UNIVERSITÉ
de Picardie
Jules Verne

Théorie de l'Homologie Générale

Cohomologies des Groupes et de Hochschild

MÉMOIRE DE MASTER 1

Arthur GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de M. Alexander ZIMMERMANN

2015-2016

Pour Delphine...

Table des matières

Introduction **4**

Prérequis et notations **6**

1 Compléments de théorie des modules **7**

1.1 Noethérianité, artinianité et radical 7

1.2 Algèbres semi-simples et Théorème d'Artin-Wedderburn 15

1.3 Modules projectifs, syzygies et résolutions projectives 20

2 Théorie des catégories **26**

2.1 Définitions et propriétés élémentaires 26

2.2 Morphismes fonctoriels 40

2.3 Catégories abéliennes 46

2.4 Catégories triangulées 57

3 Introduction à l'algèbre homologique **69**

3.1 La catégorie des complexes 69

3.2 La catégorie homotopique des complexes 77

4 Cohomologie des groupes, foncteurs dérivés et cohomologie de Hochschild **99**

4.1 Groupes Ext 99

4.2 Cohomologie des groupes et classification des extensions 118

4.3 Foncteurs dérivés 134

4.4 Cohomologie de Hochschild et Théorème de Wedderburn-Malcev 144

Annexe **154**

Références **162**

Introduction

Le but du présent travail est d'introduire et d'étudier quelques concepts fondamentaux en algèbre homologique ainsi que certaines de leurs applications. Nous adopterons ici l'approche de M. Alexander Zimmermann. Aussi ce travail s'inspire-t-il dans une large mesure de l'ouvrage [40].

Le terme "homologie" provient du grec ὁμός (*homos*) qui signifie "identique". Il s'agit de l'étude d'objets appelés "complexes". Ce sont des suites de morphismes qui présentent une propriété proche (mais différente) de l'exactitude des suites ; notion avec laquelle nous supposons le lecteur familier. L'homologie est donc la théorie qui consiste à étudier les propriétés algébriques des complexes, entre autres via des espaces appelés (co)homologie d'un complexe et d'une notion centrale − la relation d'homotopie −, ainsi que des "catégories" de complexes. Cette théorie trouve son origine notamment en topologie, dans laquelle les notions de complexe et d'homologie se sont développées.

Les complexes apparaissent naturellement en Mathématiques et les résultats d'homologie possèdent d'importantes conséquences. On peut à ce sujet citer l'algèbre abstraite bien-sûr, mais aussi la topologie algébrique, la géométrie différentielle, la théorie des représentations de groupes ou encore la théorie de Galois. Concernant la topologie différentielle, et plus précisément les formes différentielles sur les variétés, on pourra consulter notre précédente étude [7]. En ce qui concerne ce mémoire, nous examinerons deux conséquences algébriques majeures. Premièrement, nous proposons une initiation à la cohomologie des groupes, qui répond au "problème des extensions", qui pose la question suivante : étant donnés deux groupes, quelles peuvent être les structures des groupes qui possèdent le premier comme sous-groupe distingué et dont le quotient est isomorphe au second. En application, nous démontrerons le théorème de Schur-Zassenhaus sur le produit semi-direct. Ensuite, nous construirons la cohomologie de Hochschild − important invariant d'une algèbre − et nous démontrerons enfin le théorème de Wedderburn-Malcev, affinant le résultat de Wedderburn sur les algèbres semi-simples. D'autre part, un prolongement intéressant de ce travail pourrait être l'étude des catégories dérivées, de la dimension homologique ou encore des suites spectrales.

Avant d'appréhender l'homologie, nous introduisons le lecteur au formalisme de la théorie des catégories, qualifié affectueusement d'"Abstract Nonsense" par le mathématicien Norman Steenrod (voir [18], chapitre 20 pour cette anecdote). Il s'agit d'un outil permettant l'étude systématique abstraite des concepts algébriques et des relations qu'ils entretiennent via des collections d'objets cherchant à classifier les différentes structures de la Mathématique. Cette théorie offre un cadre naturel aux concepts homologiques et constitue un prérequis indispensable pour notre étude. Nous étudierons notamment les catégories dites abéliennes et triangulées. Bien que ne présentant pas un intérêt central pour notre travail, ces dernières sont définies via une axiomatique très élégante et proposent une bonne gymnastique intellectuelle. De plus, nous verrons que les complexes et l'homotopie fournissent un exemple intéressant de catégorie triangulée.

Mais avant toute chose, nous présentons quelques rappels et suppléments de théorie des modules et des algèbres. Nous y démontrons en particulier le théorème de structure des algèbres semi-simples de Wedderburn. Nous y introduisons également le syzygy d'un module ainsi que les résolutions projectives, qui sont deux des premiers objets homologiques que nous rencontrerons.

Par ailleurs, nous rappelons en annexe la notion de produit tensoriel sur une algèbre non commutative.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement Messieurs Alexander Zimmermann et Ivan Marin pour leur disponibilité, la clarté de leurs explications et la pertinence de leurs conseils, qui me furent extrêmement précieux. Je remercie également sincèrement ma courageuse mère et mon frère pour leur patience et leur écoute, ainsi que ma compagne Delphine pour son soutien, ses encouragements et pour tant d'autres choses...

Prérequis et notations

Dans ce travail,

1. $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) désigne l'ensemble des entiers naturels (resp. l'anneau des entiers relatifs),
2. $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) désigne le corps des rationnels (resp. des réels, des complexes),
3. Par convention, tout corps sera supposé commutatif. Dans le cas non commutatif, on parlera alors de "corps gauche".
4. En revanche, un anneau ne sera pas en général supposé commutatif. De plus, si A est un anneau, on note son centre $Z(A)$, c'est-à-dire :

$$Z(A) = \{a \in A \ ; \ \forall x \in A, \ ax = xa\},$$

   De plus, on notera $A^\times$ le groupe des inversibles du monoïde $(A, \cdot)$.
5. Si K est un anneau commutatif, et si A est un anneau, on rappelle qu'une structure de K-algèbre sur A est la donnée de l'anneau A, muni d'un morphisme d'anneaux

$$\epsilon : K \to Z(A).$$

   De plus, si $k \in K$ et $a \in A$, on note $k \cdot a := \epsilon(k)a = a\epsilon(k)$. En outre, une K-algèbre est en particulier un K-module.
6. Si A est un anneau ou une algèbre, ${}_AA$ dénote le A-module régulier, i.e. A considéré comme un A-module,
7. Si A est une algèbre, on note A^{op} son algèbre opposée. On rappelle qu'il s'agit de $(A, +, \cdot^{op})$ où

$$\forall a, b \in A, \ a \cdot^{op} b := b \cdot a,$$

8. Sauf indication contraire, si A est une algèbre, on conviendra qu'un A-module est un module à gauche sur A.
9. $\hookrightarrow$ (resp. $\twoheadrightarrow$) dénote un monomorphisme (resp. un épimorphisme),
10. $\simeq$ veut dire "est isomorphe à",
11. $\trianglelefteq$ signifie "est un sous-groupe distingué de",
12. Si A est une algèbre et si M, N sont deux A-modules, on note $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ l'espace des morphismes de modules $M \to N$. Il s'agit en général d'un groupe abélien pour la loi naturelle, et d'un A-module lorsque A est commutative.

Première partie
Compléments de théorie des modules

1.1 Noethérianité, artinianité et radical

On se donne K un anneau commutatif et A une K-algèbre, que l'on fixe durant cette section. Avant d'étudier quelques résultats concernant la noethérianité et l'artinianité, nous rappelons la notion de semi-simplicité pour les modules et les algèbres. Cette notions sera approfondie dans la section suivante.

Définition 1. Soit M un A-module de type fini. On dit que M est semi-simple s'il existe des A-modules simples $S_1, \ldots, S_n$ tels que

$$M \simeq S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

De plus, l'algèbre A est dite semi-simple si tout A-module de type fini est semi-simple.

Remarque 1.

1. On suppose connu le fait que tout sous-module et tout quotient d'un module semi-simple est semi-simple. On suppose également connu qu'un module M est semi-simple si et seulement si tout sous-module N de M est un facteur direct, c'est-à-dire qu'il existe un module P tel que $M \simeq N \oplus P$. Le lecteur se rendra compte, au fil de notre exposé, que c'est cette dernière propriété qui compte, d'un point de vue homologique.
2. Parfois, dans la littérature, un module (non supposé de type fini) est dit "semi-simple" s'il est somme directe (non nécessairement finie) de sous-modules simples. De même, une algèbre est dite "semi-simple" si tout module sur cette algèbre est semi-simple. On peut montrer qu'en fait, ces deux définitions d'une algèbre semi-simple sont équivalentes, au moins dans le cas des algèbres noethériennes. Nous choisissons ici la définition donnée dans [40], cette dernière donnant lieu à des démonstrations plus simples et plus élégantes.
3. Enfin, les faits mentionnés plus haut que nous supposons connus sont prouvés en détail dans [21], chapitre 5.

Après cette entrée en matière, nous pouvons passer à l'étude de la noethérianité et de l'artinianité.

Définition 2. Soit M un A-module.

1. On dit que M est noethérien (resp. artinien) si toute suite croissante (resp. décroissante) de sous-modules de M est stationnaire.
2. A est dite noethérienne (resp. artinienne) si le A-module régulier ${}_AA$ est noethérien (resp. artinien).

Exemple 1. L'anneau $\mathbb{Z}$ est noethérien mais pas artinien. En effet, si l'on dispose d'une suite croissante de sous-modules (donc d'idéaux)

$$n_1\mathbb{Z} \subseteq n_2\mathbb{Z} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{Z},$$

alors n_{i+1} divise n_i. Donc, n_i divise n_1 pour tout i, mais n_1 n'a qu'un nombre fini de diviseurs, la suite est donc stationnaire et $\mathbb{Z}$ est noethérien. Cependant, la suite décroissante d'idéaux

$$\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 4\mathbb{Z} \supseteq 8\mathbb{Z} \supseteq \cdots$$

n'est pas stationnaire.

Lemme 1. *Soit M un A-module. Les assertions suivantes s'équivalent :*

i) M est noethérien,

ii) Tout sous-module de M est de type fini,

iii) Tout sous-module et tout quotient de M est un A-module noethérien.

Démonstration. *i) $\Rightarrow$ ii)* Soit N un sous-module de M et soit $\{m_i,\ i \in I\}$ un système générateur minimal de N, i.e. tel que tout sous-ensemble strict de $\{m_i,\ i \in I\}$ n'engendre pas N. Si I n'est pas fini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir récursivement $m(n) \in \{m_i,\ i \in I\}$ tel que

$$m(n) \notin \sum_{j=1}^{n-1} A \cdot m(j).$$

On a donc des sous-modules $M(n) := \sum_{j=1}^{n} A \cdot m(j)$ de N, donc de M tels que $M(n-1) \subsetneq M(n)$, ce qui contredit la noethérianité de M.
ii) $\Rightarrow$ iii) Soient N un sous-module de M et

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N$$

une suite croissante de sous-modules de N. Alors $\widetilde{N} := \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ est un sous-module de N et donc de M, qui est alors de type fini par hypothèse. On peut donc écrire $\widetilde{N} = \langle x_1, \ldots, x_s \rangle$. Pour tout $1 \leq j \leq s,\ x_j \in \widetilde{N}$ donc il existe $t_j \geq 1$ tel que $x_j \in N_{t_j}$ avec t_j minimal. Si $\widetilde{t} := \max_{1 \leq j \leq s} t_j$, et alors $x_j \in N_{\widetilde{t}}$ pour tout $1 \leq j \leq s$ et donc $\widetilde{N} = N_{\widetilde{t}}$. Enfin, $N_u = N_{\widetilde{t}}$ pour tout $u \geq \widetilde{t}$ et donc N est noethérien.
Ensuite, soit

$$\overline{N_1} \subseteq \overline{N_2} \subseteq \cdots \subseteq {}^{M}/_{N}$$

une suite croissante de sous-modules de ${}^{M}/_{N}$ et soit $\pi : M \twoheadrightarrow {}^{M}/_{N}$ la projection canonique. Alors $\pi^{-1}(\overline{N_i})$ est une suite croissante de sous-modules de M. D'après ce qu'on vient de voir, cette suite est stationnaire, donc la suite $\overline{N_i}$ aussi et donc ${}^{M}/_{N}$ est noethérien.
iii) $\Rightarrow$ i) Supposons que N et ${}^{M}/_{N}$ soient noethériens et soit

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq M$$

une suite croissante de sous-modules de M. Alors

$$L_1 + {}^{N}/_{N} \subseteq L_2 + {}^{N}/_{N} \subseteq \cdots \subseteq {}^{M}/_{N}$$

est une suite croissante et il existe alors n_0 tel que

$$L_n + N/N = L_{n_0} + N/N, \ \forall n \geq n_0.$$

De plus,

$$L_{n_0} \cap N \subseteq L_{n_0+1} \cap N \subseteq \cdots \subseteq N$$

est une suite croissante. Comme N est noethérien, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$L_n \cap N = L_{n_1} \cap N, \ \forall n \geq n_1.$$

En vertu du second théorème d'isomorphisme, on a

$$(L_n + N)/N \simeq L_n \Big/ (L_n \cap N)$$

et alors, pour tout $n \geq n_1$, $L_n = L_{n_1}$, d'où le résultat. □

Lemme 2. *Soit M un A-module. On a équivalence entre*

i) M est artinien,

ii) Tout sous-module et tout quotient de M est artinien.

Démonstration. *i) ⇒ ii)* Soit

$$N \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$$

une suite décroissante de sous-modules de M. C'est alors une suite décroissante de sous-modules de M qui est artinien, donc est stationnaire. Soit aussi

$$M/N \supseteq \overline{N_1} \supseteq \overline{N_2} \supseteq \cdots$$

une suite décroissante de sous-modules de M/N. Soient $N_i := \pi^{-1}(\overline{N_i})$, où $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$. Les N_i forment une suite décroissante de sous-modules de M et est donc stationnaire.
ii) ⇒ i) On procède exactement de la même manière que dans la troisième partie de la preuve du Lemme 1. □

Proposition 1. *Soit M un A-module.*

1. *M est noethérien si et seulement si tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.*
2. *M est artinien si et seulement si tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément minimal.*

Démonstration. 1. Supposons M noethérien et soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide de sous-modules de M. Soit alors $\mathcal{Y}$ une chaîne (i.e. un sous-ensemble totalement ordonné) ascendante non vide de $\mathcal{X}$. M étant noethérien, $\mathcal{Y}$ est fini et on peut écrire $\mathcal{Y} = \{M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ avec $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n$ et M_n est donc un majorant de $\mathcal{Y}$. $\mathcal{X}$ est donc inductif et il admet alors un élément maximal d'après le lemme de Zorn.
Réciproquement, soit

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M$$

une chaîne ascendante de sous-modules. Alors $\mathcal{X} := \{M_0, M_1, \ldots\}$ est un ensemble non vide de sous-modules de M et admet donc un élément maximal, disons M_n et on a ainsi $M_m = M_n$, pour tout $m \geq n$. Ceci montre que M est noethérien.

2. On applique le même raisonnement.

□

Proposition 2. *Soit M un A-module noethérien. Alors, tout endomorphisme surjectif de M est un automorphisme.*

Démonstration. Soit $\varphi : M \to M$ un endomorphisme surjectif. Il s'agit de montrer qu'il est injectif. On pose

$$\begin{cases} \varphi^1 := \varphi \\ \varphi^n := \varphi \circ \varphi^{n-1}, \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$(\ker(\varphi^n))_{n\geq 1}$ est alors une suite croissante de sous-modules de M, qui est stationnaire puisque M est noethérien. Soit n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \ker(\varphi^n) = \ker(\varphi^{n_0}).$$

Soit ensuite $m \in \ker(\varphi)$. φ est surjectif, donc φ^k est surjectif pour tout $k \geq 1$ et il existe alors $x \in M$ tel que $\varphi^{n_0}(x) = m$. Enfin,

$$0 = \varphi(m) = \varphi^{n_0+1}(x) \ \Rightarrow \ x \in \ker(\varphi^{n_0+1}) = \ker(\varphi^{n_0}) \ \Rightarrow \ 0 = \varphi^{n_0}(x) = m,$$

comme souhaité. □

Passons à présent à l'étude du radical d'un module. Cette notion apparaîtra de façon centrale dans le théorème de Wedderburn-Malcev. Le radical d'un module "rassemble" tous ses sous-modules maximaux et mesure, en un sens à préciser, le défaut de semi-simplicité du module considéré, si ce dernier est artinien.

Définition 3. Soit M un A-module. Le radical (de Jacobson) de M, noté $\mathrm{rad}(M)$, est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M. Par ailleurs, si M n'admet pas de sous-module maximal, on convient que $\mathrm{rad}(M) = 0$. On note de plus $\mathrm{rad}(A) := \mathrm{rad}({}_AA)$.

Lemme 3. *Soit A un anneau. Alors rad(A) est un idéal bilatère de A.*

Démonstration. Par définition, $\mathrm{rad}(A)$ est un idéal à gauche de A. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, alors ${}^A\!/_{\mathfrak{m}}$ est un A-module simple. Si S est un A-module simple, on sait que $S = A \cdot s$, pour tout $s \in S \setminus \{0\}$ et en considérant l'épimorphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\varphi_s}{\twoheadrightarrow} & S \\ a & \mapsto & a \cdot s \end{array}$$

le premier théorème d'isomorphisme donne

$$S \simeq {}^A\!\Big/_{\mathrm{ann}(s)}$$

où $\mathrm{ann}(s) := \{a \in A \ ; \ a \cdot s = 0\} = \ker(\varphi_s)$ est l'annulateur de s. De plus, $\mathrm{ann}(s)$ est un idéal maximal. En effet, si I est un idéal contenant strictement $\mathrm{ann}(x)$, alors ${}^A\!/_I$ est un quotient

de $A \big/ \text{ann(s)} \simeq S$ d'après le troisième théorème d'isomorphisme et donc $I \big/ \text{ann}(s) \simeq S$ et alors $A/I = 0$ et donc $I = A$. Ensuite,

$$\text{ann}(S) := \bigcap_{s \in S \setminus \{0\}} \text{ann}(s)$$

est un idéal bilatère de A car S est un A-module. Il s'ensuit que $\text{rad}(A)$ est inclus dans l'intersection des idéaux bilatères $\text{ann}(S)$ sur tous les A-modules simples S. De plus, si S est un A-module simple, alors $S \simeq A/\mathfrak{m}$ pour un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Si $a \in \text{ann}(S)$, alors $a \cdot A \subseteq \mathfrak{m}$ et alors $a \in \mathfrak{m}$ et donc $\text{ann}(S) \subseteq \mathfrak{m}$ et l'intersection des $\text{ann}(S)$ sur tous les A-modules simples S est égale à $\text{rad}(A)$. Mais ces annulateurs $\text{ann}(S)$ sont tous des idéaux bilatères de A, d'où le résultat. □

Proposition 3. *Soit M un A-module noethérien. Alors*

$$rad(A)M = M \;\Rightarrow\; M = 0.$$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $M \neq 0$. Comme M est noethérien, le Lemme 1 montre que M est de type fini, disons engendré par $m_1, \ldots, m_n$ avec $m_i \neq 0$. On suppose de plus que ceci est un système minimal de générateurs de M. Alors, via l'inclusion $\text{rad}(A) \hookrightarrow A$, et comme $\text{rad}(A)M = M$, M est aussi engendré par $m_1, \ldots, m_n$ sur $\text{rad}(A)$. Il existe alors $j_1, \ldots, j_n \in \text{rad}(A)$ tels que

$$m_1 = j_1 m_1 + \cdots + j_n m_n$$

et alors

$$(1 - j_1)m_1 = j_2 m_2 + \cdots + j_n m_n.$$

Si $1 - j_1$ n'est pas inversible à gauche dans A, alors l'idéal à gauche (principal) $((1 - j_1))$ diffère de A et $1 - j_1$ appartient donc à un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A d'après le Lemme de Zorn. Mais $j_1 \in \text{rad}(A) \subseteq \mathfrak{m}$ et donc $1 \in \mathfrak{m}$, ce qui est absurde. Donc $1 - j_1$ est admet un inverse à gauche et alors m_1 est combinaison linéaire des $m_2, \ldots, m_n$ et cet ensemble engendre donc M. Ceci contredit la minimalité de n. Ainsi, $M = 0$. □

Théorème 1. *(Lemme de Nakayama)*
Soient M un A-module noethérien et N un sous-module de M. Alors

$$N + rad(A)M = M \;\Rightarrow\; M = N.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, comme

$$\text{rad}(A)\left(M/N\right) = M/N,$$

on a $M/N = 0$ et donc $M = N$. □

Lemme 4. *Supposons que A soit noethérienne et artinienne. Alors $rad(A)$ est un idéal bilatère nilpotent de A.*

Démonstration. D'après le Lemme 3, on doit juste montrer que $\mathrm{rad}(A)$ est nilpotent. Comme A est artinienne et comme $(\mathrm{rad}(A)^n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-modules de ${}_AA$, il existe n tel que

$$\mathrm{rad}(A)^n = \mathrm{rad}(A)^{n+1} = \mathrm{rad}(A)\cdot\mathrm{rad}(A)^n$$

et la Proposition 3 implique que $\mathrm{rad}(A)^n = 0$. □

Lemme 5. *Soit M un A-module noethérien et artinien. Alors, $\mathrm{rad}(M)$ est le plus petit des sous-modules N de M tels que ${}^M/_N$ soit semi-simple.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-modules T de M tels que ${}^M/_T$ soit nul ou semi-simple. On a $M \in \mathcal{F} \neq \emptyset$. Comme M est artinien, la Proposition 1 implique que $\mathcal{F}$ admette un élément minimal, que l'on note N. Supposons que ${}^M/_N = 0$, i.e. $M = N$. Ceci signifie qu'aucun quotient de M est semi-simple. Or, le quotient de M par tout sous-module maximal est simple, donc semi-simple et ainsi, M n'admet aucun sous-module maximal. Cependant, comme M est noethérien, il est de type fini, engendré par $m_1, \ldots, m_n$ disons. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une chaîne de sous-modules propres de M. Si $\bigcup_i T_i = M$, alors tous les m_j sont dans un certain T_{i_0}, qui ne peut donc être propre. L'ensemble des sous-modules propres de M est alors inductif ; on peut donc appliquer le lemme de Zorn et aboutir à une contradiction. Ainsi, N est un sous-module propre de M et comme ${}^M/_N$ est semi-simple, on peut écrire

$${}^M/_N = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$$

et considérons, pour $1 \leq i \leq n$, la projection $\pi_i : M \twoheadrightarrow {}^M/_N \twoheadrightarrow S_i$. Comme S_i est simple, $\ker(\pi_i)$ est un sous-module maximal de M. En effet, soit $\ker(\pi_i) \subsetneq K \subseteq M$ et posons $L := \ker(\pi_i)$. Alors ${}^K/_L$ est un sous-module de ${}^M/_L \simeq S_i$, et donc ${}^K/_L = {}^M/_L$, ce qui implique $K = M$, donc $\ker(\pi_i)$ est maximal. N est alors le noyau de la somme de ces morphismes, qui à son tour est l'intersection $\bigcap_{i=1}^n \ker(\pi_i)$ avec les $\ker(\pi_i)$ maximaux. Ainsi, on a

$$\mathrm{rad}(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\pi_i) = N.$$

Comme M est artinien, $\mathrm{rad}(M)$ est l'intersection d'un nombre fini de sous-modules maximaux. Écrivons en effet

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{i\in I} N_i,$$

avec I minimal. Soit $i_0 \in I$ et supposons que I soit infini. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors choisir $i_n \in I \setminus \{i_0, \ldots, i_{n-1}\}$. On obtient ainsi une suite décroissante de sous-modules

$$M \supseteq N_{i_0} \supseteq N_{i_0} \cap N_{i_1} \supseteq N_{i_0} \cap N_{i_1} \cap N_{i_2} \supseteq \cdots \supseteq \bigcap_{k=0}^{m} N_{i_k} \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{rad}(M).$$

Puisque M est artinien, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_{i_0} \cap \cdots \cap N_{i_n} = N_{i_0} \cap \cdots N_{i_n} \cap N_{i_{n+1}}.$$

En intersectant à droite avec $\bigcap_{j\in I\setminus\{i_0,\ldots,i_{n+1}\}} N_j$, on obtient

$$N_{i_0} \cap \cdots \cap N_{i_n} \cap \bigcap_{j\in I\setminus\{i_0,\ldots,i_{n+1}\}} N_j = N_{i_0} \cap \cdots \cap N_{i_{n+1}} \cap \bigcap_{j\in I\setminus\{i_0,\ldots,i_{n+1}\}} N_j,$$

d'où

$$\bigcap_{j\in I\setminus\{i_{n+1}\}} N_j = \bigcap_{j\in I} N_j = \mathrm{rad}(M),$$

contredisant la minimalité de I. Ainsi, on peut écrire

$$\mathrm{rad}(M) = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$$

avec n minimal et M_i maximal dans M, pour tout $1 \leq i \leq n$. Alors,

$$M \Big/ \mathrm{rad}(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} M \Big/ M_i$$

est semi-simple. Ainsi $N \subseteq \mathrm{rad}(M)$, d'où le résultat. □

Proposition 4. *Soit M un A-module noethérien et artinien. Alors*

$$rad\left(M \Big/ rad(M)\right) = 0.$$

Démonstration. Soit S un A-module semi-simple. Alors $\mathrm{rad}(S) = 0$ somme on le voit en considérant les projections sur les facteurs directs simples. Mais, comme M est artinien et noethérien, le Lemme 5 implique que $\mathrm{rad}\left(M \Big/ \mathrm{rad}(M)\right) = 0$. □

Lemme 6. *Soient M, N deux A-modules et $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Alors, $f(rad(M))$ est un sous-module de $rad(N)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ un sous-module maximal de N et soit $\pi : N \twoheadrightarrow N/\mathfrak{m}$. Soit aussi $0 \neq K \subseteq N/\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{m} \subsetneq \pi^{-1}(K)$ et donc $\pi^{-1}(K) = N$ et $K = N/\mathfrak{m}$ car π est surjectif. Donc $N/\mathfrak{m}$ est un module simple. Donc, si l'on montre que $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \ker g$ pour tout épimorphisme $g : N \to S$ avec S simple, on aura $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathfrak{m}$ pour tout sous-module maximal $\mathfrak{m}$ de N et donc $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{rad}(N)$. Soient donc S un module simple et $g : N \to S$ un épimorphisme. Alors, $g \circ f : M \to S$ est un morphisme à image dans un module simple, c'est donc 0 ou un épimorphisme. Si $g \circ f$ est surjectif, alors $(g \circ f)(\mathrm{rad}(M)) \subsetneq (g \circ f)(M) = S$ et alors $(g \circ f)(\mathrm{rad}(M)) = 0$ et $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \ker g$. D'autre part, si $g \circ f = 0$, alors $f(\mathrm{rad}(M)) \subseteq \mathrm{im}\, f \subseteq \ker g$, d'où le résultat. □

Lemme 7. *Soit M un A-module. Alors*

$$rad(A)M \subseteq rad(M).$$

De plus, si $A \Big/ rad(A)$ est noethérienne et artinienne, alors

$$rad(M) = rad(A)M.$$

Démonstration. Soit $m \in M$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \mu_m & : & A & \to & M \\ & & a & \mapsto & a \cdot m \end{array}$$

Le Lemme 6 montre alors que

$$\mu_m(\mathrm{rad}(A)) = \mathrm{rad}(A) \cdot m \subseteq \mathrm{rad}(M)$$

et donc

$$\mathrm{rad}(A) \cdot M = \sum_{m \in M} \mathrm{rad}(A) \cdot m \subseteq \mathrm{rad}(M).$$

Ensuite, si $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$ est artinienne et noethérienne, alors le Lemme 5 et la Proposition 4 montrent que $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$ est semi-simple. De plus, la structure de A-module sur M induit une structure de $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$-module sur $M \Big/ \mathrm{rad}(A)M$ via la loi

$$\begin{array}{ccc} A \Big/ \mathrm{rad}(A) \times M \Big/ \mathrm{rad}(A)M & \to & M \Big/ \mathrm{rad}(A)M \\ (a + \mathrm{rad}(A), m + \mathrm{rad}(A)M) & \mapsto & am + \mathrm{rad}(A)M \end{array}$$

Comme $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$ est artinienne, noethérienne et semi-simple, $M \Big/ \mathrm{rad}(A)M$ est aussi semi-simple et alors $\mathrm{rad}\left(M \Big/ \mathrm{rad}(A)M\right) = 0$ d'après le Lemme 5. Comme

$$\mathrm{rad}\left(M \Big/ \mathrm{rad}(A)M\right) = \mathrm{rad}(M) \Big/ \mathrm{rad}(A)M,$$

on obtient

$$\mathrm{rad}(M) = \mathrm{rad}(A)M,$$

comme voulu. □

Définition 4. Si A est une algèbre artinienne et si M est un A-module, alors le A-module $M \Big/ \mathrm{rad}(M)$ est appelé la tête de M.

1.2 Algèbres semi-simples et Théorème d'Artin-Wedderburn

On fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

Lemme 8. *L'algèbre A est semi-simple si et seulement si le module régulier ${}_AA$ est semi-simple.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Supposons donc que ${}_AA$ soit semi-simple et soit M un A-module de type fini. Choisissons $\{m_1, \dots, m_n\}$ un système générateur de M. A^n est un A-module semi-simple et libre, de base $e_i := \nu_i(1_A)$ où $\nu_i : {}_AA \hookrightarrow A^n$ est le plongement dans la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Soit l'épimorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & A^n & \twoheadrightarrow & M \\ & & a \cdot e_i & \mapsto & a \cdot m_i \end{array}$$

Alors, $\ker(\varphi)$ est un sous-module de A^n, donc en est un facteur direct et il existe un sous-module P de A^n tel que

$$A^n \simeq \ker(\varphi) \oplus P.$$

Alors P est semi-simple et par construction, $\varphi_{|P} : P \to M$ est un isomorphisme. Ainsi, M est semi-simple, d'où le résultat. □

Lemme 9. *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des K-algèbres semi-simples, alors le produit direct $A_1 \times \cdots \times A_n$ est une algèbre semi-simple.*

Démonstration. Soit en effet M un $A_1 \times \cdots \times A_n$-module de type fini. Si l'on note $e_i := (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$, alors e_iM est un A_i-module de type fini, donc est semi-simple. Or,

$$M \simeq e_1M \oplus \cdots \oplus e_nM,$$

donc M est semi-simple. □

Remarque 2. On rappelle que si R est un anneau, $\mathcal{M}_n(R)$ désigne l'anneau des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans R.

Proposition 5. *Soient K un corps et A une K-algèbre. On suppose qu'il existe des corps gauches $D_1, \dots, D_m$ à centres contenant K et des entiers naturels positifs $n_1, \dots, n_m$ tels que l'on ait un isomorphisme d'algèbres*

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(D_i).$$

Alors, A est semi-simple.

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $D := D_1$ et $n := n_1$. En vertu du Lemme 9, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_n(D)$ est semi-simple. Pour cela, il suffit de montrer que le module régulier ${}_{\mathcal{M}_n(D)}\mathcal{M}_n(D)$ est semi-simple, d'après le Lemme 8. Posons

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_1, \ldots, x_n \in D \right\}.$$

S est un $\mathcal{M}_n(D)$-module simple. En effet, $S \neq 0$ est clairement un $\mathcal{M}_n(D)$-module. De plus, si $N \neq 0$ est un sous-module de S et si $x \in S$, on peut choisir $y \in N \setminus \{0\}$ et on voit qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(D)$ telle que $x = Ay \in N$. Ainsi, $N = S$ et S est donc simple. De plus, on a aisément

$${}_{\mathcal{M}_n(D)}\mathcal{M}_n(D) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} S,$$

d'où le résultat. □

Nous allons voir à présent voir que la réciproque est vraie, et constitue le résultat principal de cette section.

Lemme 10. *(Schur)*
Soient K un corps, A une K-algèbre et V un A-module simple. Alors, $\mathrm{End}_A(V)$ *est un corps gauche contenant K.*

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{End}_A(V)$. $\mathrm{im}\,(u)$ et $\ker(u)$ sont des sous-modules de V qui est simple. Donc $\mathrm{im}\,(u) = 0$ ou $\mathrm{im}\,(u) = V$ et $\ker(u) = 0$ ou $\ker(u) = V$. Alors $u = 0$ ou u est un automorphisme. En remarquant que $\mathrm{Aut}_A(V)$ est le groupe des unités de la K-algèbre $\mathrm{End}_A(V)$, tout élément non nul de $\mathrm{End}_A(V)$ est inversible, c'est donc un corps gauche. □

Lemme 11. *Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre. Si V, W sont deux A-modules simples non isomorphes, alors*

$$\mathrm{Hom}_A(V, W) = 0.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{Hom}_A(V, W)$. $\ker u \subseteq V$ donc $u = 0$ ou u est injectif. Si u est injectif, alors $V \simeq u(V) \subseteq W$. Comme W est simple et $u \neq 0$, $u(V) = W$ et $V \simeq W$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $u = 0$. □

Lemme 12. *Soient K une anneau commutatif et A une K-algèbre. Alors, on a un isomorphisme d'anneaux*

$$\mathrm{End}_A({}_AA) \simeq A^{op}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{End}_A({}_AA)$. Posons $a_\varphi := \varphi(1_A)$ et, pour tout $b \in A$, on a

$$\varphi(b) = \varphi(b \cdot 1_A) = b \cdot \varphi(1_A) = b \cdot a_\varphi.$$

Ainsi, un endomorphisme (A-linéaire) φ de ${}_AA$ est donné par la multiplication à droite par un élément $a_\varphi \in A$. Clairement, $a_\varphi = a_\psi$, pour $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_A({}_AA)$ si et seulement si $\varphi = \psi$. De plus, ${}_AA \ni b \mapsto ba \in {}_AA$ est un élément de $\mathrm{End}_A({}_AA)$. Finalement, pour tout $b \in A$, on a

$$ba_{\varphi\circ\psi} = (\varphi \circ \psi)(b) = \varphi(\psi(b)) = (ba_\psi)a_\varphi = b(a_\psi a_\varphi)$$

et alors, $a_\psi a_\varphi = a_{\varphi\circ\psi}$ et donc $\mathrm{End}_A({}_AA) \simeq A^{op}$. □

Nous allons à présent démontrer le théorème de Wedderburn, qui donne une description plutôt précise de la structure des algèbres semi-simples de dimension finie sur un corps. En fait, il s'agit (à produit près) d'une algèbre de matrices. Ce résultat ainsi que le Lemme de Schur constituent deux outils fondamentaux dans l'étude des algèbres semi-simples. Le théorème de Wedderburn admet un raffinement dans le cas où le corps de base est algébriquement clos. Il s'agit du théorème de Wedderburn-Malcev, que nous démontrerons en fin d'exposé. Ce résultat se démontre de manière tout-à-fait différente du présent théorème, en utilisant de façon cruciale des notions d'algèbre homologique. La suite de ce travail consiste (entre autres) à développer les outils nécessaires à la preuve du résultat de Wedderburn-Malcev.

