Fonctions harmoniques, sous-harmoniques et Problème de Dirichlet

MÉMOIRE DE FIN DE LICENCE

Arthur Garnier

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de Thomas Gauthier

2014-2015

A Delphine

Table des matières

Préambule

Avant toute chose, je tiens à remercier M. Gauthier pour sa disponibilité ainsi que pour la précision et la qualité de ses conseils.

Dans ce mémoire, on se propose d'exposer les bases de la théorie des fonctions harmoniques.
Dans un premier temps, on y définit les fonctions harmoniques et on exhibe leurs principales propriétés ainsi que leurs liens avec les fonctions holomorphes. On y démontre de plus la formule de Poisson ainsi que le théorème de Harnack.
Dans un second temps, nous effectuons une brève étude des fonctions semi-continues en vue d'introduire le cadre plus général et plus souple des fonctions sous-harmoniques.
Enfin, nous utilisons les résultats obtenus sur la théorie des fonctions harmoniques et sous-harmoniques afin de résoudre le problème de Dirichlet général en s'inspirant de la méthode de Perron.

Première partie

Fonctions harmoniques

1 Définitions et lien avec les fonctions holomorphes

<u>Définition</u> 1. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $h : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si h est deux fois dérivable, on appelle Laplacien de h et on note Δh l'opérateur différentiel défini par :
$$\forall (x,y) \in U,\ \Delta h(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)$$
2. On dit que h est harmonique sur U si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et si $\Delta h = 0$ identiquement sur U. On notera $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur U.
3. Si $u : U \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ on définit $\Delta u := \Delta\Re(u) + i\Delta\Im(u)$ et on dira que u est harmonique si elle vérifie $\Delta u = 0$.

<u>Remarque</u> 1. L'ensemble $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Le théorème suivante exhibe le lien étroit entre les fonctions harmoniques et les fonctions holomorphes. De plus, il nous fournira bon nombre d'exemples de fonctions harmoniques.

<u>Théorème</u> 1. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$. Alors*

1. *Si f est holomorphe sur D, alors $\Re(f)$ est harmonique sur D.*
2. *Si h est harmonique sur D et si D est simplement connexe, alors il existe une fonction f holomorphe sur D telle que $h = \Re(f)$. De plus, cette fonction est unique à l'addition près d'une constante imaginaire pure.*

Démonstration. 1. On écrit $f = u + iv$. Comme f est holomorphe, on a, avec les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

d'où

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

d'après le Théorème de Schwarz, car v est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $u = \Re(f)$ est bien harmonique.

2. Supposons que $h = \Re(f)$ pour une certaine fonction holomorphe $f = h + ik$. On a

$$f' = \frac{\partial h}{\partial x} + i\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}$$

d'après Cauchy-Riemann. Donc, s'il existe une telle fonction f, alors elle est entièrement déterminée par h et est donc unique à l'addition près d'une constante imaginaire pure. Posons ensuite

$$g := \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y} : D \to \mathbb{C}.$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(D)$. De plus, par hypothèse et avec le Théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y},$$

ce qui signifie que g vérifie les équations de Cauchy-Riemann. g est donc holomorphe sur D. Soit $z_0 \in D$ fixé. Posons :

$$f : z \mapsto h(z_0) + \int_{z_0}^{z} g(\zeta) d\zeta, \ z \in D.$$

D étant simplement connexe, tous les chemins de D joignant z_0 à z sont homotopes donc f est bien définie par le Théorème de Cauchy. f est donc holomorphe et si $\tilde{h} := \Re(f)$, alors

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} - i\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} = f' = \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y},$$

donc

$$\frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial x} = \frac{\partial(h-\tilde{h})}{\partial y} = 0.$$

Comme D est connexe, $h-\tilde{h}$ est constante sur D. Comme $h(z_0) = \tilde{h}(z_0)$ cette constante est nulle, et donc $h = \tilde{h}$, i.e. $h = \Re(f)$.

□

Corollaire 1. *1. Toute fonction harmonique sur un domaine D est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. Ce qui veut dire que chaque point de D possède un voisinage (ouvert) sur lequel il existe une fonction holomorphe de partie réelle identiquement égale à la fonction harmonique considérée.*

2. Si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, alors $\log|f|$ est harmonique.

3. Si D est un domaine simplement connexe et si $f : D \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas dans D, alors il existe $g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $e^g = f$ identiquement sur D.

Démonstration. 1) Tout point d'un domaine possède un voisinage simplement connexe, à savoir un disque centré en ce point de rayon non nul ; d'où le résultat.
2) et 3) On pose $h := \log|f|$. h est localement la partie réelle d'une détermination de $\log f$ qui est holomorphe, donc est harmonique d'après le premier point du Théorème 1. D'après le deuxième point de ce même Théorème, il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $h = \Re(g)$. Alors $|fe^{-g}| = 1$ sur D, donc fe^{-g} est constante sur D d'après le Principe du maximum (pour les fonctions holomorphes) ; notons cette constante $C \neq 0$. En ajoutant à g une constante bien choisie, on peut supposer que $C = 1$, donc que $fe^{-g} = 1$ et donc $f = e^g$. □

On en déduit immédiatement le

Corollaire 2. *Toute fonction harmonique est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

2 Premières propriétés

Après cette introduction, on peut démontrer trois résultats majeurs sur les fonctions harmoniques, qui sont analogues à des théorèmes bien connus sur les fonctions holomorphes, qui nous serviront d'ailleurs dans les preuves de ces premiers.

<u>Théorème</u> 2. *(Formule de la moyenne)*
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $h : U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, $z_0 \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$. Alors

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. Soit $\rho > r$ tel que $\mathbb{D}(z_0, \rho) \subset U$. D'après le Théorème 1, il existe f holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, \rho)$ telle que $h = \Re(f)$. On peut donc appliquer la formule de la moyenne à f (ou la formule intégrale de Cauchy) pour obtenir :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \quad \left(= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial \mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires dans l'égalité ci-dessus, on obtient bien

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

d'où le résultat. □

<u>Théorème</u> 3. *(Principe d'identité)*
Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $h, k : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques sur U. S'il existe un ouvert non vide V de U tel que $h_{|V} = k_{|V}$, alors $h = k$ sur U.

Démonstration. Quitte à remplacer h par $h-k$, on peut supposer que $k=0$. On suppose donc que $h_{|V}=0$. Posons

$$g := \frac{\partial h}{\partial x} - i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

En reprenant la preuve du Théorème 1, on voit que g est holomorphe dans U. De plus, $g_{|V}=0$, donc $g=0$ d'après le Principe du prolongement analytique, et donc

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \text{ sur } U.$$

La fonction h est donc constante sur U et comme $h_{|V}=0$, on a bien que $h=0$ sur U. □

Remarque 2. La version forte du Prolongement analytique des fonctions holomorphes (à savoir que si deux fonctions holomorphes coïncident sur un ensemble non vide admettant des points d'accumulation dans le domaine ambiant, alors elles coïncident sur l'ouvert entier) n'est plus valable pour les fonctions harmoniques. En effet, les fonctions $h=\Re$ et $k=0$ sont harmoniques, égales sur l'axe imaginaire (qui admet par exemple 0 comme point d'accumulation) alors que $\Re$ n'est clairement pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$.

