kappa & : & H^*(\Omega^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*(N)) \simeq H^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(N) & \to & H^*(M \times N) \\ & & \overline{\omega} \otimes \overline{\eta} & \mapsto & \overline{\pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta} \end{array}$$

On remarque que $\kappa : \Omega^*(M) \times \Omega^*(N) \to \Omega^*(M \times N)$ se restreint en κ_c : $\Omega_c^*(M) \times \Omega_c^*(N) \to \Omega_c^*(M \times N)$ (car $\mathrm{supp}\kappa(\omega, \eta) \subset \mathrm{supp}\omega \times \mathrm{supp}\eta$) qui induit aussi un morphisme d'algèbres graduées :

$$\kappa_c : H_c^*(M) \otimes_{\mathbb{R}} H_c^*(N) \to H_c^*(M \times N).$$

<u>Théorème</u> 21. *(Théorème de Künneth à support compact)*
Soient M, N deux variétés lisses. Alors, l'application

$$\kappa_c : H_c^*(M) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(M \times N)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

<u>Remarque</u> 29. Si M et N sont compactes, alors

$$H^*(M) \otimes H^*(N) \simeq H^*(M \times N).$$

On reprend les notations de la remarque 25 :
Si $\mathcal{B}$ désigne une base dénombrable de M stable par intersection finie, on note $\mathcal{B}_f$ l'ensemble des unions finies d'éléments de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_s$ l'ensemble des unions disjointes d'éléments de $\mathcal{B}$.

<u>Lemme</u> 25. *Si, pour tout $O \in \mathcal{B}$, $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(O \times N)$ est un isomorphisme, alors il en est de même pour tout $O \in \mathcal{B}_f$.*

Démonstration. Un ouvert $O \in \mathcal{B}_f$ s'écrit $O = \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_i, U_i \in \mathcal{B}$. On effectue une récurrence sur m :
Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer.
Soit $O = U_1 \cup \cdots \cup U_m,\ U_i \in \mathcal{B}$. Posons $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \cdots \cup U_m$. Alors $W := U \cap V = (U_1 \cap U_2) \cup \cdots \cup (U_1 \cap U_m),\ U_1 \cap U_i \in \mathcal{B}$. On a la propriété pour U, V, W par hypothèse de récurrence. Considérons les suites exactes courtes de Mayer-Vietoris :

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(W) \longrightarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \longrightarrow \Omega_c^*(O) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(W \times N) \longrightarrow \Omega_c^*(U \times N) \oplus \Omega_c^*(V \times N) \longrightarrow \Omega_c^*(O \times N) \longrightarrow 0\ ,$$

alors, en prenant le produit tensoriel de la première suite par $\Omega_c^*(N)$, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega_c^*(W) \otimes \Omega_c^*(N) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_c"] & (\Omega_c^*(U) \otimes \Omega_c^*(N)) \oplus (\Omega_c^*(V) \otimes \Omega_c^*(N)) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_c \otimes \kappa_c"] & \Omega_c^*(O) \otimes \Omega_c^*(N) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega_c^*(W \times N) \arrow[r] & \Omega_c^*(U \times N) \oplus \Omega_c^*(V \times N) \arrow[r] & \Omega_c^*(O \times N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On conclut en appliquant le Lemme des cinq (Proposition 14) dans le diagramme de cohomologie dont les lignes sont exactes, déduit du diagramme précédent puisque $\kappa_c : H_c^*(W) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(W \times N)$, $\kappa_c : H_c^*(U) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(U \times N)$ et $\kappa_c : H_c^*(V) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(V \times N)$ sont des isomorphismes. $\square$

Lemme 26. *Si $\mathcal{B}$ est une base dénombrable stable par intersection finie de M et si $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(O \times N)$ est un isomorphisme pour tout $O \in \mathcal{B}$, alors il en est de même pour tout $O \in \mathcal{B}_s$.*

Démonstration. Si $O = \coprod_{n\in\mathbb{N}} O_n$, on construit à l'aide de l'exemple 6 le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n=0}^{\infty}(H_c^*(O_n) \otimes H_c^*(N)) \arrow[r, "\oplus\kappa_c"] \arrow[d, "\varphi"', "\sim"] & \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_c^*(O_n \times N) \arrow[d, "\sim"] \\
H_c^*(O) \otimes H_c^*(N) \arrow[r, "\kappa_c"'] & H_c^*(O \times N)
\end{tikzcd}$$

où φ est la composée

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty}(H_c^*(O_n) \otimes H_c^*(N)) \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_c^*(O_n)\right) \otimes H_c^*(N) \xrightarrow{\sim} H_c^*(O \times N) \otimes H_c^*(N).$$