Théorème 2. *(Wedderburn et Artin, 1907 et 1925)*
Soient K un corps et A une K-algèbre semi-simple de dimension finie. Alors, il existe $m \in \mathbb{N}$, $D_1, \ldots, D_m$ des corps gauches à centres contenant K et des entier $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait un isomorphisme d'algèbres

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(D_i).$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après le Lemme 12, on a $A^{op} \simeq \mathrm{End}_A({}_AA)$, d'où $A \simeq (\mathrm{End}_A({}_AA))^{op}$. Comme A est semi-simple, ${}_AA$ est isomorphe à une somme directe de modules simples :

$${}_AA \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i,$$

où la numérotation à été choisie de telle sorte que $S_i \simeq S_j$ si et seulement si $i = j$ et on a exactement n_i facteurs isomorphes à S_i dans la décomposition en somme directe ; ainsi, la somme sur j exprime la potentielle multiplicité des modules simples composant ${}_AA$. Alors

$$A \simeq (\mathrm{End}_A({}_AA))^{op} \simeq \left(\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i\right)\right)^{op}.$$

Ensuite, si $(M_i)_{1\leq i\leq k}$ sont des modules tels que $i \neq j \Rightarrow \mathrm{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$, alors on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \simeq \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_A(M_i).$$

En effet, en notant $M := \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ et en considérant les morphismes naturels $p_i : M \twoheadrightarrow M_i$ et $q_i : M_i \hookrightarrow M$, on peut considérer

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & : & \mathrm{End}_A(M) & \to & \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_A(M_1,M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(M_1,M_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_A(M_k,M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(M_k,M_k) \end{pmatrix} \\ & & \varphi & \mapsto & (p_i \circ \varphi \circ q_j)_{1\le i,j\le k} \end{array}$$

On voit aisément que α est un isomorphisme préservant les structures multiplicatives naturelles, de réciproque

$$\begin{array}{ccccc} \beta & : & \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_A(M_1,M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(M_1,M_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}_A(M_k,M_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_A(M_k,M_k) \end{pmatrix} & \to & \mathrm{End}_A(M) \\ & & (\varphi_{i,j})_{1\le i,j\le k} & \mapsto & \sum_{1\le i,j\le k} q_i \circ \varphi_{i,j} \circ p_j \end{array}$$

On en déduit que

$$\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{k} M_i\right) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{End}_A(M_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{End}_A(M_n) \end{pmatrix} \simeq \prod_{i=1}^{k} \mathrm{End}_A(M_i).$$

Mais, d'après le Lemme 11, si $i \neq j$, $\mathrm{Hom}_A(S_i, S_j) = 0$, d'où

$$A \simeq \left(\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i\right)\right)^{op} \simeq \left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i\right)\right)^{op}.$$

Maintenant, pour tous modules X, Y, Z, T sur A, on a

$$\mathrm{Hom}_A(X \oplus Y, Z \oplus T) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_A(X,Z) & \mathrm{Hom}_A(Y,Z) \\ \mathrm{Hom}_A(X,T) & \mathrm{Hom}_A(Y,T) \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i\right) \simeq \mathcal{M}_{n_i}(\mathrm{End}_A(S_i))$$

avec la multiplication étant la multiplication usuelle des matrices, avec la composition des morphismes dans $\mathrm{End}_A(S_i)$. D'après le Lemme de Schur, $D_i' := \mathrm{End}_A(S_i)$ est un corps gauche à centre contenant K, puisque S_i est simple. Ensuite, si D est un corps gauche dont le centre contient K, alors D^{op} aussi. De plus, si A et B sont des algèbres, alors $(A \times B)^{op} \simeq A^{op} \times B^{op}$. Enfin, l'application de transposition usuelle

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(B))^{op} & \to & \mathcal{M}_n(B^{op}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est un isomorphisme. On pose alors $D_i := (D_i')^{op}$. C'est un corps gauche dont le centre contient K, et on a

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} S_i\right)^{op} \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(D_i')^{op} \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}((D_i')^{op}) \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(D_i),$$

d'où le résultat. □

Remarque 3. En particulier, on a un isomorphisme K-linéaire

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(D_i).$$

Nous aurons besoin d'un corollaire, qui utilise le lemme suivant :

Lemme 13. *Un corps gauche D qui est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps algébriquement clos K est en réalité un corps. En fait on a dans ce cas $D = K$.*

Démonstration. Soit donc D un corps gauche de dimension finie sur un corps algébriquement clos K et soit $d \in D$. Comme D est de dimension finie sur K, la famille $(d^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être libre et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ minimal tel que la famille $(d^n)_{0\leq n\leq n_0}$ soit liée. Il existe alors des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0} \in K$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n_0} \lambda_i d^i = 0$ et posons $P_d(X) := \sum_{i=0}^{n_0} \lambda_i X^i \in K[X]$. Comme n_0 est minimal, $\lambda_{n_0} \neq 0$ et on peut donc supposer que P_d est unitaire. P_d est donc un polynôme unitaire et de degré minimal parmis les polynômes ayant d pour racine. K étant algébriquement clos, $\deg(P_d) = 1$ et $d \in K$. □

Corollaire 1. *Si A est une algèbre semi-simple de dimension finie sur un corps algébriquement clos K, alors il existe des entiers $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tels que*

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathcal{M}_{n_i}(K).$$

Démonstration. A est un K-espace vectoriel de dimension finie, donc $S_i \subseteq A$ aussi, donc $D_i' = \mathrm{End}_A(S_i)$ aussi, et donc D_i également. En appliquant le Lemme précédent, on a $D_i = K$ pour tout $1 \leq i \leq m$. □

Corollaire 2. *Si A est semi-simple, commutative et de dimension finie sur K, alors il existe des extensions de corps finies K_i de K telles que*

$$A \simeq \prod_{i=1}^{m} K_i.$$

Démonstration. En effet, comme A est commutative, dans la décomposition donnée par le Théorème de Wedderburn, aucun anneau de matrices, ni aucun corps gauche ne peut apparaître, d'après le Lemme précédent. □

1.3 Modules projectifs, syzygies et résolutions projectives

Nous allons maintenant examiner plus particulièrement une classe spécifique de modules : les modules projectifs. Le comportement de leur structure vis-à-vis des autres modules est intéressant en lui-même, en plus d'être primordial en termes d'algèbre homologique. On se donne ici encore une algèbre A sur un anneau commutatif K. Avant toute chose, rappelons la notion de suite exacte :

Définition 5. 1. Soit $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de A-modules, munie d'une suite de morphismes $f_i : M_i \to M_{i+1}$. On dit que la suite

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est exacte si l'on a

$$\ker(f_{i+1}) = \operatorname{im}(f_i),\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

2. Une suite exacte de modules de la forme

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est dite courte.

3. Enfin, une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est dite scindée s'il existe un morphisme $h : C \to B$ tel que $g \circ h = id_C$. Dans ce cas, on dit que h est une section de g.

Lemme 14. *Soient M un A-module et φ un endomorphisme idempotent de M (i.e. tel que $\varphi^2 = \varphi$). Alors*

$$M \simeq \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi.$$

Démonstration. Soit $m \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi$. Il existe $m' \in M$ tel que $m = \varphi(m')$. On a $m = \varphi(m') = \varphi^2(m') = \varphi(m) = 0$, donc $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = 0$. Si de plus, $m \in M$, alors $\varphi(m - \varphi(m)) = \varphi(m) - \varphi^2(m) = \varphi(m) - \varphi(m) = 0$, donc $m - \varphi(m) \in \ker\varphi$ et $m = (m - \varphi(m)) + \varphi(m) \in \ker\varphi + \operatorname{im}\varphi$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 15. *Soit*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte scindée de modules. Alors

$$N \simeq M \oplus L.$$

Démonstration. Supposons donc que β admette une section, que l'on note γ et posons $\epsilon := \gamma\circ\beta$. On a $\epsilon^2 = \gamma\circ\beta\circ\gamma\circ\beta = \gamma\circ\beta = \epsilon$ et d'après le Lemme 14, $N \simeq \ker\epsilon \oplus \operatorname{im}\epsilon$. Or, on dispose des isomorphismes $\alpha^{|\ker\epsilon} : M \to \ker\epsilon$ et $\gamma^{|\operatorname{im}\epsilon} : L \to \operatorname{im}\epsilon$. Ainsi, $N \simeq \ker\epsilon \oplus \operatorname{im}\epsilon \simeq M \oplus L$. □

Remarque 4. Du Lemme précédent, on déduit que la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement s'il existe un morphisme $h : B \to A$ tel que $h \circ f = id_A$ (appelé alors rétraction de f), mais ceci ne nous servira pas ici.

Proposition 6. *Soit P un A-module. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

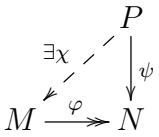
i) P est un facteur direct d'un A-module libre,

ii) Pour tous modules M, N et tout $\varphi : M \twoheadrightarrow N$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(P, M) & \to & \mathrm{Hom}_A(P, N) \\ \psi & \mapsto & \varphi \circ \psi \end{array}$$

est surjective,

iii) Pour tous modules M, N, tout $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ et tout $\psi : P \to N$, il existe $\chi : P \to M$ tel que $\varphi \circ \chi = \psi$. On dit que ψ se relève de φ à χ.



iv) Toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

est scindée.

Démonstration. *i) ⇒ ii).* On suppose que $P \oplus Q$ est libre, disons sur S (cette définition est rappelée en annexe). Soient M, N et $\varphi : M \twoheadrightarrow N$ comme dans l'énoncé. Soit aussi $\alpha : P \to N$. On étend α en le morphisme

$$\begin{array}{ccc} P \oplus Q & \to & N \\ (p, q) & \mapsto & \alpha(p) \end{array}$$

que l'on note encore α. Pour $s \in S$, on pose $n_s := \alpha(s)$ et choisissons $m_s \in M$ tel que $\varphi(m_s) = n_s$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\beta} & : & S & \to & M \\ & & s & \mapsto & m_s \end{array}$$

Comme $P \oplus Q$ est libre sur S, il existe un unique morphisme $\beta : P \oplus Q \to M$ tel que $\beta_{|S} = \widehat{\beta}$. Alors, pour tout $s \in S$, $\varphi \circ \beta(s) = \varphi(m_s) = n_s = \alpha(s)$ et avec l'unicité de β, on a $\varphi \circ \beta = \alpha$. Le morphisme induit $\overline{\beta} : P \hookrightarrow P \oplus Q \xrightarrow{\beta} M$ donne ce que l'on veut.
ii) ⇔ iii). C'est une simple reformulation.
iii) ⇒ iv). Pour obtenir *iv)*, on applique *iii)* à $N = P$ et $\psi = id : P \to N$.
iv) ⇒ i). Soit M un A-module. D'après le Corollaire 1 de l'annexe, M est quotient du module F_M libre sur M. On applique ceci à P ; soit $F_P \simeq \bigoplus_{p \in P} A \twoheadrightarrow P$ le morphisme naturel et soit $N := \ker(F_P \twoheadrightarrow P)$. Cela induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F_P \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

qui est scindée d'après iv). Donc, d'après le Lemme 15, on a

$$F_P \simeq N \oplus P,$$

ce qui donne i). □

De la même manière, on montre la

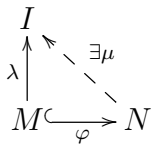
Proposition 7. *Soit I un A-module. Les assertions suivantes s'équivalent*

i) Pour tous modules M, N et tout $\varphi : M \hookrightarrow N$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(N, I) & \to & \mathrm{Hom}_A(M, I) \\ \psi & \mapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

est surjective,

ii) Pour tous modules M, N, tout $\varphi : M \hookrightarrow N$ et tout $\lambda : M \to I$, il existe $\mu : N \to I$ tel que $\mu \circ \varphi = \lambda$.



iii) Tout suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

est scindée.

Définition 6. Un module est dit projectif s'il vérifie l'une des quatre propriétés de la Proposition 6. De façon duale, un module est dit injectif s'il vérifie une des trois propriétés de la Proposition 7.

Corollaire 3. *Soit M un A-module. Il existe un module projectif P_M et un épimorphisme $P_M \twoheadrightarrow M$.*

Démonstration. Nous avons déjà montré ceci dans le $iv) \Rightarrow i)$ de la preuve de la Proposition 6. □

Remarque 5. Ce résultat admet une version duale ; c'est-à-dire que pour tout module M, il existe un module injectif I^M et un monomorphisme $M \hookrightarrow I^M$. Ce dernier résultat est cependant bien plus difficile à montrer. Pour une preuve complète, on pourra consulter [17].

Nous allons à présent définir le "syzygy". Cet objet a une très grande importance sur la structure d'un module et permet, en quelque sorte, de mesurer l'obstruction que présente un module à être projectif. Nous allons également appréhender la notion de résolution projective, dont nous nous servirons abondamment en algèbre homologique, en particulier dans l'étude des groupes Ext et des foncteurs dérivés. Nous allons également démontrer l'existence de tels objets.

Définition 7. Soient M un A-module, P_M un module projectif et un épimorphisme $P_M \twoheadrightarrow M$. On pose

$$\Omega_M := \ker(P_M \to M).$$

On dit alors que Ω_M est un premier syzygy de M.

Remarque 6. 1. Le nom "syzygy" provient de l'astronomie. Il s'agit d'une ligne droite formée par trois corps célestes, en interaction gravitationnelle ; comme on l'observe lors d'une éclipse. Cette terminologie illustre le fait que Ω_M "s'aligne" avec P_M et M, afin de produire une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega_M \longrightarrow P_M \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

2. On remarque immédiatement qu'un syzygy n'est pas unique. En effet, soit $P_M \overset{\pi_M}{\twoheadrightarrow} M$ et soit P un module projectif. Alors $P \oplus P_M$ est encore projectif et on a un épimorphisme $P \oplus P_M \overset{(0,\pi_M)}{\twoheadrightarrow} M$. Donc, si Ω_M est un syzygy de M, alors $P \oplus \Omega_M$ aussi. Le syzygy est donc défini "à module projecif près". Plus précisément, on a le résultat suivant :

Lemme 16. *(Schanuel)*
Soit M un module. Soient aussi P_M, Q_M deux modules projectifs et $\pi_M : P_M \twoheadrightarrow M$, $\kappa_M : Q_M \twoheadrightarrow M$ des épimorphismes. Alors, on a

$$\ker(\pi_M) \oplus Q_M \simeq \ker(\kappa_M) \oplus P_M.$$

Démonstration. Considérons

$$S := \{(p,q) \in P_M \oplus Q_M \ ;\ \pi_M(p) = \kappa_M(q)\}$$

ainsi que les projections canoniques $\pi_1 : S \twoheadrightarrow P_M$ et $\pi_2 : S \twoheadrightarrow Q_M$. On a

$$\ker(\pi_1) = \{0\} \oplus \ker(\kappa_M) \simeq \ker(\kappa_M)$$

et

$$\ker(\pi_2) = \ker(\pi_M) \oplus \{0\} \simeq \ker(\pi_M).$$

Mais $S \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} P_M$ est surjective, d'où une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \ker(\pi_1) \longrightarrow S \longrightarrow P_M \longrightarrow 0\,,$$

qui induit une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\kappa_M) \longrightarrow S \longrightarrow P_M \longrightarrow 0\,,$$

qui est scindée puisque P_M est projectif et d'après le Lemme 15, on a $S \simeq \ker(\kappa_M) \oplus P_M$. De même, $S \simeq Q_M \oplus \ker(\pi_M)$, d'où l'isomorphisme recherché. □

Définition 8. Soit M un module. On pose

$$\begin{cases} \Omega^1(M) := \Omega^1_M := \Omega_M \\ \Omega^{n+1}(M) := \Omega^{n+1}_M := \Omega_{\Omega^n_M},\ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Ω^n_M est alors appelé un $n^{\text{ième}}$ syzygy de M.

Définition 9. Soient M un module et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de modules projectifs.

1. Une suite $(P_n, \varphi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi_{n+1} : P_{n+1} \to P_n$ sont des morphismes, est appelée une résolution projective de M si on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0\,.$$

2. Si tous les P_n sont libres (resp. de type fini), on parle de résolution libre (resp. de type fini).

Théorème 3. *Tout A-module admet une résolution projective.*

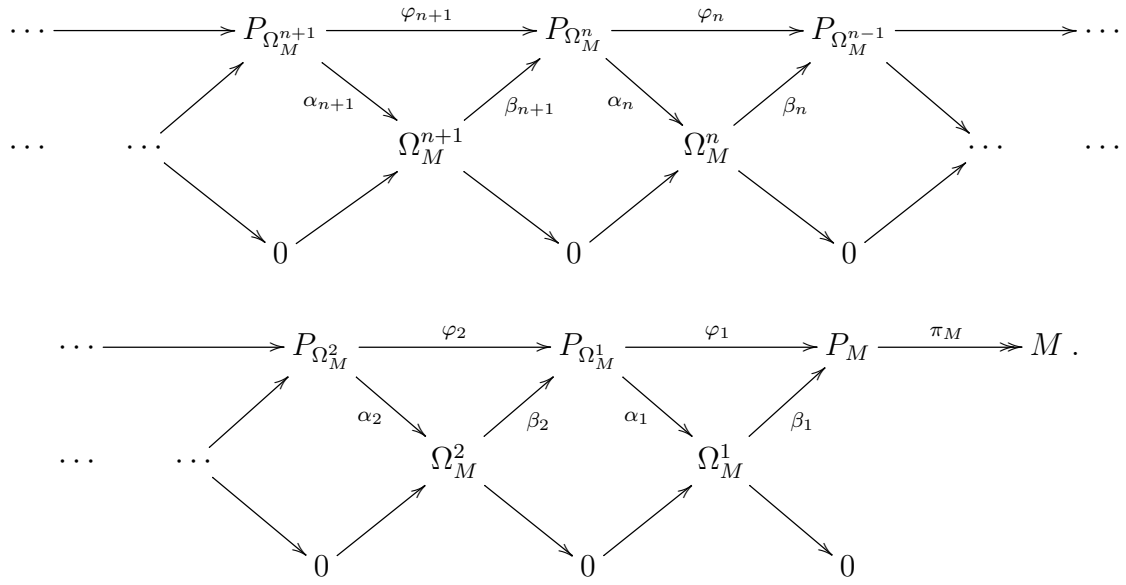
Démonstration. Par définition des syzygies, on a des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \Omega_M^{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} P_{\Omega_M^n} \xrightarrow{\alpha_n} \Omega_M^n \longrightarrow 0\,,\ \forall n \geq 1$$

que l'on peut relier à l'aide des suites

$$P_{\Omega_M^n} \xrightarrow{\alpha_n} \Omega_M^n \xrightarrow{\beta_n} P_{\Omega_M^{n-1}}$$

en posant, pour tout $n \geq 1$, $\varphi_n := \beta_n \circ \alpha_n$ pour obtenir un diagramme commutatif



– Si $n \geq 2$, on a

$$x \in \ker\varphi_n \ \Leftrightarrow\ \varphi_n(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \beta_n \circ \alpha_n(x) = 0 \overset{\beta_n \text{ inj.}}{\Leftrightarrow} \alpha_n(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \ker\alpha_n$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \operatorname{im}\beta_{n+1} \ \Leftrightarrow\ \exists y \in \Omega_M^{n+1}\ ;\ \beta_{n+1}(y) = x$$

$$\Leftrightarrow\ \exists z \in P_{\Omega_M^{n+1}}\ ;\ \beta_{n+1} \circ \alpha_{n+1}(z) = x \ \Leftrightarrow\ \exists z \in P_{\Omega_M^{n+1}}\ ;\ \varphi_{n+1}(z) = x \ \Leftrightarrow\ x \in \operatorname{im}\varphi_{n+1}.$$

Donc $\operatorname{im}\varphi_{n+1} = \ker\varphi_n$.

– De même,

$$x \in \ker\varphi_1 \ \Leftrightarrow\ \beta_1 \circ \alpha_1(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha_1(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x = \beta_2(y),\ y \in \Omega_M^2 \ \Leftrightarrow\ x = \varphi_2(z),\ z \in P_{\Omega_M^2}$$

et donc $\operatorname{im}\varphi_2 = \ker\varphi_1$.

– Ensuite,

$$x \in \ker \pi_M \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x \in \Omega^1_M \Rightarrow \exists y \in P_{\Omega^1_M} \ ; \ \alpha_1(y) = x$$

et

$$\varphi_1(y) = \beta_1 \circ \alpha_1(y) = \beta_1(x) = x \Rightarrow x \in \operatorname{im} \varphi_1.$$

De plus,

$$x \in \operatorname{im} \varphi_1 \Rightarrow \exists y \in P_{\Omega^1_M} \ ; \ \varphi_1(y) = x = \beta_1 \circ \alpha_1(y)$$

et $\pi_M(x) = \pi_M \circ \beta_1 \circ \alpha_1(y) = 0$, d'où $x \in \ker \pi_M$ et $\operatorname{im} \varphi_1 = \ker \pi_M$.

– Enfin, la suite

$$P_M \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$$

étant exacte, on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow P_{\Omega^{n+1}_M} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} P_{\Omega^n_M} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{\Omega^2_M} \xrightarrow{\varphi_2} P_{\Omega^1_M} \xrightarrow{\varphi_1} P_M \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0 \ ,$$

qui est alors une résolution projective de M, comme annoncé.

□

Deuxième partie
Théorie des catégories

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Nous pouvons à présent introduire le lecteur au langage des catégories. Cet outil permet de formaliser la notion de structure algébrique ainsi que de morphisme et offre, en quelque sorte, une nouvelle vision de l'algèbre. Cette théorie permet également de donner un cadre général et abstrait à certains résultats centraux de l'algèbre, comme par exemple les théorèmes d'isomorphisme, valables dans les catégories dites "abéliennes". Ce formalisme fut introduit par Eilenberg et MacLane en 1942, dans le cadre de la topologie algébrique et a été popularisé en France par Alexander Grothendieck dans les années 60-70. Depuis, ce point de vue a rencontré un tel succès qu'il est employé en géométrie différentielle, en théorie des ensembles, en théorie de la logique ou encore en physique mathématique et en informatique... Pour d'autres approches de la notion de catégorie, on pourra consulter [27], [19], [6], [25] ou encore les excellents [10] et [18].

Définition 10. Un catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une "collection" d'objets ainsi que, pour chaque paire d'objets X et Y, d'un ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de morphismes et, pour tous objets X, Y et Z, d'une application

$$\circ : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

vérifiant

1. Pour tous objets X, Y, Z, T de $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z,T) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \xrightarrow{id\times\circ} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z,T) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ \downarrow{\scriptstyle \circ\times id} & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,T) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \xrightarrow{\quad\circ\quad} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,T) \end{array} \qquad (1)$$

2. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme $1_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)$ (noté aussi id_X) tel que pour tous objets Y, Z, on ait

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ f \circ 1_Y = f = 1_Z \circ f.$$

Remarque 7. 1. Ici, une "collection" désigne une classe au sens de la théorie des ensembles de Neumann-Bernayds-Gödel (NBG). Les objets d'une catégorie ne sont donc pas *a priori* des ensembles. Dans ce contexte, on s'est donné un "univers" $\mathcal{U}$ constitué des classes et on dit qu'une classe est un ensemble si elle "appartient" à au moins une classe ; la relation d'appartenance étant un objet primitif. Si une classe n'est pas un ensemble, on parle alors de classe propre. Cela étant, nous n'irons pas plus en avant dans ces considérations. Aussi, le lecteur désirant acquérir quelques bases en théorie des ensembles (de Zermelo-Fraenkel) pourra consulter l'ouvrage [15]. Je remercie vivement monsieur Ivan Marin de m'avoir communiqué ces faits.

2. Par convention, nous avons choisi ici d'imposer aux classes de morphismes d'être des ensembles. Cependant, on peut accepter qu'il n'en soit rien et une catégorie dont chaque collection de morphismes est un ensemble est alors dite localement petite. De plus, si la classe des objets est également un ensemble, on parlera de catégorie petite . Cela étant, la plupart des exemples usuels de catégories sont des catégories localement petites (mais non petites). Aussi ne considérerons-nous que ces dernières.

Exemple 2. Les catégories se trouvent partout en mathématiques :

1. On notera $\mathfrak{Ens}$ la catégorie des ensembles ; les morphismes étant les applications ensemblistes et la loi $\circ$ étant la composition usuelle des applications.
2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit la catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$ de $\mathcal{C}$, dont les objets sont les objets de $\mathcal{C}$ et, pour deux objets X, Y, on pose
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$
ainsi que
$$f \circ^{op} g := g \circ f.$$
3. Si A est une K-algèbre, avec K un anneau commutatif, on note $A-\mathfrak{Mod}$ la catégorie des A-modules ; les morphismes étant les morphismes de modules et la composition étant la composition usuelle des applications. On peut également considérer la catégorie $A-\mathfrak{mod}$ (resp. $A-\mathfrak{libr}$, $A-\mathfrak{Proj}$, $A-\mathfrak{proj}$) des A modules de type fini (resp. libres, projectifs, projectifs de type fini)...
4. De même, on peut définir les catégories suivantes :
   (a) La catégorie $\mathfrak{Grp}$ des groupes, munie des morphismes de groupes et de la composition usuelle,
   (b) la catégorie $\mathfrak{Ab} = \mathbb{Z} - \mathfrak{Mod}$ (resp. $\mathfrak{ab} = \mathbb{Z} - \mathfrak{mod}$) des groupes abéliens (resp. de type fini),
   (c) la catégorie $\mathfrak{Ann}$ (resp. $\mathfrak{Cor}$) des anneaux (resp. des corps),
   (d) la catégorie $\mathfrak{Top}$ des espaces topologiques, les morphismes étant les applications continues, munis de la composition des applications,
   (e) la catégorie $\mathfrak{Var}_n^\infty$ des variétés différentielles lisses de dimension n...
5. Soit une catégorie à un seul objet $\bullet$. Alors, on remarque que l'ensemble $\mathrm{Mor}(\bullet,\bullet)$ est muni d'une structure de monoïde pour la loi $\circ$. Si chaque morphisme de cette catégorie est inversible (en un sens naturel), alors il s'agit d'un groupe. On note qu'on peut alors interpréter un groupe comme un exemple particulier de catégorie. Plus généralement, une catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme est appelée un groupoïde.
6. Souvent, un morphisme $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ sera naturellement représenté par
$$f : X \to Y \text{ ou } X \xrightarrow{f} Y .$$
7. La commutativité du diagramme (1) se traduit simplement par le fait qu'on impose à la loi $\circ$ d'être associative.

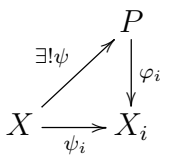
Définition 11. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X, Y deux objets de $\mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme. On dit que α est un

1. monomorphisme si, pour tout objet Z et tous $\beta, \gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, on a
$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \ \Rightarrow \ \beta = \gamma,$$
2. épimorphisme si, pour tout objet Z et tous $\beta, \gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, on a
$$\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \ \Rightarrow \ \beta = \gamma,$$
3. monomorphisme scindée s'il existe $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que
$$\beta \circ \alpha = id_X,$$
4. épimorphisme scindée s'il existe $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que
$$\alpha \circ \beta = id_Y,$$
5. isomorphisme si α est un monomorphisme scindée et un épimorphisme scindée, autrement dit s'il existe $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tel que
$$\alpha \circ \beta = id_Y \text{ et } \beta \circ \alpha = id_X.$$
Dans ce cas, on note $X \overset{\alpha}{\simeq} Y$.

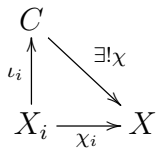
Remarque 8.
1. On voit immédiatement que tout monomorphisme scindé (resp. épimorphisme scindée) est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).
2. Dans $\mathfrak{Ens}$, les monomorphismes sont les applications injectives et les épimorphismes sont les applications surjectives. Il en est de même dans la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$.
3. Cependant, ceci n'est pas vrai dans la catégorie $\mathfrak{Ann}$. En effet, l'épimorphisme canonique
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
n'est pas surjectif.

Définition 12. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, I un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$.

1. Un objet P, muni d'une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ de morphismes $\varphi_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, X_i)$ est un produit si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, et toute famille de morphismes $\psi_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X_i)$, il existe un unique morphisme $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, P)$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $\varphi_i \circ \psi = \psi_i$. Dans ce cas, on note $P =: \prod_{i \in I} X_i$, en omettant les morphismes $(\varphi_i)_{i \in I}$. On résume ceci dans le diagramme commutatif



2. Un objet C et une famille de morphismes $\iota_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, C)$ est un coproduit si, pour tout objet X et toute famille $\chi_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, X)$, il existe un unique morphisme $\chi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, X)$ tel que $\chi \circ \iota_i = \chi_i$. On note alors $C =: \coprod_{i\in I} X_i$ et on représente cette situation par le diagramme commutatif



3. Si P est un produit, C un coproduit, et si $P \simeq C$, alors on dit que P est un biproduit.

Remarque 9. Par définition, on a

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(X, \prod_{i\in I} Y_i\right) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y_i),$$

et

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\left(\coprod_{i\in I} X_i, Y\right) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X_i, Y).$$

Exemple 3. Dans la catégorie $\mathfrak{Ens}$, les produits sont les produits cartésiens et les coproduits sont les unions disjointes. Dans la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$, les produits sont les produits directs (cartésiens) et les coproduits sont les sommes directes. Dans la catégorie $K - \mathfrak{Alg}$ des K-algèbres, les produits sont les produits tensoriels. Notons que les produits et coproduits n'existent pas toujours, mais lorsqu'ils existent, il sont uniques à isomorphisme près. En effet, vérifions-le pour le produit. On utilise les mêmes notations que dans la définition précédente. Soit donc P' un autre produit des $(X_i)_{i\in I}$ et notons φ_i' les morphismes associés. Étant donnée la propriété universelle vérifiée par P, en prenant $X = P'$ dans la définition, il existe un unique morphisme $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P', P)$ tel que $\varphi_i \circ \alpha = \varphi_i'$ pour tout i. De même, par propriété universelle de P', en prenant $X = P$ dans la définition, il existe un unique $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, P')$ tel que $\varphi_i' \circ \beta = \varphi_i$ pour tout i. Alors, $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, P)$ vérifie $\varphi_i \circ (\alpha \circ \beta) = \varphi_i$, tout comme id_P et par unicité, on a $\alpha \circ \beta = id_P$. De même, on a $\beta \circ \alpha = id_{P'}$ et $\alpha : P' \to P$ est un isomorphisme, comme désiré.

Définition 13.
1. Un objet I d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit initial si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I, X)$ est un singleton.
2. Un objet T de $\mathcal{C}$ est dit terminal si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, T)$ est un singleton.
3. Un objet zéro est un objet à la fois initial et terminal.

Remarque 10. Si I_1 et I_2 sont deux objets initiaux, alors ils sont isomorphes. En effet, par définition, il existe un unique morphisme $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I_1, I_2)$ et un unique morphisme $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I_2, I_1)$ et id_{I_1} est le seul élément de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I_1, I_1)$, tout comme id_{I_2} est le seul élément de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I_2, I_2)$. Or, $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I_2, I_2)$ et alors $\alpha \circ \beta = id_{I_2}$. De même, on a $\beta \circ \alpha = id_{I_1}$ et donc, $I_1 \overset{\alpha}{\simeq} I_2$. Avec le même argument, on voit que les objets terminaux sont uniques à isomorphisme près. En particulier, un objet zéro est unique à isomorphisme près.

Exemple 4. Le A-module 0 est clairement un objet zéro dans la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$. En général une catégorie ne possède pas d'objet zéro. Par exemple, dans la catégorie $\mathfrak{I}$ des idéaux non nuls de $\mathbb{Z}$ (les morphismes étant les inclusions canoniques), $\mathbb{Z}$ est terminal et un objet initial serait un idéal contenu dans tout idéal de $\mathbb{Z}$, et serait donc nul, ce qui est exclus. Si l'on admet l'idéal nul, alors on obtient une catégorie avec un objet initial, un objet terminal mais sans objet zéro.

Remarque 11. Si une catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet zéro 0, alors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \neq \emptyset$ pour tous objets X et Y, car il contient la composée $\iota \circ \tau$, encore notée 0, où et $X \xrightarrow{\tau} 0$ et $0 \xrightarrow{\iota} Y$.

Une question naturelle se pose alors : peut-on généraliser les notions de noyau et d'image d'un morphisme au cadre des catégories ? La réponse est oui, il suffit de définir le noyau et l'image par des propriétés universelles. Nous allons commencer par le noyau, l'image étant un peu plus délicate à construire. On prendra garde au fait que le noyau n'existe pas dans toutes les catégories (et il en est de même pour l'image).

Définition 14. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X, Y deux objets de $\mathcal{C}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de morphismes $\alpha_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

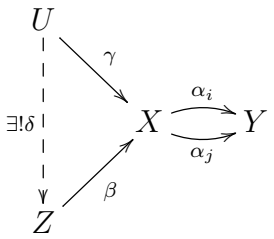
1. Un objet Z, muni d'un morphisme $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z,X)$ est un égaliseur des (α_i) si

$$\forall i,j \in I,\ \alpha_i \circ \beta = \alpha_j \circ \beta,$$

et si, pour tout objet U et tout morphisme $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(U,X)$ tels que $\alpha_i \circ \gamma = \alpha_j \circ \gamma$ pour tous $i,j \in I$, il existe un unique morphisme $\delta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(U,Z)$ tel que

$$\beta \circ \delta = \gamma.$$

La situation est donc la suivante :



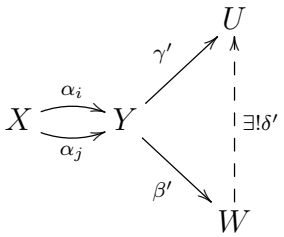
2. Un objet W, muni d'un morphisme $\beta' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,W)$ est un coégaliseur des (α_i) si

$$\forall i,j \in I,\ \beta' \circ \alpha_i = \beta' \circ \alpha_j,$$

et si, pour tout objet U et tout morphisme $\gamma' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,U)$ tels que $\gamma' \circ \alpha_i = \gamma' \circ \alpha_j$ pour tous $i,j \in I$, il existe un unique morphisme $\delta' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(W,U)$ tel que

$$\delta' \circ \beta' = \gamma'.$$

De même, on peut représenter ceci par le diagramme



Remarque 12. Là encore, on voit que l'égaliseur (resp. le coégaliseur) est unique à isomorphisme près.

Définition 15. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet zéro et soit α un morphisme dans $\mathcal{C}$.

1. Le noyau de α est l'égaliseur de α et de 0. On le note $\ker(\alpha)$.
2. Le conoyau de α est le coégaliseur de α et de 0. On le note $\operatorname{coker}(\alpha)$.

Remarque 13. Le noyau d'un morphisme $\alpha : X \to Y$ est donc un couple (K, i) avec $i : K \to X$ tel que (entre autres) $\alpha \circ i = 0$. De même, le conoyau de α est un couple (C, j) où $j : Y \to C$ vérifiant $j \circ \alpha = 0$.

Donnons encore les définitions de "produit fibré" et de "somme amalgamée", aussi connus sous les noms de "pullback" et "pushout", respectivement. La terminologie française adoptée ici est due à Bourbaki.

Définition 16. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X, Y_1, Y_2 des objets de $\mathcal{C}$.