Dans la suite, pour un domaine D donné, nous noterons $\partial_\infty D$ la frontiére de D relative à la topologie de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Théorème 4. *(Principe du maximum)*
Soit h une fonction harmonique sur un domaine U.

1. *Si h admet un maximum local dans U, alors h est constante sur U.*
2. *Si h se prolonge continument sur $\overline{U}$ et si $h\leq 0$ sur $\partial_\infty U$, alors $h\leq 0$ sur U.*

Démonstration. 1. On suppose que h admette un maximum local en $z_0\in U$. Choisissons $r>0$ tel que

$$\forall z\in\mathbb{D}(z_0,r),\ \ h(z)\leq h(z_0)$$

D'après le Théorème 1, il existe f holomorphe dans $\mathbb{D}(z_0,r)$ telle que $h=\Re(f)$. Alors $|e^f| = e^{\Re(f)}$ admet un maximum local en z_0 et donc e^f est constante sur $\mathbb{D}(z_0,r)$, donc f aussi et h est alors constante sur $\mathbb{D}(z_0,r)$ et donc est constante sur U d'après le Principe d'identité.

2. La continuité de h sur le compact $\overline{U}$ entraîne que h admet un maximum sur $\overline{U}$. Notons-le z_0. Si $z_0 \in \partial_\infty U$, alors $h(z_0) \leq 0$ par hypothèse et donc $h \leq 0$ sur U. Si $z_0 \in U$, alors h est constante sur U d'après 1), donc sur $\overline{U}$. Donc $h \leq 0$ sur U, d'où le résultat.

$\square$

3 Formule de Poisson et Théorème de Harnack

Dans cette section, on se propose de démontrer la formule de Poisson, qui est l'analogue, pour les fonctions harmoniques, de la Formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes. De plus, cette formule nous permettra ensuite de prouver les inégalités de Cauchy pour les fonctions harmoniques ainsi que le théorème de Harnack. Dans la suite de ce paragraphe, les fonctions harmoniques seront supposées à valeurs complexes.

Définition 2.

1. On appelle Noyau de Poisson du disque unité $\mathbb{D}$ la fonction $P_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ définie par
$$P_{\mathbb{D}}(z, \zeta) := \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}.$$
2. Pour $a \in \mathbb{D}$, on notera P_a la fonction définie sur $\partial\mathbb{D}$ par $P_a(\zeta) := P_{\mathbb{D}}(a, \zeta)$.
3. Si $\Delta = \mathbb{D}(z_0, r)$ est un disque (ouvert) de centre z_0 et de rayon r, le noyau de Poisson de Δ est la fonction $P_\Delta : \Delta \times \partial\Delta \to \mathbb{R}$ définie par
$$P_\Delta(z, \zeta) := P_{\mathbb{D}}\left(\frac{z - z_0}{r}, \frac{\zeta - z_0}{r}\right) = \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2}.$$
4. Pour $a \in \Delta$, on notera P_a la fontion $\zeta \mapsto P_\Delta(a, \zeta)$.
5. Si $\phi : \partial\Delta \to \mathbb{R}$ est intégrable, alors on définit l'Intégrale de Poisson $P_\Delta\phi : \Delta \to \mathbb{R}$ de ϕ par :
$$P_\Delta\phi(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}\left(\frac{z - z_0}{r}, e^{i\theta}\right)\phi(z_0 + re^{i\theta})d\theta,\ z \in \Delta,$$
Autrement dit, si $\rho < r$ et $0 \le t < 2\pi$, alors
$$P_\Delta\phi(z_0 + \rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r\cos(\theta - t) + r^2}\phi(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Nous commençons par le

Lemme 1. *Le Noyau de Poisson vérifie :*

1. $\forall (z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D},\ P_{\mathbb{D}}(z, \zeta) > 0,$
2. $\forall z \in \mathbb{D},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})d\theta = 1,$
3. $\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P_{\mathbb{D}}(z, \zeta) \to 0$ *quand* $z \to \zeta_0,\ \zeta_0 \in \partial\mathbb{D},\ \delta > 0.$

Démonstration. 1. Cela découle directement de la définition de $P_{\mathbb{D}}$.

2. Par définition et d'après la Formule de Cauchy, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})d\theta = \Re\left(\frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

$$= \Re\left(\frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{2}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta}d\zeta\right) = \Re(1) = 1.$$

3. $$|z-\zeta_0| < \delta \ \Rightarrow \sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P_{\mathbb{D}}(z, \zeta) \leq \frac{1-|z|^2}{(\delta-|\zeta_0-z|)^2},$$

d'où le résultat.

□

Théorème 5. *Si* Δ *est un disque et si* $\phi : \partial\Delta \to \mathbb{R}$ *est intégrable, alors :*

1. $P_\Delta\phi$ *est réelle harmonique sur* Δ*,*
2. *Si* ϕ *est continue en* $\zeta_0 \in \partial\Delta$*, alors* $\lim_{z\to\zeta_0} P_\Delta\phi(z) = \phi(\zeta_0)$

Démonstration. 1. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut supposer que $z_0 = 0$ et $r = 1$, de telle sorte que $\Delta = \mathbb{D}$. On a alors,

$$P_\Delta\phi(z) = P_{\mathbb{D}}\phi(z) = \Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(e^{i\theta})d\theta\right),\ z \in \Delta.$$

$P_\Delta\phi$ est donc harmonique comme partie réelle d'une fonction holomorphe.

2. On suppose toujours que $\Delta = \mathbb{D}$. D'après les assertions 1. et 2. du Lemme 1, on a, pour $z \in \Delta$:

$$\begin{aligned}|P_\Delta \phi(z) - \phi(\zeta_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta})(\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta.\end{aligned}$$

Soit ensuite $\varepsilon > 0$. ϕ étant continue en ζ_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\zeta - \zeta_0| < \delta \ \Rightarrow \ |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \varepsilon.$$

En utilisant à nouveau le Lemme 1, 1. et 2., on obtient donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| < \delta} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) d\theta = \varepsilon. \tag{1}$$

Donc, d'après le 3. du Lemme 1, il existe $\delta' > 0$ tel que

$$|z - \zeta_0| < \delta' \ \Rightarrow \ \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P_{\mathbb{D}}(z, \zeta) < \varepsilon.$$

Et donc, si $|z - \zeta_0| < \delta'$, alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|e^{i\theta} - \zeta_0| \geq \delta} P_{\mathbb{D}}(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta$$

$$\leq \varepsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})| d\theta + |\phi(\zeta_0)| \right) \tag{2}$$

Enfin, en sommant (1) et (2), on obtient

$$|P_\Delta \phi(z) - \phi(\zeta_0)| \leq \varepsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})| d\theta + |\phi(\zeta_0)| + 1 \right)$$

D'où le résultat.