Comme par hypothèse, les applications

$$\kappa_c : H_c^*(O_n) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(O_n \times N)$$

sont des isomorphismes, le lemme est démontré. $\square$

Lemme 27. *Si $\kappa_c : H_c^*(O) \otimes H_c^*(N) \to H_c^*(O \times N)$ est un isomorphisme pour tout $O \in \mathcal{B}$, il en est de même pour tout ouvert O de M.*

Démonstration. Cela résulte des Lemmes 23, 25 et 26. $\square$

Démonstration. (du théorème 21)

1. Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et N quelconque :
   Les ensembles $O := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ a_i < x_i < b_i\}$ forment une base dénombrable stable par intersection finie pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ et sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. Ainsi, d'après le Lemme de Poincaré, le théorème est vrai pour les ouverts. On déduit du Lemme 27 que le théorème est vrai pour M.
   M et N sont quelconques :
   Soit $\mathcal{B}$ est une base dénombrable et stable par intersection finie de M et dont les ouverts sont difféomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (voir la preuve de la Dualité de Poincaré pour l'existence). Alors, d'après le point précédent, le résultat est vrai pour chaque élément de la base de M et donc pour tout ouvert de M d'après le Lemme 27, et donc en particulier pour M.

□

Remarque 30. Le résultat est faux sans support compact car la cohomologie d'une union disjointe est un produit direct et non une somme directe.

Définition 29. Soit B un espace topologique. Un revêtement de B est la donnée d'un espace topologique E et d'une application continue $p : E \to B$ ayant la propriété de trivialisation locale :
Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage V de b et un espace discret (muni de la topologie discrète) $F \neq \emptyset$ ainsi qu'un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(b) \to V \times F$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

B est appelé la base, E est l'espace total, F est la fibre et Φ est la trivialisation locale du revêtement au-dessus de F.

Remarque 31. Selon la célèbre métaphore d'Henri Cartan, si on pense à V comme à un disque, $p^{-1}(V)$ est une "pile d'assiettes".

Exemple 13. 1. Le revêtement trivial est $B \times F \twoheadrightarrow B$ où F est discret.

2. $t \mapsto e^{2i\pi t}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$ est un revêtement.

On vérifie alors que : Si B est connexe et si p a une fibre finie, toutes les fibres de p sont finies et ont même cardinal, appelé nombre de feuillets du revêtement.

Soit M une variété. On pose

$$\overline{M} := \{(x, \mu) \in M \times (\mathcal{B}_x/\sim)\} \simeq M \times \{0, 1\}$$

où $\mathcal{B}_x/\sim \simeq \{0, 1\}$ est l'ensemble des bases de $T_x M$ quotienté par la relation d'équivalence : "le déterminant de la matrice de passage est (strictement) positif", c'est donc l'ensemble des orientations de $T_x M$.

Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas maximal de M et, pour tout α, considérons ψ_α : $\varphi_\alpha(U_\alpha) \to \overline{M}$ où $\psi_\alpha(x) = (\varphi_\alpha^{-1}(x), (T_x\varphi^{-1}(e_i))_i)$. Alors ψ_α est un homéomorphisme sur son image $\overline{U_\alpha}$ de réciproque $\overline{\varphi_\alpha}$. On peut montrer que $\{(\overline{U_\alpha}, \overline{\varphi_\alpha})\}$ définit une structure différentielle orientable sur $\overline{M}$.

On vérifie alors aisément que $p : \overline{M} \to M$ est lisse et surjective.