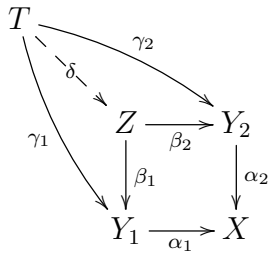
1. Si l'on s'est donné des morphismes $\alpha_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_1, X)$ et $\alpha_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_2, X)$, alors un triplet (Z, β_1, β_2), où Z est un objet de $\mathcal{C}$ et $\beta_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, Y_1)$, $\beta_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, Y_2)$ est appelé un produit fibré si on a

$$\alpha_1 \circ \beta_1 = \alpha_2 \circ \beta_2,$$

et si, pour tout triplet (T, γ_1, γ_2) avec T un objet, $\gamma_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(T, Y_1)$ et $\gamma_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(T, Y_2)$ tel que $\alpha_1 \circ \gamma_1 = \alpha_2 \circ \gamma_2$, il existe un unique $\delta \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(T, Z)$ tel que

$$\beta_i \circ \delta = \gamma_i, \ \forall i = 1, 2.$$

Ceci est représenté par le diagramme



Dans ce cas, on note $Z =: Y_1 \times_X Y_2$.

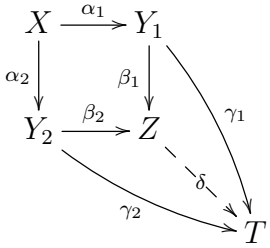
2. De façon duale, si l'on s'est donné $\alpha_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y_1)$ et $\alpha_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y_2)$, alors un triplet (Z, β_1, β_2), où Z est un objet de $\mathcal{C}$ et $\beta_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_1, Z)$, $\beta_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_2, Z)$ est appelé une somme amalgamée si on a

$$\beta_1 \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_2,$$

et si, pour tout triplet (T, γ_1, γ_2) avec T un objet, $\gamma_1 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_1, T)$ et $\gamma_2 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y_2, T)$ tel que $\gamma_1 \circ \alpha_1 = \gamma_2 \circ \alpha_2$, il existe un unique $\delta \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, T)$ tel que

$$\delta \circ \beta_i = \gamma_i, \ \forall i = 1, 2.$$

On représente cela par le diagramme



On note alors $Z =: Y_1 \sqcup_X Y_2$.

Nous savons à présent comparer des objets au sein d'une même catégorie, mais comment peut-on comparer deux catégories différentes ? Nous allons voir que la notion appropriée pour aborder ce problème est celle de "foncteur".

Définition 17. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{D}$ et, pour toute paire d'objets X, Y de $\mathcal{C}$, d'une application $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ telle que, pour tous objets X, Y et Z, on ait

$$\forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ \forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

ainsi que

$$F(id_X) = id_{F(X)}.$$

De plus, un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur covariant $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

Remarque 14.

1. Pour un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, on a alors une application

$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$$

telle que

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f).$$

Dans la suite, lorsque nous emploierons le terme "foncteur", il s'agira d'un foncteur covariant. Lorsque nous considérerons un foncteur contravariant, nous le préciserons.
Nous remarquons là encore un conflit avec la théorie des ensembles. En effet, associer un objet d'une collection à un objet d'une autre collection n'est en général pas permis. Nous pourrions dire qu'il s'agit d'une relation fonctionnelle binaire à un argument $R(x,y)$, comme définie dans [15]. Une des solutions permettant de résoudre ce conflit (c'est-à-dire d'unifier les points de vue algébrique et ensembliste) est d'utiliser ce que l'on appelle les "univers de Grothendieck".

2. Deux foncteurs peuvent, de manière naturelle, être composés. Plus précisément, si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont trois catégories et si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sont deux foncteurs, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on pose

$$(G \circ F)(X) := G(F(X)).$$

De plus, si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, alors on pose

$$\begin{array}{ccccccc} G \circ F & : & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{E}}(G(F(X)),G(F(Y))) \\ & & f & \mapsto & F(f) & \mapsto & G(F(f)) \end{array}.$$

On remarque alors que

$$(G \circ F)(id_X) = G(id_{F(X)}) = id_{(G\circ F)(X)},$$

et

$$(G \circ F)(f \circ g) = G(F(f \circ g)) = G(F(f) \circ F(g)) = (G \circ F)(f) \circ (G \circ F)(g).$$

Ainsi, $G \circ F$ est bien un foncteur. On peut bien évidemment reproduire la même construction pour des foncteurs contravariants.

Exemple 5. 1. On a un foncteur canonique $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ envoyant chaque objet sur lui-même et chaque morphisme sur lui-même.

2. On a aussi un foncteur (contravariant) opposé ${}^{op} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$ associant à chaque objet lui-même et à chaque morphisme, lui-même (mais renversant le sens des flèches).
3. Si A est une algèbre, on a un foncteur $A - \mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ens}$ envoyant chaque module sur son ensemble sous-jacent et chaque morphisme de modules sur l'application ensembliste correspondante. Ce fonteur est appelé foncteur d'oubli. On peut clairement définir un tel foncteur pour d'autres catégories, comme $\mathfrak{Grp}$, $\mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Top}$, $\mathfrak{Ann}$, $\mathfrak{Var}_n^{\infty}$, etc.
4. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et X un objet de $\mathcal{C}$. On définit alors un foncteur

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$$

associant à un objet Y de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et à un morphisme $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, f) & : & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & & g & \mapsto & f \circ g \end{array}.$$

On a alors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, f) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z))$. Ce foncteur est appelé le foncteur représenté par X.
5. On a de même un foncteur contravariant

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$$

envoyant Y sur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ et $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ sur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, X) & : & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ & & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

6. Si A et B sont deux algèbres et si M est un A-B-bimodule, alors

$$M \otimes_B - : B - \mathfrak{Mod} \to A - \mathfrak{Mod}$$

est un foncteur.

Définition 18. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

1. Un objet P de $\mathcal{C}$ est dit projectif si, pour tout épimorphisme $f : X \to Y$, l'application

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, f) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, X) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(P, Y)$$

est surjective.

2. De plus, on dit que la catégorie $\mathcal{C}$ a suffisamment de projectifs si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un objet projectif P de $\mathcal{C}$ et un épimorphisme $P \to X$.
3. Un objet I de $\mathcal{C}$ est dit injectif si, pour tout monomorphisme $f : X \to Y$, l'application

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, I) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, I) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, I)$$

est surjective.

4. De plus, on dit que la catégorie $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'injectifs si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un objet injectif I et un monomorphisme $X \to I$.

Remarque 15. Le Théorème 3 montre alors que, dans une catégorie abélienne ayant assez de projectifs, tout objet admet une résolution projective. En outre, nous avons montré dans le Corollaire 3 qu'en particulier, $A-\mathfrak{Mod}$ possède suffisamment de projectifs. On peut montrer que cette catégorie possède également suffisamment d'injectifs, mais c'est beaucoup plus délicat. Pour une preuve, voir [17], Theorem 3.20.

Définition 19. Un ensemble (partiellement) ordonné $(I, \preceq)$ est appelé

1. système direct si on a

$$\forall i, j \in I,\ \exists k \in I\ ;\ k \preceq i \text{ et } k \preceq j,$$

2. système codirect si on a

$$\forall i, j \in I,\ \exists k \in I\ ;\ i \preceq k \text{ et } j \preceq k.$$

Remarque 16. Tout ensemble partiellement ordonné peut être considéré comme une catégorie $\mathcal{I}$ dont la classe des objets est I et où

$$|\mathrm{Mor}_{\mathcal{I}}(i, j)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \not\preceq j \\ 1 & \text{si} \quad i \preceq j \end{cases}.$$

Moralement, pour $i \preceq j$, l'unique morphisme $\iota \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{I}}(i, j)$ est une injection (ou une projection) canonique

$$\iota : i \to j.$$

On remarque alors que $\mathcal{I}$ est une petite catégorie.

Définition 20. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

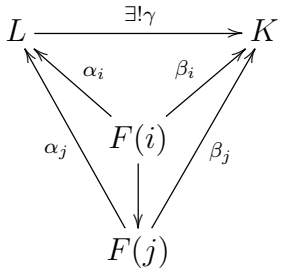
1. Soient $(I, \preceq)$ un système codirect et $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Un objet L de $\mathcal{C}$ muni d'une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de morphismes $\alpha_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F(i), L)$ est appelé colimite (ou limite inductive) des $F(i)$ si on a

$$\forall i \preceq j,\ \alpha_j \circ F(i \preceq j) = \alpha_i,$$

et si, pour tout objet K de $\mathcal{C}$ et toute famille de morphismes $\beta_i \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(F(i), K)$ tels que $\beta_j \circ F(i \preceq j) = \beta_i$ pour tous $i \preceq j$, il existe un unique $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(L, K)$ tel que

$$\gamma \circ \alpha_i = \beta_i,\ \forall i \in I.$$

On la note alors $\operatorname{colim}_{i\in I} F(i)$ ou encore $\varinjlim_{i\in I} F(i)$. Nous pouvons illustrer ceci via le diagramme commutatif



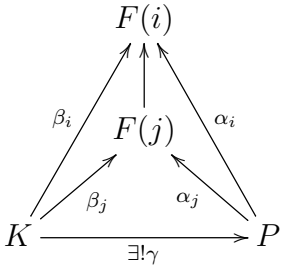
2. Soient $(I, \preceq)$ un système direct et $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur contravariant. Un objet P muni d'une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de morphismes $\alpha_i \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(P, F(i))$ est appelé limite (ou limite projective) des $F(i)$ si on a

$$\forall i \preceq j,\ F(i \preceq j) \circ \alpha_j = \alpha_i,$$

et si, pour tout objet K de $\mathcal{C}$ et toute famille de morphismes $\beta_i \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(K, F(i))$ tels que $F(i \preceq j) \circ \beta_j = \beta_i$ pour tous $i \preceq j$, il existe un unique $\gamma \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(K, P)$ tel que

$$\alpha_i \circ \gamma = \beta_i,\ \forall i \in I.$$

Dans ce cas, on note $P =: \lim_{i\in I} F(i)$ ou $P =: \varprojlim_{i\in I} F(i)$. Ici aussi, on peut illustrer cela avec le diagramme



Remarque 17. On a unicité des limites inductives et projectives à isomorphisme près, si elles existent.

Exemple 6. 1. Nous suivons ici un exemple très parlant donné dans [18]. Considérons une suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de groupes, ainsi qu'une suite de morphismes de groupes surjectifs

$$f_n : G_n \twoheadrightarrow G_{n-1}.$$

Posons

$$G := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n \ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = f_{n+1}(x_{n+1}) \right\}.$$

Montrons que

$$G = \varprojlim G_n.$$

Soient $\alpha_n : G \to G_n$ les morphismes canoniques et soit $F : (\mathbb{N}, \leq) \to \mathfrak{Grp}$ le foncteur donné par $F(n) = G_n$ et

$$\begin{array}{rcccccccc} F(i \leq j)\ : & F(j) & \longrightarrow & F(j-1) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & F(i+1) & \longrightarrow & F(i) \\ & \| & & \| & & \| & & \| \\ & G_j & \xrightarrow{f_j} & G_{j-1} & \xrightarrow{f_{j-1}} \cdots \xrightarrow{f_{i+2}} & G_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & G_i \end{array}$$

i.e. $F(i \leq j) = f_{i+1} \circ f_{i+2} \circ \cdots \circ f_{j-1} \circ f_j$. Soit $x = (x_0, x_1, \dots) \in G$. On a

$$F(i \leq j) \circ \alpha_j(x) = F(i \leq j)(x_j) = f_{i+1} \circ \cdots \circ f_j(x_j)$$

$$= f_{i+1} \circ \cdots \circ f_{j-1}(x_{j-1}) = \cdots = f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i = \alpha_i(x)$$

d'où

$$F(i \leq j) \circ \alpha_j = \alpha_i.$$

De plus, soient K un groupe et $\beta_i : K \to G_i$ des morphismes de groupes tels que

$$\forall i \leq j,\ F(i \leq j) \circ \beta_j = \beta_i.$$

Ceci revient à dire

$$\forall j \in \mathbb{N},\ f_j \circ \beta_j = \beta_{j-1}. \tag{2}$$

Définissons alors

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : & K & \to & G \\ & & x & \mapsto & (\beta_i(x))_{i \geq 0} \end{array}$$

D'après (2), γ est bien défini et $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Grp}}(K, G)$. De plus, pour $x \in K$, on a

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \alpha_j \circ \gamma(x) = \alpha_j((\beta_i(x))_i) = \beta_j(x)\ \Rightarrow\ \alpha_j \circ \gamma = \beta_j$$

et on voit que γ doit être défini de cette façon, d'où l'unicité. On peut alors conclure par propriété universelle de la limite projective.

2. Soit p un nombre premier. En appliquant ce qui précède aux épimorphismes naturels

$$\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\ i \leq j$$

on obtient "l'anneau des entiers p-adiques"

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

3. De même, avec les épimorphismes canoniques

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ n \leq m,$$

on obtient le <u>complété profini</u> de $\mathbb{Z}$:

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

4. Un groupe <u>profini</u> est, par définition, une limite projective de groupes finis. Les groupes $\widehat{\mathbb{Z}}$ et $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ sont donc profinis.

5. On peut adapter les théorèmes de Sylow aux groupes profinis, tant leur structure est proche de celle des groupes finis. De plus, la notion de groupe profini permet l'étude du groupe de Galois d'une extension infinie. Par exemple, si p est un nombre premier et si $\mathbb{F}_p^a$ désigne une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$, on peut montrer que cette extension (algébrique et infinie) admet le complété profini de $\mathbb{Z}$ pour groupe de Galois :

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p^a/\mathbb{F}_p) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Pour clore cette section, nous allons montrer que les limites inductives et projectives existent dans la catégorie $A-\mathfrak{Mod}$, avec A une algèbre et se réalisent comme des noyaux et conoyaux de morphismes de modules.

Proposition 8. *Soit $(M_i, \iota_{i,j})_{i\in I}$ un système codirect de A-modules (i.e. les M_i sont des modules et les $\iota_{i,j} : M_i \to M_j$ sont des applications linéaires pour $i \preceq j$). Considérons*

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \coprod_{i,j\in I; i\preceq j} M_i & \to & \coprod_{i\in I} M_i \\ & & m_i & \mapsto & \iota_{i,j}(m_i) - m_i \quad \in M_j \oplus M_i \end{array}$$

Alors, φ est un morphisme de modules et on a

$$\operatorname{coker}(\varphi) \simeq \varinjlim M_i.$$

De plus, ceci induit une suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow \coprod_{i\preceq j} M_i \xrightarrow{\varphi} \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim M_i \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Soient $q_i : M_i \hookrightarrow \coprod_{j\in I} M_j$ les plongements naturels et, pour $i \preceq j$, soit

$$\begin{array}{ccccc} M_i & \to & M_j \oplus M_i & \hookrightarrow & \coprod_{i\in I} M_i \\ m_i & \mapsto & \iota_{i,j}(m_i) - m_i & & \end{array}.$$

Par propriété universelle du coproduit, ceci induit le morphisme voulu

$$\varphi : \coprod_{i\preceq j} M_i \to \coprod_{k\in I} M_k.$$

Soit la projection canonique

$$\pi : \coprod_{i\in I} M_i \twoheadrightarrow \coprod_{i\in I} M_i \Big/ \operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{coker}(\varphi)$$

et, pour $i \in I$, soit λ_i la composée

$$\lambda_i : M_i \overset{q_i}{\hookrightarrow} \coprod_{j\in I} M_j \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker}(\varphi).$$

Alors on a

$$\forall i \preceq j,\ \lambda_j \circ \iota_{i,j} = \lambda_i.$$

Soient ensuite K un module et soient $\mu_i : M_i \to K$ des morphismes tels que

$$\forall i \preceq j,\ \mu_j \circ \iota_{i,j} = \mu_i.$$

Par propriété universelle du coproduit, il existe des uniques morphismes $\lambda \in \operatorname{Hom}_A(\coprod_i M_i, \operatorname{coker}(\varphi))$ et $\mu \in \operatorname{Hom}_A(\coprod_i M_i, K)$ tels que

$$\lambda \circ q_i = \lambda_i \text{ et } \mu \circ q_i = \mu_i,\ \forall i \in I.$$

Alors, $\lambda\circ\varphi = 0 = \lambda\circ 0$ et $\mu\circ\varphi = 0 = \mu\circ 0$. Par propriété universelle de $\operatorname{coker}(\varphi)$ (coégaliseur de φ et de 0), il existe un unique $\gamma \in \operatorname{Hom}_A(\operatorname{coker}(\varphi), K)$ tel que

$$\gamma \circ \lambda = \mu.$$

Alors, pour tout $i \in I$, on a

$$\gamma \circ \lambda_i = (\gamma \circ \lambda) \circ q_i = \mu \circ q_i = \mu_i.$$

Ainsi, $\operatorname{coker}(\varphi)$ vérifie la propriété universelle de $\operatorname{colim}_{i\in I} M_i$ et donc

$$\varinjlim M_i \simeq \operatorname{coker} \varphi.$$

□

On a un résultat dual pour les limites projectives, qui généralise notre exemple précédent sur les groupes :

Proposition 9. *Soit $(M_i), \iota_{i,j})_{i\in I}$ un système direct de A-modules (i.e. les M_i sont des modules et, pour $i \preceq j$, les $\iota_{i,j} : M_j \to M_i$ sont des morphismes de modules). Pour $j \in I$, on pose*

$$\begin{array}{rccc} \psi_j & : & \prod_{k\in I} M_k & \to & \prod_{i\in I; i\preceq j} M_i \\ & & (m_k)_k & \mapsto & (\iota_{i,j}(m_j) - m_i)_{i\in I; i\preceq j} \end{array}$$

Alors, les (ψ_j) induisent un morphisme

$$\psi : \prod_{k\in I} M_k \to \prod_{i\preceq j} M_i$$

et on a

$$\ker(\psi) \simeq \varprojlim M_i.$$

De plus, on a une suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow \varprojlim M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\psi} \prod_{i\preceq j} M_i \longrightarrow \operatorname{coker}(\psi) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. Soient

$$p_i : \prod_{j\in I} M_j \twoheadrightarrow M_i$$

les projections canoniques. Tout d'abord, remarquons que la propriété universelle du produit $\prod_i M_i$ montre que les ψ_j induisent un morphisme

$$\psi : \prod_{k\in I} M_k \to \prod_{j\in I} \prod_{i\in I; i\preceq j} M_i \simeq \prod_{i\preceq j} M_i,$$

comme désiré. Considérons ensuite le sous-module de $\prod_i M_i$

$$N := \left\{ (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \ ;\ \forall i \preceq j,\ m_i = \iota_{i,j}(m_j) \right\}.$$

Alors, on a clairement $N = \ker(\psi)$ et soient

$$\begin{array}{rccc} \alpha_i & : & N & \to & M_i \\ & & (m_j) & \mapsto & m_i \end{array}.$$

Alors, pour tous $i \preceq j$, on a

$$\forall (m_k)_k \in N,\ \iota_{i,j} \circ \alpha_j((m_k)_k) = \iota_{i,j}(m_j) = m_i = \alpha_i((m_k)_k) \ \Rightarrow\ \iota_{i,j} \circ \alpha_j = \alpha_i.$$

De plus, si K est un module et si $\beta_i : K \to M_i$ sont des morphismes de modules vérifiant

$$\forall i \preceq j,\ \iota_{i,j} \circ \beta_j = \beta_i,$$

alors, par propriété universelle du produit $\prod_i M_i$, il existe un unique morphisme $\beta : K \to \prod_{i \in I} M_i$ tel que

$$\forall i \in I,\ p_i \circ \beta = \beta_i.$$

Soient $x \in K$ et $\beta(x) = (\beta_i(x))_{i \in I}$. Alors

$$\forall i \preceq j,\ \iota_{i,j}(\beta_j(x)) = \beta_i(x) \ \Rightarrow\ \beta(x) \in N,$$

et on peut donc considérer que $\beta : K \to N$. Enfin, on a

$$\forall i \in I,\ \alpha_i(\beta(x)) = \alpha_i((\beta_j(x))_j) = \beta_i(x) \ \Rightarrow\ \alpha_i \circ \beta = \beta_i.$$

Ainsi, par propriété universelle de $\lim_{i \in I} M_i$, on a bien

$$\ker \psi = N \simeq \varprojlim M_i,$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2 Morphismes fonctoriels

Nous savons comment comparer des objets dans une catégorie donnée, et comparer deux catégories via les foncteurs, mais comment compare-t-on les foncteurs ?

Définition 21. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories et $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs (covariants). Un morphisme fonctoriel (ou une transformation naturelle) $\eta : F \to G$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\eta_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ tel que, pour tous objets X et Y, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle G} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),\eta_Y)} \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y)) & \xrightarrow[\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\eta_X,G(Y))]{} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X),G(Y)) \end{array}$$

Ensuite, si η_X est un isomorphisme pour tout objet X, on dit que $\eta : F \to G$ est un isomorphisme fonctoriel (ou encore un isomorphisme naturel). Dans ce cas, on dit que F et G sont isomorphes. De plus, un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit représentable s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F et $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -)$ soient isomorphes.
Enfin, les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont dites équivalentes si on a $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et s'il existe des isomorphismes fonctoriels $\eta : F \circ G \to id_{\mathcal{D}}$ et $\zeta : id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$. Dans ce cas, on dit que G est un quasi-inverse de F, et vice versa. De plus, on dit alors que F (ou G) est une équivalence.

Remarque 18.

1. Là encore, il y a conflit avec la théorie des ensembles, étant donné que l'on a défini un morphisme fonctoriel $\eta : F \to G$ comme une collection de morphismes $\eta_X : F(X) \to G(X)$. À nouveau, nous ne rentrerons pas dans les détails de telles discussions.
2. Bien entendu, on peut composer des morphismes fonctoriels $\eta : F \to G$ et $\zeta : G \to H$ par la formule
$$(\zeta \circ \eta)_X := \zeta_X \circ \eta_X$$
et ce, pour tout objet X de la catégorie sur laquelle F est défini.
3. De plus, pour tout foncteur F, on a un morphisme identité $id : F \to F$ défini par
$$id_X := id_{F(X)}.$$
4. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont deux catégories, on définit la catégorie $\mathrm{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$. On l'appelle la catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$.
5. Enfin, si $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont deux foncteurs, on note $\mathcal{N}(F, G) := \mathrm{Nattrans}(F, G)$ la collection des morphismes fonctoriels $F \to G$.

Nous disposons d'un critère plus commode que la définition pour décider si une collection η_X est un morphisme fonctoriel ou non :

Lemme 17. *Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs entre catégories. Une collection de morphismes $\eta_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ définit un morphisme fonctoriel $\eta : F \to G$ si et seulement si, pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$ et tout $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle \eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

Démonstration. Supposons que le diagramme ci-dessus commute, alors on a

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\eta_X, G(Y)) \circ G(f) = G(f) \circ \eta_X = \eta_Y \circ F(f) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), \eta_Y) \circ F(f)$$

et η est bien un morphisme fonctoriel. Réciproquement, si $\eta \in \mathcal{N}(F, G)$, alors

$$G(f) \circ \eta_X = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\eta_X, G(Y)) \circ G(f) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), \eta_Y) \circ F(f) = \eta_Y \circ F(f),$$

d'où le résultat. □

Définition 22. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On dit que F est

1. dense si, pour tout objet D de $\mathcal{D}$, il existe un objet C dans $\mathcal{C}$ tel que
$$F(C) \simeq D,$$
2. fidèle si, pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'application
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est injective,
3. plein si, pour tous X, Y, l'application
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est surjective.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, alors une sous-collection $\mathcal{C}_0$ d'objets de $\mathcal{C}$ définit une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ si, pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}_0$, on a

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_0}(X, Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

La composition dans $\mathcal{C}_0$ est alors la même que dans $\mathcal{C}$.

Le résultat suivant donne un critère pratique pour décider si un foncteur est une équivalence :

Proposition 10. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors, F est une équivalence si et seulement s'il est fidèle, plein et dense.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Par hypothèse, pour tout objet D de $\mathcal{D}$, on peut choisir un objet C_D dans $\mathcal{C}$ tel que l'on ait un isomorphisme

$$\alpha_D : F(C_D) \xrightarrow{\sim} D.$$

Posons

$$G(D) := C_D.$$

Pour deux objets D_1 et D_2 de $\mathcal{D}$ on obtient un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FG(D_1), FG(D_2)) \\ \varphi & \mapsto & \alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1} \end{array}$$

ainsi qu'un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FG(D_1), FG(D_2)) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G(D_1), G(D_2)) \\ \alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1} & \mapsto & \overline{\varphi} := F^{-1}(\alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1}) \end{array}$$

en utilisant le fait que F induise un isomorphisme entre les morphismes. Posons

$$G(\varphi) := \overline{\varphi}.$$

Maintenant, pour $\varphi_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(D_2, D_3)$ et $\varphi_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$,

$$G(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \overline{\varphi_1 \circ \varphi_2} = F^{-1}(\alpha_{D_3}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \alpha_{D_1}) = F^{-1}(\alpha_{D_3}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \alpha_{D_2} \circ \alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi_2 \circ \alpha_{D_1})$$

$$= F^{-1}(\alpha_{D_3}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \alpha_{D_2}) \circ F^{-1}(\alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi_2 \circ \alpha_{D_1}) = \overline{\varphi_1} \circ \overline{\varphi_2} = G(\varphi_1) \circ G(\varphi_2),$$

et ce car F^{-1} est compatible avec la composition, puisque F est un foncteur (donc compatible avec la composition).
Il nous faut trouver une transformation naturelle $\eta : FG \to id_{\mathcal{D}}$. Ceci est équivalent à trouver des morphismes $\eta_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FG(D_1), D_1)$ et $\eta_2 \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FG(D_2), D_2)$ tels que, pour tout $\sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2)$, le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} FG(D_1) & \xrightarrow{FG(\sigma)} & FG(D_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_2} \\ D_1 & \xrightarrow{\sigma} & D_2 \end{array},$$

mais, par construction de G, poser

$$\eta_D := \alpha_D$$

suffira.
On doit également trouver une transformation naturelle $\zeta : GF \to id_{\mathcal{C}}$. On a un isomorphisme

$$\alpha_{F(C)} : FGF(C) \xrightarrow{\sim} F(C)$$

pour tout objet C de $\mathcal{C}$. Comme F est bijectif sur les ensembles de morphismes, il existe un unique $\beta_C \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(GF(C), C)$ tel que $F(\beta_C) = \alpha_{F(C)}$. Le carré

$$\begin{array}{ccc} GF(C_1) & \xrightarrow{GF(\tau)} & GF(C_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_{C_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{C_2}} \\ C_1 & \xrightarrow{\tau} & C_2 \end{array}$$

commute pour tout $\tau \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ car

$$F(\beta_{C_2} \circ GF(\tau)) = F(\beta_{C_2}) \circ FGF(\tau) = \alpha_{F(C_2)} \circ FGF(\tau) = F(\tau) \circ \alpha_{F(C_1)} = F(\tau \circ \beta_{C_1}),$$

la première égalité provenant du fait que F est un foncteur, la deuxième de la définition de β, la troisième de la construction de G et la quatrième de la définition de β et du fait que F est un foncteur. Ceci termine la preuve. □

Nous allons terminer cette section par un résultat important à propos des morphismes fonctoriels : le lemme de Yoneda, ainsi qu'une conséquence concernant la projectivité des foncteurs représentables dans la catégorie des foncteurs. Nous allons également voir que, malgré le niveau d'abstraction atteint ici et de façon assez surprenante, le lemme de Yoneda permet de retrouver un résultat bien connu de théorie des groupes : le théorème de Cayley.

Théorème 4. *(Lemme de Yoneda)*
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$ et $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$ un foncteur. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -), F) & \to & F(X) \\ \eta & \mapsto & \eta_X(id_X) \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Notons α l'application définie dans l'énoncé. Il est clair que α est bien définie (i.e. $\eta_X(id_X) \in F(X)$). Pour Y un objet de $\mathcal{C}$ et $x \in F(X)$, posons

$$\begin{array}{rccc} h_Y^x & : & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & F(Y) \\ & & f & \mapsto & F(f)(x) \end{array}.$$

Alors, on obtient une collection $h_Y^x \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y), F(Y))$. Soient ensuite A, B deux objets de $\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ et $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A)$. On a

$$h_B^x \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, f)(g) = h_B^x(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, f)(g)) = h_B^x(f \circ g) = F(f \circ g)(x)$$

$$= (F(f) \circ F(g))(x) = F(f)(F(g)(x)) = F(f) \circ h_A^x(g),$$

d'où la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, A) & \xrightarrow{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,f)} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, B) \\ {\scriptstyle h_A^x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_B^x} \\ F(A) & \xrightarrow[F(f)]{} & F(B) \end{array}$$

et d'après le Lemme 17, on a

$$h^x \in \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -), F).$$

On peut donc définir

$$\begin{array}{rccc} \beta & : & F(X) & \to & \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, -), F) \\ & & x & \mapsto & h^x \end{array}$$

Pour $x \in F(X)$, on a

$$\alpha(\beta(x)) = \alpha(h^x) = h_X^x(id_X) = F(id_X)(x) = id_{F(X)}(x) = x,$$

d'où $\alpha \circ \beta = id_{F(X)}$ et β est injective. Il reste donc à montrer que β est surjective. Ce sera alors une bijection, réciproque de α, et le résultat sera démontrer. Soit donc $\eta \in \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),F)$ et soit $x := \eta_X(id_X)$. Pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ et tout $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on a

$$h^x_Y(f) = F(f)(x) = F(f)(\eta_X(id_X)) = \eta_Y \circ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,f)(id_X) = \eta_Y(f),$$

donc, pour tout objet Y,

$$h^x_Y = \eta_Y$$

et donc

$$h^x = \eta.$$

□

Corollaire 4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Alors, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, l'objet $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-)$ est projectif dans la catégorie Fon$(\mathcal{C}, \mathfrak{Ens})$.*

Démonstration. Soit $\eta : F \to G$ un épimorphisme dans $\mathrm{Fon}(\mathcal{C}, \mathfrak{Ens})$. Ceci veut dire que $F(Y) \xrightarrow{\eta_Y} G(Y)$ est surjectif pour tout Y. On applique alors $\mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),?)$ à ce morphisme pour obtenir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),F) & \xrightarrow{\sim} & F(X) \\ {\scriptstyle \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),\eta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_X} \\ \mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),G) & \xrightarrow{\sim} & G(X) \end{array}$$

dans lequel les isomorphismes horizontaux sont donnés par le Lemme de Yoneda. Comme η_X est surjectif, $\mathcal{N}(\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,-),\eta)$ est aussi surjectif. Ceci prouve le corollaire. □

Remarque 19. On rappelle que le théorème de Cayley stipule que pour tout groupe fini G d'ordre n, il existe un monomorphisme

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n.$$

Proposition 11. *Le théorème de Cayley est conséquence du Lemme de Yoneda.*

Démonstration. (Voir [41])
Soit donc G un groupe fini, d'ordre $n \geq 1$, et notons G^S l'ensemble sous-jacent de G. On considère $\mathfrak{G}$ le groupoïde à un seul objet $\bullet$, avec $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\bullet,\bullet) := G$. On considère aussi le foncteur

$$h := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet,-) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}.$$

Plus précisément, $h(\bullet) = G^S$ et, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(\bullet,\bullet)$, alors $h(f) := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, f)$. Définissons ensuite un foncteur

$$F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$$

par

$$\begin{cases} F(\bullet) & := & G^S \\ F(g) & := & \eta^g_\bullet \end{cases}$$

où $\eta^g \in \mathcal{N}(h,h)$ est un morphisme fonctoriel ($\eta^g_\bullet \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S)$) tel que $\eta_\bullet(1) = g$. Ce morphisme existe car, d'après le Lemme de Yoneda, l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha & : & \mathcal{N}(h,h) & \to & G^S = h(\bullet) \\ & & \eta & \mapsto & \eta_\bullet(1) \end{array}$$

est surjective. On rappelle que dans la preuve du Lemme de Yoneda, on a défini η^g comme étant

$$\begin{array}{rccc} \eta^g_\bullet & : & G^S & \to & G^S \\ & & x & \mapsto & h(x)(g) = \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet, x)(g) = g \circ x \end{array}$$

Alors, pour $f, g \in G$ et $x \in G^S$, on a

$$F(f \circ g)(x) = \eta^{f\circ g}_\bullet(x) = f \circ g \circ x = f \circ (g \circ x) = \eta^f_\bullet(g \circ x) = (\eta^f_\bullet \circ \eta^g_\bullet)(x) = (F(f) \circ F(g))(x),$$

d'où

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

De plus, on voit immédiatement que $F(1) = id_{G^S}$ donc F est bien un foncteur fidèle car, d'après le Lemme de Yoneda, l'application α est injective. On peut donc voir F comme un monomorphisme de monoïdes $F : G \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Ens}}(G^S, G^S)$ et comme un foncteur préserve les isomorphismes, on peut considérer que F est un monomorphisme de groupes

$$F : G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G^S) \simeq \mathfrak{S}_n$$

et F est ainsi un plongement

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n,$$

comme souhaité. □

Remarque 20.

1. Notons que la plus grande partie de la puissance du Lemme de Yoneda n'a pas été employée ; en particulier, nous n'avons pas utilisé le fait que η^g est une transformation naturelle. Cependant il est intéressant d'observer de quelle manière notre groupoïde $\mathfrak{G}$ se mue en un groupe dans la catégorie $\mathfrak{Ens}$ via le foncteur F.
2. Si l'on y regarde de plus près, on s'aperçoit que pour $f \in G$, $F(f)$ peut être interprétée comme un application

$$\begin{array}{rccc} F(f) & : & G & \to & G \\ & & g & \mapsto & fg \end{array}$$

et il s'agit de l'action par translation à gauche sur G. On voit alors (de façon peut-être un peu décevante) que la démonstration développée ci-dessus n'est guère différente de la preuve habituelle utilisant le fait qu'une action par translation est fidèle. Néanmoins, il reste instructif de voir comment l'on peut utiliser le formalisme des catégories pour répondre à des questions relativement concrètes.

2.3 Catégories abéliennes

Comme nous allons le voir, les catégories abéliennes constituent l'exemple type de catégories "sympathiques". Plus précisément, il s'agit de catégories dans lesquelles les ensembles $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ possèdent une structure algébrique commode, et dans lesquelles tout morphisme admet un noyau et une image. Nous allons également voir que, dans de telles catégories, le théorème d'isomorphie est vrai. De plus, la notion de catégorie abélienne constituera un outil essentiel dans la suite.

Définition 23. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et R un anneau commutatif. On dit que $\mathcal{C}$ est R-linéaire si

- Pour tous objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est muni d'une structure de R-module,
- La composition des morphismes est une application R-bilinéaire.

Ensuite, la catégorie $\mathcal{C}$ est dite additive si

- $\mathcal{C}$ est $\mathbb{Z}$-linéaire,
- Pour tout ensemble fini I, les produits et coproduits sur I existent et coïncident (i.e. les biproduits finis existent).