□

Théorème 6. *(Formule de Poisson) Soient $\Delta := \mathbb{D}(z_0, R)$ et $u : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Delta}$ et harmonique sur Δ. Alors*

$$\begin{aligned} \forall a \in \Delta,\ u(a) &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial\Delta} P_a(\zeta) u(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) P_a(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Démonstration. D'après le Théorème 1 ii) et comme $P_{\mathbb{D}}$ est réelle, si la formule de Poisson est vraie pour toute fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors elle l'est aussi pour toute fonction réelle harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Ensuite, si u est une fonction complexe harmonique au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, il suffit de considérer les parties réelles et imaginaires. Enfin, si u est comme dans l'énoncé, on l'approxime par les fonctions $u_\delta,\ \delta < 1$ définies par $u_\delta(z) := u(\delta z)$. Les u_δ sont harmoniques au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ et convergent uniformément vers u sur $\overline{\mathbb{D}}$ quand $\delta \to 1$ car u est uniformément continue sur $\overline{\mathbb{D}}$; donc si la formule de Poisson et vraie pour les u_δ, elle l'est aussi pour u.
On peut donc considérer f holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ et soit $a \in \mathbb{D}$ fixé. La fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{1-\overline{a}\zeta}$ est holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Donc, d'après la Formule de Cauchy,

$$\frac{f(a)}{1-|a|^2} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1-\overline{a}\zeta)^2} d\zeta,$$

et donc

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta) P_a(\zeta) d\zeta,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 3. En posant $a = z_0$ dans la Formule de Poisson, on retrouve la Formule de la moyenne.

Définition 3. Soit $k := (p, q) \in \mathbb{N}^2$. on définit l'opérateur différentiel ∂^k par

$$\forall f \in \mathcal{C}^{p+q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ \partial^k f := \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

Théorème **7.** *(Estimation de Cauchy) Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, K un compact de U et V un voisinage de K dans U. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^2$, il existe une constante C_k telle que pour tout fonction u harmonique sur U, on ait*

$$\sup_K |\partial^k u| \leq C_k \sup_V |u|$$

Démonstration. Soit $\Delta := \mathbb{D}(a, r)$ un disque tel que $\overline{\Delta} \subset U$. On a que, pour tout $\zeta \in \partial\Delta$, l'application $P^\zeta : z \mapsto P_\Delta(z, \zeta)$ est le classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées partielles sont des fonctions continues de $(z, \zeta) \in \Delta \times \partial\Delta$. Donc, si u est une fonction harmonique sur U, on peut appliquer la Formule de Poisson et puisque $(z, \zeta) \mapsto P^\zeta(z)u(\zeta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le compact $\partial\Delta$, on peut dériver sous le signe intégral, ce qui donne :

$$\forall z \in \Delta, \forall k \in \mathbb{N}^2,\ \partial^k u(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial\Delta} \partial^k P^\zeta(z) u(\zeta) d\zeta.$$

Donc, $|\partial^k u(a)| \leq C(k, \Delta) \sup_{\partial\Delta} |u|$, où $C(k, \Delta) := \sup_{\partial\Delta} |\partial^k P^\zeta(a)|$. Or, par définition de P_Δ, la constante $C(k, \Delta)$ ne dépend que de k et de r. Enfin, si K est un compact de U et si V est un voisinage de K, alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $a \in K$, le disque (fermé) $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ soit contenu dans V et comme $\bigcup_{a \in K} \mathbb{D}(a, r)$ est un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini par compacité, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire **3.** *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions harmoniques qui converge localement uniformément de U vers une fonction u, alors u est harmonique et toutes les dérivées partielles des u_n convergent vers les dérivées partielles respectives de u.*

Démonstration. D'après les inégalités de Cauchy, la convergence uniforme des u_n sur les compacts implique la convergence uniforme des dérivées partielles sur les compacts. Donc, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\partial^k u_n$ converge uniformément sur les compacts pour tout $k \in \mathbb{N}^2$; donc en particulier, $\Delta u = \lim_{n \to \infty} \Delta u_n = 0$ et u est harmonique. □

Nous allons maintenant donner deux conséquences de la Formule de Poisson et de l'Estimation de Cauchy : les théorèmes de Harnack. Ces deux résultats - en plus d'être intéressants en eux-même - nous seront grandement utiles lors de la résolution du Problème de Dirichlet.

Théorème 8. *(Inégalités de Harnack) Soit $u : \mathbb{D}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique réelle positive sur $\mathbb{D}(z_0, r)$. Alors pour tous $\rho < r$ et $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{r-\rho}{r+\rho} u(z_0) \leq u(z_0 + \rho e^{i\theta}) \leq \frac{r+\rho}{r-\rho} u(z_0).$$

Démonstration. Fixons $\rho < r$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et choisissons $\rho < s < r$. On peut appliquer la Formule de Poisson dans le disque $\overline{\mathbb{D}}(z_0, s)$ et on obtient

$$u(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - \rho^2}{|se^{it} - \rho e^{i\theta}|^2} u(z_0 + se^{i\theta}) d\theta,$$

Or $s - \rho \leq |\rho e^{it} - ze^{i\theta}| \leq s + \rho$, donc

$$\frac{s-\rho}{s+\rho} \leq \frac{s^2 - \rho^2}{|se^{it} - \rho e^{i\theta}|^2} \leq \frac{s+\rho}{s-\rho}, \ \forall 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Comme $u \geq 0$, on a

$$\frac{s-\rho}{s+\rho} \int_0^{2\pi} \frac{u(z_0 + se^{i\theta})}{2\pi} d\theta \leq u(z_0 + \rho e^{it}) \leq \frac{s+\rho}{s-\rho} \int_0^{2\pi} \frac{u(z_0 + se^{i\theta})}{2\pi} d\theta$$

Et comme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + se^{i\theta}) d\theta = u(z_0)$ pour tout s, on a le résultat en faisant tendre s vers r. □

Ces inégalités nous donnent trivialement le lemme suivant, dont on aura besoin pour le théorème de Harnack.

Lemme 2. *Soient U un ouvert et $\overline{\Delta} \subset U$ un disque fermé. Alors il existe deux constantes $C_\Delta > 0$ et $C'_\Delta < +\infty$ telles que pour toute fonction harmonique réelle positive sur U et pour tous $z, w \in \Delta$ on ait :*

$$C_\Delta u(w) \leq u(z) \leq C'_\Delta u(w).$$

Démonstration. On écrit $\Delta := \mathbb{D}(z_0, \rho)$. Comme $\overline{\Delta} \subset U$ et que U est ouvert, il existe $r > \rho$ tel que $\overline{\Delta} \subset \mathbb{D}(z_0, r) \subset U$. Les constantes $C_\Delta := \frac{r-\rho}{r+\rho} > 0$ et $C'_\Delta := \frac{r+\rho}{r-\rho} < +\infty$ conviennent d'après les Inégalités de Harnack. □

<u>Théorème</u> 9. *(Théorème de Harnack) Soient U un domaine et (u_n) une suite croissante de fonctions harmoniques réelles sur U. Soit (u_n) tend localement uniformément vers $+\infty$, soit elle converge localement uniformément vers une fonction harmonique.*