Proposition 19. *$p : \overline{M} \to M$ est un revêtement à deux feuillets.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et soit (U, φ) une carte en x, alors

$$p^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$$

où les ouverts V_1 et V_2 sont donnés par

$$V_1 := \{(p, \mu_p)\ ;\ p \in U\} \text{ et } V_2 := \{(p, -\mu_p)\ ;\ p \in U\}$$

où

$$\mu_p := [(T_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_i))_i].$$

Les V_i sont donc des cartes de $\overline{M}$ et ainsi $p_{|V_i} : V_i \to U$ est un difféomorphisme. □

Théorème 22. *(Théorème de Künneth)*
Soient M et N deux variétés différentielles lisses telles que $\dim H^*(M) < \infty$ *ou* $\dim H^*(N) < \infty$. *Alors, on a l'isomorphisme*

$$\kappa : H^*(M) \otimes H^*(N) \to H^*(M \times N).$$

Lemme 28. *Soient M, N deux variétés orientées et munissons $M \times N$ de l'orientation produit. Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
H^*(M) \otimes H^*(N) \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[d, "(\mathcal{D}_M \otimes \mathcal{D}_N)\circ\epsilon"', "\sim"] & & H^*(M \times N) \arrow[d, "\sim"', "\mathcal{D}_{M\times N}"] \\
H_c^*(M)^* \otimes H_c^*(N)^* \arrow[dr, "i"'] & & H_c^*(M \times N)^* \arrow[dl, "\kappa_c^*"] \\
& (H_c^*(M) \otimes H_c^*(N))^* &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{D}$ sont les dualités de Poincaré, ϵ l'automorphisme linéaire de $H^*(M) \otimes H^*(N)$ donné par

$$\epsilon(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{(\dim M - \deg \alpha)\deg \beta} \alpha \otimes \beta,$$

et où i est l'inclusion canonique.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème de Fubini pour les variétés (Théorème 6) puisque $\kappa(\omega \otimes \eta) = \omega \times \eta$ sur les formes différentielles. $\square$

Définition 30.

1. Si $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ sont deux revêtements, on appelle <u>morphisme de revêtements</u> de p dans p' tout couple d'applications continues $H : E \to E'$ et $h : B \to B'$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p"] & E' \arrow[d, "p'"'] \\
B \arrow[r, "h"'] & B'
\end{tikzcd}$$

2. Si H et h sont des homéomorphismes, on parle d'<u>isomorphisme</u>.
3. Si $E = E'$, $B = B'$ et $h = id_B$, on dit que H est un <u>automorphisme</u>.

Démonstration. (du théorème de Künneth)

1. Si M et N sont orientables : D'après le Lemme 28, puisque κ_c est un isomorphisme, nous devons juste montrer que i est surjective, ce qui est le cas puisque $H_c^*(M)^* \simeq H^*(M)$ ou $H_c^*(N)^* \simeq H^*(N)$ est de dimension finie.
2. Si M n'est pas orientable et N orientable :
   Soit $p : \overline{M} \to M$ le revêtement orientable à deux feuillets de M. Alors $\overline{M} \times N$ est un revêtement orientable à deux feuillets de $M \times N$. Considérons $\tau : \overline{M} \to \overline{M}$ l'automorphisme de revêtement non trivial.
   Le diagramme suivant commute :
$$\begin{tikzcd} H^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) \arrow[r, "\kappa", "\sim"'] & H^*(\overline{M} \times N) \\ H^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) \arrow[r, "\sim", "\kappa"'] \arrow[u, "\tau^* \otimes id"] & H^*(\overline{M} \times N) \arrow[u, "(\tau \times id)^*"'] \end{tikzcd}$$
   Et donc, κ se restreint en un isomorphisme
$$\kappa : H_+^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) \to H_+^*(\overline{M} \times N),$$
   où
$$H_+^*(\overline{M}) := \{\overline{\omega} \in H^*(\overline{M})\ ;\ \tau^*\omega = \omega\}.$$
   On obtient le diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} H_+^*(\overline{M}) \otimes H^*(N) \arrow[r, "\kappa", "\sim"'] & H^*(\overline{M} \times N) \\ H^*(M) \otimes H^*(N) \arrow[r, "\kappa"'] \arrow[u, "p^* \otimes id", "\sim"'] & H^*(M \times N) \arrow[u, "\sim", "(p \times id)^*"'] \end{tikzcd}$$
   d'où le résultat.
   Les autres cas se montrent de façon analogue.