Enfin, la catégorie $\mathcal{C}$ est dite abélienne si

- $\mathcal{C}$ est additive,
- Tout morphisme admet un noyau et un conoyau,
- Tout monomorphisme est un noyau,
- Tout épimorphisme est un conoyau.

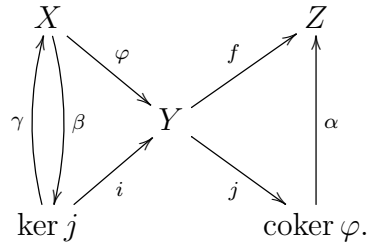
Remarque 21. Un monomorphisme (resp. un épimorphisme) qui se réalise comme le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme est dit normal. On peut aussi dire d'une catégorie qu'elle est pré-abélienne si elle est additive et si tout morphisme admet un noyau et un conoyau. Ainsi, une catégorie est abélienne si elle est pré-abélienne et si tous les monomorphismes et tous les épimorphismes sont normaux. Ensuite, dans une catégorie additive, le produit sur l'ensemble vide est un objet terminal, et le coproduit sur l'ensemble vide est un objet initial. Comme ces deux derniers objets sont, par hypothèse, isomorphes, c'est un objet nul. Une catégorie additive admet donc un objet nul. De plus, on peut aisément montrer que, pour tous objets X, Y d'une catégorie additive, l'élément neutre de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est le morphisme nul.

Lemme 18. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $\varphi : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.*

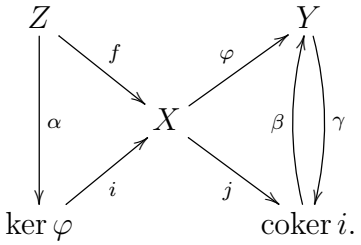
1. *Si φ est un monomorphisme normal, alors c'est le noyau du morphisme naturel $Y \to \mathrm{coker}\,(\varphi)$.*
2. *Si φ est un épimorphisme normal, alors c'est le conoyau de $\ker(\varphi) \to X$.*

Démonstration. 1. Soit donc $\varphi : X \to Y$ un monomorphisme normal. Il existe $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ tel que $(X,\varphi) = \ker(f)$. On note $j : Y \to \mathrm{coker}\,(\varphi)$ et $i : \ker(j) \to Y$ les morphismes canoniques. On a $j \circ \varphi = 0 = f \circ \varphi$ et par propriété universelle

de $\operatorname{coker}(\varphi)$, il existe un unique $\alpha : \operatorname{coker}(\varphi) \to Z$ tel que $\alpha \circ j = f$. Alors, on a $f \circ i = \alpha \circ j \circ i = 0 = j \circ i$ et par propriété universelle de $\ker(j)$, il existe un unique morphisme $\beta : X \to \ker(j)$ tel que $i \circ \beta = \varphi$ et à nouveau, la propriété universelle de $\ker f = X$ implique qu'il existe un unique morphisme $\gamma : \ker(j) \to X$ tel que $\varphi \circ \gamma = i$. Les propriétés universelles de $\ker(j)$ et $\ker(f) = X$ montrent que $\beta \circ \gamma = id_{\ker j}$ et $\gamma \circ \beta = id_X$. Donc $X \simeq \ker j$ et donc φ est le noyau de $Y \to \operatorname{coker} \varphi$. Nous résumons ce raisonnement par le diagramme commutatif



2. On raisonne de façon totalement duale. On peut également illustrer l'argument par le diagramme commutatif



□

Définition 24. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme. On définit l'image et la coimage de f par

$$\operatorname{im} f := \ker(\operatorname{coker}(f))$$

et

$$\operatorname{coim} f := \operatorname{coker}(\ker(f)).$$

De plus, si $g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ est un autre morphisme, on dit que la suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

est exacte si on a

$$\ker g = \operatorname{im} f,$$

ce qui est équivalent à

$$\operatorname{coim} g = \operatorname{coker} f.$$

On peut alors définir les notions de suites exactes courtes et de suites exactes longues de la même manière que pour les modules.

Dans le suite de cette section, on se donne $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Lemme 19. *Soit f un morphisme dans $\mathcal{A}$.*

1. *f est un monomorphisme si et seulement si la suite*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$$

est exacte.

2. *f est un épimorphisme si et seulement si la suite*

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. 1. Supposons que f est un monomorphisme et montrons que $\ker f = 0$. Soient donc un objet K et un morphisme $k : K \to X$ tels que $f \circ k = 0$. On a

$$f \circ k = 0 = f \circ 0 \;\Rightarrow\; k = 0$$

car f est un monomorphisme. Donc, par propriété universelle du noyau, on a bien $\ker f = 0$, d'où l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \ .$$

Réciproquement, soient K un objet et $k, l : K \to X$ tels que $f \circ k = f \circ l$. Comme $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(K, X)$ est un $\mathbb{Z}$-module, il suffit de montrer que si $f \circ k = 0$, alors $k = 0$; mais ceci résulte alors du fait que $\ker f = 0$.

2. Supposons maintenant que f soit un épimorphisme et montrons que $\mathrm{coker}\, f = 0$. Soient donc un objet L et un morphisme $l : Y \to L$ tels que $l \circ f = 0$. Comme f est un épimorphisme et comme $l \circ f = 0 = 0 \circ f$, on a $l = 0$ et par propriété universelle du conoyau, $\mathrm{im}\, f = Y$. La suite

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

est alors exacte.
Réciproquement, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, L)$ étant un groupe abélien, il suffit de montrer que si $l : Y \to L$ vérifie $l \circ f = 0$, alors $l = 0$. Là encore, cela découle de $\mathrm{coker}\, f = 0$, et f est donc un épimorphisme.

□

Corollaire 5. *$f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ est un monomorphisme et un épimorphisme si et seulement si la suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \ .$$

Lemme 20. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Alors*

1. *$Y \xrightarrow{j} \mathrm{coker}\, f$ est un épimorphisme.*

2. *$\ker f \xrightarrow{i} X$ est un monomorphisme.*

Démonstration. On se donne un objet K.

1. Soit $k : \operatorname{coker} f \to K$ un morphisme tel que $k \circ j = 0$. Par propriété universelle de $\operatorname{coker} f$, il existe un unique morphisme $\gamma : \operatorname{coker} f \to K$ tel que $\gamma \circ j = 0$. Mais comme $k \circ j = 0$, on a $k = \gamma$ et k est donc unique. Or, $0 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(\operatorname{coker} f, K)$ vérifie $0 \circ j = 0$, donc $k = 0$ par unicité. Comme nous l'avons déjà vu, cela suffit à montrer que j est un épimorphisme.
2. Soit $l : K \to \ker f$ tel que $i \circ l = 0$. Par propriété universelle de $\ker f$, il existe un unique $\gamma : K \to \ker f$ tel que $i \circ \gamma = 0$, donc $l = \gamma$ par unicité et comme $0 \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(K, \ker f)$ vérifie $i \circ 0 = 0$, on a $l = 0$ et donc i est un monomorphisme.

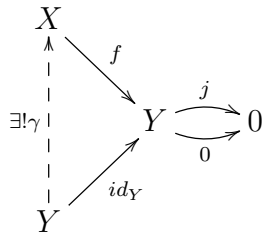
□

Lemme 21. *Un morphisme $f : X \to Y$ est un isomorphisme si et seulement si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire ; montrons donc qu'elle est suffisante. Comme f est un monomorphisme, il est normal et d'après le Lemme 18, c'est le noyau de $Y \xrightarrow{j} \operatorname{coker} f$. Alors, f est l'égaliseur de

$$Y \underset{0}{\overset{j}{\rightrightarrows}} \operatorname{coker} f$$

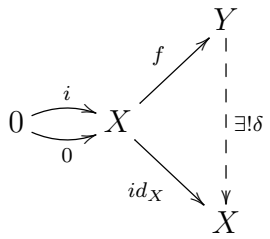
et comme f est un épimorphisme, on a $\operatorname{coker} f = 0$ et en considérant le diagramme



par propriété universelle de l'égaliseur, il existe un unique morphisme $\gamma : Y \to X$ tel que $f \circ \gamma = id_Y$. Ainsi, f est un épimorphisme scindé.
Ensuite, comme f est un épimorphisme, il est normal et d'après le Lemme 18, c'est le conoyau de $\ker f \xrightarrow{i} X$, donc f est le coégaliseur de

$$\ker f \underset{0}{\overset{i}{\rightrightarrows}} X \ .$$

De plus, comme f est un monomorphisme, $i = 0$ et $\ker f = 0$. On a le diagramme



et par propriété universelle du coégaliseur, il existe un unique $\delta : Y \to X$ tel que $\delta \circ f = id_X$. Ainsi, f est un épimorphisme scindé. Finalement, f est un monomorphisme scindé et un épimorphisme scindé, c'est donc un isomorphisme. □

En combinant le Lemme 21 et le Corollaire 5, on obtient

Corollaire 6. *Un morphisme $f : X \to Y$ est un isomorphisme si et seulement si la suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \,.$$

Théorème 5. *Soient $\mathcal{A}$ un catégorie abélienne, X, Y deux objets de $\mathcal{A}$ et $f : X \to Y$ un morphisme. On note $k : \operatorname{im} f \to Y$ et $l : X \to \operatorname{coim} f$ les morphismes naturels. Alors, il existe un unique isomorphisme $\gamma : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ rendant commutatif le carré*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ \operatorname{coim} f & \xrightarrow[\gamma]{\sim} & \operatorname{im} f \end{array}$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que les propriétés universelles de $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$ et de $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f)$ impliquent l'existence des morphismes k et l. De plus, en vertu du Lemme 20, k est un monomorphisme et l est un épimorphisme. Par propriétés universelles de $\ker(\operatorname{coker} f) = \operatorname{im} f$ et de $\operatorname{coker}(\ker f) = \operatorname{coim} f$, il existe $\alpha : \operatorname{coim} f \to Y$ et $\beta : X \to \operatorname{im} f$ tels que le diagramme

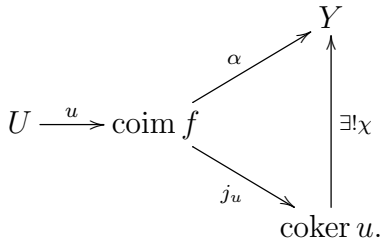
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \operatorname{im} f & & & & \\ & & & \overset{\beta}{\nearrow} & & \overset{k}{\searrow} & & & \\ \ker f & \xrightarrow{i} & X & & \xrightarrow{f} & & Y & \xrightarrow{j} & \operatorname{coker} f \\ & & & \underset{l}{\searrow} & & \underset{\alpha}{\nearrow} & & & \\ & & & & \operatorname{coim} f & & & & \end{array}$$

commute. D'après le Lemme 20, $X \xrightarrow{l} \operatorname{coim} f$ est un épimorphisme et $\operatorname{im} f \xrightarrow{k} Y$ est un monomorphisme. De plus, $j \circ \alpha \circ l = j \circ f = 0$ et l est un épimorphisme, donc $j \circ \alpha = 0$. De même, $k \circ \beta \circ i = f \circ i = 0$ donc $\beta \circ i = 0$. On a $j \circ k = 0$ (car $\operatorname{im} = \ker(\operatorname{coker})$) et par propriété universelle de $\ker(\operatorname{coker})$, il existe un unique $\gamma : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ tel que $k \circ \gamma = \alpha$. De la même manière, $l \circ i = 0$ (car $\operatorname{coim} = \operatorname{coker}(\ker)$) et par propriété universelle de $\operatorname{coker}(\ker)$, il existe un unique $\widetilde{\gamma} : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ tel que $\widetilde{\gamma} \circ l = \beta$.
Ainsi, $k \circ \gamma \circ l = \alpha \circ l = f = k \circ \beta = k \circ \widetilde{\gamma} \circ l$, l étant un épimorphisme, on a $k \circ \gamma = k \circ \widetilde{\gamma}$ et comme k est un monomorphisme, $\gamma = \widetilde{\gamma}$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

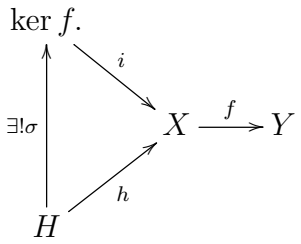
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \operatorname{im} f & & & & \\ & \overset{0}{\nearrow} & & \overset{\beta}{\nearrow} & & \overset{k}{\searrow} & & \overset{0}{\searrow} & \\ \ker f & \xrightarrow{i} & X & & \xrightarrow{f} & & Y & \xrightarrow{j} & \operatorname{coker} f \\ & \underset{0}{\searrow} & & \underset{l}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle \gamma} & \underset{\alpha}{\nearrow} & & \underset{0}{\searrow} & \\ & & & & \operatorname{coim} f & & & & \end{array}$$

Montrons que α est un monomorphisme. Soient donc un objet U et $u : U \to \operatorname{coim} f$ tels que $\alpha \circ u = 0$. Par propriété universelle de $\operatorname{coker} u$, il existe un unique $\chi : \operatorname{coker} u \to Y$ rendant

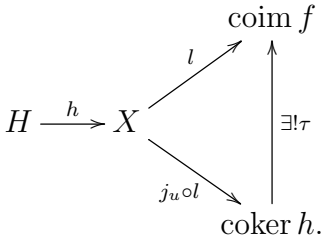
commutatif le diagramme



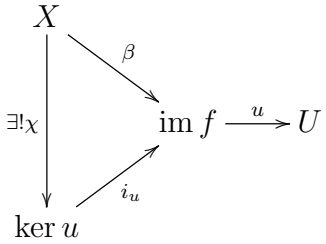
D'après le Lemme 20, j_u et l sont des épimorphismes, donc $j_u \circ l$ aussi. Comme $\mathcal{A}$ est abélienne, il existe un objet H et un morphisme $h : H \to X$ tel que $j_u \circ l = \operatorname{coker} h$ et on a $f \circ h = \alpha \circ l \circ h = \chi \circ j_u \circ l \circ h = 0$, donc par propriété universelle de $\ker f$, il existe un unique $\sigma : H \to \ker f$ rendant commutatif



Ainsi, $l \circ h = l \circ i \circ \sigma = 0$ et donc, par propriété universelle de $\operatorname{coker} u$, il existe un unique $\tau : \operatorname{coker} h = \operatorname{coker} u \to \operatorname{coim} f$ rendant commutatif le diagramme

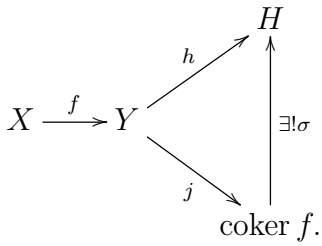


Alors, $\tau \circ j_u \circ l = l$ et l étant un épimorphisme, $\tau \circ j_u = id_{\operatorname{coim} f}$, donc j_u est un monomorphisme (scindé) et $j_u \circ u = 0$, donc $u = 0$ et α est bien un monomorphisme. Montrons maintenant que β est un épimorphisme. Soient donc un objet U et un morphisme $u : \operatorname{im} f \to U$ tels que $u \circ \beta = 0$. Par propriété universelle de $\ker u$, il existe un unique $\chi : X \to \ker u$ tel que le diagramme

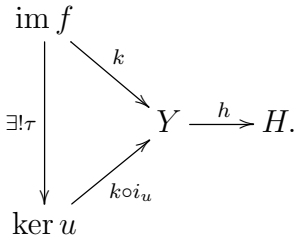


commute et d'après le Lemme 20, i_u et k sont des monomorphismes, donc $k \circ i_u$ est un monomorphisme également. Par hypothèse, il existe un objet H et $h : Y \to H$ tels que $k \circ i_u = \ker h$. On a $h \circ f = h \circ k \circ \beta = h \circ k \circ i_u \circ \chi = 0$ donc, par propriété universelle de

coker f, il existe un unique $\sigma : \operatorname{coker} f \to H$ rendant commutatif le diagramme



Ainsi, $h \circ k = \sigma \circ j \circ k = 0$ et donc, par propriété universelle de $\ker h$, il existe un unique $\tau : \operatorname{im} f \to \ker u = \ker h$ rendant commutatif



Or, $k \circ i_u \circ \tau = k$ et comme k est un monomorphisme, on obtient $i_u \circ \tau = id_{\operatorname{im} f}$, donc i_u est un épimorphisme (scindé) et $u \circ i_u = 0$ implique $u = 0$ et β est bien un épimorphisme.
Finalement, si on a un objet U et un morphisme $u : \operatorname{im} f \to U$ tels que $u \circ \gamma = 0$, alors $u \circ \gamma \circ l = 0 \Rightarrow u \circ \beta = 0$ et β étant un épimorphisme, on a $u = 0$. De même, si $u : U \to \operatorname{coim} f$ vérifie $\gamma \circ u = 0$, alors $k \circ \gamma \circ u = 0$ et donc $\alpha \circ u = 0$ ce qui entraîne $u = 0$, puisque α est un monomorphisme. Ainsi, γ est un épimorphisme et un monomorphisme ; c'est donc un isomorphisme d'après le Lemme 21. □

On en déduit le

Corollaire 7. *(Théorème usuel d'isomorphie)*
Dans une catégorie abélienne, les noyaux et conoyaux commutent.

Remarque 22. En fait, toute catégorie abélienne peut se réaliser comme sous-catégorie de $A - \mathfrak{Mod}$, pour une certaine algèbre A. Néanmoins, les techniques déployées pour démontrer ceci sont subtiles et complexes. Aussi ne prouverons-nous pas ce résultat. Pour une preuve complète, on pourra consulter [6] ou encore [25].

Théorème 6. *(Freyd-Mitchell)*
Toute catégorie abélienne est une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modules. Plus précisément, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, alors il existe une algèbre A ainsi qu'un foncteur plein et fidèle $F : \mathcal{A} \to A - \mathfrak{Mod}$.

Nous allons maintenant exploiter un peu les bonnes propriétés des catégories abéliennes, ainsi que les propriétés d'abélianité des catégories $A - \mathfrak{Mod}$. Nous aurons notamment besoin du lemme du serpent, qui constitue un outil puissant dans les catégories abéliennes, ainsi que d'une de ses conséquences :

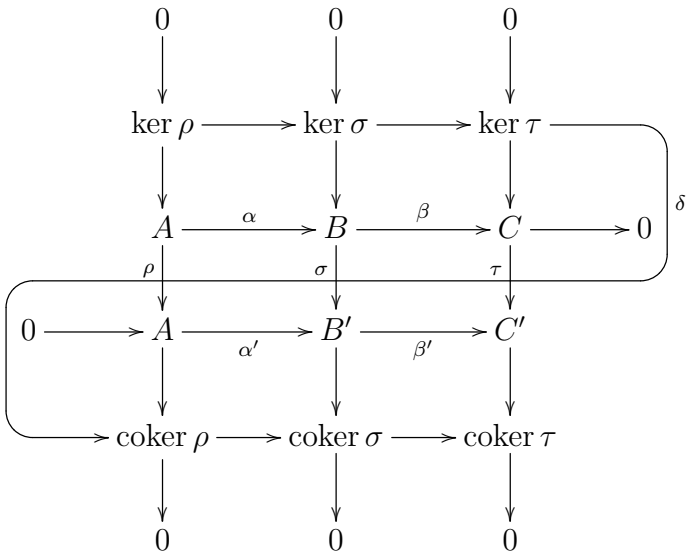
Théorème 7. *(Lemme de Serpent)*
Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' & \xrightarrow[\beta']{} & C' & \end{array}$$

un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes. Alors, il existe une suite exacte

$$\ker\rho \longrightarrow \ker\sigma \longrightarrow \ker\tau \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\rho \longrightarrow \operatorname{coker}\sigma \longrightarrow \operatorname{coker}\tau\ .$$

Nous illustrons ceci à l'aide du "diagramme du serpent" :



Démonstration. D'après le théorème de Freyd-Mitchell, on peut supposer que $\mathcal{A} = \Lambda - \mathfrak{Mod}$ où Λ est une algèbre. Les restrictions aux noyaux donnent une suite exacte

$$\ker\rho \longrightarrow \ker\sigma \longrightarrow \ker\tau\ .$$

De même, on obtient une suite exacte

$$\operatorname{coker}\rho \longrightarrow \operatorname{coker}\sigma \longrightarrow \operatorname{coker}\tau\ .$$

Comment construisons-nous δ ? Soit $x \in \ker\tau \subseteq C$. Puisque le morphisme β est surjectif, il existe un $b \in B$ tel que $\beta(b) = x$. Comme

$$\beta'(\sigma(b)) = \tau(\beta(b)) = \tau(x) = 0$$

par définition de x, il existe un unique $a' \in A'$ avec $\alpha'(a') = \sigma(b)$. Posons

$$\delta(x) := \pi_\rho(a'),$$

où $\pi_\rho : A' \twoheadrightarrow \operatorname{coker}\rho$ est la projection canonique.
Tout d'abord, on observe que δ est bien défini. En effet, soit $\widehat{b} \in B$ tel que $\beta(\widehat{b}) = x = \beta(b)$.

Alors, $b-\widehat{b} \in \ker \beta$ et dans ce cas, $\sigma(b)-\sigma(\widehat{b}) = \alpha'(u')$ pour un certain $u' = \rho(u)$ avec $u \in A$. Il s'ensuit

$$\pi_\rho(u') = \pi_\rho(\rho(u)) = 0,$$

ce qui implique que δ soit indépendant du choix d'un $b \in B$ tel que $x = \beta(b)$.
Soit maintenant $\lambda \in \Lambda$. On a alors $\lambda x = \beta(\lambda b)$ et ainsi $\delta(\lambda x) = \lambda\delta(x)$, car tous les morphismes considérés ici sont Λ-linéaires. De même, on a $\delta(x+x') = \delta(x)+\delta(x')$ puisque $x+x' = \beta(b+b')$.
Montrons à présent que $\ker \delta = \operatorname{im} \beta_{|\ker \sigma}$. En effet, par construction de δ on voit qu'être dans $\ker \delta$ est équivalent à $\pi_\rho(a') = 0$. Ceci est encore équivalent à $a' = \rho(a)$ pour un $a \in A$, et ce, si et seulement si $b = \alpha(a)$, ce qui montre que $\ker \delta = \operatorname{im} \beta_{|\ker \sigma}$.
Il nous reste à établir que

$$\ker(\operatorname{coker} \rho \to \operatorname{coker} \sigma) = \operatorname{im} \delta.$$

On a $a' + \rho(A) \in \ker(\operatorname{coker} \rho \to \operatorname{coker} \sigma)$ si et seulement si $\alpha'(a') \in \sigma(B)$. Cela est équivalent à $\alpha'(a') = \sigma(b)$ avec $b \in B$, ce qui est de nouveau équivalent à $a' + \rho(A) = \delta(\beta(b))$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 23. Nous avons choisi ici d'utiliser le théorème de Freyd-Mitchell, afin de pouvoir travailler avec les éléments des modules et ainsi bien expliciter la construction du morphisme (dit de connexion) δ. Notons que l'on aurait parfaitement pu formaliser cette preuve en termes catégoriques de propriétés universelles, mais elle aurait peut-être été plus lourde.

Corollaire 8. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[\alpha']{} & B' & \xrightarrow[\beta']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramme commutatif dont les lignes sont supposées exactes. Si deux des trois morphismes ρ, σ, τ sont des isomorphismes, alors il en est de même du troisième.

Démonstration. Les lignes étant exactes, on voit que les suites

$$0 \longrightarrow \ker \rho \xrightarrow{\alpha_{|\ker \rho}} \ker \sigma$$

et

$$\operatorname{coker} \sigma \xrightarrow{\overline{\beta'}} \operatorname{coker} \tau \longrightarrow 0$$

sont exactes. De plus, d'après le Lemme du Serpent, la suite longue

$$0 \longrightarrow \ker \rho \longrightarrow \ker \sigma \longrightarrow \ker \tau \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \rho \longrightarrow \operatorname{coker} \sigma \longrightarrow \operatorname{coker} \tau \longrightarrow 0$$

est exacte. Supposons que ρ et σ soient des isomorphismes. Alors on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \tau \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{coker} \tau \longrightarrow 0$$

et $\ker \tau = \operatorname{coker} \tau = 0$, donc τ est un isomorphisme d'après le Corollaire 6. Les autres cas sont parfaitement analogues. □

Nous terminons cette section par une digression utile sur les notions de produit fibré et de somme amalgamée :

Proposition 12. *Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre.*

1. *Pour toute configuration de A-modules*

$$\begin{array}{ccc} & & Y_2 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\ Y_1 & \xrightarrow[\alpha_1]{} & X, \end{array}$$

le produit fibré $Y_1 \times_X Y_2$ est donné par

$$Y_1 \times_X Y_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \oplus Y_2 \ ; \ \alpha_1(y_1) = \alpha_2(y_2)\}.$$

2. *De façon duale, pour toute configuration de A-modules*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & Y_1, \\ {\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & \\ Y_2 & & \end{array}$$

la somme amalgamée $Y_1 \sqcup_X Y_2$ est donnée par

$$Y_1 \sqcup_X Y_2 = (Y_1 \oplus Y_2) \Big/ \{(\alpha_1(x), -\alpha_2(x)), \ x \in X\}.$$

Démonstration. 1. Posons

$$Z := \{(y_1, y_2) \in Y_1 \oplus Y_2 \ ; \ \alpha_1(y_1) = \alpha_2(y_2)\}.$$

Z est construit de telle sorte que les projections sur la première et seconde composante donnent des morphismes β_1, β_2 comme demandé dans la définition 16-1. De plus, étant donné un triplet (T, γ_1, γ_2) tel que $\alpha_1 \circ \gamma_1 = \alpha_2 \circ \gamma_2$, on doit définir $\delta(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ pour avoir la commutativité requise. Réciproquement, cette définition de δ satisfait $\beta_i \circ \delta = \gamma_i, \ i = 1, 2$, d'où le résultat par propriété universelle du produit fibré.

2. On procède de la même manière pour la somme amalgamée.

□

Proposition 13. *Soit le diagramme commutatif de A-modules*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ C & \xrightarrow{\delta} & D. \end{array} \tag{3}$$

1. *Ce diagramme est un produit fibré si et seulement si γ induit un isomorphisme entre les noyaux de α et δ. De plus, si tel est le cas, alors α est surjectif dès que δ l'est.*
2. *Ce diagramme est une somme amalgamée si et seulement si β induit un isomorphisme entre les conoyaux de α et δ. De plus, dans ce cas, δ est injective si α l'est.*

Démonstration. Nous ne prouvons que le premier point, le second étant dual. Soient $K := \ker(\delta)$, $L := \ker(\alpha)$ et $L \overset{\lambda}{\hookrightarrow} A$, $K \overset{\kappa}{\hookrightarrow} C$ les plongements naturels. Par commutativité de (3), γ induit un morphisme $\mu : L \to K$. Le morphisme nul $K \overset{0}{\to} B$ et κ vérifient $\beta \circ 0 = \delta \circ \kappa$ car $K = \ker(\delta)$. Ainsi, par propriété universelle du produit fibré, il existe un unique $\nu : K \to A$ tel que $\gamma \circ \nu = \kappa$ et tel que $\alpha \circ \nu = 0$. Cette dernière équation implique qu'il existe $\omega : K \to L$ tel que $\nu = \lambda \circ \omega$. Ainsi, $\kappa \circ \mu \circ \omega = \gamma \circ \lambda \circ \omega = \gamma \circ \nu = \kappa \circ id_K$. Comme κ est un monomorphisme, $\mu \circ \omega = id_K$. Ensuite, on a $\lambda \circ \omega \circ \mu = \nu \circ \mu$. Comme $\gamma \circ \nu \circ \mu = \kappa \circ \mu = \gamma \circ \lambda$ et $\alpha \circ \nu \circ \mu = 0 = \alpha \circ \lambda$, par unicité du morphisme de la propriété universelle du produit fibré, on obtient $\nu \circ \mu = \lambda$. Donc, $\lambda \circ \omega \circ \mu = \nu \circ \mu = \lambda \circ id_L$ et λ étant un monomorphisme, il vient $\omega \circ \mu = id_L$ et donc μ est un isomorphisme *(cet argument provient de [33], Proposition 1.3.8).*
Réciproquement, supposons que γ induise un isomorphisme $\mu : L \to K$. Soit $P := C \times_D B$ le produit fibré de $C \overset{\delta}{\to} D \overset{\beta}{\leftarrow} B$, avec les morphismes $\pi : P \to B$ et $\psi : P \to C$. Par propriété universelle du produit fibré, il existe $\varphi : A \to B$ tel que $\gamma = \psi \circ \varphi$ et $\alpha = \pi \circ \varphi$. Soient $M := \ker(\pi)$ et $\varepsilon : M \hookrightarrow P$ le plongement naturel. Alors, φ se restreint en $\chi : L \to M$ et ψ en $\xi : M \to K$. Comme $\gamma = \psi \circ \varphi$, on a $\mu = \xi \circ \chi$. Comme μ est un isomorphisme, ξ est un épimorphisme scindé et χ est un monomorphisme scindé. Ainsi, $N := \ker(\xi)$ est un facteur direct de M et $\xi_{|N} = 0$ et on a $\pi \circ \varepsilon_{|N} = 0$. Ainsi, $N \overset{0}{\to} B$ et $N \overset{0}{\to} C$ vérifient la propriété universelle du produit fibré P, donc il existe un unique $\rho : N \to P$ tel que $\pi \circ \rho = 0$ et $\psi \circ \rho = 0$. On a forcément $\rho = 0$ mais $\varepsilon_{|N}$ vérifie aussi cette propriété. Ainsi, $\varepsilon_{|N} = 0$ et ε est un monomorphisme, donc $N = 0$. Donc ξ est un isomorphisme et comme $\mu = \xi \circ \chi$, χ est aussi un isomorphisme. Mais dans ce cas, φ est aussi un isomorphisme en vertu du Corollaire 8, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\lambda} & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow[\varepsilon]{} & P & \xrightarrow[\pi]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute.
Enfin, supposons δ surjectif et soit $b \in B$. On note $\overline{b}$ son image dans D. Comme δ est surjectif, il existe $c \in C$ tel que $\delta(c) = \overline{b}$. Ainsi, $(b, c) \in P$ est envoyé sur b par α. Donc α est surjectif. □

On remarque que les premières assertions des deux points de la Proposition précédente on été démontrées uniquement à l'aide de propriétés universelles, on a donc obtenu :

Proposition 14. *Soit un carré commutatif dans un catégorie abélienne $\mathcal{A}$*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ C & \xrightarrow{\delta} & D. \end{array}$$

Alors, ce diagramme est un produit fibré (resp. une somme amalgamée) si et seulement si γ (resp. β) induit un isomorphisme sur les noyaux (resp. les conoyaux) de α et δ.

2.4 Catégories triangulées

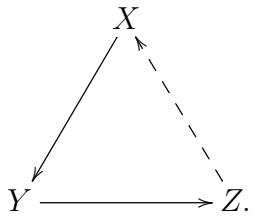
Pour cette dernière section concernant la théorie des catégories, nous proposons une initiation à la notion de "catégorie triangulée". Cette axiomatique est très élégante et permet d'exhiber certaines propriétés structurales de catégories particulières. Il existe plusieurs exemples de catégories triangulées, en particulier la "catégorie d'homotopie des complexes", que nous étudierons plus tard. On peut encore citer les "catégories dérivées", au sujet desquelles on pourra consulter bien évidemment [40], Section 3.4 et [37] mais aussi [35]. Bien que nous ayons choisi d'introduire cette belle notion ici, elle n'est pas essentielle pour la suite et peut être omise en première lecture.

Définition 25. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une autovalence si F est additif (i.e. l'application induite sur les morphismes est $\mathbb{Z}$-linéaire) et si c'est une équivalence.

Définition 26. (Triangles et morphismes)
Soit $\mathcal{T}$ un catégorie additive et soit $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ une autovalence.
Un triangle est un sixtuplet $(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma)$ où X, Y, Z sont des objets de $\mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y)$, $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(Y, Z)$ et $\gamma \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(Z, TX)$. On le note alors

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

ou encore



Ensuite, si $(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma)$ et $(X', Y', Z', \alpha', \beta', \gamma')$ sont deux triangles, on dit qu'un triplet (ξ, η, ζ) est un morphisme de triangles si $\xi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(X, X')$, $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(Y, Y')$ et $\zeta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}}(Z, Z')$ rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle T\xi} \\ X' & \xrightarrow[\alpha']{} & Y' & \xrightarrow[\beta']{} & Z' & \xrightarrow[\gamma']{} & TX'. \end{array}$$

Enfin, on dit que (ξ, η, ζ) est un isomorphisme de triangles si ξ, η et ζ sont des isomorphismes dans $\mathcal{T}$.

Remarque 24. On peut encore représenter un triangle par

$$\cdots \xrightarrow{T^{-1}\alpha} T^{-1}Y \xrightarrow{T^{-1}\beta} T^{-1}Z \xrightarrow{T^{-1}\gamma} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \xrightarrow{T\alpha} TY \xrightarrow{T\beta} \cdots .$$

Définition 27. *(Verdier, [37])* Soient $\mathcal{T}$ une catégorie additive, $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ une autovalence et $\mathbb{T}$ une collection de triangles, appelés triangles distingués. On dit que $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$ est une catégorie triangulée si les quatre axiomes suivants sont vérifiés :

TR1 : a) Deux triangles isomorphes sont simultanément distingués,

b) Le triangle

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

est distingué pour tout objet X,

c) On peut compléter tout morphisme $X \xrightarrow{\alpha} Y$ en un triangle distingué

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow[\beta]{} Z \xrightarrow[\gamma]{} TX$$

que l'on appelle le triangle sur α.

TR2 : Si

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

est un triangle distingué, alors les triangles

$$Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \xrightarrow{-T\alpha} TY$$

et

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}\gamma} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

sont distingués.