Démonstration. Soit $a \in U$ fixé. La suite $(u_n(a))$ étant croissante, on a seulement deux possibilités : soit $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = +\infty$, soit $(u_n(a))$ admet une limite finie. Il s'agit de montrer que dans le premier cas, (u_n) tend uniformément vers $+\infty$ sur tout compact de U et dans le deuxième cas, que (u_n) converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction harmonique.
Comme U est supposé connexe, pour tout $z \in U$, il existe un entier $n(z) > 0$ et des disques $\mathbb{D}_0(z), \ldots, \mathbb{D}_{n(z)}(z)$ tels que $\overline{\mathbb{D}}_i(z) \subset U$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n(z)\}$, $a \in \mathbb{D}_0(z),\ z \in \mathbb{D}_{n(z)}(z)$, et $\mathbb{D}_i(z) \cap \mathbb{D}_{i+1}(z) \neq \emptyset,\ \forall i < n(z)$.
Les disque $\mathbb{D}_i(z)$ se chevauchent, donc en appliquant pas à pas le Lemme 2 aux fonctions harmoniques positives $u_q - u_p,\ p \leq q$ et aux disques $\{\mathbb{D}_i(z), 0 \leq i \leq n(z)\}$, on voit que pour tout $z \in U$, il existe des constantes $C(z), C'(z)$ telles que, si $p \leq q \in \mathbb{N}$,

$$C(z)(u_q(a) - u_p(a)) \leq u_q(\zeta) - u_p(\zeta) \leq C'(z)(u_q(a) - u_p(a)),$$

pour tout $\zeta \in W_z := \mathbb{D}_{n(z)}(z)$.
Soit maintenant K un compact de U. On peut choisir $z_1, \ldots, z_l \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{1\leq j\leq l} W_{z_j}$ et on pose $C_K := \min_{1\leq j\leq l} C(z_j)$ et $C'_K := \max_{1\leq j\leq l} C'(z_j)$. Il vient alors

$$\forall n \geq 0,\ \forall \zeta \in K,\ u_n(\zeta) - u_0(\zeta) \geq C_K(u_n(a) - u_0(a)),$$

et

$$\forall p \leq q,\ \forall \zeta \in K,\ u_q(\zeta) - u_p(\zeta) \leq C'_K(u_q(a) - u_p(a)).$$

Donc, si $(u_n(a))$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ uniformément sur K et si la suite $(u_n(a))$ converge, alors (u_n) est uniformément de Cauchy sur K, donc elle converge uniformément sur K vers une certaine fonction qui est harmonique d'après le Corollaire 3. Le compact K étant arbitraire, le Théorème de Harnack est démontré. □

Deuxième partie

Fonctions sous-harmoniques

1 Semi-continuité supérieure et définition

A présent que nous avons défini les fonctions harmoniques, nous pouvons introduire un cadre qui sera plus naturel pour la résolution du problème de Dirichlet. Il s'agit des fonctions sous-harmoniques. La définition peut paraître plus délicate, cependant elle offre de confortables résultats de stabilité que l'on ne peut espérer obtenir avec une définition trop rigide comme celle d'harmonicité donnée plus haut. Cette rigidité provient notamment du fait que l'on suppose les applications au moins de classe $\mathcal{C}^2$ pour l'harmonicité, alors que nous nous contenterons de la semi-continuité supérieure pour la sous-harmonicité. Avant d'aller plus loin, nous allons donc définir la notion semi-continuité supérieure et pour cela, nous nous plaçons dans un espace topologique X quelconque.

Définition 4. Soit $u : X \to [-\infty, +\infty[$ une application. On dit que u est semi-continue supérieurement si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{x \in X \ ; \ u(x) < \alpha\}$$

est un ouvert de X. De même, on dira que $v : X \to]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement si $-v$ est semi-continue supérieurement.

Remarque 4. 1) Si, pour $x \in X$, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x et

$$\limsup_{y \to x} u(y) := \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup_{y \in V} u(y)$$

alors, une simple vérification montre que u est semi-continue supérieurement si et seulement si

$$\forall x \in X, \ u(x) \geq \limsup_{y \to x} u(y)$$

2) En pratique, la fonction u est continue si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement.

Proposition 1. *Soient u et v deux fonctions semi-continues supérieurement sur X et $\lambda, \mu \geq 0$. Alors les fonctions $\max(u, v)$ et $\lambda u + \mu v$ sont également semi-continues supérieurement.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\{x \in X \ ; \ \max(u, v)(x) < \alpha\} = \{x \in X \ ; \ u(x) < \alpha\} \cap \{x \in X \ ; \ v(x) < \alpha\}$$

L'intersection de deux ouverts étant un ouvert, $\max(u, v)$ est bien semi-continue supérieurement.
On peut ensuite supposer que λ et μ sont strictement positifs car si l'un des deux est nul, le résultat est trivial. Alors, un $x \in X$ vérifie $\lambda u(x)+\mu v(x) < \alpha$ si et seulement s'il existe a et b tels que

$$u(x) < \frac{a}{\lambda}, \ v(x) < \frac{b}{\mu}, \ a + b < \alpha$$

Donc, si on note

$$I := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a + b < \alpha\}$$

et

$$\Omega_{a,b} := \{x \in X \ ; \ u(x) < \frac{a}{\lambda}\} \cap \{x \in X \ ; \ v(x) < \frac{b}{\mu}\}$$

alors

$$\{x \in X \ ; \ \lambda u(x) + \mu v(x) < \alpha\} = \bigcup_{(a,b)\in I} \Omega_{a,b}$$

et on a le résultat car une réunion d'ouverts est un ouvert. □

Proposition 2. *Si X est un espace topologique métrisable, alors toute fonction semi-continue supérieurement, bornée supérieurement sur X, est limite d'une suite décroissante de fonctions continues à valeurs réelles.*

Démonstration. Comme X est métrisable, on peut choisir une distance d sur X compatible avec la topologie de X. Soit ensuite u une fonction semi-continue supérieurement. Si $u \equiv -\infty$, la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n$ répond à la question. Si u n'est pas identiquement égale à $-\infty$, on peut définir (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ u_n(x) := \sup_{y \in X}(u(y) - nd(x,y)).$$

u étant bornée supérieurement et non identiquement égale à $-\infty$, les u_n sont à valeurs réelles et $u_n(x) \geq u(x) - nd(x,x) = u(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. Ensuite, la suite (u_n) est clairement décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in X$, la fonction $x \mapsto u(y) - nd(x,y)$ est n-lipschitzienne, donc u_n est aussi lipschitzienne comme enveloppe supérieure de fonction lipschitziennes, elle est donc continue en particulier. Il reste à montrer que pour tout $x_0 \in X$, la suite (u_n) converge simplement vers $u(x_0)$. Comme (u_n) est décroissante, il suffit de montrer que pour tout $\alpha > u(x_0)$, il existe n tel que $u_n(x_0) \leq \alpha$. On fixe alors $\alpha > u(x_0)$. Comme u est semi-continue supérieurement, il existe $r > 0$ tel que $u(y) < \alpha$ si $d(x_0,y) < r$. On pose alors $M := \sup_X u$ et on choisit un n_0 tel que $M - n_0 r < \alpha$. Il vient alors $u(y) - n_0 d(x_0,y) < \alpha$ si $d(x_0,y) \geq r$, et $u(y) - n_0 d(x_0,y) \leq u(y) < \alpha$ si $d(x_0,y) < r$ par définition de r. Donc, $u_{n_0}(x_0) \leq \alpha$, d'où le résultat. □