□

Exemple 14. 1. (Tore) Soit $\mathbb{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, alors $H^*(\mathbb{T}) \simeq H^*(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(\mathbb{S}^1)$, plus précisément :
$$H^n(\mathbb{T}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } n = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } n = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit M une variété lisse de dimension n dont la cohomologie (resp. à support compact) est de dimension finie. On pose

$$P_M(X) := \sum_{i=0}^{n} b_i(M)X^i \quad \left(\text{resp. } P_{M,c}(X) := \sum_{i=0}^{n} b_{i,c}(M)X^i \right)$$

le <u>polynôme de Poincaré</u> (resp. <u>à support compact</u>) de M dont les coefficients sont les nombres de Betti. Le Théorème de Künneth donne

$$P_{M\times N} = P_M P_N \text{ (resp. } P_{M\times N,c} = P_{M,c}P_{N,c}).$$

En première lecture, on pourra laisser de côté les digressions sur les revêtements et on retiendra :

<u>Théorème</u> 23. *Soient M et N deux variétés lisses orientables telles que $\dim H^*(M) < \infty$ ou $\dim H^*(N) < \infty$. Alors*

$$\kappa : H^*(M) \otimes H^*(N) \to H^*(M \times N)$$

est un isomorphisme.

Annexe

A Immersions et submersions

Théorème 24. *(Théorème d'inversion locale usuel)*
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$ tel que df_a soit inversible. Alors f est un difféomorphisme local en a.

Théorème 25. *(Théorème du rang constant usuel)*
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa différentielle soit de rang constant égal à r sur U (on dit que f est de rang constant égal à r). Alors il existe

1. *Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ d'un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 sur un ouvert de U tel que $\varphi(0) = a$ et*
2. *Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ψ d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\varphi(V))$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que*

$$\forall x \in V,\ \psi \circ f \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Remarque 32. Pour une preuve des théorèmes précédents, voir par exemple [9] et [3] respectivement.

Théorème 26. *(Théorème d'inversion locale pour les variétés)*
Soit $f : M \to N$ une application lisse entre variétés de même dimension. Soient aussi $m \in M$, (U, φ) une carte en m et (V, ψ) une carte en $f(m)$. Posons

$$f_i := \psi_i \circ f \ \text{ et } \ \left.\frac{df_i}{d\varphi_j}\right|_m := T_m f_i(T_{\varphi(m)}(\varphi^{-1})(e_j)).$$

Si le jacobien $\det\left(\left.\frac{df_i}{d\varphi_j}\right|_m\right)$ est non nul, alors f est un difféomorphisme local en m.

Démonstration. $\det\left(\frac{df_i}{d\varphi_j}\Big|_m\right) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; T_m f$ isomorphisme $\Leftrightarrow d_{\varphi(m)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ isomorphisme $\Rightarrow \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ difféormorphisme local en $\varphi(m)$ d'après le théorème d'inversion locale usuel $\Rightarrow f$ difféomorphisme local en m. $\square$

<u>Théorème</u> 27. *(Théorème du rang constant pour les variétés)*
Soit $f : M \to N$ une application lisse entre variétés de dimensions respectives m et n. Si f est de rang constant égal à r sur un voisinage d'un point p de M, alors il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) centrées respectivement en p et $f(p)$ telles que

$$\forall x \in \varphi(U),\ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Démonstration. Soient $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ et $(\overline{V}, \overline{\psi})$ des cartes respectivement en p et $f(p)$. Alors $\overline{\psi} \circ f \circ \overline{varphi}^{-1}$ est de rang constant égal à r sur un voisinage de $\overline{\varphi}(p)$. D'après le théorème du rang contant usuel, il existe un difféomorphisme G sur un voisinage ouvert de $\overline{\varphi}(p)$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et un difféomorphisme F sur un voisinage ouvert de $\overline{\psi} \circ f(p)$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$F \circ \overline{\psi} \circ f \circ \overline{\varphi}^{-1} \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Il suffit alors de poser $\varphi := G \circ \overline{\varphi}$ et $\psi := F \circ \overline{\psi}$. $\square$

<u>Définition</u> 31. Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre variétés (voir [2], Définition 19). On note $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ l'application linéaire tangente de f et x.

1. On dit que f est une <u>immersion</u> si pour tout $x \in M$, $T_x f$ est injective.
2. On dit que f est une <u>submersion</u> si pour tout $x \in M$, $T_x f$ est surjective.
3. On dit que f est un <u>plongement</u> si $f(M)$ est une sous-variété de N et si $f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme.