TR3 : Si

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

et

$$X' \xrightarrow{\alpha'} Y' \xrightarrow{\beta'} Z' \xrightarrow{\gamma'} TX'$$

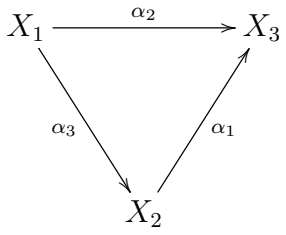
sont deux triangles distingués, alors pour tous morphismes $\xi : X \to X'$ et $\eta : Y \to Y'$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ X' & \xrightarrow[\alpha']{} & Y' \end{array}$$

il existe $\zeta : Z \to Z'$ tel que (ξ, η, ζ) soit un morphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle T\xi} \\ X' & \xrightarrow[\alpha']{} & Y' & \xrightarrow[\beta']{} & Z' & \xrightarrow[\gamma']{} & TX'. \end{array}$$

TR4 : (Axiome octaédrique) Soient trois objets X_1, X_2, X_3 de $\mathcal{T}$ et $\alpha_1 : X_2 \to X_3$, $\alpha_2 : X_1 \to X_3$ et $\alpha_3 : X_1 \to X_2$ tels que $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_3$:



Si l'on considère les triangles sur α_1, α_2 et α_3 :

$$\begin{cases} X_2 \xrightarrow{\alpha_1} X_3 \xrightarrow{\beta_1} Z_1 \xrightarrow{\gamma_1} TX_2 \\ X_1 \xrightarrow{\alpha_3} X_2 \xrightarrow{\beta_3} Z_3 \xrightarrow{\gamma_3} TX_1 \\ X_1 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \xrightarrow{\beta_2} Z_2 \xrightarrow{\gamma_2} TX_1 \end{cases}$$

alors, il existe des morphismes

$$\begin{cases} Z_3 \xrightarrow{\delta_1} Z_2 \\ Z_2 \xrightarrow{\delta_3} Z_1 \\ Z_1 \xrightarrow{\delta_2} TZ_3 \end{cases}$$

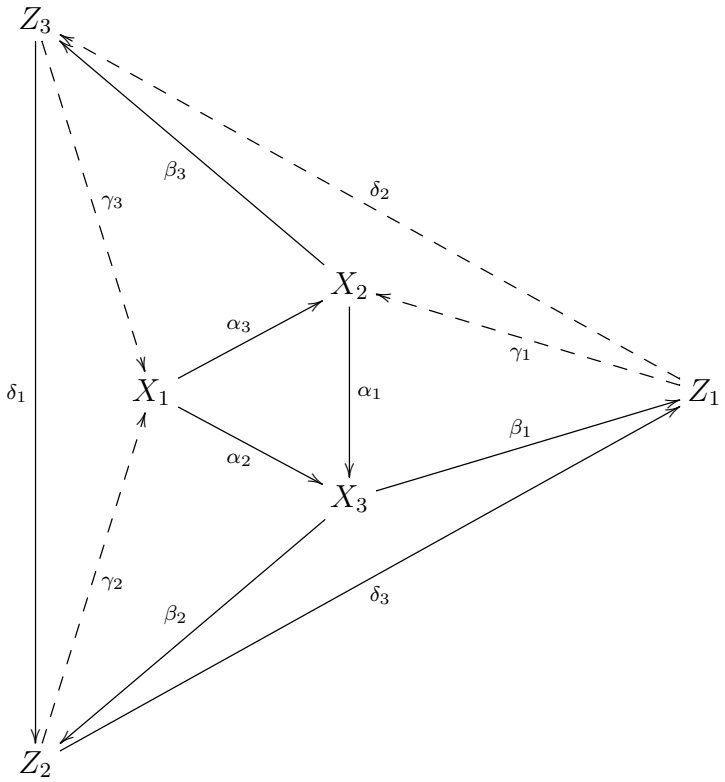
tels que le triangle

$$Z_3 \xrightarrow{\delta_1} Z_2 \xrightarrow{\delta_3} Z_1 \xrightarrow{\delta_2} TZ_3$$

soit distingué et vérifiant les cinq relations de commutativité suivantes :

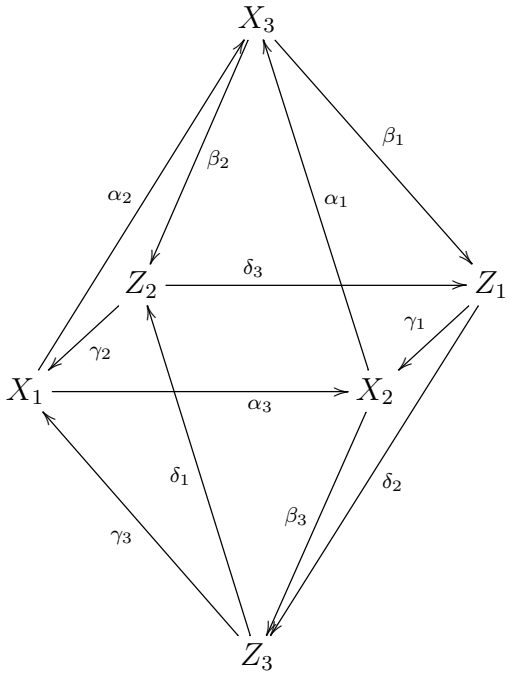
$$\begin{cases} \gamma_2 \circ \delta_1 = \gamma_3, \\ \delta_3 \circ \beta_2 = \beta_1, \\ T\beta_3 \circ \gamma_1 = \delta_2, \\ \beta_2 \circ \alpha_1 = \delta_1 \circ \beta_3, \\ T\alpha_3 \circ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \delta_3. \end{cases}$$

Remarque 25. On peut illustrer le dernier axiome TR4 par



Dans ce diagramme, les relations de commutativité concernent le triangle central, les triangles faisant intervenir les δ_i et les trapèzes du bas et de gauche. De plus, les autres triangles sont

supposés distingués (y compris le plus grand d'entre eux).
On peut également représenter TR4 par l'octaèdre (auquel il doit son nom) :



Lemme 22. *Dans la définition 27, l'axiome* TR3 *est conséquence des axiomes* TR1, TR2 *et* TR4. *De plus, en supposant satisfaits ces trois derniers axiomes et avec le morphisme de triangles*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & TA_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \exists\tau_1} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_1} \\ A_2 & \xrightarrow[\alpha_2]{} & B_2 & \xrightarrow[\beta_2]{} & C_2 & \xrightarrow[\gamma_2]{} & TA_2, \end{array}$$

il existe des morphismes

$$\begin{cases} C_2 \xrightarrow{\tau_2} C_3 \\ C_3 \xrightarrow{\tau_3} TC_1 \\ B_3 \xrightarrow{\beta_3} C_3 \\ C_3 \xrightarrow{\gamma_3} TA_3 \end{cases}$$

tels que l'on ait le diagramme commutatif suivant, dont les lignes et colonnes sont des triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & TA_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_1} \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & TA_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_2} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_2} \\ A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & C_3 & \xrightarrow{\gamma_3} & TA_3 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_3} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_3} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_3} & & \\ TA_1 & \xrightarrow[T\alpha_1]{} & TB_1 & \xrightarrow[T\beta_1]{} & TC_1 & & \end{array}$$

Démonstration. Soit le carré

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} \\ A_3 & \xrightarrow[\alpha_2]{} & B_2. \end{array}$$

D'après TR1, c), il existe un diagramme commutatif avec lignes et colonnes distinguées

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & TA_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & & & \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & TA_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & & & \\ A_3 & & B_3 & & & & \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_3} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_3} & & & & \\ TA_1 & & TB_1 & & & & \end{array}$$

Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & B_1 & & \\ & \overset{\alpha_1}{\nearrow} & & \overset{\sigma_1}{\searrow} & \\ A_1 & & \xrightarrow{\delta} & & B_2 \\ & \underset{\rho_1}{\searrow} & & \underset{\alpha_2}{\nearrow} & \\ & & A_2 & & \end{array}$$

(i.e. $\delta := \sigma_1 \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \rho_1$). La troisième partie de TR1 montre qu'il existe un triangle distingué sur δ :

$$A_1 \xrightarrow{\delta} B_2 \xrightarrow{\varepsilon} D \xrightarrow{\varphi} TA_1 \ ,$$

et en appliquant TR4 à $\delta = \sigma_1 \circ \alpha_1$, on obtient

$$\begin{cases} \zeta_1 : C_1 \to D \\ \eta_1 : D \to B_3 \\ \chi_1 : B_3 \to TC_1 \end{cases}$$

tels que

$$C_1 \xrightarrow{\zeta_1} D \xrightarrow{\eta_1} B_3 \xrightarrow{\chi_1} TC_1$$

soit distingué et tels qu'on ait

$$\begin{cases} \gamma_1 = \varphi \circ \zeta_1 \\ \sigma_2 = \eta_1 \circ \varepsilon \\ \chi_1 = T\beta_1 \circ \sigma_3 \\ \zeta_1 \circ \beta_1 = \varepsilon \circ \sigma_1 \\ \sigma_3 \circ \eta_1 = T\alpha_1 \circ \varphi. \end{cases}$$

Ensuite, en appliquant TR4 à $\delta = \alpha_2 \circ \rho_1$, on obtient des morphismes

$$\begin{cases} \eta_2 : A_3 \to D \\ \zeta_2 : D \to C_2 \\ \chi_2 : C_2 \to TA_3 \end{cases}$$

tels que le triangle

$$A_3 \xrightarrow{\eta_2} D \xrightarrow{\zeta_2} C_2 \xrightarrow{\chi_2} TA_3$$

soit distingué et tels que

$$\begin{cases} \rho_3 = \varphi \circ \eta_2 \\ \beta_2 = \zeta_2 \circ \varepsilon \\ \chi_2 = T\rho_2 \circ \gamma_2 \\ \eta_2 \circ \rho_2 = \varepsilon \circ \alpha_2 \\ T\rho_1 \circ \varphi = \gamma_2 \circ \zeta_2. \end{cases}$$

On pose alors

$$\begin{cases} \tau_1' := \zeta_2 \circ \zeta_1 \\ \alpha_3 := \eta_1 \circ \eta_2. \end{cases}$$

Alors, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & TA_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1'} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_1} \\
A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & TA_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & & & \\
A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_3} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_3} & & & & \\
TA_1 & \xrightarrow[T\alpha_1]{} & TB_1 & & & &
\end{array}$$

En effet, on a

$$\tau_1' \circ \beta_1 = \zeta_2 \circ \zeta_1 \circ \beta_1 = \zeta_2 \circ \varepsilon \circ \sigma_1 = \beta_2 \circ \sigma_1,$$

$$\gamma_2 \circ \tau_1' = \gamma_2 \circ \zeta_2 \circ \zeta_1 = T\rho_1 \circ \varphi \circ \zeta_1 = T\rho_1 \circ \gamma_1,$$

$$\sigma_3 \circ \alpha_3 = \sigma_3 \circ \eta_1 \circ \eta_2 = T\alpha_1 \circ \varphi \circ \eta_2 = T\alpha_1 \circ \rho_3,$$

$$\alpha_3 \circ \rho_2 = \eta_1 \circ \eta_2 \circ \rho_2 = \eta_1 \circ \varepsilon \circ \alpha_2 = \sigma_2 \circ \alpha_2,$$

et ceci prouve TR3.
On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & TA_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & TA_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
A_3 & \longrightarrow & B_3 & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
TA_1 & \longrightarrow & TB_1 & & & &
\end{array}$$

Soit

$$A_3 \xrightarrow{\alpha_3} B_3 \xrightarrow{\beta_3} C_3 \xrightarrow{\gamma_3} TA_3$$

le triangle distingué sur α_3 et appliquons TR4 à $\alpha_3 = \eta_1 \circ \eta_2$. On obtient donc

$$\begin{cases} C_2 \xrightarrow{\tau_2} C_3 \\ C_3 \xrightarrow{\tau_3} TC_1 \\ TC_1 \xrightarrow{\mu} TC_2 \end{cases}$$

tels que le triangle suivant soit distingué

$$C_2 \xrightarrow{\tau_2} C_3 \xrightarrow{\tau_3} TC_1 \xrightarrow{\mu} TC_2 \, .$$

De plus, les relations de commutativité de TR4 donnent la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & TA_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1 = T^{-1}\mu} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_1} \\
A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 & \xrightarrow{\gamma_2} & TA_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_2} & & \downarrow{\scriptstyle T\rho_2} \\
A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & C_3 & \xrightarrow{\gamma_3} & TA_3 \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_3} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_3} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_3} & & \\
TA_1 & \xrightarrow[T\alpha_1]{} & TB_1 & \xrightarrow[T\beta_1]{} & TC_1 & \xrightarrow[\mu]{} & TC_2
\end{array}$$

d'où le résultat. Remarquons que l'on a pas montré que $\tau_1 = \zeta_2 \circ \zeta_1$. □

Lemme 23. *Soient $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$ une catégorie triangulée et*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

un triangle distingué. Alors, on a

$$\gamma \circ \beta = 0 = \beta \circ \alpha.$$

Démonstration. D'après la première partie de TR1, pour tout U, le triangle

$$U \xrightarrow{id} U \longrightarrow 0 \longrightarrow TU$$

est distingué. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\
\downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle Tid = id} \\
X & \xrightarrow[\alpha]{} & Y & \xrightarrow[\beta]{} & Z & \xrightarrow[\gamma]{} & TX.
\end{array}$$

D'après TR3, on peut compléter ce diagramme avec $0 \to Z$ pour obtenir le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \\
\downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
X & \xrightarrow[\alpha]{} & Y & \xrightarrow[\beta]{} & Z & \xrightarrow[\gamma]{} & TX.
\end{array}$$

Ainsi, $\beta \circ \alpha = 0$. Ensuite, les triangles

$$Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TY$$

$$Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \xrightarrow{-T\alpha} TY$$

sont distingués (le dernier d'après TR2). De plus, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{id} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX & \xrightarrow{-T\alpha} & TY \end{array}$$

donc d'après TR3, on peut le compléter par $0 \to TX$ et on a la commutativité de

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{id} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX & \xrightarrow{-T\alpha} & TY \end{array}$$

et donc $\gamma \circ \beta = 0$. □

Lemme 24. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée et $\alpha \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{T}}(X, Y)$ un morphisme dans $\mathcal{T}$. Alors*

1. *α est un isomorphisme si et seulement si le triangle*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

est distingué.

2. *α est un monomorphisme scindé si et seulement si*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} TX$$

est un triangle distingué.

3. *α est un épimorphisme scindé si et seulement si le triangle suivant est distingué*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{0} Z \longrightarrow TX\ .$$

Démonstration. Il suffit de prouver 2) et 3). En effet, supposons ces deux points vérifiés. Si $\beta : U \to V$ est un isomorphisme, alors le diagramme

$$\begin{array}{lccccccc} (1) & U & \xrightarrow{\beta} & V & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TU \\ & \| & & \downarrow{\scriptstyle \beta^{-1}} & & \| & & \| \\ (2) & U & \xrightarrow[id]{} & U & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TU \end{array}$$

commute. Le triangle (2) est distingué et isomorphe à (1), donc (1) est distingué d'après la première partie de TR1. Donc, si β est un isomorphisme, alors le triangle (1) est distingué. Réciproquement, si le triangle

$$U \xrightarrow{\beta} U \longrightarrow 0 \longrightarrow TU$$

est distingué, alors 2) et 3) montrent que β est un monomorphisme scindé et un épimorphisme scindé, c'est donc un isomorphisme.
Montrons donc 2). Si le triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} TX$$

est distingué, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{0} & TX \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \end{array}$$

commute et les axiomes TR2 et TR3 montrent qu'il existe $\beta : Y \to X$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{0} & TX \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \| \\ X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \end{array}$$

soit commutatif. Alors $\beta \circ \alpha = id_X$. Réciproquement, s'il existe $\beta : Y \to X$ tel que $\beta \circ \alpha = id_X$, alors on a commutativité de

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \| \\ X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \end{array}$$

où les lignes sont distinguées et TR3 appliqué à ce diagramme montre qu'il existe $Z \to 0$ tel que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow & & \| \\ X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TX \end{array}$$

soit un morphisme de triangles. Alors, $Z \to TX$ est le morphisme nul et on a le triangle distingué

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} TX\ .$$

Montrons maintenant 3). Supposons que le triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{0} Z \longrightarrow TX$$

soit distingué. Alors, le triangle

$$T^{-1}Z \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{0} Z$$

est distingué d'après TR2 et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Z & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{0} & Z \\ \uparrow{\scriptstyle 0} & & & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{id} & Y & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Donc il existe $\gamma : Y \to X$ tel qu'on ait le morphisme de triangle

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Z & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{0} & Z \\ \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{id} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où $\alpha \circ \gamma = id_Y$. Enfin, supposons que

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$$

soit un triangle distingué et soit $\gamma : Y \to X$ tel que $\alpha \circ \gamma = id_Y$. Alors, on peut compléter le carré gauche ci-dessus en un morphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \uparrow{\scriptstyle \gamma} & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle T\gamma} \\ Y & \xrightarrow{id} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \end{array}$$

et donc, le triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$$

est distingué d'après TR1, d'où le résultat. □

Lemme 25. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée, ainsi que*

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & TA_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & TB_1 \end{array}$$

un morphisme de triangles distingués. Si deux des trois premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes, alors il en est de même du troisième.

Démonstration. Supposons que $A_1 \to B_1$ et $A_3 \to B_3$ soient des isomorphismes et soit

$$A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow TA_2$$

un triangle sur $A_2 \to B_2$. D'après les Lemmes 22 et 24, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & TA_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & TB_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T0 = 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ TA_1 & \longrightarrow & TA_2 & \longrightarrow & TA_3 & & \end{array}$$

Ainsi, le triangle

$$0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow T0$$

est distingué, donc d'après le Lemme 24, $0 \to C_2$ est un isomorphisme, donc $C_2 \simeq 0$ et donc

$$A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow TA_2$$

est distingué et alors $A_2 \to B_2$ est un isomorphisme en vertu du Lemme 24. On raisonne de la même manière pour les autres cas. □

Corollaire 9. *Dans une catégorie triangulée, si*

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow TA_1$$

et

$$A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \longrightarrow A'_3 \longrightarrow TA_1$$

sont des triangles distingués, alors on a

$$A_3 \simeq A'_3.$$

Démonstration. On a un morphisme de triangles d'après TR3

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & TA_1 \\ \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \exists\zeta} & & \| \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \longrightarrow & A'_3 & \longrightarrow & TA_1 \end{array}$$

et le Lemme précédent implique que $\zeta : A_3 \to A'_3$ soit un isomorphisme. □

Définition 28.

1. Soient $(\mathcal{T}_1, T_1, \mathbb{T}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, T_2, \mathbb{T}_2)$ deux catégories triangulées et $F : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ un foncteur. F est dit de catégories triangulées s'il envoie un triangle distingué sur un triangle distingué et si
$$T_2 \circ F = F \circ T_1.$$
2. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ un foncteur covariant (resp. contravariant). F est dit homologique (resp. cohomologique) s'il envoie un triangle distingué sur une suite exacte longue.

Proposition 15. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée,*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

un triangle distingué et U un objet de $\mathcal{T}$. Alors, on a des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, T^{-2}Z) \\ & & & & & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, T^{-1}Z) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, T^{-1}Y) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, T^{-1}X) & & \\ \downarrow & & & & & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, Z) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, TZ) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, TY) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, TX) & & \\ \downarrow & & & & & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U, T^2X) & \longrightarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \cdots & \longleftarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T^{-2}Z,U) \\
 & & & & \uparrow \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T^{-1}Z,U) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T^{-1}Y,U) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T^{-1}X,U) \\
\uparrow & & & & \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X,U) & \longleftarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,U) & \longleftarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Z,U) \\
 & & & & \uparrow \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(TZ,U) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(TY,U) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(TX,U) \\
\uparrow & & & & \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(T^2X,U) & \longleftarrow & \cdots & &
\end{array}.$$

Autrement dit, les foncteurs $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,-)$ *et* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(-,U)$ *sont homologique et cohomolgique, respectivement.*

Démonstration. D'après le Lemme 23, la composée de deux morphismes consécutifs dans un triangle est nulle. Montrons que la première suite est exacte. Soit $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,Z)$ tel que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,\gamma)(\varphi) = \gamma \circ \varphi = 0$. Alors, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\
\uparrow{\scriptstyle 0} & & & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{id} & U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et TR3 montre qu'il existe $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,Y)$ tel que

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\
\uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle 0} \\
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{id} & U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

commute. Mais alors, $\varphi = \beta \circ \psi = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,\beta)(\psi)$ donc la suite est exacte en $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,Z)$, car si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,Z)$ est tel que $\varphi = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,\beta)(\psi)$, alors $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(U,\gamma)(\varphi) = \gamma \circ \varphi = \gamma \circ \beta \circ \psi = 0$. D'après TR2, la suite est exacte partout.
De façon duale, soit $\varphi \in \ker(\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,U) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X,U))$, alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{id} & U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

qui, avec TR3, peut être complété avec $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Z,U)$ pour former

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{id} & U & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 10. *Tout foncteur représentable est (co)homologique.*

Troisième partie

Introduction à l'algèbre homologique

3.1 La catégorie des complexes

Nous disposons maintenant des notions requises pour aborder la théorie de l'algèbre homologique. Nous introduisons ici plusieurs nouveaux objets, dont les complexes, que l'on peut appréhender comme étant des suites longues "à moitié exactes", ainsi que leur homologie : espace mesurant le défaut d'exactitude des complexes. Nous allons tout d'abord nous pencher les complexes de modules, puis nous élargirons naturellement le cadre de notre étude aux complexes d'objets d'une catégorie abélienne. Nous montrerons également que les complexes forment une catégorie abélienne, ce qui nous permettra de disposer des résultats confortables établis en 2.3. Le lecteur souhaitant appronfondir certains points pourra se référer à [39], chapitres 1-3 ou [31], chapitres 1-2 ainsi que [9], chapitres 2 et 4 ou encore les cinq premiers chapitres de [20].

Dans la suite de cette section, on fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre. Tous les modules seront des modules sur A.

Définition 29. 1. Un module M est dit gradué s'il existe une famille de sous-modules $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de M telle que

$$M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n.$$

M_n est alors appelé la composante homogène de degré n de M.

2. Soient $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, $N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ deux modules gradués et $\varphi : M \to N$ un morphisme. On dit que φ est de degré d et on note $d = \deg(\varphi)$ si

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathrm{im}\,(\varphi_{|M_n}) \subseteq N_{n+d}.$$

Définition 30. Un complexe $M^\bullet$ est un couple (M, d) où M est un module gradué et $d : M \to M$ est un endomorphisme de degré 1 et de carré 0. On dit alors que d est la différentielle du complexe $M^\bullet$.

Remarque 26. 1. On aurait tout aussi bien pu imposer que $\deg(d) = -1$, mais cela n'a pas d'importance car on peut passer d'un degré à l'autre en laissant d inchangée et en remplaçant M_n par M_{-n}. Notre choix dépendra du contexte. Dans la littérature, on peut trouver la convention suivante :
Si $\deg(d) = -1$, on parle de complexe de chaînes,
Si $\deg(d) = 1$, on parle de complexe de cochaînes.
Ce vocabulaire provient du cadre topologique dans lequel la notion de complexe est apparue, et plus particulièrement la topologie algébrique et la topologie différentielle.

2. On peut visualiser un complexe par une suite

$$\cdots \xrightarrow{d_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \cdots$$

avec $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a noté ici $d_n := d^{|M_{n+1}}_{|M_n}$.

Définition 31. Soient $M^\bullet = (M, d_M)$ et $N^\bullet = (N, d_N)$ deux complexes. Un morphisme $\varphi : M \to N$ est un morphisme de complexes si φ est homogène de degré 0 et si on a

$$d_N \circ \varphi = \varphi \circ d_M.$$

Il est alors équivalent d'imposer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_{n-1} & \xrightarrow{(d_M)_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{(d_M)_n} & M_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_{n-1} & \xrightarrow[(d_N)_{n-1}]{} & N_n & \xrightarrow[(d_N)_n]{} & N_{n+1} & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

Remarque 27.
1. La collection des complexes de A-modules, munie des morphismes de complexes est une catégorie, notée $\mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod})$.
2. On peut munir $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ d'une structure de catégorie pour toute sous-catégorie additive $\mathcal{A}$ de $A - \mathfrak{Mod}$. Les objets de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ sont les A-modules gradués $M = \bigoplus_n M_n$ où chaque M_n est un objet de $\mathcal{A}$, munis d'une différentielle A-linéaire $d : M \to M$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait $d_n \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M_n, M_{n+1})$.

Définition 32. Soit $M^\bullet = (M, d)$ un complexe de cochaînes (resp. de chaînes). Comme $d^2 = 0$, on a $\mathrm{im}\,(d) \subseteq \ker(d)$. Ainsi,

$$H(M) := \ker d \,/_{\mathrm{im}\, d}$$

est un module. De plus, d étant de degré 1 (resp. -1), $H(M)$ est aussi gradué

$$H(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^n(M) \quad \left(\text{resp. } H(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n(M) \right)$$

où

$$H^n(M) := \ker d_n \,/_{\mathrm{im}\, d_{n-1}} \quad \left(\text{resp. } H_n(M) := \ker d_n \,/_{\mathrm{im}\, d_{n+1}} \right).$$

On dit alors que
1. $H^n(M)$ (resp. $H_n(M)$) est le $n^{\text{ème}}$ module de cohomologie (resp. d'homologie) du complexe $M^\bullet$.
2. $H(M)$ est la cohomologie (resp. l'homologie) de $M^\bullet$.
3. Les éléments de $\ker(d)$ sont les cocycles (resp. les cycles).
4. Les éléments de $\mathrm{im}\,(d)$ sont les cobords (resp. les bords).

Remarque 28.
1. Comme $\mathrm{im}\,(d) = 0$ dans $H(M)$, d induit le morphisme nul sur $H(M)$. Néanmoins, on peut considérer $H(M)$ comme un complexe, muni de la différentielle nulle.
2. Notons qu'étant données les définitions, on peut parler de complexe et d'homologie dans toute catégorie abélienne.

Définition 33. $*$ Un complexe de cochaînes est dit :

- borné supérieurement s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$, pour tout $n > n_0$:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n_0-2}} M_{n_0-1} \xrightarrow{d_{n_0-1}} M_{n_0} \xrightarrow{d_{n_0}} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

- borné inférieurement s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$, pour tout $n < n_0$:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{n_0-1}} M_{n_0} \xrightarrow{d_{n_0}} M_{n_0+1} \xrightarrow{d_{n_0+1}} \cdots$$

$*$ Un complexe de chaînes est dit :

- borné supérieurement s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$, pour tout $n < n_0$:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n_0+2}} M_{n_0+1} \xrightarrow{d_{n_0+1}} M_{n_0} \xrightarrow{d_{n_0}} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

- borné inférieurement s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$, pour tout $n > n_0$:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{n_0+1}} M_{n_0} \xrightarrow{d_{n_0}} M_{n_0-1} \xrightarrow{d_{n_0-1}} \cdots$$

$*$ Dans les deux cas, un complexe est borné s'il l'est inférieurement et supérieurement.

$*$ Enfin, un complexe a une (co)homologie

- bornée à droite si $(H(M), 0)$ est borné supérieurement,
- bornée à gauche si $(H(M), 0)$ est borné inférieurement,
- bornée si $(H(M), 0)$ est borné.

Lemme 26. *1. Soient (M, d_M), (N, d_N) deux complexes et $\varphi : M^\bullet \to N^\bullet$ un morphisme de complexes. Alors, φ induit un morphisme de degré 0*

$$\begin{array}{rccc} H(\varphi) \ : & H(M) & \to & H(N) \\ & \overline{m} & \mapsto & \overline{\varphi(m)} \end{array}$$

2. En notant $A - \mathfrak{Mod}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des A-modules gradués, on a un foncteur

$$H : \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod}) \to A - \mathfrak{Mod}_{\mathbb{Z}}.$$

Démonstration. 1. On a

$$m \in \ker(d_M) \ \Rightarrow \ d_N(\varphi(m)) = \varphi(d_M(m)) = \varphi(0) = 0 \ \Rightarrow \ \varphi(m) \in \ker(d_N),$$

donc la composée

$$\begin{array}{rccccc} \overline{\varphi} \ : & \ker(d_M) & \to & \ker(d_N) & \twoheadrightarrow & H(N) \\ & m & \mapsto & \varphi(m) & \mapsto & \overline{\varphi(m)} = \varphi(m) + \operatorname{im}(d_N) \end{array}$$

est bien définie. De plus, si $m \in \operatorname{im}(d_M)$, alors $m = d_M(m')$ avec $m' \in M$ et alors

$$\overline{\varphi}(m) = \overline{\varphi(m)} = \overline{\varphi(d_M(m'))} = \overline{d_N(\varphi(m'))} = \overline{0} \ \Rightarrow \ m \in \ker(\overline{\varphi}),$$

donc, $\operatorname{im}(d_M) \subseteq \ker(\overline{\varphi})$ et donc $\overline{\varphi}$ se factorise en $H(\varphi)$ qui définit donc bien un morphisme de degré 0.

2. Il suffit de montrer que $H(id_M) = id_{H(M)}$ et que, si $\varphi : M \to N$ et $\psi : L \to M$ sont des morphismes de complexes, alors $H(\varphi \circ \psi) = H(\varphi) \circ H(\psi)$, mais ces faits sont clairs.

□

Définition 34. Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie additive de $A - \mathfrak{Mod}$. On note

* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes dans $\mathcal{A}$,
* Pour $x \in \{+, -, b, \emptyset\}$, $\mathcal{C}^x(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes (de cochaînes) dans $\mathcal{A}$
  - bornés supérieurement si $x = -$,
  - bornés inférieurement si $x = +$,
  - bornés si $x = b$,
  - quelconques si $x = \emptyset$.
* Pour $y \in \{+, -, b, \emptyset\}$, $\mathcal{C}^{\emptyset,y}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes dont l'homologie est
  - bornée à droite si $y = -$,
  - bornée à gauche si $y = +$,
  - bornée si $y = b$,
  - quelconque si $y = \emptyset$.
* Pour $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$, $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ la catégorie

$$\text{"}\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A}) := \mathcal{C}^{\emptyset,y}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{C}^x(\mathcal{A})\text{"}.$$

  Ceci signifie que les objets de $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ sont ceux qui sont des objets de $\mathcal{C}^{\emptyset,y}(\mathcal{A})$ ainsi que de $\mathcal{C}^x(\mathcal{A})$.
* De plus, on convient des mêmes notations si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne quelconque.

Exemple 7. $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ désigne la catégorie des complexes bornés inférieurement, $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ celle des complexes bornés supérieurement à homologie bornée, etc.

Proposition 16. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie abélienne de $A - \mathfrak{Mod}$. Alors, pour tous $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$, la catégorie $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ est abélienne.*

Démonstration. Montrons le résultat pour $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$, les autres cas étant tout-à-fait similaires. Montrons que $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ est additive.

- Soient M, N deux objets de $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ que l'on écrit $M = \bigoplus_n M_n$ et $N = \bigoplus_n N_n$. Comme $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M_n, N_n)$ est un groupe abélien, on a que $\prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M_n, N_n)$ est aussi un groupe abélien et on a

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})}(M, N) = \left\{ (\varphi_n) \in \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M_n, N_n) \ ; \ \varphi_n \circ (d_M)_{n-1} = (d_N)_{n-1} \circ \varphi_{n-1}, \ \forall n \right\}$$

  comme on le voit avec le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_{n-1} & \xrightarrow{(d_M)_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{(d_M)_n} & M_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_{n-1} & \xrightarrow[(d_N)_{n-1}]{} & N_n & \xrightarrow[(d_N)_n]{} & N_{n+1} & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

Et, comme la composition dans $\mathcal{A}$ est bilinéaire par rapport à la loi de groupe abélien, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})}(M,N)$ est un sous-groupe de $\prod_n \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M_n,N_n)$, et est donc abélien. De plus, la composition des morphismes de complexes est bilinéaire car la composition dans $\mathcal{A}$ est bilinéaire et car les sommes sont prises degré par degré. Ainsi, $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ est $\mathbb{Z}$-linéaire.

- Soit I un ensemble fini et soient $(M^i)_{i\in I}$ des complexes. On définit

$$\prod_{i\in I} M^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j^{\prod} \quad \text{où} \quad M_j^{\prod} := \prod_{i\in I} M_j^i$$

ainsi que

$$d^{\prod} \ : \ \textstyle\prod_{i\in I} M^i \ \to \ \prod_{i\in I} M^i \quad \text{où} \quad \begin{array}{ccc} d_j^{\prod} \ : & M_j^{\prod} & \to & M_{j+1}^{\prod} \\ & (m_j^i)_{i\in I} & \mapsto & (d_j(m_j^i))_{i\in I} \end{array}$$

De même, on définit

$$\coprod_{i\in I} M^i := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j^{\coprod} \quad \text{où} \quad M_j^{\coprod} := \coprod_{i\in I} M_j^{\coprod}$$

et

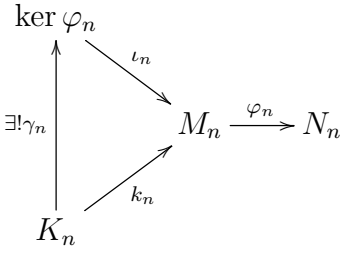
$$d^{\coprod} \ : \ \textstyle\coprod_{i\in I} M^i \ \to \ \coprod_{i\in I} M^i \quad \text{où} \quad \begin{array}{ccc} d_j^{\coprod} \ : & M_j^{\coprod} & \to & M_{j+1}^{\coprod} \\ & (m_j^i)_{i\in I} & \mapsto & (d_j(m_j^i))_{i\in I} \end{array}$$

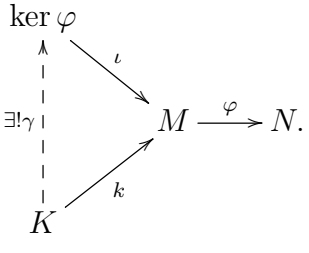
Les propriétés universelles sont clairement vérifiées. De plus, le produit et le coproduit d'un nombre fini de complexes bornés supérieurement à homologies bornées sont bornés supérieurement et à homologies bornées. Enfin, comme les produits et coproduits finis coïncident dans $\mathcal{A}$, ils coïncident dans $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$. Ainsi, les biproduits existent dans $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ et donc $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ est additive.
Remarquons que l'on a montré que si $\mathcal{A}$ est additive, alors $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ est aussi additive.
Montrons maintenant que $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$ est abélienne.

- Montrons que tout morphisme possède un noyau et un conoyau. On ne traite que le cas du noyau, celui du conoyau étant dual. Soit donc $\varphi : M \to N$ un morphisme de complexes. On a un complexe des noyaux $(\ker\varphi, d_{\ker\varphi})$ car, pour tout n, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{(d_M)_n} & M_{n+1} \\ {\scriptstyle\varphi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n+1}} \\ N_n & \xrightarrow[(d_N)_n]{} & N_{n+1} \end{array}$$

commute et car la propriété universelle du noyau implique que $(d_M)_n$ induise un morphisme $(d_{\ker\varphi})_n : \ker\varphi_n \to \ker\varphi_{n+1}$. De plus, $d^2_{\ker\varphi} = 0$ car ceci est vrai en composant par $\ker\varphi \overset{\iota}{\hookrightarrow} M$ et car ce dernier morphisme est un monomorphisme. Le fait que $\ker\varphi$ vérifie la propriété universelle du noyau résulte du fait que chaque composante homogène la vérifie. En effet, soit $K = (\bigoplus_n K_n, (d_K)_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on obtient les diagrammes





On a construit γ localement. Montrons que c'est un morphisme de complexes. On a les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{(d_K)_n} & K_{n+1} \\ {\scriptstyle k_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k_{n+1}} \\ M_n & \xrightarrow[(d_M)_n]{} & M_{n+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{(d_K)_n} & K_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \gamma_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \ker\varphi_n & \xrightarrow[(d_{\ker\varphi})_n]{} & \ker\varphi_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \iota_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow[(d_M)_n]{} & M_{n+1} & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

Il s'agit de montrer que le carré supérieur du second diagramme est commutatif. On a

$$\iota_{n+1}\circ\gamma_{n+1}\circ(d_K)_n = k_{n+1}\circ(d_K)_n = (d_M)_n\circ k_n = (d_M)_n\circ\iota_n\circ\gamma_n = \iota_{n+1}\circ(d_{\ker\varphi})_n\circ\gamma_n$$

et ι_{n+1} est un monomorphisme, d'où

$$\gamma_{n+1}\circ(d_K)_n = (d_{\ker\varphi})_n\circ\gamma_n,$$

donc γ est un morphisme de complexes et donc $(\ker\varphi, d_{\ker\varphi})$ est bien le noyau de φ dans $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$. En effet, on a déjà $\ker\varphi\in\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ et comme φ se factorise en un morphisme $H(\varphi): H(M)\to H(N)$ vérifiant $H^n(\ker\varphi)\subseteq\ker(H^n(\varphi))$, $H(\ker\varphi)$ est bornée puisque $H(M)$ et $H(N)$ le sont.