Proposition 3. *Soient u une fonction semi-continue supérieurement sur X et K un compact de X. Alors u est bornée supérieurement sur K est elle atteint sa borne.*

Démonstration. La famille

$$(\{x \in X\ ;\ u(x) < n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$$

est un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini par compacité de K. u est donc bornée (supérieurement) sur K et on note $M := \sup_{x \in K} u(x)$. Ne pouvant pas extraire de recouvrement fini de la famille d'ouverts

$$\left(\left\{x \in X\ ;\ u(x) < M - \frac{1}{n}\right\}\right)_{n \geq 1}$$

on en déduit que cette dernière ne recouvre pas K, d'où l'existence d'un $y \in X$ tel que $u(y) = M = \sup_{x \in K} u(x)$. □

Nous pouvons à présent définir la sous-harmonicité :

Définition 5. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ une application. On dit que u est sous-harmonique sur Ω si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1. u est semi-continue supérieurement,
2. u vérifie l'inégalité de sous-moyenne locale, à savoir

$$\forall z_0 \in \Omega,\ \exists \rho > 0\ ;\ \forall 0 \leq r < \rho,\ u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

On notera $\mathcal{SH}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions sous-harmoniques sur Ω.

Nous avons le résultat fondamental suivant :

Théorème 10. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathcal{C}$ une fonction holomorphe. Alors la fonction $\log|f| \in \mathcal{SH}(\Omega)$.*

Démonstration. La fonction $\log|f|$ est bien à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ et continue par composition, elle est donc en particulier semi-continue supérieurement. Soit ensuite $z_0 \in \Omega$. Il suffit de trouver un $\rho > 0$ tel que l'inégalité de sous-moyenne locale soit vérifiée. Si $f(z_0) = 0$ alors $\log|f(z_0)| = -\infty$ et n'importe quel $\rho > 0$ convient. Sinon, $\log|f|$ est en réalité harmonique au voisinage de z_0 d'après l'assertion 2) du Corollaire 1 et l'égalité de la moyenne (Théorème 2) permet de conclure. $\log|f|$ est donc bien sous-harmonique sur Ω. $\square$

2 Résultat de stabilité et Principe du maximum

Proposition 4. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Alors*

$$\forall u, v \in \mathcal{SH}(\Omega),\ \max(u,v) \in \mathcal{SH}(\Omega),\ \lambda u + \mu v \in \mathcal{SH}(\Omega)\ (\lambda, \mu \geq 0).$$

Démonstration. Le fait que $\max(u, v)$ et $\lambda u + \mu v$ soient semi-continues supérieurement provient de la Proposition 1. Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe $\rho_u, \rho_v > 0$ tels que

$$\forall r < \rho_u,\ u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \text{ et,}$$
$$\forall r' < \rho_v,\ v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + r'e^{i\theta}) d\theta.$$

donc

$$\forall r < \min(\rho_u, \rho_v),\ u(z_0), v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(u, v)(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

ie

$$\forall r < \min(\rho_u, \rho_v),\ \max(u, v)(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max(u, v)(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

et $\rho := \min(\rho_u, \rho_v)$ convient, donc $\max(u, v)$ est sous-harmonique.
De même, λ et μ étant positifs ou nuls, on a

$$\forall r < \min(\rho_u, \rho_v),\ (\lambda u + \mu v)(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda u + \mu v)(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

donc $\rho = \min(\rho_u, \rho_v)$ convient à nouveau et $\lambda u + \mu v$ est bien sous-harmonique.

□

Théorème 11. *(Principe du maximum) Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $u \in \mathcal{SH}(U)$. Alors*

1. *Si u admet un maximum global sur U, alors elle est constante.*
2. *Si $\limsup_{\zeta \to z} u(\zeta) \leq 0$ pour tout $z \in \partial_\infty U$, alors $u \leq 0$ sur U.*

Démonstration. 1. On pose $M := \sup_{z \in U} u(z)$. Si $M = -\infty$, alors $u \equiv -\infty$. On peut donc supposer que $M \in \mathbb{R}$. On pose aussi :

$$A := \{z \in U\ ;\ u(z) = M\}.$$

Il s'agit de montrer que $A = U$. $A \neq \emptyset$ par hypothèse. Par définition, u est semi-continue supérieurement donc $A = \{z \in U\ ;\ u(z) \geq M\} =$

$\{z \in U\ ;\ u(z) < M\}^c$ est un fermé de U. Soient ensuite $z_0 \in A$ et $\rho > 0$ tels que

$$\forall r < \rho,\ u(z_0) \leq \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

On a alors

$$\forall r < \rho,\ \int_0^{2\pi} \big(u(z_0 + re^{i\theta}) - M\big)\, d\theta \geq 0.$$

Or, $u(z_0 + re^{i\theta}) - M \leq 0$ par définition de M, donc $u(z_0 + re^{i\theta}) = M$ pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$, ie $z_0 + re^{i\theta} \in A$. Comme A est fermé dans U, l'ensemble des $\theta \in [0, 2\pi]$ tels que $z_0 + re^{i\theta} \in A$ est également un fermé de $[0, 2\pi]$, de complémentaire négligeable, il est donc égal à $[0, 2\pi]$. Donc $u \equiv M$ sur tout cercle de rayon $r < \rho$, donc $u \equiv M$ sur le disque ouvert de centre z_0 et de rayon ρ, ie $\mathbb{D}(z_0, \rho) \subset A$. A est donc un ouvert-fermé non vide de U qui est connexe, donc $A = U$.

2. On peut prolonger u sur $\partial_\infty U$ en posant :

$$\forall z \in \partial_\infty U,\ u(z) := \limsup_{\zeta \to z} u(\zeta).$$

Alors, u est semi-continue supérieurement sur $\overline{U}$ qui est compact (dans $\widehat{\mathbb{C}}$), elle y admet donc un maximum d'après la Proposition 2. On note z_0 ce maximum. Si $z_0 \in \partial_\infty U$, alors $u(z_0) \leq 0$ par hypothèse et donc $u \leq 0$ sur U par définition de z_0. Si $z_0 \in U$, alors d'après la première assertion du théorème, u est constante sur U. Si c'est le cas, alors elle est aussi constante sur $\overline{U}$ et on a encore $u \leq 0$ sur U d'après l'hypothèse.

□

Remarque 5. La fonction u peut admettre un maximum local ou un minimum global sans pour autant être constante. La fonction sous-harmonique $\max(\Re, 0)$ en est un exemple. En effet, 0 est clairement un minimum global de cette fonction et si l'on se donne un compact K de $\mathbb{C}$, il existe $a \geq 0$ tel que $\forall z \in K, \max(\Re, 0)(z) \leq a$ et comme K est compact, ce maximum est atteint et a est un maximum local de la fonction considérée.