<u>Lemme</u> 29. *Si $f : M \to N$ est une immersion (resp. une submersion) en p, alors f est de rang constant égal à m (resp. n) sur un voisinage de p.*

Démonstration. Avec les notations du Théorème d'inversion locale, T_pf est injective (resp. surjective) si et seulement si $m \leq n$ et rg $\left(\frac{df_i}{d\varphi_j(p)}\right) = m$ (resp. $n \leq m$ et rg $\left(\frac{df_i}{d\varphi_j(p)}\right) = n$). Donc f est une immersion (resp. submersion) en p si la jacobienne de f en p est de rang maximal.
Or $D := \{x \in M \ ; \ \text{la jacobienne en } x \text{ est de rang maximal}\}$ est un ouvert : notons r le rang maximal, alors le complémentaire de D est l'ensemble des points où le rang est $< r$, ce qui revient à annuler les mineurs, c'est donc l'ensemble de zéro d'un nombre fini d'applications continues, et donc un fermé, ce qui démontre le lemme. □

<u>Théorème</u> 28. *Soient M, N deux variétés différentielles de dimensions respectives m et n et $f : M \to N$ une application différentiable.*

1. *Si f est une immersion en $p \in M$, alors il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) centrées respectivement en p et $f(p)$ telles que*
$$\forall x \in \varphi(U), \ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$
2. *Si f est une submersion en $p \in M$, alors il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) centrées respectivement en p et $f(p)$ telles que*
$$\forall x \in \varphi(U), \ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Théorème du rang constant et du Lemme précédent. □

<u>Théorème</u> 29. *$f : M \to N$ différentiable est un plongement si et seulement si c'est une immersion et si $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. $\Rightarrow$. C'est clair.
$\Leftarrow$. Soit $p \in M$. D'après le Théorème d'immersion, il existe des cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N telles que f lue en ces cartes $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ est de la forme $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Comme f est un homéomorphisme sur son image, $f(U)$ est ouvert dans $f(M)$, donc $f(U) = V' \cap f(M)$ où $V' \subset N$ est un ouvert. Alors $V \cap V' \cap f(M) = V \cap f(U)$ et $f(U)$ annule les coordonnées $m+1, \ldots, n$. Donc, pour tout $f(p) \in f(M)$, $(V \cap V', (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m))$ est une carte de $f(M)$: $f(M)$ est donc une sous-variété de N. □

B Structure de variété des sphères et des espaces projectifs

Soit $\mathbb{S}^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sphère n-dimmensionnelle de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soient aussi $N := (1, 0, \dots, 0)$, $S := (-1, 0, \dots, 0)$, $U_S := \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ et $U_N := \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. On considère la projection stéréographique i_N sur l'hyperplan $H := \{x_1 = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$ par rapport à N en associant à tout $x \in U_N$ l'unique point d'intersection de la droite (Nx) et de H. On peut de même considérer la projection stétéographique i_S par rapport à S. Après calculs, on a

$$\begin{array}{rcccl} i_N & : & U_N & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1-x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} i_S & : & U_S & \to & \mathbb{R}^n \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{array}$$

Ce sont des homéomorphismes d'inverses

$$i_N^{-1}(y) = \frac{1}{1 + ||y||^2}(||y||^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n)$$

et

$$i_S^{-1}(y) = \frac{1}{1 + ||y||^2}(1 - ||y||^2, 2y_1, \dots, 2y_n),$$

l'application de changement de carte étant donnée par

$$\begin{array}{rcccl} i_S \circ i_N^{-1} & : & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & & y & \mapsto & \frac{y}{||y||^2} \end{array}.$$

$\mathbb{S}^n$ est donc une variété lisse de dimension n.

Ensuite, la relation d'équivalence définissant $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ est ouverte (ie la projection canonique est une application ouverte) et $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ admet une base dénombrable, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ admet donc également une base dénombrable. Pour $0 \leq i \leq n$, on pose

$$U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n\mathbb{R} \ ; \ x_i \neq 0\}.$$

Comme la relation est ouverte, on vérifie aisément que U_i est un ouvert. Posons aussi

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_i & : & U_i & \to & \mathbb{R}^n \\ & & [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{array}.$$

C'est un homéomorphisme d'inverse

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i^{-1} & : & \mathbb{R}^n & \to & U_i \\ & & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n] \end{array}.$$

En effet, $\varphi_i \circ pr : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$ est continue donc φ_i est continue et $pr \circ \varphi_i^{-1}$ est continue, donc φ_i^{-1} aussi. On vérifie alors facilement que $\{(U_i, \varphi_i)\}$ est un atlas de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ est une variété lisse compacte de dimension n.
De même, on montre que $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ est une variété lisse compacte de dimension $2n$.