- Montrons que tout monomorphisme est un noyau. Soit donc $\varphi: K\to M$ un monomorphisme dans $\mathcal{C}^{-,b}(\mathcal{A})$. On sait que φ admet un conoyau $\gamma: M\to\operatorname{coker}\varphi$ et montrons que $\varphi=\ker\gamma$. Soient D un complexe et $\delta: D\to M$ tel que $\gamma\circ\delta=0$. Comme $\mathcal{A}$ est abélienne, on a $\varphi_n=\ker\gamma_n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, d'où les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} K_n & & \xrightarrow{\varphi_n} & & \\ {\scriptstyle \exists!\beta_n}\uparrow & & & M_n \xrightarrow{\gamma_n} & (\operatorname{coker}\varphi)_n \\ D_n & & \xrightarrow[\delta_n]{} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} K & & \xrightarrow{\varphi} & & \\ {\scriptstyle \exists!\beta}\uparrow & & & M \xrightarrow{\gamma} & \operatorname{coker}\varphi \\ D & & \xrightarrow[\delta]{} & & \end{array}$$

et $\delta_n=\varphi_n\circ\beta_n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, donc $\delta=\varphi\circ\beta$. Il reste à montrer que β est un morphisme de complexes. On a les diagrammes locaux

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{(d_D)_n} & D_{n+1} \\ {\scriptstyle \delta_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_{n+1}} \\ M_n & \xrightarrow[(d_M)_n]{} & M_{n+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{(d_D)_n} & D_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \beta_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & K_n & \xrightarrow{(d_K)_n} & K_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & {\scriptstyle \varphi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow[(d_M)_n]{} & M_{n+1} & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

On a

$$\varphi_{n+1}\circ(d_K)_n\circ\beta_n = (d_M)_n\circ\varphi_n\circ\beta_n = (d_M)_n\circ\delta_n = \delta_{n+1}\circ(d_D)_n = \varphi_{n+1}\circ\beta_{n+1}\circ(d_D)_n$$

et donc

$$(d_K)_n \circ \beta_n = \beta_{n+1} \circ (d_D)_n$$

car φ_{n+1} est un monomorphisme. Donc β est un morphisme et $\varphi = \ker \gamma$.
Par dualité, tout épimorphisme est un conoyau. Ceci achève la démonstration. □

En reproduisant exactement la même preuve, on a plus généralement

Proposition 17. *Pour tous $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$, la catégorie $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ est abélienne dès que $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne.*

Pour terminer cette section, nous allons établir un résultat permettant d'obtenir une suite exacte longue en homologie, à partir d'une suite exacte courte de complexes. Remarquons que cette dernière notion a un sens dès que les complexes sont constitués d'objets d'une catégorie abélienne, en vertu de la Proposition 17.

Définition 35. Soient X, Y des complexes dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et $X \xrightarrow{\sigma} Y$ un morphisme de complexes. Si

$$H(\sigma) \ : \ H(X) \ \to \ H(Y)$$

est un isomorphisme, on dit que σ est un quasi-isomorphisme.
De plus, un complexe X pour lequel $H(X) = 0$ sera dit acyclique.

Proposition 18. *Soit*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Alors, il existe un morphisme de connexion $\delta : H(Z) \to H(X)$ tel que l'on ait une suite exacte longue en homologie

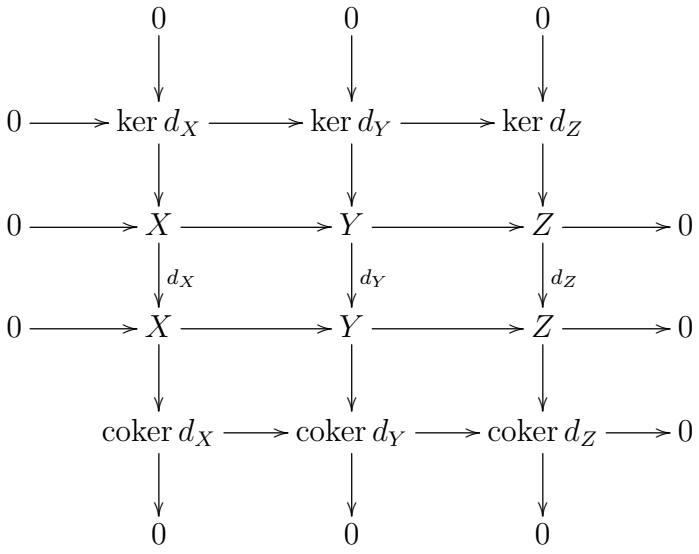
$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

Démonstration. On a un morphisme de suites exactes courtes de complexes

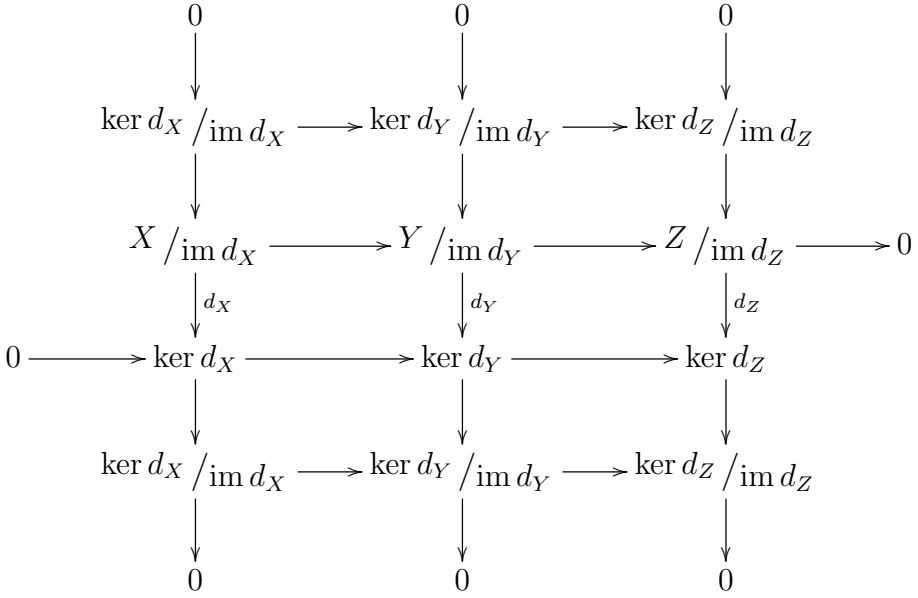
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_X} & & \downarrow{\scriptstyle d_Y} & & \downarrow{\scriptstyle d_Z} & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

La catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ étant abélienne, on peut compléter ce diagramme à l'aide des noyaux et

conoyaux :



Comme $\operatorname{coker}(d_T) = {}^{T}\big/_{\operatorname{im}(d_T)}$ pour tout $T \in \{X, Y, Z\}$, ceci induit un diagramme commutatif d'objets gradués de $\mathcal{A}$ avec lignes et colonnes exactes



et le Lemme du Serpent (Théorème 7) donne un morphisme de connexion δ et une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H(X) \longrightarrow H(Y) \longrightarrow H(Z) \xrightarrow{\delta} H(X) \longrightarrow H(Y) \longrightarrow H(Z) \longrightarrow \cdots .$$

Et, en reprenant la construction dudit morphisme, on voit que δ est bâti en utilisant à un certain moment l'image d'un élément par d_Y, qui est de degré -1, et on obtient que δ est gradué, de degré -1. En effet, si $\overline{x} \in H_n(Z)$, il existe $\overline{y} \in H_n(Y)$ tel que $\overline{x} = \overline{\beta_n}(\overline{y})$. Mais,

$$\overline{\beta_{n-1}} \circ \overline{d_Y^n}(\overline{y}) = \overline{d_Z^n} \circ \overline{\beta_n}(\overline{y}) = \overline{d_Z^n}(\overline{x}) = \overline{0},$$

et il existe $a \in \ker(d_X^{n-1})$ tel que $\overline{\alpha^{n-1}}(\overline{a}) = \overline{d_Y^n}(\overline{y})$ et on a

$$\delta(\overline{x}) := \overline{a} \in {}^{\ker(d_X^{n-1})}\big/_{\operatorname{im}(d_X^n)} =: H_{n-1}(X).$$

□

3.2 La catégorie homotopique des complexes

Nous avons déjà introduit la catégorie très importante qu'est $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$. Nous allons approfondir un peu notre étude, en définissant une catégorie "provenant" de $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$, qui se révèlera posséder des propriétés d'isomorphisme d'un intérêt particulier pour notre propos. En outre, nous verrons qu'il s'agit là d'un exemple de catégorie triangulée.
On fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre.
Sauf mention spéciale, $\mathcal{A}$ désignera ici indifféremment une catégorie abélienne ou une sous-catégorie additive de $A - \mathfrak{Mod}$.

Définition 36. 1. Soient $M^\bullet = (M, d_M)$, $N^\bullet = (N, d_N)$ deux complexes dans $\mathcal{A}$ et $\alpha : M^\bullet \to N^\bullet$ un morphisme de complexes. On dit que α est homotope à zéro s'il existe un morphisme gradué $h : M \to N$ de degré -1 tel que

$$\alpha = h \circ d_M + d_N \circ h. \tag{4}$$

On a donc le diagramme (non commutatif)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & M_{n-1} & \xrightarrow{(d_M)_{n-1}} & M_n & \xrightarrow{(d_M)_n} & M_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} & \swarrow{\scriptstyle h_n} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & \swarrow{\scriptstyle h_{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & N_{n-1} & \xrightarrow[(d_N)_{n-1}]{} & N_n & \xrightarrow[(d_N)_n]{} & N_{n+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

et (4) devient localement

$$\alpha_n = h_{n+1} \circ (d_M)_n + (d_N)_{n-1} \circ h_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, h est appelé une homotopie (ou éventuellement une homotopie de α à 0).

2. Deux morphismes $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$ sont dits homotopes si $\alpha - \beta$ est homotope à zéro. On note alors
$$\alpha \sim \beta.$$
Il s'agit clairement d'une relation d'équivalence.

Il est clair que l'ensemble des morphismes $M^\bullet \to N^\bullet$ homotopes à zéro forme un sous-groupe (distingué) de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$, on peut donc considérer le quotient et le munir naturellement d'une structure de groupe abélien. On a donc, pour $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$,

$$\overline{\alpha} = \{\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet) \ ; \ \alpha \sim \beta\}.$$

Notons que le terme "homotope" provient de la topologie algébrique, et plus précisément de l'étude du groupe de Poincaré (groupe fondamental).
De plus, on montre aisément que pour tous morphismes $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$ et tous $\beta, \beta' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(N^\bullet, P^\bullet)$, on a

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \sim \alpha' \\ \beta \sim \beta' \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \beta \circ \alpha \sim \beta' \circ \alpha'.$$

On peut donc, pour $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(M^\bullet, N^\bullet)$ et $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(N^\bullet, P^\bullet)$, poser

$$\overline{\beta} \circ \overline{\alpha} := \overline{\beta \circ \alpha}.$$

Ceci justifie la définition suivante :

Définition 37. Pour $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$, on définit la catégorie $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ ayant pour objets ceux de $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ et comme morphismes les classes d'équivalence d'homotopie des morphismes de $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$.
$\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ est alors appelée la catégorie homotopique des complexes d'objets de $\mathcal{A}$.

Remarque 29. Un cas particulier important de cette construction est, comme nous allons le voir, celui où $\mathcal{A} = A - \mathfrak{Proj}$ (resp. $A - \mathfrak{proj}$) est la sous-catégorie pleine de $A - \mathfrak{Mod}$ (resp. $A - \mathfrak{mod}$) formée des A-modules projectifs (resp. projectifs et de type fini).
Ensuite, soient M un A-module et $P^\bullet$ une résolution projective de M. On peut interpréter $P^\bullet$ comme un élément de $\mathcal{C}^-(A - \mathfrak{Proj})$:

$$\cdots \longrightarrow P_{\Omega_M^{n+1}} \longrightarrow P_{\Omega_M^n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{\Omega_M^2} \longrightarrow P_{\Omega_M^1} \longrightarrow P_M \longrightarrow 0\,.$$

De plus, $P^\bullet$ étant exact partout sauf en

$$P_{\Omega_M} \longrightarrow P_M \longrightarrow 0\,,$$

on a

$$H_n(P^\bullet) = 0,\ \forall n < 0$$

et

$$H_0(P^\bullet) = \ker(P_M \to 0) \Big/ \mathrm{im}\,(P_{\Omega_M} \to P_M) \simeq P_M \,/\Omega_M \simeq M,$$

d'où

$$H_*(P^\bullet) \simeq M.$$

D'autre part, comme le montre la proposition 19 suivante, la classe d'isomorphie de $P^\bullet$ dans la catégorie homotopique des complexes dépend uniquement de la classe d'isomorphie de M parmis les A-modules, et non des choix faits lors de la construction de $P^\bullet$.
Enfin, on note que $P^\bullet$ est un complexe borné supérieurement, formé de modules projectifs ; c'est donc un objet de $\mathcal{K}^-(A - \mathfrak{Proj})$.

Établissons deux lemmes :

Lemme 27. *Soient*

$$X^\bullet \ :\ \cdots \longrightarrow X_4 \xrightarrow{f_4} X_3 \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

un complexe acyclique et

$$P^\bullet \ :\ \cdots \longrightarrow P_4 \xrightarrow{d_4} P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

un complexe dans lequel tous les P_n sont projectifs. Alors, pour tout $\alpha : N \to M$, il existe un morphisme $\alpha^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$ relevant α, c'est-à-dire tel que l'on ait la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_4 & \xrightarrow{d_4} & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \\
\cdots \longrightarrow & X_4 & \xrightarrow[f_4]{} & X_3 & \xrightarrow[f_3]{} & X_2 & \xrightarrow[f_2]{} & X_1 & \xrightarrow[f_1]{} & X_0 & \xrightarrow[f_0]{} & M & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Démonstration. On a un morphisme composé $P_0 \to N \xrightarrow{\alpha} M$. Comme P_0 est projectif et comme $X_0 \twoheadrightarrow M$ est un épimorphisme, il existe $\alpha_0 : P_0 \to X_0$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \longrightarrow & N \\ {\scriptstyle \alpha_0}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ X_0 & \xrightarrow[f_0]{} & M \end{array}$$

commute. Pour $n \neq 0$, on note

$$C_n := \operatorname{im} f_n = \ker f_{n-1},$$

la deuxième égalité provenant du fait que $H(X^\bullet) = 0$. Comme le carré ci-dessus commute, et comme $f_0 \circ \alpha_0 \circ d_1 = \alpha \circ d_0 \circ d_1 = \alpha \circ 0 = 0$, on a

$$\operatorname{im}(\alpha_0 \circ d_1) \subseteq \ker f_0 = \operatorname{im} f_1 = C_1.$$

Par ailleurs, comme $f_1 : X_1 \to C_1$ est un épimorphisme et comme P_1 est projectif, on a un morphisme $\alpha_1 : P_1 \to X_1$ tendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_1 & & \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & \searrow^{\alpha_0 \circ d_1} & \\ X_1 & \xrightarrow[f_1]{} & C_1. \end{array}$$

Ensuite, soit $i \geq 1$ et supposons α_j construit pour $j \leq i$. Alors, comme l'hypothèse de récurrence implique $f_i \circ \alpha_i \circ d_{i+1} = \alpha_{i-1} \circ d_i \circ d_{i+1} = 0$, on a

$$\operatorname{im}(\alpha_i \circ d_{i+1}) \subseteq \ker f_i = \operatorname{im} f_{i+1} = C_{i+1}.$$

Une fois encore, les faits que $f_{i+1} : X_{i+1} \twoheadrightarrow C_{i+1}$ soit un épimorphisme et que P_{i+1} soit projectif montrent l'existence de $\alpha_{i+1} : P_{i+1} \to X_{i+1}$ tel que

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1} & & \\ {\scriptstyle \alpha_{i+1}}\downarrow & \searrow^{\alpha_i \circ d_{i+1}} & \\ X_{i+1} & \xrightarrow[f_{i+1}]{} & C_{i+1} \end{array}$$

soit commutatif, d'où le résultat. □

Lemme 28. *Le morphisme zéro entre deux objets de $\mathcal{A}$ se relève en un morphisme de complexes homotope à zéro entre deux résolutions projectives. De plus, tout relèvement du morphisme nul est homotope à zéro.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la première assertion découle de la deuxième, étant donné que le morphisme nul admet un relèvement d'après le Lemme précédent. On a les deux résolutions projectives

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_4 & \xrightarrow{d_4} & P_3 & \xrightarrow{d_3} & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_4 & \xrightarrow[e_4]{} & Q_3 & \xrightarrow[e_3]{} & Q_2 & \xrightarrow[e_2]{} & Q_1 & \xrightarrow[e_1]{} & Q_0 & \xrightarrow[e_0]{} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Soit, pour $n \geq 0$, $C_{n+1} := \ker e_n$. Comme $e_0 \circ \alpha_0 = 0$, on a $\operatorname{im} \alpha_0 \subseteq \ker e_0 = C_1$ donc $\alpha_0 : P_0 \to C_1$. Comme $e_1 : Q_1 \to C_1$ est un épimorphisme et comme P_0 est projectif, il existe $h_0 : P_0 \to Q_1$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} P_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & C_1. \\ {\scriptstyle h_0}\downarrow & \nearrow_{e_1} & \\ Q_1 & & \end{array}$$

Soit $\gamma_1 := \alpha_1 - h_0 \circ d_1$. On a $e_1 \circ \gamma_1 = e_1 \circ \alpha_1 - e_1 \circ h_0 \circ d_1 = \alpha_0 \circ d_1 - \alpha_0 \circ d_1 = 0$, donc $\operatorname{im} \gamma_1 \subseteq \ker e_1 = C_2$ et on peut considérer $\gamma_1 : P_1 \to C_2$. De plus, P_1 étant projectif et $e_2 : Q_2 \to C_2$ étant un épimorphisme, il existe $h_1 : P_1 \to Q_2$ tel que

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & C_2 \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & \nearrow_{e_2} & \\ Q_2 & & \end{array}$$

commute, d'où $\gamma_1 = e_2 \circ h_1$, ce qui se traduit par $\alpha_1 = h_0 \circ d_1 + e_2 \circ h_1$.
Soit ensuite $i \geq 1$ et supposons h_j construit pour $j \leq i$. Soit $\gamma_{i+1} := \alpha_{i+1} - h_i \circ d_{i+1}$. On a $e_{i+1} \circ \gamma_{i+1} = e_{i+1} \circ \alpha_{i+1} - e_{i+1} \circ h_i \circ d_{i+1} = \alpha_i \circ d_{i+1} - \alpha_i \circ d_{i+1} = 0$, par hypothèse de récurrence. Il vient alors $\operatorname{im} \gamma_{i+1} \subseteq \ker e_{i+1} = C_{i+2}$ et on considère $\gamma_{i+1} : P_{i+1} \to C_{i+2}$. De plus, P_{i+1} étant projectif et $e_{i+2} : Q_{i+2} \to C_{i+2}$ étant un épimorphisme, on en déduit l'existence de $h_{i+1} : P_{i+1} \to Q_{i+2}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\gamma_{i+1}} & C_{i+2} \\ {\scriptstyle h_{i+1}}\downarrow & \nearrow_{e_{i+2}} & \\ Q_{i+2} & & \end{array}$$

commute. Donc $e_{i+2} \circ h_{i+1} = \gamma_{i+1} = \alpha_{i+1} - h_i \circ d_{i+1}$ et donc $\alpha_{i+1} = h_i \circ d_{i+1} + e_{i+2} \circ h_{i+1}$. Par récurrence, on a donc $h : P^\bullet \to Q^\bullet$ de degré 1 et tel que $\alpha = h \circ d + e \circ h$, et donc $\alpha \sim 0$. □

Nous en arrivons donc au résultat important suivant :

Proposition 19. *Soient M et N deux A-modules isomorphes. Si $P^\bullet$ et $Q^\bullet$ sont des résolutions projectives de M et N respectivement, alors $P^\bullet$ et $Q^\bullet$ sont isomorphes dans la catégorie homotopique $\mathcal{K}^-(A - \mathfrak{Proj})$.*

Démonstration. Soient donc les deux résolutions projectives

$$P^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow P_4 \xrightarrow{d_4} P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

et

$$Q^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow Q_4 \xrightarrow{e_4} Q_3 \xrightarrow{e_3} Q_2 \xrightarrow{e_2} Q_1 \xrightarrow{e_1} Q_0 \xrightarrow{e_0} N \longrightarrow 0 \, ,$$

ainsi qu'un isomorphisme de modules $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$. D'après le Lemme 27, on peut relever $\varphi : M \to N$ en $\alpha : P^\bullet \to Q^\bullet$, ainsi que $\varphi^{-1} : N \to M$ en $\beta : Q^\bullet \to P^\bullet$. Donc, $\beta \circ \alpha - id_{P^\bullet}$ relève l'endomorphisme nul $M \xrightarrow{0} M$ en un endomorphisme de $P^\bullet$. De même, $\alpha \circ \beta - id_{Q^\bullet}$ relève $N \xrightarrow{0} N$ en un endomorphisme de $Q^\bullet$. D'après le Lemme 28, on a $\beta \circ \alpha \sim id_{P^\bullet}$ et $\alpha \circ \beta \sim id_{Q^\bullet}$, d'où le résultat. □

Corollaire 11. *Soit M un A-module. Alors, deux résolutions projectives de M sont isomorphes dans le catégorie homotopique.*

Lemme 29. *Un morphisme homotope à zéro induit le morphisme nul en homologie.*

Démonstration. Soit en effet $f = d_Y \circ h + h \circ d_X$ un morphisme $X \to Y$ homotope à zéro. Soit $\iota : \ker d_X \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Alors

$$f \circ \iota = (d_Y \circ h + h \circ d_X) \circ \iota = d_Y \circ h \circ \iota + h \circ d_X \circ \iota = d_Y \circ h \circ \iota$$

et donc

$$f \circ \iota : \ker d_X \to \operatorname{im} d_Y$$

et comme $H(Y) = {}^{\ker d_Y}\!/_{\operatorname{im} d_Y}$, le morphisme $H(f) : H(X) \to H(Y)$ est nul. □

Corollaire 12. *Soient $X, Y \in \mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ $(x, y \in \{+, -, b, \emptyset\})$ deux complexes isomorphes dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$. Alors*

$$H(X) \simeq H(Y).$$

Démonstration. Soient donc

$$\begin{cases} \alpha & : & X & \to & Y \\ \beta & : & Y & \to & X \end{cases}$$

tels que

$$\begin{cases} \beta \circ \alpha - id_X \sim 0 \\ \alpha \circ \beta - id_Y \sim 0 \end{cases}$$

et montrons que

$$H(\alpha) : H(X) \to H(Y)$$

est un isomorphisme. On a

$$H(\alpha) \circ H(\beta) - id_{H(Y)} = H(\alpha \circ \beta) - H(id_Y) = H(\alpha \circ \beta - id_Y) = 0$$

d'après le Lemme 29, donc

$$H(\alpha) \circ H(\beta) = id_{H(Y)}.$$

Par symétrie, on obtient

$$H(\beta) \circ H(\alpha) = id_{H(X)},$$

d'où le résultat. □

Proposition 20. *$A - \mathfrak{Mod}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^-(A - \mathfrak{Proj})$, via le foncteur envoyant un A-module sur une de ses résolutions projectives. De plus, si A est noethérien, le même foncteur fait de $A - \mathfrak{mod}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^-(A - \mathfrak{proj})$.*

Démonstration. Pour chaque module, on peut choisir une résolution projective (par exemple, la résolution particulière construite dans la preuve du Théorème 3) et avec le Lemme 27 on peut, pour tout morphisme de modules, choisir un relèvement qui est une classe d'homotopie de morphismes de complexes. Montrons que ceci est bien défini. Si, pour un morphisme fixé, on choisit deux relèvements, la différence des deux relève 0 et le Lemme 28 montre que dans ce cas, ces deux relèvements sont homotopes, donc égaux dans $\mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Proj})$. De plus, on voit facilement que l'identité est relevée par le morphisme identité et que le relèvement d'une composée est la composée des relèvements à homotopie près, d'après le Lemme 28. Ceci définit donc bien un foncteur, que l'on note

$$PR \ : \ A-\mathfrak{Mod} \ \to \ \mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Proj}) \ .$$

Le foncteur d'homologie

$$H_0 \ : \ \mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Proj}) \ \to \ A-\mathfrak{Mod}$$

vérifie

$$H_0 \circ PR = id_{A-\mathfrak{Mod}},$$

et donc PR est un plongement plein et fidèle. □

Remarque 30. Le Corollaire 12 montre que l'homologie est une notion qui concerne la catégorie homotopique, plutôt que celle des complexes. En ce sens, le concept d'homotopie est particulièrement approprié pour étudier les liens algébriques qu'entretiennent les complexes entre eux ; et en particulier leur homologie.
Les Propositions 19 et 20 constituent deux des raisons principales pour lesquelles la catégorie $\mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Proj})$ est importante pour notre objectif. Nous verrons des conséquences fondamentales de ces résultats lors de notre discussion sur les foncteurs dérivés.

Proposition 21. • *Soit $X \in \mathcal{C}^-(A-\mathfrak{Mod})$. Alors $X \simeq 0$ dans $\mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Mod})$ si et seulement si X est isomorphe à une somme directe de complexes*

$$X \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z_{i,i+1},$$

où, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $Z_{i,i+1}$ est de la forme

$$Z_{i,i+1} \ : \ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{(i+1)}{Z} \xrightarrow{id} \underset{(i)}{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

- *Soit $X \in \mathcal{C}^-(A-\mathfrak{Proj})$. Alors, $H(X) = 0$ si et seulement si X est isomorphe à une somme directe*

$$X \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z_{i,i+1},$$

où les $Z_{i,i+1}$ sont de la même forme que ci-dessus.

Démonstration. • Tout complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est isomorphe à 0 (et a une homologie nulle) car tout endomorphisme de ce complexe est homotope à zéro. La somme directe de tels complexes est alors aussi isomorphe à 0 (et a une homologie nulle).

- Soit un complexe

$$\cdots \longrightarrow X_{n+3} \xrightarrow{d_{n+3}} X_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

isomorphe à 0 dans la catégorie $\mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Mod})$. Le morphisme identité doit donc être homotope à zéro et il existe alors $h : X \to X$ de degré 1 tel que

$$id_X = d \circ h + h \circ d.$$

En particulier, au degré n, on a

$$id_{X_n} = d_{n+1} \circ h_n,$$

donc d_{n+1} est un épimorphisme scindé. En posant $X'_{n+1} := \ker(d_{n+1})$, on a donc une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow X'_{n+1} \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \longrightarrow 0$$

et donc, d'après le Lemme 15, on obtient

$$X_{n+1} \simeq X'_{n+1} \oplus X_n.$$

Ensuite, en posant

$$X'_n := X_{n+1} \Big/ X'_{n+1},$$

on a un isomorphisme $\overline{d_{n+1}} : X'_n \xrightarrow{\sim} X_n$. Ainsi, en notant X' le complexe

$$\cdots \longrightarrow X_{n+3} \xrightarrow{d_{n+3}} X_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} X'_{n+1} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

il vient

$$X \simeq (X_n)_{n,n+1} \oplus X'.$$

Par récurrence, en chaque degré, on retire un facteur direct de la forme $(X_n)_{n,n+1}$ pour obtenir un complexe résiduel de degré (strictement) plus grand. On construit donc récursivement l'isomorphisme voulu et on obtient la première assertion.

- Ensuite, si $X \in \mathcal{C}^-(A-\mathfrak{Proj})$ est acyclique, alors la différentielle de plus bas degré, disons m, est surjective. Elle est donc scindée car les X_n sont projectifs et on peut, comme précédemment, retirer un facteur direct $(X_m)_{m,m+1}$ et obtenir un complexe résiduel concentré aux degrés $m+1$ au moins. Un récurrence permet alors de conclure. □

Remarque 31. Le résultat reste valable pour les complexes bornés à gauche, en remplaçant "projectif" par "injectif" dans le seconde assertion, mais être borné est nécessaire.

Introduisons un concept fort utile : la troncature subtile. Soit

$$X^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow X_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots.$$

On définit le complexe $\tau_{\leq m}(X)$ comme étant

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{im}\,(d_{m+1}) \xhookrightarrow{i} X_m \xrightarrow{d_m} X_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} X_{m-2} \xrightarrow{d_{m-2}} \cdots$$

où $i : \mathrm{im}\,(d_{m+1}) \hookrightarrow X_m$ est l'inclusion canonique. De plus, si $\alpha : X^\bullet \to Y^\bullet$, on définit

$$(\tau_{\leq m}(\alpha))_k := \begin{cases} \alpha_k & \text{si} \quad k \leq m \\ (\alpha_m)_{|\mathrm{im}\,((d_X)_{m+1})} & \text{si} \quad k = m+1 \\ 0 & \text{si} \quad k \geq m+2 \end{cases}$$

On illustre ceci par les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{m+1} & \xrightarrow{(d_X)_{m+1}} & X_m & \xrightarrow{(d_X)_m} & X_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_m} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{m+1} & \xrightarrow{(d_Y)_{m+1}} & Y_m & \xrightarrow{(d_Y)_m} & Y_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

$$\Big\downarrow \tau_{\leq m}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\,((d_X)_{m+1}) & \xrightarrow{i_X} & X_m & \xrightarrow{(d_X)_m} & X_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha_k)_{|\mathrm{im}\,((d_X)_{m+1})}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_m} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\,((d_Y)_{m+1}) & \xrightarrow[i_Y]{} & Y_m & \xrightarrow[(d_Y)_m]{} & Y_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et on obtient alors un foncteur

$$\tau_{\leq m} : \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}^+(A - \mathfrak{Mod}).$$

On observe que

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{m+2} & \xrightarrow{d_{m+2}} & X_{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & X_m & \xrightarrow{d_m} & X_{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & X_{m-2} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{m+1}} & & \| & & \| & & \| & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\,(d_{m+1}) & \xrightarrow[i]{} & X_m & \xrightarrow[d_m]{} & X_{m-1} & \xrightarrow[d_{m-1}]{} & X_{m-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

est un morphisme de complexes et il existe donc toujours un morphisme naturel

$$X \longrightarrow \tau_{\leq m} X.$$

De plus, il est clair que ce morphisme induit, pour tout $k \leq m$, un isomorphisme

$$H_k(X) \longrightarrow H_k(\tau_{\leq m} X).$$

Par dualité, on peut construire le foncteur

$$\tau_{\geq m} : \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}^-(A - \mathfrak{Mod}),$$

et, pour tout objet X, un morphisme $\tau_{\geq m} X \to X$ défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{m+2} & \longrightarrow & X_{m+1} & \longrightarrow & X_m & \longrightarrow & X_{m-1} & \longrightarrow & X_{m-2} & \longrightarrow & X_{m-3} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \| & & \| & & \| & & \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \\ \cdots & \longrightarrow & X_{m+2} & \longrightarrow & X_{m+1} & \longrightarrow & X_m & \longrightarrow & \ker(d_{m-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

où $i : \ker(d_{m-1}) \hookrightarrow X_{m-1}$ est l'inclusion canonique.

Lemme 30. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et X un complexe de A-modules.*

- $\tau_{\leq m} : \mathcal{C}(A-\mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}^+(A-\mathfrak{Mod})$ *est un foncteur et il existe un morphisme canonique $X \to \tau_{\leq m}X$ induisant un isomorphisme sur l'homologie de tout degré jusqu'à m.*
- $\tau_{\geq m} : \mathcal{C}(A-\mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}^-(A-\mathfrak{Mod})$ *est un foncteur et il existe un morphisme canonique $\tau_{\geq m}X \to X$ induisant un isomorphisme sur l'homologie de tout degré à partir de m.*
- *De plus, ces deux foncteurs se factorisent sur les catégories homotopiques correspondantes.*

Démonstration. Pour les catégories de complexes, le résultat a été établi lors de la discussion précédente. Pour l'homotopie, on observe qu'en fait on a

$$\tau_{\leq m} : \mathcal{K}(A-\mathfrak{Mod}) \to \mathcal{K}^+(A-\mathfrak{Mod}).$$

En effet, il s'agit de prouver que si $\alpha : X \to Y$ est homotope à zéro, alors $\tau_{\leq m}(\alpha)$ aussi. Soit donc $h : X \to Y$ de degré 1 telle que

$$\alpha = d_Y \circ h + h \circ d_X.$$

On a

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X_{m+1} & \longrightarrow & X_m & \longrightarrow & X_{m-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m+1}} & \swarrow{\scriptstyle h_m} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_m} & \swarrow{\scriptstyle h_{m-1}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Y_{m+1} & \longrightarrow & Y_m & \longrightarrow & Y_{m-1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

qui devient

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\,((d_X)_{m+1}) & \xrightarrow{i_X} & X_m & \longrightarrow & X_{m-1} & \longrightarrow & X_{m-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow{\scriptstyle h^0_m} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_m} & \swarrow{\scriptstyle h_{m-1}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m-1}} & \swarrow{\scriptstyle h_{m-2}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{m-2}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{im}\,((d_Y)_{m+1}) & \xrightarrow[i_Y]{} & Y_m & \longrightarrow & Y_{m-1} & \longrightarrow & Y_{m-2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

où l'on a posé

$$h^0_m := (d_Y)_{m+1} \circ h_m : X_m \to \mathrm{im}\,((d_Y)_{m+1}).$$

Les relations d'homotopie sont alors vérifiées jusquà l'ordre $m-1$. De plus,

$$\alpha_m = h_{m-1} \circ (d_X)_m + (d_Y)_{m+1} \circ h_m = h_{m-1} \circ (d_X)_m + i_Y \circ h^0_m$$

et si $x \in \mathrm{im}\,((d_X)_{m+1})$, on a $x = (d_X)_{m+1}(x')$ avec $x' \in X_{m+1}$ et on a

$$h^0_m \circ i_X(x) = h^0_m \circ i_X((d_X)_{m+1}(x')) = h^0_m((d_X)_{m+1}(x'))$$

$$= \alpha_m((d_X)_{m+1}(x')) - h_{m-1}(\underbrace{(d_X)_m \circ (d_X)_{m+1}}_{0}(x')) = \alpha_m \circ (d_X)_{m+1}(x') = \alpha_m(x),$$

d'où

$$(\alpha_m)_{|\mathrm{im}\,((d_X)_{m+1})} = h^0_m \circ i_X.$$

Ainsi, en posant

$$\widetilde{h}_k := \begin{cases} h_k & \text{si} \quad k \leq m-1 \\ h^0_m & \text{si} \quad k = m \\ 0 & \text{si} \quad k \geq m+1 \end{cases}$$

on obtient

$$\tau_{\leq m}(\alpha) = \widetilde{h} \circ d_X + d_Y \circ \widetilde{h},$$

et donc, $\tau_{\leq m}(\alpha)$ est bien homotope à zéro. L'argument dual donne le résultat pour $\tau_{\geq m}$. □

On dispose également d'une troncature grossière. Si X est un complexe

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} X_{n-2} \longrightarrow \cdots,$$

on définit le complexe $\sigma_{\leq m}X$ comme étant

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X_m \xrightarrow{\partial_m} X_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} X_{m-2} \longrightarrow \cdots.$$

Il s'agit clairement d'un foncteur

$$\sigma_{\leq m} : \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}^+(A - \mathfrak{Mod}).$$

Cependant, ce foncteur ci présente un énorme défaut :
En effet, le complexe acyclique

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

est grossièrement tronqué en

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

qui n'est pas acyclique. On voit alors que la troncature grossière peut faire apparaître n'importe quelle homologie au "pic de coupure", contrairement à la troncature subtile qui présente, comme le montre le Lemme 30, un bon comportement vis-à-vis de l'homologie.