Théorème 12. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : U \to [-\infty, +\infty)$ une fonction semi-continue supérieurement. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction u est sous-harmonique sur U.*
2. *Si $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$, alors pour tous $\rho < r$ et $0 \leq t < 2\pi$,*

$$u(z_0 + \rho e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - t) + \rho^2} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

3. *Si D est un domaine relativement compact de U et si h est une fonction réelle harmonique sur D telle que*

$$\limsup_{\zeta \to z} (u - h)(\zeta) \leq 0, \ \forall z \in \partial D,$$

alors $u \leq h$ sur D.

Démonstration. (1. $\Rightarrow$ 3.) Si l'on se donne D et h comme dans l'énoncé, la fonction $u - h$ est sous-harmonique sur D et on a le résultat avec le Principe du maximum (Théorème 11 2.).
(3. $\Rightarrow$ 2.) On pose $\overline{\Delta} := \overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$. D'après la Proposition 2, il existe une suite décroissante de fonctions continues $\phi_n : \partial\Delta \to \mathbb{R}$ qui converge vers u sur $\partial\Delta$. D'après le Théorème 5, chaque $P_\Delta \phi_n$ est harmonique sur Δ. De plus, $\lim_{\zeta \to z} P_\Delta \phi_n(\zeta) = \phi_n(z)$ pour tout $z \in \partial\Delta$ et donc

$$\limsup_{\zeta \to z} (u - P_\Delta \phi_n)(\zeta) \leq u(z) - \phi_n(z) \leq 0, \ z \in \partial\Delta.$$

D'après 3., il vient que $u \leq P_\Delta \phi_n$ sur Δ. On fait ensuite tendre $n \to \infty$ et on utilise le Théorème de convergence monotone pour obtenir le résultat souhaité.
(2. $\Rightarrow$ 1.) C'est clair en prenant $\rho = 0$. □

<u>Corollaire</u> 4. *(Inégalité de sous-moyenne globale) Soit u une fonction sous-harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$, alors*

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. Il suffit de poser $\rho = 0$ dans le Théorème 12. □

3 Intégrabilité

Nous allons donner ici deux résultats sur l'intégrabilité (locale) des fonctions sous-harmoniques.

Notation 1. Dans cette section, on notera λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Ainsi l'intégrale usuelle (au sens de Lebesgue) d'une fonction $f : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s'écrira $\int_K f d\lambda_2$.

Théorème 13. *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine D de $\mathbb{C}$, non identiquement égale à $-\infty$ sur D. Alors u est localement intégrable sur D.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\int_K |u| d\lambda_2 < \infty$ sur tout compact K de D. Par compacité, il suffit de montrer que pour tout $z \in D$, il existe $r > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{D}(z,r)} |u| d\lambda_2 < \infty.$$

Soient A l'ensemble des $z \in D$ vérifiant cette propriété et B, l'ensemble de ceux qui ne la vérifie pas. Montrons que A et B sont ouverts et que $u = -\infty$ sur B, ce qui donnera le résultat par connexité de D.
Soient $z \in A$ et choisissons $r > 0$ tel que $\int_{\mathbb{D}(z,r)} |u| d\lambda_2 < \infty$. Etant donné $z' \in \mathbb{D}(z,r)$, soit $r' := r - |z' - z|$. Alors $\mathbb{D}(z', r') \subset \mathbb{D}(z,r)$, donc

$$\int_{\mathbb{D}(z',r')} |u| d\lambda_2 < \infty.$$

Ainsi, $\mathbb{D}(z,r) \subset A$ et donc A est une ouvert.
Soit ensuite $z \in B$ et choisissons $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(z, 2r) \subset D$. Comme $z \in B$,

$$\int_{\mathbb{D}(z,r)} |u| d\lambda_2 = \infty.$$

Pour $z' \in \mathbb{D}(z,r)$, on pose $r' := r + |z' - z|$. Alors $\mathbb{D}(z', r') \supset \mathbb{D}(z,r)$ et u est bornée supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}(z', r')$, donc

$$\int_{\mathbb{D}(z',r')} u d\lambda_2 = -\infty.$$

Or, u satisfait l'inégalité de sous-moyenne globale :

$$u(z') \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z' + \rho e^{i\theta}) d\theta, \ \forall 0 \leq \rho \leq r',$$

ainsi, en multipliant par $2\pi\rho$ et en intégrant entre $\rho = 0$ et $\rho = r'$, on obtient

$$\pi r'^2 u(z') \leq \int_{\mathbb{D}(z',r')} u d\lambda_2 = -\infty.$$

Donc $u = -\infty$ sur $\mathbb{D}(z, r)$ et donc B est ouvert et $u = -\infty$ sur B, d'où le résultat. $\square$

<u>Corollaire</u> 5. *Si u est une fonction sous-harmonique non identiquement égale à $-\infty$ sur un domaine U et si $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$, alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta > -\infty.$$

Démonstration. Fixons $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset U$. Comme u est bornée supérieurement sur les compacts, quitte à soustraire une constante, on peut supposer que $u \leq 0$ sur $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$. D'après le Théorème 12 2., si $\rho < r$ et si $0 \leq t < 2\pi$, alors

$$\begin{aligned} u(z_0 + \rho e^{it}) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - t) + \rho^2} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \left(\frac{r - \rho}{r + \rho} \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, si la dernière intégrale valait $-\infty$, cela impliquerait que $u \equiv -\infty$ sur $\mathbb{D}(z_0, r)$, ce qui contredirait le Théorème 13. Donc l'intégrale est finie. $\square$

Troisième partie

Problème de Dirichlet

1 Définitions et résultats préliminaires

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. On considère une fonction $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{C}$, continue sur $\partial\Omega$. Le Problème de Dirichlet pour Ω et φ consiste à trouver une fonction $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et harmonique sur Ω coïncidant avec φ sur $\partial\Omega$. On se propose de montrer ici que sous une simple hypothèse de régularité sur $\partial\Omega$, ce problème admet une unique solution.

Définition 6.
1. On dira d'un point $\zeta \in \partial\Omega$ qu'il est régulier si la composante connexe par arcs de $\mathbb{C}\setminus\Omega$ contenant ζ n'est pas réduite à un point. En d'autres termes, ζ est régulier s'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\Omega$ tel que $\gamma(0) = \zeta$ et $\gamma(1) \neq \zeta$.
2. On dira que $\partial\Omega$ est régulier (ou que Ω est à bord régulier) si tous ses points le sont.

Exemple 1. Si $\Omega = \mathbb{D} \setminus [-1, 0]$, alors $\partial\Omega = \partial\mathbb{D} \cup [-1, 0]$ est régulier, mais si $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, alors $0 \in \partial\Omega = \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$ n'est pas un point régulier, donc $\partial\Omega$ n'est pas régulier.

Remarque 6. Tout disque, et plus généralement, tout domaine de Jordan est à bord régulier.