C Valeurs critiques et théorème de Sard

Lemme 30. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. L'image par f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.*

Démonstration. Soit E un tel ensemble. Il suffit de montrer que pour toute boule fermée $B \subset U$, $f(E \cap B)$ est de mesure nulle. Posons

$$K := \sup_{x \in B} ||df_x||.$$

Le théorème des accroissements finis montre que f est K-lipschitzienne sur B, donc transforme tout cube de mesure δ en ensemble de mesure inférieure à $K^n\delta$. Ainsi, si $C \supset E \cap B$ est une réunion de cubes vérifiant $\lambda_n(C) < \varepsilon$, on a

$$\lambda_n(f(E \cap B)) \leq \lambda_n(f(C)) < K^n\varepsilon.$$

□

Proposition 20. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $p < n$. Alors M est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout $x \in M$ est contenu dans un ouvert U tel que $U \cap M$ soit de mesure nulle. Par définition des sous-variétés, on considère un ouvert U contenant x et un difféomorphisme $f : U \to V$ tel que

$$f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$

Le membre de droite étant évidemment de mesure nulle, le Lemme précédent permet de conclure. $\square$

Définition 32.

1. Si f est une application lisse d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, un point $x \in U$ est dit critique si

   $$\mathrm{rg}(df_x) < n.$$

   De plus, un point $y \in \mathbb{R}^n$ est une valeur critique s'il existe un point critique x tel que $y = f(x)$.
2. Un point est dit régulier s'il n'est pas critique.

Proposition 21. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un maximum (resp. un minimum) local en a, alors a est un point critique.*

Démonstration. Supposons le contraire. Soit alors v un vecteur tel que $df_a(v) \neq 0$. Si le réel t est suffisamment petit, $f(a+tv) - f(a) = df_a(tv) + o(tv)$ est non nul et a le même signe que $df_a(tv)$. En choisissant deux valeurs opposées d'un tel t, on aboutit à une absurdité. $\square$

Lemme 31. *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, pour tout compact convexe $K \subset U$, il existe un réel $\alpha > 0$ et une fonction $\lambda : [0, \alpha] \to \mathbb{R}_+$ telle que*

$$||f(y) - f(x) - df_x(x-y)|| \leq \lambda(||x-y||)||x-y||, \ \lim_{t \to 0} \lambda(t) = 0,$$

pour tous $x, y \in K$ tels que $||x-y|| < \alpha$.

Démonstration. On a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df_{x+t(y-x)}(y-x)\mathrm{d}t,$$

d'où

$$||f(y) - f(x) - df_x(y-x)|| = \left|\left|\int_0^1 df_{x+t(y-x)}(y-x) - df_x(y-x)\mathrm{d}t\right|\right|$$

$$\leq \int_0^1 ||df_{x+t(y-x)}(y-x) - df_x(y-x)||\mathrm{d}t.$$

Le résultat découle alors de la continuité uniforme de f sur K. □

Théorème 30. *(Théorème de Sard-Brown)*
L'ensemble des valeurs critiques d'une application lisse d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle.

Démonstration. Nous ne donnons la preuve que dans le cas plus facile où $m \leq n$, pour le cas $m > n$, voir par exemple Differential Topology de M. Hirsch.
Remarquons d'abord que si $m < n$, tous les points sont critiques et en appliquant le premier Lemme de la section, à l'application $f_1 : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ définies par $f_1(x, y) = f(x)$, on voit que $f(u)$ est de mesure nulle.
Montrons alors le résultat pour $m = n$. Soit C l'ensemble des points critiques. Il suffit de montrer que $f(A \cap C)$ est de mesure nulle pour tout cube A. Notons d'abord que si $x \in C$, l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(df_x)$ est contenu dans un hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$. Soit alors $r > 0$ et soit y tel que $||y - x|| < r$. Alors, d'après le Lemme précédent, la distance de $f(y)$ à l'hyperplan affine H' parallèle à H et contenant $f(x)$ est inférieure à $\lambda(r)$. D'autre part, si $K := \sup_{x \in B} ||df_x||$, on a $||f(y) - f(x)|| < Kr$. Ainsi, $f(B(x, r))$ est inclus dans un cylindre de base $H' \cap B(f(x), Kr)$ et de hauteur $2r\lambda(r)$. A plus forte raison,