Pour terminer cette section, nous allons démontrer que la catégorie homotopique est une catégorie triangulée. Comme nous l'avons déjà mentionné, bien que passionnant, ce résultat n'est pas nécessaire pour notre étude. Commençons par une construction :

Définition 38. Pour tout complexe X de $\mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod})$, on définit $X[0] := X$ et

$$X[1] := \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X_i, (\partial_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)[1] := \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X_{i-1}, (-\partial_{i-1})_{i\in\mathbb{Z}}\right)$$

où $\partial_i : X_i \to X_{i-1}$. On définit aussi

$$X[n] := (X[n-1])[1],\ \forall n \geq 1.$$

Remarque 32. On peut visualiser ?[1] comme "déplaçant" un complexe d'un degré vers la gauche et changeant la différentielle de signe :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & X_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & X_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & & & \Big\downarrow ?[1] & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{-\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{-\partial_n} & X_{n-1} & \xrightarrow{-\partial_{n-1}} & X_{n-2} & & & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & X[1]_{n+2} & \xrightarrow{\partial[1]_{n+2}} & X[1]_{n+1} & \xrightarrow{\partial[1]_{n+1}} & X[1]_n & \xrightarrow{\partial[1]_n} & X[1]_{n-1} & & & \longrightarrow & \cdots.
\end{array}$$

De plus, on peut étendre la définition de $X[n]$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et alors, pour chaque complexe X, il existe un (unique) complexe $X[-n]$ tel que $X[-n][n] = X[n][-n] = X$.
Enfin, on peut construire un foncteur $[n] : \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod}) \to \mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod})$ en posant, pour chaque $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A-\mathfrak{Mod})}(X, Y)$,

$$\alpha[n] := (\alpha_i[n])_{i\in\mathbb{Z}},$$

où

$$\alpha_i[n] := (-1)^n \alpha_{i-n}.$$

Proposition-Définition 1. *Soient $\mathcal{A}$ une sous-catégorie additive de $A - \mathfrak{Mod}$ et $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})}(X, Y)$ une classe de morphismes entre complexes. Posons*

$$\mathscr{C}(\alpha) := \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} X_{i-1} \oplus Y_i, \begin{pmatrix} -d^X & 0 \\ \alpha & d^Y \end{pmatrix} \right).$$

Alors, $\mathscr{C}(\alpha)$ est un complexe, appelé le cône de α.

Démonstration. En effet, si

$$X \ : \ \cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d^X_{n+1}} X_n \xrightarrow{d^X_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

et

$$Y \ : \ \cdots \longrightarrow Y_{n+1} \xrightarrow{d^Y_{n+1}} Y_n \xrightarrow{d^Y_n} Y_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

alors

$$\mathscr{C}(\alpha) \ : \ \cdots \longrightarrow X_n \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^X_n & 0 \\ \alpha_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix}} X_{n-1} \oplus Y_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix}} X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

On a

$$\deg \begin{pmatrix} -d^X & 0 \\ \alpha & d^Y \end{pmatrix} = -1$$

et

$$\begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d^X_n & 0 \\ \alpha_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^X_{n-1} \circ d^X_n & 0 \\ d^Y_n \circ \alpha_n - \alpha_{n-1} \circ d^X_n & d^Y_n \circ d^Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc, $\mathscr{C}(\alpha)$ est bien un complexe.
Il reste à montrer que $\mathscr{C}(\alpha)$ ne dépend pas du choix d'un représentant de $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})}(X, Y)$. Soient donc deux morphismes de complexes homotopes $\alpha, \beta : X \to Y$ et soit $h : X \to Y$ de degré 1 tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on ait

$$(\alpha - \beta)_n = h_{n-1} \circ d^X_n + d^Y_{n+1} \circ h_n.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & 0 \\ h_{n-1} & id_{Y_n} \end{pmatrix} : X_{n-1} \oplus Y_n \to X_{n-1} \oplus Y_n.$$

On calcule alors

$$\begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ \beta_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_{X_n} & 0 \\ h_n & id_{Y_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ \beta_n + d_{n+1}^Y \circ h_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ -h_{n-1} \circ d_n^X + \alpha_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & 0 \\ h_{n-1} & id_{Y_n} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ \alpha_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix},$$

et donc $\begin{pmatrix} id_X & 0 \\ h & id_Y \end{pmatrix}$ est un morphisme de complexes $\mathscr{C}(\alpha) \to \mathscr{C}(\beta)$. De plus, on voit que $\begin{pmatrix} id_X & 0 \\ -h & id^Y \end{pmatrix}$ est également un morphisme de complexes $\mathscr{C}(\beta) \to \mathscr{C}(\alpha)$, réciproque du premier morphisme. Ainsi, on a

$$\mathscr{C}(\alpha) \simeq \mathscr{C}(\beta),$$

comme souhaité. □

Proposition 22. *Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme de complexes et soit $Z := \mathscr{C}(\varphi)$ le cône de φ. Alors, il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(Z) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(Y) \longrightarrow H_i(Z) \longrightarrow H_{i-1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

Démonstration. On a une suite exacte courte canonique

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[-1] \longrightarrow 0 .$$

En vertu de la Proposition 18, ceci donne une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(Z) \longrightarrow H_{i+1}(X[-1]) \longrightarrow H_i(Y) \longrightarrow H_i(Z) \longrightarrow H_i(X[-1]) \longrightarrow \cdots .$$

Mais,

$$H_{i+1}(X[-1]) \simeq H_i(X),$$

d'où la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(Z) \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(Y) \longrightarrow H_i(Z) \longrightarrow H_{i-1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

□

Corollaire 13. *Un morphisme de complexes est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône est acyclique.*

Démonstration. Cela découle directement de la Proposition 22. □

Théorème 8. *Soient K un anneau commutatif, A une K-algèbre, $\mathcal{A}$ une sous-catégorie additive de $A - \mathfrak{Mod}$ et $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$. Alors, $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée.*

Démonstration. $*$ Tout d'abord, $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ est clairement une catégorie additive puisque $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$ est additive et car les classes d'homotopie sont compatibles avec la loi de groupe abélien. On considère le foncteur

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A}) & \to & \mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A}) \\ & & X & \mapsto & X[1] \end{array}$$

Il est alors clair que T est une autovalence, d'après la Proposition 10.

$*$ Construisons les triangles distingués. Soit $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})}(X, Y)$ et soit $\mathscr{C}(\alpha)$ son cône :

$$\mathscr{C}(\alpha) = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X_{i-1} \oplus Y_i, \begin{pmatrix} -d^X & 0 \\ \alpha & d^Y \end{pmatrix} \right).$$

La projection sur la première composante $\mathscr{C}(\alpha) \twoheadrightarrow X[1]$ donne un morphisme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_n \oplus Y_{n+1} & \longrightarrow & X_{n-1} \oplus Y_n & \longrightarrow & X_{n-2} \oplus Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

et le plongement sur la seconde coordonnée $Y \hookrightarrow \mathscr{C}(\alpha)$ donne un morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \longrightarrow & Y_n & \longrightarrow & Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & X_n \oplus Y_{n+1} & \longrightarrow & X_{n-1} \oplus Y_n & \longrightarrow & X_{n-2} \oplus Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots . \end{array}$$

On obtient alors un triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow \mathscr{C}(\alpha) \longrightarrow X[1] = TX$$

et on dit qu'un triangle est distingué s'il est isomorphe à un triangle de cette forme.

$*$ Par définition du cône, tout morphisme $\alpha : X \to Y$ peut être complété en un triangle distingué

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow \mathscr{C}(\alpha) \longrightarrow X[1]$$

et $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ vérifie donc la première et la troisième partie de TR1. Établissons donc la deuxième partie de TR1. Ceci revient à montrer que $\mathscr{C}(id_X) \simeq 0$ et il suffit alors de voir que $id_{\mathscr{C}(id_X)} = 0$ dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$. Il s'agit donc de montrer que $id_{\mathscr{C}(id_X)}$ est homotope à 0. On a

$$d_n^{\mathscr{C}(id_X)} = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ id_{X_{n-1}} & d_n^X \end{pmatrix} : X_{n-1} \oplus X_n \to X_{n-2} \oplus X_{n-1}.$$

On définit

$$h_n := \begin{pmatrix} 0 & id_{X_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X_{n-1} \oplus X_n \to X_n \oplus X_{n+1}$$

et on calcule

$$d_{n+1}^{\mathscr{C}(id_X)} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^{\mathscr{C}(id_X)} = \begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ id_{X_n} & d_{n+1}^X \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & id_{X_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & id_{X_{n-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ id_{X_{n-1}} & d_n^X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -d_n^X \\ 0 & id_{X_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & d_n^X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & id_{X_n} \end{pmatrix} = id_{\mathscr{C}(id_X)_n}.$$

Donc, $id_{\mathscr{C}(id_X)}$ est homotope à 0 et donc

$$X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

est distingué. Ainsi, $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ satisfait TR1.

$*$ Montrons que TR2 est vérifié. Soit donc un triangle distingué

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xhookrightarrow{i} \mathscr{C}(\alpha) \xrightarrow{j} X[1]$$

et montrons que

$$Y \xhookrightarrow{i} \mathscr{C}(\alpha) \xrightarrow{j} X[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} Y[1]$$

est distingué. Il s'agit de montrer qu'il existe un isomorphisme de complexes $X[1] \to \mathscr{C}(i)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(\alpha) & \xrightarrow{j} & X[1] & \xrightarrow{-\alpha[1]} & Y[1] \\ \| & & \| & & \downarrow & & \| \\ Y & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{C}(i) & \longrightarrow & Y[1]. \end{array}$$

Explicitons $\mathscr{C}(i)$. C'est le cône du morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{d^Y_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{d^Y_n} & Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle i_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle i_{n-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & X_n \oplus Y_{n+1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^X_n & 0 \\ \alpha_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix}} & X_{n-1} \oplus Y_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix}} & X_{n-2} \oplus Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

qui est donc le complexe

$$\cdots \longrightarrow Y_n \oplus (X_n \oplus Y_{n+1}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} Y_{n-1} \oplus (X_{n-1} \oplus Y_n) \xrightarrow{\partial_n} Y_{n-2} \oplus (X_{n-2} \oplus Y_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

où

$$\partial_{n+1} := \begin{pmatrix} -d^Y_n & 0 & 0 \\ 0 & -d^X_n & 0 \\ id_{Y_n} & \alpha_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix},$$

que l'on peut réécrire :

$$\cdots \longrightarrow X_n \oplus Y_{n+1} \oplus Y_n \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+1}} X_{n-1} \oplus Y_n \oplus Y_{n-1} \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \oplus Y_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

avec

$$\widetilde{\partial}_{n+1} := \begin{pmatrix} -d^X_n & 0 & 0 \\ \alpha_n & d^Y_{n+1} & id_{Y_n} \\ 0 & 0 & -d^Y_n \end{pmatrix}.$$

Comme la différentielle de $X[1]$ est $-d^X$, il est clair que la projection sur la première composante $\mathscr{C}(i) \to X[1]$ est un morphisme de complexes. De plus, on voit que le noyau de ce morphisme est le cône de l'identité sur Y. Ainsi, ce noyau, pris dans la catégorie

des complexes, est isomorphe à 0 dans la catégorie homotopique. De plus, $\mathscr{C}(i) \to X[1]$ est clairement surjective est scindée. On a alors une suite exacte courte scindée dans $\mathcal{C}^{x,y}(A - \mathfrak{Mod})$

$$0 \longrightarrow \ker(\mathscr{C}(i) \to X[1]) \longrightarrow \mathscr{C}(i) \longrightarrow X[1] \longrightarrow 0$$

et d'après le Lemme 15, dans la catégoie abélienne $\mathcal{C}^{x,y}(A-\mathfrak{Mod})$, on a l'isomorphisme

$$\mathscr{C}(i) \simeq \ker(\mathscr{C}(i) \to X[1]) \oplus X[1] \simeq \mathscr{C}(id_Y) \oplus X[1],$$

et donc, dans la catégorie $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$, on a

$$\mathscr{C}(i) \simeq X[1].$$

Ensuite, comme on peut le voir par investigation directe, les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & X[1] \\ \| & & \uparrow \\ \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{C}(i) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X[1] & \xrightarrow{-\alpha[1]} & Y[1] \\ \downarrow & & \| \\ \mathscr{C}(i) & \longrightarrow & Y[1] \end{array}$$

et le cas

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & X[1] \\ \| & & \downarrow \\ \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & \mathscr{C}(i) \end{array}$$

est alors aisément vérifié. On a donc l'isomorphisme désiré.
D'autre part, on peut appliquer cinq fois cette étape et ensuite ?[−2] pour obtenir

$$⓪ \qquad X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{i} \mathscr{C}(\alpha) \xrightarrow{j} X[1]$$

$$① \qquad Y \xrightarrow{i} \mathscr{C}(\alpha) \xrightarrow{j} X[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} Y[1]$$

$$② \qquad \mathscr{C}(\alpha) \xrightarrow{j} X[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} Y[1] \xrightarrow{-i[1]} \mathscr{C}(\alpha)[1]$$

$$③ \qquad X[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} Y[1] \xrightarrow{-i[1]} \mathscr{C}(\alpha)[1] \xrightarrow{-j[1]} X[2]$$

$$④ \qquad Y[1] \xrightarrow{-i[1]} \mathscr{C}(\alpha)[1] \xrightarrow{-j[1]} X[2] \xrightarrow{\alpha[2]} Y[2]$$

$$⑤ \qquad \mathscr{C}(\alpha)[1] \xrightarrow{-j[1]} X[2] \xrightarrow{\alpha[2]} Y[2] \xrightarrow{i[2]} \mathscr{C}(\alpha)[2]$$

$$\Big\downarrow ?[-2]$$

$$⑥ \qquad \mathscr{C}(\alpha)[-1] \xrightarrow{-j[-1]} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{i} \mathscr{C}(\alpha)$$

et ce dernier triangle est donc distingué. $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ vérifie donc l'axiome TR2.

$*$ Vérifions maintenant TR3. Soit le diagramme dont le carré gauche commute

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & & & \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha') & \longrightarrow & X'[1]. \end{array}$$

On doit trouver $\zeta : \mathscr{C}(\alpha) \to \mathscr{C}(\alpha')$ rendant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \xi[1]} \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha') & \longrightarrow & X'[1]. \end{array}$$

Posons

$$\zeta_n := \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix} : X_{n-1} \oplus Y_n \to X'_{n-1} \oplus Y'_n.$$

Montrons qu'il s'agit là d'un morphisme de complexes, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X_{n-1} \oplus Y_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix}} & X_{n-2} \oplus Y_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix} = \zeta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{n-1} = \begin{pmatrix} \xi_{n-2} & 0 \\ 0 & \eta_{n-1} \end{pmatrix}} \\ X'_{n-1} \oplus Y'_n & \xrightarrow[\begin{pmatrix} -d^{X'}_{n-1} & 0 \\ \alpha'_{n-1} & d^{Y'}_n \end{pmatrix}]{} & X'_{n-2} \oplus Y'_{n-1} \end{array}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \xi_{n-2} & 0 \\ 0 & \eta_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ \alpha_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi_{n-2} \circ d^X_{n-1} & 0 \\ \eta_{n-1} \circ \alpha_{n-1} & \eta_{n-1} \circ d^Y_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -d^{X'}_{n-1} \circ \xi_{n-1} & 0 \\ \alpha'_{n-1} \circ \xi_{n-1} & d^{Y'}_n \circ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^{X'}_{n-1} & 0 \\ \alpha'_{n-1} & d^{Y'}_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Il reste à montrer que ζ rend bien les carrés dans lesquels il intervient commutatifs. On a, pour tout n,

$$\xi_{n-1} \circ \begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{X'_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix},$$

d'où la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} X_{n-1} \oplus Y_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}} & X_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{n-1}} \\ X'_{n-1} \oplus Y'_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} id_{X'_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}} & X'_{n-1} \end{array}$$

et ceci implique la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\alpha) & \longrightarrow & X[1] \\ {\scriptstyle\zeta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\xi[1]} \\ \mathscr{C}(\alpha') & \longrightarrow & X'[1]. \end{array}$$

De même, pour tout n, on a

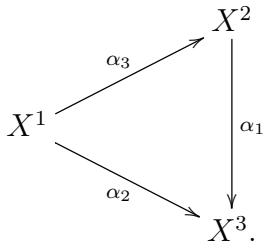
$$\begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y'_n} \end{pmatrix} \circ \eta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{n-1} & 0 \\ 0 & \eta_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y_n} \end{pmatrix},$$

d'où la commutativité de

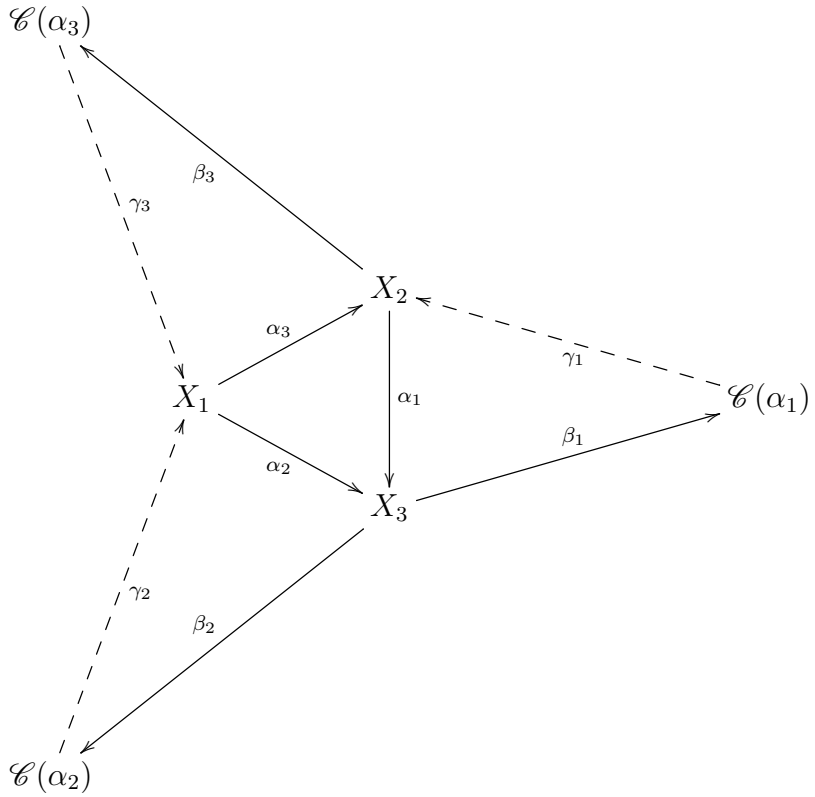
$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha) \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\zeta} \\ Y' & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha') \end{array}$$

et ζ vérifie donc les conditions requises. Ainsi, $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ vérifie TR3.

$*$ Montrons enfin que l'axiome TR4 est satisfait. Commençons avec les morphismes $\alpha_1 : X^2 \to X^3$, $\alpha_3 : X^1 \to X^2$ et $\alpha_2 := \alpha_1 \circ \alpha_3$:



On peut alors former les triangles



Montrons qu'il existe $\delta_1 : \mathscr{C}(\alpha_3) \to \mathscr{C}(\alpha_2)$, $\delta_3 : \mathscr{C}(\alpha_2) \to \mathscr{C}(\alpha_1)$ et $\delta_2 : \mathscr{C}(\alpha_1) \to \mathscr{C}(\alpha_3)[1]$ tels que

$$\mathscr{C}(\alpha_3) \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{C}(\alpha_2) \xrightarrow{\delta_3} \mathscr{C}(\alpha_1) \xrightarrow{\delta_2} \mathscr{C}(\alpha_3)[1]$$

soit un triangle distingué et vérifiant les cinq relations de commutativité du diagramme octaédrique illustrant TR4. On a

$$\mathscr{C}(\alpha_3) = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} X^1_{n-1} \oplus X^2_n, \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_3)_{n-1} & d^2_n \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\mathscr{C}(\alpha_2) = \mathscr{C}(\alpha_1 \circ \alpha_3) = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} X^1_{n-1} \oplus X^3_n, \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_2)_{n-1} & d^3_n \end{pmatrix} \right).$$

donc

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

est un morphisme de complexes. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} id_{X^1_{n-2}} & 0 \\ 0 & (\alpha_1)_{n-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_3)_{n-1} & d^2_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_2)_{n-1} & (\alpha_1)_{n-1} \circ d^2_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_2)_{n-1} & d^3_n \circ (\alpha_1)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_2)_{n-1} & d^3_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_{X^1_{n-1}} & 0 \\ 0 & (\alpha_1)_n \end{pmatrix}$$

d'où la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{C}(\alpha_3))_n & & (\mathscr{C}(\alpha_3))_{n-1} \\ \| & & \| \\ X^1_{n-1} \oplus X^2_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_3)_{n-1} & d^2_n \end{pmatrix}} & X^1_{n-2} \oplus X^2_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} id_{X^1_{n-1}} & 0 \\ 0 & (\alpha_1)_n \end{pmatrix}} & & \downarrow{\scriptstyle \begin{pmatrix} id_{X^1_{n-2}} & 0 \\ 0 & (\alpha_1)_{n-1} \end{pmatrix}} \\ X^1_{n-1} \oplus X^3_n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d^1_{n-1} & 0 \\ (\alpha_2)_{n-1} & d^3_n \end{pmatrix}} & X^1_{n-2} \oplus X^3_{n-1} \\ \| & & \| \\ (\mathscr{C}(\alpha_2)[1])_n & & (\mathscr{C}(\alpha_2)[1])_{n-1} \end{array}$$

Calculons ensuite le cône de δ_1 et montrons qu'il s'agit (à isomorphisme près) de $\mathscr{C}(\alpha_1)$ dans la catégorie homotopique. La composante homogène de degré n de $\mathscr{C}(\delta_1)$ est

$$X^1_{n-2} \oplus X^2_{n-1} \oplus X^1_{n-1} \oplus X^3_n$$

et sa différentielle (de degré n) est alors

$$\partial_n := \begin{pmatrix} d^1_{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ -(\alpha_3)_{n-2} & -d^2_{n-1} & 0 & 0 \\ id_{X^1_{n-1}} & 0 & -d^1_{n-1} & 0 \\ 0 & (\alpha_1)_{n-1} & (\alpha_2)_{n-1} & d^3_n \end{pmatrix}.$$

Avec la projection canonique

$$X^1_{n-2} \oplus X^2_{n-1} \oplus X^1_{n-1} \oplus X^3_n \xrightarrow{\pi_n} X^1_{n-2} \oplus X^1_{n-1}\ ,$$

on obtient alors une suite exacte courte scindée dans $\mathcal{C}^{x,y}(A-\mathfrak{Mod})$

$$0 \longrightarrow \ker \pi \longrightarrow \mathscr{C}(\delta_1) \longrightarrow \mathscr{C}(id_{X^1})[1] \longrightarrow 0,$$

d'où

$$\mathscr{C}(\delta_1) \simeq \ker \pi \oplus \mathscr{C}(id_{X^1})[1]$$

et $\mathscr{C}(id_{X^1})[1]$ est alors un facteur direct de $\mathscr{C}(\delta_1)$ et est nul dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$. De plus, $\ker \pi_n = X^2_{n-1} \oplus X^3_n$ et la différentielle de $\ker \pi$ est la restriction de ∂ à $X^2_{n-1} \oplus X^3_n$, dont on obtient la matrice de degré n en supprimant les colonnes et lignes 1 et 3 de ∂_n, c'est donc

$$\begin{pmatrix} -d^2_{n-1} & 0 \\ (\alpha_1)_{n-1} & d^3_n \end{pmatrix}$$

qui est précisément le complexe $\mathscr{C}(\alpha_1)$. Donc $\mathscr{C}(\delta_1) \simeq \mathscr{C}(\alpha_1)$ dans $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$.
On peut alors former les triangles distingués

$$\begin{cases} X^2 \xrightarrow{\alpha_1} X^3 \xrightarrow{\beta_1} \mathscr{C}(\alpha_1) \xrightarrow{\gamma_1} X^2[1] \\ X^1 \xrightarrow{\alpha_2} X^3 \xrightarrow{\beta_2} \mathscr{C}(\alpha_2) \xrightarrow{\gamma_2} X^1[1] \\ X^1 \xrightarrow{\alpha_3} X^2 \xrightarrow{\beta_3} \mathscr{C}(\alpha_3) \xrightarrow{\gamma_3} X^1[1] \end{cases}$$

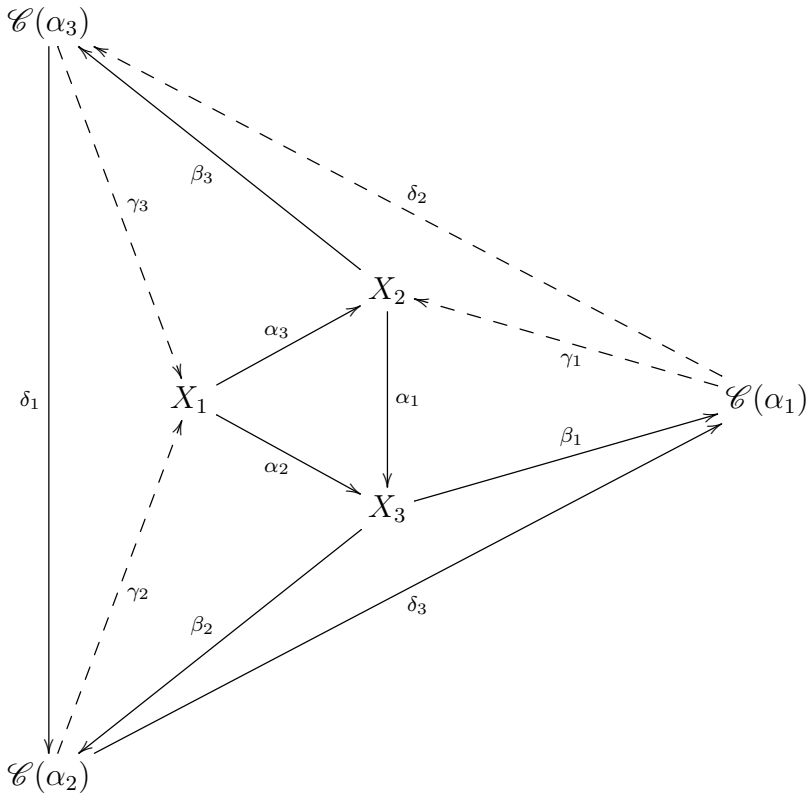
et en appliquant TR3 au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X^1 & \xrightarrow{\alpha_2} & X^3 & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha_2) & \longrightarrow & X^1[1] \\ {\scriptstyle \alpha_3}\downarrow & & \| & & & & \\ X^2 & \xrightarrow{\alpha_1} & X^3 & \longrightarrow & \mathscr{C}(\alpha_1) & \longrightarrow & X^2[1] \end{array}$$

on obtient $\delta_3 : \mathscr{C}(\alpha_2) \to \mathscr{C}(\alpha_1)$ et, par complétion, il existe $\delta_2 : \mathscr{C}(\alpha_1) \to \mathscr{C}(\alpha_3)[1]$ tel que le triangle

$$\mathscr{C}(\alpha_3) \xrightarrow{\delta_1} \mathscr{C}(\alpha_2) \xrightarrow{\delta_3} \mathscr{C}(\alpha_1) \xrightarrow{\delta_2} \mathscr{C}(\alpha_3)[1]$$

soit distingué. On obtient alors un diagramme



On observe que

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3[1] & 0 \\ 0 & id_{X^3} \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{X^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à montrer les cinq relations de commutativité.

- Montrons que $\gamma_2 \circ \delta_1 = \gamma_3$. On remarque que γ_1, γ_2 et γ_3 sont les projections sur les premières composantes. Ainsi,

$$\gamma_2 \circ \delta_1 = \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \end{pmatrix} = \gamma_3.$$

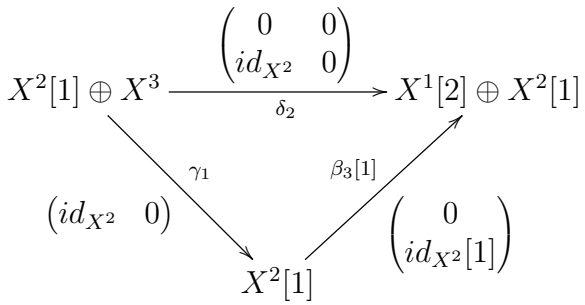
- Pour montrer que $\delta_3 \circ \beta_2 = \beta_1$, on remarque que β_1 et β_2 sont les plongements sur les secondes cooordonnées et on obtient alors

$$\delta_3 \circ \beta_2 = \begin{pmatrix} \alpha_3[1] & 0 \\ 0 & id_{X^3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ id_{X^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{X^3} \end{pmatrix} = \beta_1.$$

- Montrons ensuite que $\beta_3[1] \circ \gamma_1 = \delta_2$. On a

$$X^2[1] \oplus X^3 \xrightarrow[\gamma_1]{\begin{pmatrix} id_{X^2} & 0 \end{pmatrix}} X^2[1] \qquad \text{et} \qquad X^2 \xrightarrow[\beta_3]{\begin{pmatrix} 0 \\ id_{X^2} \end{pmatrix}} X^1[1] \oplus X^2$$

et donc on a le diagramme commutatif



ce qui entraîne l'équation souhaitée.

- Montrons que $\gamma_1 \circ \delta_3 = \alpha_3[1] \circ \gamma_2$. On calcule

$$\gamma_1 \circ \delta_3 = \begin{pmatrix} id_{X^2} & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_3[1] & 0 \\ 0 & id_{X^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3[1] & 0 \end{pmatrix} = \alpha_3[1] \circ \begin{pmatrix} id_{X^1[1]} & 0 \end{pmatrix} = \alpha_3[1] \circ \gamma_2.$$

- Il reste à montrer que $\beta_2 \circ \alpha_1 = \delta_1 \circ \beta_3$. On a

$$\delta_1 \circ \beta_3 = \begin{pmatrix} id_{X^1} & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ id_{X^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{X^3} \end{pmatrix} \circ \alpha_1 = \beta_2 \circ \alpha_1.$$

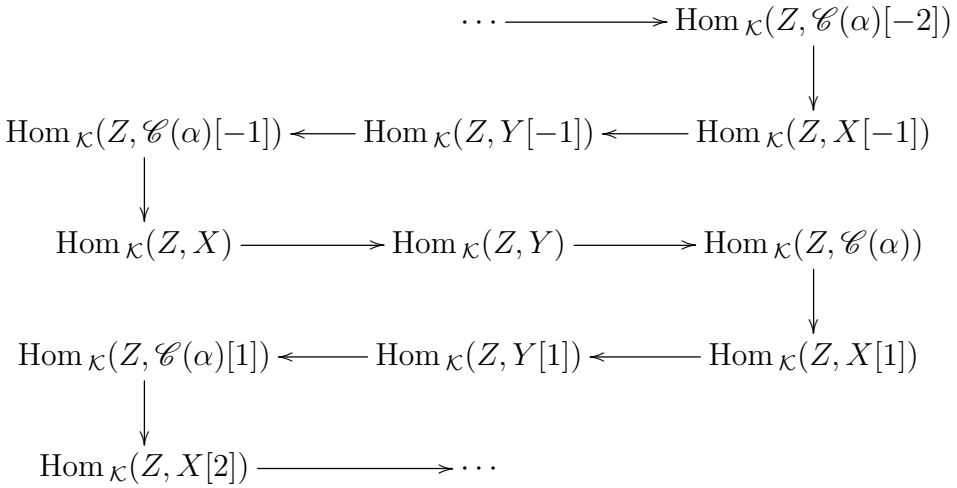
Ainsi, l'axiome TR4 est satisfait.
Finalement, $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ vérifie les axiomes TR1, TR2, TR3 et TR4 de la définition 27 ; c'est donc une catégorie triangulée. Ceci achève la démonstration.

□

Corollaire 14. *Soient $\mathcal{A}$ une sous-catégorie additive de $A - \mathfrak{Mod}$, $x, y \in \{+, -, b, \emptyset\}$ et $\mathcal{K} := \mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$. Pour tout triangle distingué*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow \mathscr{C}(\alpha) \longrightarrow X[1]$$

et tout complexe Z, on a des suites exactes longues



et

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \cdots & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathscr{C}(\alpha)[-2], Z) \\
 & & & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathscr{C}(\alpha)[-1], Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y[-1], Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X[-1], Z) \\
\uparrow & & & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Z) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y, Z) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathscr{C}(\alpha), Z) \\
 & & & & \uparrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathscr{C}(\alpha)[1], Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(Y[1], Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X[1], Z) \\
\uparrow & & & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X[2], Z) & \longleftarrow & \cdots . & &
\end{array}
$$

Démonstration. En effet, comme la catégorie $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ est triangulée, le résultat est conséquence immédiate de la Proposition 15. □

Quatrième partie

Cohomologie des groupes, foncteurs dérivés et cohomologie de Hochschild

4.1 Groupes Ext

Nous allons maintenant appliquer la théorie de l'homologie développée dans la partie précédente à une construction primordiale : les groupes Ext . Ces objets donnent accès à de précieuses informations sur les modules et permettent notamment de classifier les suites exactes courtes, en un sens à préciser. Nous allons définir ici les groupes Ext ("ext" pour "extension") comme étant les espaces classifiant les suites exactes courtes, puis nous verrons ensuite que ces groupes peuvent être introduits plus proprement à l'aide de l'homologie. On peut obtenir d'autres exposés et points de vue sur ces objets dans [14] ou [23].

Nous démarrons par l'étude d'un phénomène particulier concernant les suites exactes et nous définissons ce que nous entendrons par "équivalence de suites exactes". À cet effet, nous nous donnons un anneau commutatif K et une K-algèbre A, que nous fixons une fois pour toutes.

Au préalable, rappelons une construction fonctorielle importante liée au Lemme de Yoneda : les foncteurs représentables.