Avant d'exposer et de démontrer le résultat principal, nous avons besoin de trois petits lemmes :

Lemme 3. *Si F est un fermé connexe non borné de $\mathbb{C}$ alors, pour tout $z_0 \in F$, il existe une détermination holomorphe de* $\log(z - z_0)$ *dans* $\mathbb{C} \setminus F$.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout lacet γ dans $\mathbb{C} \setminus F$, le point z_0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. Donc $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 0$ pour tout lacet γ dans $\mathbb{C} \setminus F$ et donc la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus F$ qui est une détermination holomorphe de $\log(z - z_0)$. □

Lemme 4. *Soient U, U' deux ouverts et $f : U \to U'$ une fonction holomorphe. Si $u : U' \to \mathbb{C}$ est harmonique sur U', alors $u \circ f$ est harmonique sur U.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f)$. Un calcul simple montre que, pour une fonction complexe g de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\Delta g = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \overline{z} \partial z}.$$

Fixons donc une fonction harmonique u. f étant holomorphe, on a

$$\frac{\partial (u \circ f)}{\partial z} = f' \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ f \right),$$

et comme f' est aussi holomorphe, on a

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(f' \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ f \right) \right) = |f'|^2 \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z} \partial z} \circ f \right).$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 (u \circ f)}{\partial \overline{z} \partial z} = |f'|^2 \times \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z} \partial z} \circ f \right),$$

d'où le résultat. □

Lemme 5. *Soit u une fonction sous-harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et soit v une fonction sous-harmonique sur un ouvert V de U telles que*

$$\limsup_{\zeta \to z} v(\zeta) \leq u(z), \ \forall z \in U \cap \partial_\infty V.$$

Si on pose :

$$\tilde{u} := \begin{cases} \max(u, v) & sur \quad V, \\ u & sur \quad U \setminus V. \end{cases}$$

Alors, $\tilde{u}$ est sous-harmonique sur U.

Démonstration. La condition au bord imposée à v assure que $\tilde{u}$ est semi-continue supérieurement sur U. D'après la Proposition 4, $\tilde{u}$ satisfait l'inégalité de sous-moyenne locale en tout $z_0 \in V$, et c'est également le cas si $z_0 \in U \setminus V$ car $\tilde{u} \geq u$ sur U. □

Nous pouvons à présent résoudre le Problème de Dirichlet.

2 Résolution du problème de Dirichlet

Théorème 14. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ à bord régulier et $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors le problème de Dirichlet pour Ω et φ admet une unique solution.*

Pour la démonstration de ce résultat, on utilise les quatre lemmes suivants :

Lemme 6. *On se donne $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et on note $\mathcal{L}_f$ l'ensemble des fonctions u sous-harmoniques sur Ω telles que $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta)$ quel que soit $\zeta \in \partial\Omega$. On a*

1. $\forall u, v \in \mathcal{L}_f,\ \max(u,v) \in \mathcal{L}_f$.
2. *Si $\overline{\Delta}$ est une disque fermé contenu dans Ω et si $u \in \mathcal{L}_f$ n'est pas identiquement égale à $-\infty$, alors la fonction $\mathcal{K}u$ définie par*

$$\mathcal{K}u(z) := \begin{cases} P_\Delta u(z) & si \quad z \in \Delta \\ u(z) & si \quad z \in \Omega \setminus \Delta \end{cases}$$

appartient aussi à $\mathcal{L}_f$ et on a $\mathcal{K}u \geq u$. De plus, $\mathcal{K}u$ est harmonique sur Δ.

Démonstration. 1. C'est une vérification immédiate.

2. Remarquons que le Corollaire 5 nous assure que u est intégrable que $\partial\Omega$ et donc, que $P_\Delta u$ a bien un sens. Le Théorème 5 1. implique que $P_\Delta u$ est harmonique sur Δ et d'après le Théorème 12 on a

$P_\Delta u \geq u$ sur Δ et donc $\mathcal{K}u \geq u$ sur Ω.
Montrons que $\forall \zeta \in \partial\Omega,\ \limsup_{z\to\zeta} \mathcal{K}u(z) \leq f(\zeta)$. Soit donc $\zeta \in \partial\Omega$. Comme Δ a son adhérence contenue dans Ω, pour $z \in \Omega$ assez proche de ζ, on a que $z \notin \Delta$, d'où $\mathcal{K}u(z) = u(z)$ et comme $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta)$, on a l'inégalité souhaitée. Il reste donc à montrer que $\mathcal{K}u$ est sous-harmonique sur Ω. D'après la Proposition 2, on peut choisir une suite décroissante de fonction continues ψ_n sur $\partial\Delta$ qui converge vers u. On a, avec le Théorème 5 2.,

$$\limsup_{z\to\zeta} P_\Delta u(z) \leq \lim_{z\to\zeta} P_\Delta \psi_n(z) = \psi_n(\zeta),\ \forall \zeta \in \partial\Delta.$$

Donc, en faisant tendre $n \to \infty$, on obtient

$$\limsup_{z\to\zeta} P_\Delta u(z) \leq u(\zeta),\ \forall \zeta \in \partial\Delta.$$

On peut alors appliquer le Lemme 5 et $\mathcal{K}u$ est donc bien sous-harmonique sur Ω.

□

<u>Lemme</u> 7. *La fonction $\mathcal{P}f$ définie sur Ω par :*

$$\forall z \in \Omega,\ \mathcal{P}f(z) := \sup_{u\in\mathcal{L}_f} u(z)$$

est harmonique.

Démonstration. Tout d'abord, la fonction constante $-||f||_\infty$ est dans $\mathcal{L}_f$, donc $\mathcal{P}f(z) \geq -||f||_\infty > -\infty$ pour tout $z \in \Omega$. De plus, en utilisant le Principe du maximum, on voit que $u(z) \leq ||f||_\infty$ sur Ω quelle que soit $u \in \mathcal{L}_f$, ce qui entraine que $\mathcal{P}f(z) \leq ||f||_\infty < +\infty$ pour tout $z \in \Omega$. Ainsi, la fonction $\mathcal{P}f$ est à valeurs réelles. Montrons que $\mathcal{P}f$ est harmonique. Il suffit de montrer qu'elle est harmonique dans tout disque ouvert dont l'adhérence est contenue dans Ω. Soit donc $\Delta = \mathbb{D}(z_0, r)$ un tel disque. On choisit une suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{L}_f$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(z_0) = \mathcal{P}f(z_0).$$

Quitte à remplacer u_n par $\mathcal{K}\tilde{u}_n$ où $\tilde{u}_n := \max(-||f||_\infty, u_0, \ldots, u_n)$, on peut supposer que (u_n) est croissante et que les u_n sont harmoniques dans Δ. La suite (u_n) converge donc localement uniformément sur Δ vers une fonction harmonique u^0 d'après le Théorème de Harnack. Montrons que $\mathcal{P}f \equiv u^0$ dans Δ. Soit donc $z_1 \in \Delta$ et soit (v_n) une suite de $\mathcal{L}_f$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(z_1) = \mathcal{P}f(z_1).$$