$$\lambda_n(f(B(x, r)) \leq 2^n K^{n-1} r^n \lambda(r).$$

Maintenant, le cube A est inclus dans au plus $(ak)^n$ cubes de côtés $\frac{1}{k}$, où l'on a désigné par a le côté de A. Chaque cube qui rencontre C peut être enfermé dans une boule $B\left(x, 2\frac{\sqrt{n}}{k}\right)$, où $x \in C$. Finalement, si $\omega_n r^n$ désigne le volume d'une boule de rayon r, on trouve que

$$\lambda_n(f(A\cap C)) \leq (ak)^n 2^n K^{n-1}\omega_n \left(2\frac{\sqrt{n}}{k}\right)^n \lambda\left(2\frac{\sqrt{n}}{k}\right) \leq \kappa(n,a,K)\lambda\left(2\frac{\sqrt{n}}{k}\right),$$

d'où la conclusion en faisant tendre k vers l'infini. $\square$

D Algèbres graduées

Une $\mathbb{R}$-algèbre A est graduée si elle l'est comme espace vectoriel, ie si

$$A = \bigoplus_{p=0}^{\infty} A^p,$$

où A^p est un sous-espace vectoriel de A pour tout p et où, pour tous p, q,

$$A^p A^q \subset A^{p+q}.$$

1. Un élément de A^p est dit homogène de degré p.
2. Si
$$\forall (x,y) \in A^p \times A^q,\ yx = (-1)^{pq} xy,$$
A est dite anticommutative.
3. Une application linéaire $\varphi : A \to B$ entre algèbres graduées est dite homogène de degré k si
$$\varphi(A^p) \subset B^{p+k}.$$
4. Un morphisme d'algèbres graduées est une application homogène de degré 0.
5. Une antidérivation sur A est une application linéaire homogène de degré impair $\alpha : A \to A$ telle que
$$\forall (x,y) \in A^p \times A,\ \alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^p x\alpha(y).$$

6. Si A et B sont deux $\mathbb{R}$-algèbre graduées, on définit le produit tensoriel $A \otimes_{\mathbb{R}} B$ par
$$(A \otimes_{\mathbb{R}} B)^r := \bigoplus_{p+q=r} A^p \otimes_{\mathbb{R}} B^q.$$
On peut définir deux opérations de produit tensoriel :
   (a)
   $$(x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy',$$
   (b)
   $$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{\deg(y)\deg(x')} xx' \otimes yy'.$$

   Dans le second cas, le produit de deux algèbres anticommutatives est anticommutatif ; c'est celui que nous utilisons dans le Théorème de Künneth.
7. Une algèbre graduées différentielle est une algèbre graduée avec une antidérivation δ homogène de degré 1 telle que $\delta^2 = 0$. Il s'agit donc d'un complexe de cochaînes. On vérifie aisément que la cohomologie est encore une algèbre graduée différentielle. De plus, si A est anticommutative, la cohomologie l'est aussi.
8. Si A et B sont deux algèbres graduées différentielles, il en est de même pour $A \otimes B$ avec l'antidérivation
$$\delta(x \otimes y) := \delta(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes \delta(y),\ x \in A^p,\ y \in B.$$

Enfin, on a

1. Si $\dim(E), \dim(F) < \infty$, alors $E^* \otimes F^* \simeq (E \otimes F)^*$ par l'isomorphisme $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$.
2. Le produit tensoriel entre deux algèbres graduées différentielles A et B induit un isomorphisme d'algèbres graduées
$$H^*(A) \otimes H^*(B) \xrightarrow{\sim} H^*(A \otimes B).$$

Références

[1] J.-B. Campesato, "Cohomologie de de rham," 2012.

[2] A. Garnier, "Une introduction aux formes et aux variétés différentielles," 2015.

[3] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles.* EDP Sciences, 2010.

[4] M. Berger and B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses universitaires de France, 2012.

[5] S. Lang, *Algèbre.* Springer-Verlag, Dunod, 2004.

[6] B. Andrews, "De rham cohomology," 2004.

[7] M. do Carmo, *Differential forms and applications*, 1994.

[8] M. Audin, "Topologie : revêtements et groupe fondamental," 2004.

[9] A. Ouaqqa, "Cours de géométrie différentielle," 2015.