Là encore, quitte à remplacer v_n par $\mathcal{K}\tilde{v}_n$ où $\tilde{v}_n := \max(-||f||_\infty, v_0, \ldots, v_n, u_n)$, on peut supposer que (v_n) est elle aussi croissante, que les v_n sont harmoniques sur Δ et que, pour tout n, $v_n \geq u_n$. Toujours d'après le Théorème de Harnack, la suite (v_n) converge localement uniformément sur Δ vers une fonction harmonique v. On a $v \geq u^0$ sur Δ car $v_n \geq u_n,\ \forall n$. Par ailleurs, on a $u^0(z_0) = \mathcal{P}f(z_0) \geq v_n(z_0)$ pour tout n, donc $u^0(z_0) \geq v(z_0)$. La fonction harmonique $u^0 - v$ admet donc une maximum en z_0, donc $u^0 = v$ sur Δ d'après le Principe du maximum et comme $v(z_1) = \mathcal{P}f(z_1)$, il vient

$$u^0(z) = \mathcal{P}f(z),\ \forall z \in \Delta,$$

d'où le résultat. □

Lemme 8. *Soit $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Supposons qu'il existe un $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$, on puisse choisir une fonction $v_r : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. *v_r est sur-harmonique (ie $-v_r$ est sous-harmonique),*
2. *$v_r \geq 0$ sur Ω,*
3. *$v_r(z) \geq 1$ si $|z - \zeta_0| \geq r$,*
4. *$\lim_{z\to\zeta_0} v_r(z) = 0$.*

Alors, si $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée et continue en ζ_0, on a

$$\lim_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}f(z) = f(\zeta_0).$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < r \leq r_0$ tels que

$$\forall\zeta \in \partial\Omega,\ |\zeta - \zeta_0| < 2r\ \Rightarrow\ |f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \varepsilon.$$

On pose $M := ||f||_\infty$ et on définit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$u(z) := f(\zeta_0) - \varepsilon - 2Mv_r(z),\ z \in \Omega.$$

v_r étant supposée sur-harmonique, la fonction u est sous-harmonique. D'après l'hypothèse 2., si $\zeta \in \partial\Omega \cap \mathbb{D}(\zeta_0, 2r)$, alors

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta_0) - \varepsilon,$$

donc

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta)$$

par définition de r. D'après l'hypothèse 3., si $\zeta \in \partial\Omega \backslash \mathbb{D}(\zeta_0, 2r)$, alors $|z-\zeta_0| \geq r$ pour z assez proche de ζ, donc

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq f(\zeta_0) - 2M$$

et donc

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq -M \leq f(\zeta).$$

Donc $u \in \mathcal{L}_f$, par conséquent,

$$u(z) \leq \mathcal{P}f(z),\ \forall z \in \Omega.$$

Comme $\lim_{z\to\zeta_0} u(z) = f(\zeta_0) - \varepsilon$, d'après l'hypothèse 4., on en déduit

$$\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}f(z) \geq f(\zeta_0) - \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0,$$

donc

$$\liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}f(z) \geq f(\zeta_0). \tag{3}$$

En changeant f en $-f$, l'inégalité ci-dessus devient

$$\limsup_{z\to\zeta_0} -\mathcal{P}(-f)(z) \leq f(\zeta_0). \tag{4}$$

Par ailleurs, si $(u, v) \in \mathcal{L}_f \times \mathcal{L}_{-f}$, alors $w := u + v$ est une fonction sous-harmonique sur Ω telle que $\limsup_{z\to\zeta} w(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, donc $u+v \leq 0$ sur Ω d'après le Principe du maximum. On a donc $\mathcal{P}f+\mathcal{P}(-f) \leq 0$, donc

$$\mathcal{P}f \leq -\mathcal{P}(-f). \tag{5}$$

Il suffit maintenant de combiner (3), (4) et (5) pour obtenir

$$\limsup_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}f(z) \leq f(\zeta_0) \leq \liminf_{z\to\zeta_0} \mathcal{P}f(z),$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

<u>Lemme</u> 9. *Si ζ_0 est un point régulier de $\partial\Omega$, alors il vérifie les hypothèses du Lemme 8.*

Démonstration. On peut supposer que $\zeta_0 = 0$ et comme il est régulier, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \Omega$ tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) \neq 0$. Montrons qu'on peut construire v_r pour $r < |\gamma(1)|$. Pour simplifier les notations, on supposera que $|\gamma(1)| > 1$ et on va construire v_r pour $r = 1$. Soit donc t_0 le premier des $t \in [0,1]$ tels que $|\gamma(1)| = 1$. On pose $w_0 := \gamma(t_0)$ et $L := \gamma([0,t_0])$. On a, par définition de t_0, que $L\setminus\{w_0\} \subset \mathbb{D}$. On peut prolonger L par une demi-droite d'origine w_0 n'intersectant pas $\mathbb{D}$ pour appliquer le Lemme 3 et ainsi obtenir une détermination holomorphe du logarithme dans $\overline{\mathbb{D}} \setminus L$ que l'on notera *log*.
Comme $\Re(log(z)) \equiv \ln|z|$, la fonction *log* envoie $\mathbb{D} \setminus L$ sur le plan $\{\Re < 0\}$ et $\partial\mathbb{D} \setminus \{w_0\}$ sur un intervalle imaginaire ouvert de longueur 2π que l'on notera $]ia, ib[$. On définit une fonction $\psi : \Omega \cap \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall z \in \Omega \cap \overline{\mathbb{D}},\ \psi(z) := \frac{1}{\pi}\mathrm{Arg}\left(\frac{log(z) - ib}{log(z) - ia}\right),$$

où Arg est la détermination principale de l'argument dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. La fonction ψ est bien définie car $\Omega \cap \overline{\mathbb{D}} \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus L$ et $\frac{log(z)-ib}{log(z)-ia}$ n'est réel positif pour aucun $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus L$. De plus, ψ est continue et elle est harmonique sur $\Omega \cap \mathbb{D}$ d'après le Lemme 4 car la fonction *log* est holomorphe sur $\Omega \cap \mathbb{D}$ et $\mathrm{Arg} = \Im(\mathrm{Log})$, où Log est la détermination principale du logarithme, est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a $0 \leq \psi \leq 1$ dans $\Omega \cap \overline{\mathbb{D}}$, $\psi(z) = 1$ si $z \in \Omega \cap \partial\mathbb{D}$ et $\lim_{z\to 0} \psi(z) = 0$. On en déduit donc que la fonction $v_1 = v$ définie par

$$v(z) = \begin{cases} \psi(z) & \text{si} \quad z \in \Omega \cap \overline{\mathbb{D}} \\ 1 & \text{si} \quad z \in \Omega \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases}$$

vérifie les quatre conditions du Lemme 8. $\square$

Nous pouvons enfin démontrer le théorème 14 :

Démonstration. Le Laplacien et la limite étant linéaires, on peut se ramener au cas où φ est à valeurs réelles et l'existence d'une solution vient des quatre Lemme précedents. En effet, il suffit de poser $u(z) := \mathcal{P}f(z)$ si $z \in \Omega$ et $u(\zeta) := f(\zeta)$ si $\zeta \in \partial\Omega$. Pour l'unicité, supposons qu'on ait u_1 et u_2 deux solutions. Alors, $u_1 - u_2$ est harmonique sur Ω, se prolonge continuement sur $\overline{\Omega}$, et est nulle sur $\partial\Omega$. En appliquant le Principe du maximum à $\pm(u_1 - u_2)$, on en déduit que $u_1 - u_2 = 0$. $\square$

Références

[1] E. Amar and E. Matheron, *Analyse Complexe.* Cassini, 2004.

[2] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane.* Cambridge University Press, 1995.