Soient M, N, L trois A-modules et $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Alors, α induit deux morphismes

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_A(L,\alpha) & : & \mathrm{Hom}_A(L,M) & \to & \mathrm{Hom}_A(L,N) \\ & & \varphi & \mapsto & \alpha\circ\varphi \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_A(\alpha,L) & : & \mathrm{Hom}_A(N,L) & \to & \mathrm{Hom}_A(M,L) \\ & & \varphi & \mapsto & \varphi\circ\alpha \end{array}$$

Dans le premier cas, on dit que l'on a appliqué $\mathrm{Hom}_A(L,-)$ à $M \stackrel{\alpha}{\to} N$ et dans le second, que l'on a appliqué $\mathrm{Hom}_A(-,L)$ à $M \stackrel{\alpha}{\to} N$. On dispose du

Lemme 31. *Soient U un A-module et*

$$0 \longrightarrow L \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} M \stackrel{\beta}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de A-modules. Alors, les suites de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(U,L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(U,\alpha)} \mathrm{Hom}_A(U,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(U,\beta)} \mathrm{Hom}_A(U,N) \tag{5}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,U) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\beta,U)} \mathrm{Hom}_A(M,U) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\alpha,U)} \mathrm{Hom}_A(L,U) \tag{6}$$

sont exactes. De plus, si (5) *(resp.* (6)*) est exacte pour tout U, alors $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N$ (resp. $L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$) est exacte* (cf [31], Proposition 2.42).

Démonstration. Premièrement, on a

$$\mathrm{Hom}_A(U,\beta)\circ\mathrm{Hom}_A(U,\alpha)=\mathrm{Hom}_A(U,\beta\circ\alpha)=0$$

et de même,

$$\mathrm{Hom}_A(\alpha,U)\circ\mathrm{Hom}_A(\beta,U)=\mathrm{Hom}_A(\beta\circ\alpha,U)=0.$$

De plus, $\mathrm{Hom}_A(U,\alpha)$ est injectif car α est un monomorphisme. Le fait que (5) soit exacte en $\mathrm{Hom}_A(U,M)$ provient de la propriété universelle du noyau. En effet, $\gamma\in\ker(\mathrm{Hom}_A(U,\beta))$ implique que $\beta\circ\gamma=0=\beta\circ\alpha$ donc il existe un unique $\delta\in\mathrm{Hom}_A(U,L)$ tel que $\alpha\circ\delta=\gamma$ et donc $\gamma\in\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(U,\alpha))$, d'où

$$\ker(\mathrm{Hom}_A(U,\beta))=\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(U,\alpha).$$

De même, β étant un épimorphisme, $\mathrm{Hom}_A(\beta,U)$ est injectif et la suite (6) est exacte en $\mathrm{Hom}_A(M,U)$, par propriété universelle du conoyau.
Pour la réciproque, nous ne traitons que le second cas, le premier étant analogue. $\mathrm{Hom}_A(\beta,U)$ est injectif pour tout U, donc β est surjectif. Ensuite,

$$\mathrm{Hom}_A(\alpha,U)\circ\mathrm{Hom}_A(\beta,U)=0\ \Leftrightarrow\ \forall f:N\to U,\ f\circ\beta\circ\alpha=0.$$

Si $U:=N$ et $f=id_N$, on a $\beta\circ\alpha=0$, donc $\mathrm{im}\,\alpha\subseteq\ker\beta$. Soit ensuite $U:=M/_{\mathrm{im}\,\alpha}$ et soit $\pi:M\twoheadrightarrow U$ la projection naturelle. Alors $\pi\circ\alpha=0$ implique $\pi\in\ker(\mathrm{Hom}_A(\alpha,U))=\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\beta,U))$, on peut donc choisir $\varphi:N\to U$ tel que $\pi=\varphi\circ\beta$ et donc $\ker\beta\subseteq\ker\pi=\mathrm{im}\,\alpha$ donc la suite

$$L\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}N\longrightarrow 0$$

est exacte. □

Remarque 33.

1. Notons que la deuxième partie du Lemme précédent peut être prouvée en utilisant le Lemme de Yoneda et le fait que la catégorie $\mathrm{Fon}(A-\mathfrak{Mod},\mathfrak{Ab})$ est abélienne. En effet, dire que la suite (5) est exacte pour tout U revient à dire que l'on a une suite exacte dans $\mathrm{Fon}(A-\mathfrak{Mod},\mathfrak{Ab})$:

   $$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_A(-,L)\xrightarrow{\eta}\mathrm{Hom}_A(-,M)\xrightarrow{\xi}\mathrm{Hom}_A(-,N)$$

   et d'après le Lemme de Yoneda, ceci donne une suite

   $$L\xrightarrow{\eta(id_L)}M\xrightarrow{\xi(id_M)}N\ .$$

   Pour l'exactitude de cette dernière suite, par exemple si $K:=\ker\eta(id_X)$, alors en évaluant la première suite exacte en K, on obtient que η n'est pas injectif si $K\neq 0$.
2. Le fait que $\mathrm{Hom}_A(U,\beta)$ et $\mathrm{Hom}_A(\alpha,U)$ ne soient pas surjectifs en général est un problème central, qui peut être étudié grâce aux objets que nous allons définir ici.

Soit M un A-module et soit Ω_M un premier syzygy de M associé à un module projectif $P_M\twoheadrightarrow M$. On a donc une suite exacte courte

$$0\longrightarrow\Omega_M\longrightarrow P_M\longrightarrow M\longrightarrow 0\ .$$

Soient N un A-module et $\varphi : \Omega_M \to N$ un morphisme. Nous allons voir que φ induit une suite exacte courte. Soit $\iota : \Omega_M \hookrightarrow P_M$ l'injection canonique et soient

$$L_N^M := \{(\varphi(\omega), -\iota(\omega)) \in N \oplus P_M,\ \omega \in \Omega_M\},$$

ainsi que

$$Q_M := (N \oplus P_M) \Big/ L_N^M .$$

On voit, d'après la Proposition 12, que Q_M est la somme amalgamée associée au diagramme $P_M \xleftarrow{\iota} \Omega_M \xrightarrow{\varphi} N$:

$$Q_M = N \sqcup_{\Omega_M} P_M.$$

Posons

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\lambda} & Q_M \\ n & \mapsto & \overline{(n,0)} \end{array}$$

En appliquant la Proposition 13, on voit que λ est injectif et de plus, on a

$$Q_M \,/_N = \operatorname{coker}(\lambda) \simeq \operatorname{coker}(\iota) = P_M \,/_{\Omega_M} \simeq M. \tag{7}$$

On a donc une suite exacte courte

$$(Q_f) \ : \ 0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

Ainsi, $\varphi : \Omega_M \to N$ induit un module Q_M et un monomorphisme $\lambda : N \hookrightarrow Q_M$ avec $Q_M \,/_N \simeq M$. En posant

$$\begin{array}{ccccc} \pi & : & P_M & \to & Q_M \\ & & p & \mapsto & \overline{(0,p)} \end{array}$$

on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota} & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\lambda} & Q_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De plus, si λ est un monomorphisme scindé, il existe $\sigma : Q_M \to N$ tel que $\sigma \circ \lambda = id_N$ et alors $\varphi = \sigma \circ \lambda \circ \varphi = \sigma \circ \pi \circ \iota$ et $\psi := \sigma \circ \pi \in \operatorname{Hom}_A(P_M, N)$ vérifie $\varphi = \psi \circ \iota$. Réciproquement, si $\psi \in \operatorname{Hom}_A(P_M, N)$ est tel que $\varphi = \psi \circ \iota$, on pose

$$\begin{array}{ccccc} \sigma & : & \overline{(n,p)} & \to & n + \psi(p) \end{array}$$

qui est bien défini car si $(n,p) = (\varphi(\omega), -\iota(\omega))$ alors $\sigma(n,p) = \varphi(\omega) - (\psi \circ \iota)(\omega) = 0$ et alors $\sigma \circ \lambda(n) = \sigma(\overline{(n,0)}) = n$, d'où $\sigma \circ \lambda = id_N$ et λ est un monomorphisme scindé.

Ceci est une occurence d'un phénomène plus général.

Définition 39. Si M, N sont deux A-modules et si L_1, L_2 en sont deux autres, on dit que deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont <u>équivalentes</u> s'il existe un morphisme $L_1 \to L_2$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui est une application directe du Corollaire 8 :

<u>Lemme</u> 32. *Si le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes commute, alors $L_1 \to L_2$ est un isomorphisme.

<u>Lemme</u> 33. *L'équivalence des suites exactes est une relation d'équivalence.*

Démonstration. En effet, d'après le Lemme 32 et en reprenant les notations de la définition 39, $L_1 \to L_2$ est un isomorphisme et les propriétés de réflexivité, transitivité et symétrie sont alors claires. □

<u>Lemme</u> 34. *Si les suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} L_1 \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\gamma} L_2 \xrightarrow{\delta} M \longrightarrow 0$$

sont équivalentes, alors α (resp. β) est un monomorphisme scindé (resp. un épimorphisme scindé) si et seulement si γ (resp. δ) l'est.

Démonstration. Supposons que γ soit un monomorphisme scindé et soit $\varepsilon : L_1 \to L_2$. Il existe $\sigma : L_2 \to N$ tel que $\sigma \circ \gamma = id_N$. Alors $id_N = \sigma \circ \gamma \circ id_N = \sigma \circ \varepsilon \circ \alpha$ et $\psi := \sigma \circ \varepsilon : L_1 \to N$ vérifie $\psi \circ \alpha = id_N$ et α est donc scindé. La réciproque provient de la propriété de symétrie de l'équivalence des suites. De même, il suffit de montrer que si β est scindé, alors δ aussi. Supposons donc qu'il existe $\sigma : M \to L_1$ tel que $\beta \circ \sigma = id_M$. Alors, $id_M = id_M \circ \beta \circ \sigma = \delta \circ \varepsilon \circ \sigma$ et $\psi : \varepsilon \circ \sigma : M \to L_2$ vérifie $\delta \circ \psi = id_M$ et δ est scindée, d'où le résultat. □

<u>Corollaire</u> 15. *Deux suites exactes courtes équivalentes sont simultanément scindées.*

Nous allons motiver l'étude des groupes Ext par un résultat fondamental :

Théorème 9. *L'ensemble des classes d'équivalence de suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow ? \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est un bijection avec l'espace quotient

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M)$$

où $\iota_M : \Omega_M \hookrightarrow P_M$ est le plongement naturel, et ce, quel que soit le module projectif $P_M \twoheadrightarrow M$ choisi.

Démonstration. Notons E l'ensemble des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow ? \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles suites. Procédons par étapes.

1. Étant donné $f \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N)$, on a déjà construit une suite

$$Q_f \ : \ 0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

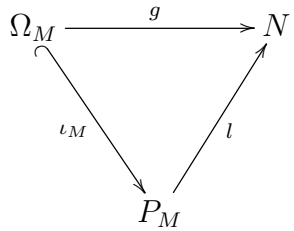
dont on peut considérer la classe $\overline{Q_f}$. On a alors une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) & \to & \mathscr{E} \\ f & \mapsto & \overline{Q_f} \end{array}$$

et pour montrer que ceci définit une application

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M) \xrightarrow{\ \Xi\ } \mathscr{E},$$

il nous faut montrer que si $g \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N)$ se factorise



c'est-à-dire si $g \in \mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M$, alors les suites induites par f et $f+g$ sont équivalentes. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q_M(f+g) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f+g} & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q_M(f) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et on a $g = l \circ \iota_M$. Alors, $Q_M(f)$ (resp. $Q_M(f+g)$) est la somme amalgamée associée à $P_M \xleftarrow{\iota} \Omega_M \xrightarrow{f} N$ (resp. $P_M \xleftarrow{\iota} \Omega_M \xrightarrow{f+g} N$). Posons

$$\begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} : Q_M(f) \to Q_M(f+g).$$

On observe que

$$\begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f \\ -\iota_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + l \circ \iota_M \\ -\iota_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+g \\ -\iota_M \end{pmatrix}$$

et ainsi, le morphisme ci-dessus est bien défini. De plus, le morphisme

$$\begin{pmatrix} id_N & l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} : Q_M(f+g) \to Q_M(f)$$

est bien défini car

$$\begin{pmatrix} id_N & l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} f+g \\ -\iota_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -\iota_M \end{pmatrix}$$

et il vérifie

$$\begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_N & l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_N & 0 \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_N & l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix},$$

donc $Q_M(f) \to Q_M(f+g)$ est un isomorphisme. Enfin, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q_M(f) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q_M(f+g) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif. En effet, en notant

$$\begin{array}{rccc} \eta & : & N & \to & Q_M(?) \\ & & n & \mapsto & \overline{(n,0)} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & Q_M(?) & \to & M \\ & & \overline{(n,p)} & \mapsto & \pi_M(p) \end{array}$$

on a

$$\begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \eta = \begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_N \\ 0 \end{pmatrix} = \eta$$

et

$$\pi \circ \begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_M \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} id_N & -l \\ 0 & id_{P_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_M \end{pmatrix} = \pi.$$

Ainsi, les suites

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M(f) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M(f+g) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont équivalentes.

2. Maintenant, si

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte, en utilisant le fait que P_M est projectif et que $X \to M$ est surjectif, il existe un morphisme $P_M \to X$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} P_M & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \| \\ X & \longrightarrow & M \end{array} \tag{8}$$

et ce, d'après la Proposition 6. Par propriété universelle de $N = \ker(X \to M)$, il existe un unique morphisme $\Omega_M \to N$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute. Afin de montrer que ceci définit une application

$$E \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M),$$

on doit montrer que si $\lambda, \mu : P_M \to X$ rendent (8) commutatif, alors les morphismes induits $f_\lambda, f_\mu : \Omega_M \to N$ ont la même classe modulo $\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota_M} & P_M & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_\lambda}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle f_\mu} & & {\scriptstyle \lambda}\big\downarrow\big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[\alpha]{} & X & \xrightarrow[\beta]{} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pour $z \in P_M$, on a

$$\beta(\lambda(z) - \mu(z)) = \beta \circ \lambda(z) - \beta \circ \mu(z) = \pi_M(z) - \pi_M(z) = 0$$

donc $(\lambda - \mu)(z) \in \ker \beta = \mathrm{im}\, \alpha$ et il existe un unique $y_z \in N$ tel que $(\lambda - \mu)(z) = \alpha(y_z)$ et soit

$$\begin{array}{rccc} \theta & : & P_M & \to & N \\ & & z & \mapsto & y_z \end{array}$$

Soit ensuite $x \in \Omega_M$. On a

$$\alpha \circ (f_\lambda - f_\mu)(x) = (\lambda - \mu) \circ \iota_M(x)$$

et pour $y := \theta \circ \iota_M(x) \in N$, on a $(\lambda - \mu) \circ \iota_M(x) = \alpha(y)$ et comme α est injectif, $(f_\lambda - f_\mu)(x) = \theta \circ \iota_M(x)$ et donc $f_\lambda - f_\mu = \theta \circ \iota_M$, ce que l'on voulait.

3. Montrons à présent que deux suites exactes équivalentes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induisent des morphismes qui diffèrent d'un élément de $\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota_M} & P_M & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_X} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_X} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha_X} & X & \xrightarrow{\beta_X} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y & \xrightarrow{\beta_Y} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f_Y} & & \uparrow{\scriptstyle \eta_Y} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota_M} & P_M & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Alors, η_Y et $\lambda \circ \eta_X$ sont des morphismes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
P_M & \xrightarrow{\pi_M} & M \\
\downarrow & & \| \\
Y & \xrightarrow{\beta_Y} & M.
\end{array}$$

Ainsi, les morphismes $\Omega_M \to N$ induits par η_Y et $\lambda \circ \eta_X$ ont même classe. Mais on a

$$\alpha_Y \circ f_X = \alpha_Y \circ id_N \circ f_X = \lambda \circ \eta_X \circ \iota_M$$

et donc le morphisme induit par $\lambda \circ \eta_X$ a même classe que $id_N \circ f_X = f_X$ et le morphisme induit par η_Y étant f_Y, on en déduit que f_X et f_Y ont même classe, comme voulu. On a ainsi définit une application

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M) \ .$$

4. Ensuite, comme Ω_M n'est défini qu'à module projectif près, on doit étudier ce qu'il se produit si l'on remplace P_M par un autre module projectif P'_M avec $P'_M \twoheadrightarrow M$ et Ω_M par Ω'_M. Montrons qu'en fait on a

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega'_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P'_M, N) \circ \iota'_M),$$

où $\iota'_M : \Omega'_M \hookrightarrow P'_M$ est le plongement naturel. $P'_M \to M$ est surjectif et P_M est projectif, donc il existe $\varphi : P_M \to P'_M$ tel que

$$\begin{array}{ccc}
P_M & \longrightarrow & M \\
 & {\scriptstyle \varphi}\searrow \quad \nearrow & \\
 & P'_M &
\end{array}$$

commute. De même, il existe $\psi : P'_M \to P_M$ tel que l'on ait la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
P'_M & \longrightarrow & M \\
 & {\scriptstyle \psi}\searrow \quad \nearrow & \\
 & P_M &
\end{array}$$

Mais, dans ce cas, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega'_M & \longrightarrow & P'_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et par propriété universelle de $\Omega_M = \ker(P_M \to M)$, il existe un unique $\Omega(\psi) : \Omega'_M \to \Omega_M$ rendant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Omega(\psi)} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega'_M & \longrightarrow & P'_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ainsi, un morphisme $\Omega_M \xrightarrow{\alpha} N$ induit, par composition, un morphisme $\Omega'_M \to N$ défini par $\Omega'_M \xrightarrow{\Omega(\psi)} \Omega_M \xrightarrow{\alpha} N$. De plus, si $\alpha = \beta \circ \iota_M$ pour un $\beta : P_M \to N$, alors

$$\alpha \circ \Omega(\psi) = \beta \circ \iota_M \circ \Omega(\psi) = \beta \circ \psi \circ \iota'_M = \beta' \circ \iota'_M$$

où $\beta' := \beta \circ \psi$. Ainsi, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M) & \to & \mathrm{Hom}_A(\Omega'_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P'_M, N) \circ \iota'_M) \\ \overline{\alpha} & \mapsto & \overline{\alpha \circ \Omega(\psi)} \end{array}$$

est bien défini. De même, φ induit un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\Omega'_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P'_M, N) \circ \iota'_M) & \to & \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M) \\ \overline{\alpha} & \mapsto & \overline{\alpha \circ \Omega(\varphi)} \end{array}$$

Montrons que

$$\begin{cases} \alpha - \alpha \circ \Omega(\psi) \circ \Omega(\varphi) \in \mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M \\ \alpha - \alpha \circ \Omega(\varphi) \circ \Omega(\psi) \in \mathrm{Hom}_A(P'_M, N) \circ \iota'_M \end{cases}.$$

Par symétrie, montrons seulement la première appartenance. Quitte à composer à gauche avec α, il s'agit d'établir que

$$id_{\Omega_M} - \Omega(\psi) \circ \Omega(\varphi) \in \mathrm{Hom}_A(P_M, \Omega_M) \circ \iota_M.$$

Pour cela, il suffit de montrer que si id_M se relève en un endomorphisme χ d'un module projectif $P \twoheadrightarrow M$, alors le morphisme induit sur les noyaux (les syzygies) ne diffère de id_{Ω_M} que par un morphisme se factorisant à travers $\Omega_M \overset{\iota_M}{\hookrightarrow} P$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Omega(\chi)} & & \uparrow{\scriptstyle \chi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En effet, id_M se relève à travers

$$\begin{array}{ccc} P_M & \longrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle \psi\circ\varphi} & & \| \\ P_M & \longrightarrow & M \end{array}$$

il existe alors $\delta : P_M \to \Omega_M$ tel que

$$id_{\Omega_M} - \Omega(\psi \circ \varphi) = \delta \circ \iota_M.$$

D'après l'étape 2, il existe $\gamma : P_M \to \Omega_M$ tel que

$$\Omega(\psi \circ \varphi) - \Omega(\psi) \circ \Omega(\varphi) = \gamma \circ \iota_M.$$

Mais dans ce cas,

$$id_{\Omega_M} - \Omega(\psi) \circ \Omega(\varphi) = id_{\Omega_M} + \gamma \circ \iota_M - \Omega(\psi \circ \varphi) = id_{\Omega_M} + \gamma \circ \iota_M + \delta \circ \iota_M - id_{\Omega_M} = (\gamma + \delta) \circ \iota_M,$$

comme souhaité.
Du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Omega(\chi)} & & \uparrow{\scriptstyle \chi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

on peut soustraire l'identité de toutes les colonnes et on doit alors montrer que, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota_M} & P & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Omega(\nu)} & & \uparrow{\scriptstyle \nu} & & \uparrow{\scriptstyle 0} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow[\iota_M]{} & P & \xrightarrow[\pi_M]{} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(où $\nu := \chi - id_P$), $\Omega(\nu)$ se factorise à travers $\iota_M : \Omega_M \hookrightarrow P_M$. Mais comme $\pi_M \circ \nu = 0$, par propriété universelle de $\Omega_M = \ker(\pi_M)$, il existe un unique $\mu : P \to \Omega_M$ tel que $\iota_M \circ \mu = \nu$. Mais ceci entraîne

$$\iota_M \circ \mu \circ \iota_M = \nu \circ \iota_M = \iota_M \circ \Omega(\nu),$$

et ι_M étant injectif, on en déduit

$$\mu \circ \iota_M = \Omega(\nu),$$

ce que l'on voulait démontrer.

5. Enfin, on doit prouver qu'étant donné un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \xrightarrow{\iota_M} & P_M & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\nu} & X & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

il existe un morphisme $\lambda : Q_M(f) \to N$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & Q_M(f) & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\nu} & X & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En effet, la commutativité de ce dernier diagramme implique qu'envoyer une suite

$$\mathcal{E} \ : \ 0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sur le morphisme $f_{\mathcal{E}} : \Omega_M \to N$ construit plus haut, puis envoyer $f_{\mathcal{E}}$ sur la suite

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M(f_{\mathcal{E}}) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est l'identité, à équivalence des suites près. Ceci montrera que

$$\Xi \circ \Theta = id_{\mathscr{E}}.$$

Soit donc

$$\begin{array}{rccc} \lambda & : & Q_M(f) & \to & X \\ & & \overline{(n,p)} & \mapsto & \nu(n) + g(p) \end{array}$$

Ceci est bien défini car

$$\lambda(\overline{(f(\omega), -\iota_M(\omega))}) = \nu \circ f(\omega) - g \circ \iota_M(p) = 0$$

et on a

$$\mu \circ \lambda(\overline{(n,p)}) = \mu \circ \nu(n) + \mu \circ g(p) = \pi_M(p) = \beta(\overline{(n,p)})$$

ainsi que

$$\lambda \circ \alpha(n) = \lambda(\overline{(n,0)}) = \nu(n)$$

et on a le morphisme voulu.
La composition inverse est plus simple : un morphisme $f : \Omega_M \to N$ est envoyé sur

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M(f) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q_M(f) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

commute, la suite

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q_M(f) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est envoyée sur un morphisme $\Omega_M \to N$ ayant même classe que f d'après l'étape 2. On en déduit alors que

$$\Theta \circ \Xi = id_{\frac{\mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N)}{\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M}}$$

et on obtient finalement la bijection désirée.

□

Définition 40. Soient M, N deux A-modules et P_M un module projectif induisant une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \Omega_M \longrightarrow P_M \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

Appliquer $\mathrm{Hom}_A(?, N)$ à cette suite permet de définir le groupe $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ par la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\iota_M, N)} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \longrightarrow 0\,.$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, N) := \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M, N) \circ \iota_M).$$

Remarque 34. D'après le Lemme 31, on a même une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \longrightarrow 0.$$

Comme nous l'avons vu dans le Théorème 9, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ classifie les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

à équivalence près. Ainsi, $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ ne dépend ni du module projectif P_M, ni de l'épimorphisme $P_M \twoheadrightarrow M$ choisis.

De plus, pour tout module projectif P, on a

$$\mathrm{Ext}^1_A(M \oplus P, N) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(M,N).$$

En effet, par définition, il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{M\oplus P},N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_{M\oplus P},N) \circ j) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M,N) \circ \iota_2)$$

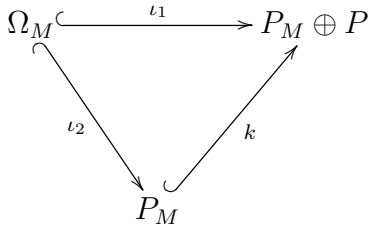
où $j : \Omega_{M\oplus P} \hookrightarrow P_{M\oplus P}$ et $\iota_2 : \Omega_M \hookrightarrow P_M$. On a $P_M \oplus P \twoheadrightarrow M \oplus P$ et d'après le point précédent, comme $\Omega_M \simeq \ker(P_M \oplus P \twoheadrightarrow M \oplus P)$, on a

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{M\oplus P},N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_{M\oplus P},N) \circ j) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M,N) \circ \iota_1)$$

où $\iota_1 : \Omega_M \hookrightarrow P_M \oplus P$. Il suffit donc de montrer que

$$X := \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M,N) \circ \iota_1) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_M,N) \circ \iota_2) =: Y.$$

On a le triangle commutatif



On a deux morphismes canoniques potentiels $X \to Y$ et $Y \to X$, réciproques l'un de l'autre. Il nous reste donc à montrer qu'ils sont bien définis. Si $\overline{f} = \overline{0}$ dans X, il existe $\varphi : P_M \oplus P \to N$ tel que $f = \varphi \circ \iota_1$. On a alors $f \circ \iota_1 = f \circ k \circ \iota_2 = \psi \circ \iota_2$ avec $\psi := f \circ k : P_M \to N$ et alors $\overline{f} = \overline{0}$ dans Y. Réciproquement, si $\overline{g} = \overline{0}$ dans Y, il existe $\varphi : P_M \to N$ tel que $g = \varphi \circ \iota_2$. Soit alors la composée $\psi : P_M \oplus P \twoheadrightarrow P_M \xrightarrow{\varphi} N$. On a $\psi \circ \iota_1 = \psi \circ k \circ \iota_2 = \psi((\iota_2, 0)) = \varphi \circ \iota_2 = g$ et $\overline{g} = \overline{0}$ dans X, d'où le résultat.

Nous allons voir ici que l'on peut définir une notion de somme sur l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'équivalence de suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow ? \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Cette opération est appelée la somme de Baer. Nous allons donner ici rapidement la construction.

Soient $f_1, f_2 : \Omega_M \to N$ deux morphismes et les suites associées

$$Q_{f_1} \ : \ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\nu_1} X_1 \xrightarrow{\mu_1} M \longrightarrow 0$$

$$Q_{f_2} \ : \ 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\nu_2} X_2 \xrightarrow{\mu_2} M \longrightarrow 0$$

Ceci induit une suite exacte courte naturelle

$$0 \longrightarrow N \oplus N \xrightarrow{\nu} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\mu} M \oplus M \longrightarrow 0$$

où $\nu := \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}$ et $\mu := \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. On note encore $\Delta_M : M \to M \oplus M$ le morphisme diagonal défini par $m \mapsto (m, m)$ et Z_1 le produit fibré de $X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{\mu} M \oplus M \xleftarrow{\Delta_M} M$, i.e.

$$Z_1 := \{(x_1, x_2, m) \in X_1 \oplus X_2 \oplus M \ ; \ \mu_1(x_1) = m = \mu_2(x_2)\}.$$

Soient encore les morphismes naturels

$$\widetilde{\iota} \ : \ \begin{array}{ccc} N \oplus N & \to & Z_1 \\ (n_1, n_2) & \mapsto & (\nu_1(n_1), \nu_2(n_2), 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \widetilde{\pi} \ : \ \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & M \\ (x_1, x_2, m) & \mapsto & m \end{array}$$

On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \xrightarrow{\nu} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\mu} & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle p} & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_M} & & \\ 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & Z_1 & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a ensuite

$$\ker(\widetilde{\pi}) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \oplus X_2 \ ; \ \mu_1(x_1) = 0 = \mu_2(x_2)\} = \operatorname{im}(\widetilde{\iota})$$

donc la suite $0 \longrightarrow N \oplus N \longrightarrow Z_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est exacte. Soit $\nabla_N : N \oplus N \to N$ le morphisme codiagonal $(n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$. On définit Z comme la somme amalgamée de $Z_1 \xleftarrow{\widetilde{\iota}} N \oplus N \xrightarrow{\nabla_N} N$, i.e.

$$Z := (Z_1 \oplus N) \Big/ \{(\nu_1(x_1), \nu_2(x_2), 0, -(n_1 + n_2)), \ n_1, n_2 \in N\}.$$

Si $\iota : N \hookrightarrow Z_1 \oplus N \twoheadrightarrow Z$ et si $f : Z_1 \hookrightarrow Z_1 \oplus N \twoheadrightarrow Z$ sont les morphismes naturels, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_N} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & Z & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La seconde suite est exacte car

$$Z \,/_N \simeq Z_1 \Big/ \nu(N \oplus N) \simeq M.$$

On vérifie aisément que la construction de cette dernière suite est bien définie et

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Z \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est alors appelée la somme de Baer de Q_{f_1} et Q_{f_2} et on la note $Q_{f_1} +_B Q_{f_2}$. On résume cette construction par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \xrightarrow{\nu} & X_1 \oplus X_2 & \xrightarrow{\mu} & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle p} & \text{produit fibré} & \uparrow{\scriptstyle \Delta_M} & & \\ 0 & \longrightarrow & N \oplus N & \xrightarrow{\widetilde{\iota}} & Z_1 & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_N} & \text{somme amalgamée} & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\iota} & Z & \xrightarrow{\pi} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La somme de Baer trouve son intérêt dans le résultat suivant :

Proposition 23. *La somme de Baer $+_B$ définit sur l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'équivalence de suites exactes courtes*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow ? \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une loi de groupe abélien et on a un isomorphisme de groupes

$$(\mathscr{E}, +_B) \simeq (\mathrm{Ext}^{\,1}_A(M,N), +).$$

Démonstration. En conservant les notations adoptées dans la construction, il s'agit de montrer que $Q_{f_1} +_B Q_{f_2}$ et $Q_{f_1+f_2}$ sont équivalentes. On procède en deux étapes :

1. On commence par construire une suite exacte courte auxiliaire équivalente à $Q_{f_1+f_2}$. Remarquons que l'on a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_M \oplus \Omega_M & \longrightarrow & P_M \oplus P_M & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_{\Omega_M}} & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_{P_M}} & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_M} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

   Définissons $Z_1 := (P_M \oplus P_M) \times_{M\oplus M} M$ le produit fibré de Δ_M. Par propriété universelle du produit fibré, il existe un unique morphisme $P_M \to Z_1$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega_M \oplus \Omega_M & \longrightarrow & P_M \oplus P_M & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & \text{produit fibré} & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M \oplus \Omega_M & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

   commute. Soient ensuite $Z_2 := (N \oplus N) \sqcup_{\Omega_M \oplus \Omega_M} Z_1$ la somme amalgamée de (f_1, f_2) et $Z_3 := N \sqcup_{N\oplus N} Z_2$ la somme amalgamée de ∇_N. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Z_3 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \nabla_N} & \text{somme amalgamée} & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (f_1,f_2)} & \text{somme amalgamée} & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M \oplus \Omega_M & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_{\Omega_M}} & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & P_M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1+f_2} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

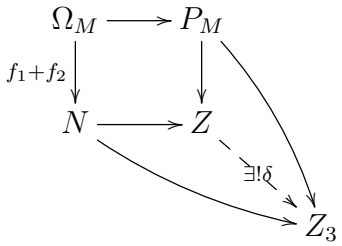
   et notons $(*)$ la suite

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Z_3 \longrightarrow M \longrightarrow 0\,.$$

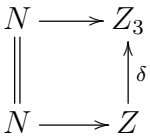
   Maintenant, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_M & \xrightarrow{f_1+f_2} & N \\
\downarrow{\scriptstyle \Delta_{\Omega_M}} & & \uparrow{\scriptstyle \nabla_N} \\
\Omega_M \oplus \Omega_M & \xrightarrow{(f_1,f_2)} & N \oplus N
\end{array}$$

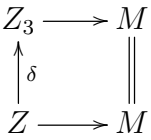
Donc, par propriété universelle de la somme amalgamée, on obtient



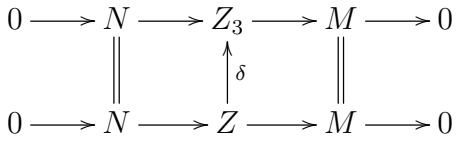
ce qui donne le carré



et par propriété universelle de $M = \operatorname{coker}(N \to Z)$ on a la commutativité du carré



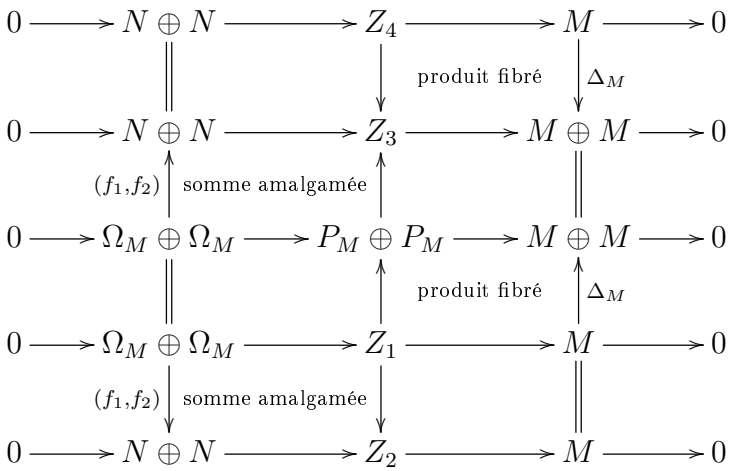
et il vient alors



d'où l'équivalence $Q_{f_1+f_2} \sim (*)$.

2. Soit ensuite le diagramme

(a)



(b)

Il suffit de montrer que les suites (a) et (b) sont équivalentes. En effet, si tel est le cas, on effectue une somme amalgamée de ∇_N sur (a) et (b) et les suites résultantes seront encore équivalentes. Or, en passant à la somme amalgamée, (a) devient $Q_{f_1} +_B Q_{f_2}$ et (b) devient la suite $(*)$ de la première étape. On aura alors $Q_{f_1} +_B Q_{f_2} \sim (*) \sim Q_{f_1+f_2}$ et le résultat sera acquis.
Montrons donc que (a) $\sim$ (b). Par propriété universelle de $Z_2 = (N \oplus N) \sqcup_{\Omega_M \oplus \Omega_M} Z_1$,

on a un unique morphisme $Z_2 \to Z_3$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_4 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & \text{produit fibré} & \downarrow \Delta_M & & \\
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_3 & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow \Delta_M & & \\
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Mais, par propriété universelle de $Z_4 = M \times_{M \oplus M} Z_3$, il existe un unique $Z_2 \to Z_4$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_4 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

commute. Ceci montre l'équivalence souhaitée et achève la preuve.

□

On peut ensuite définir les groupes Ext de plus haut degré :

Définition 41. Soient M, N deux A-modules et

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+1}} P_{i+1} \xrightarrow{\partial_i} P_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. On pose

$$\mathrm{Ext}^0_A(M, N) := \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, N) := \ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_n, N)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\partial_{n-1}, N)).$$

On voit qu'ici un examen minutieux de la construction est nécessaire, afin d'assurer la cohérence des définitions. Ceci motive les deux lemmes suivants :

Lemme 35. *Les Définitions 40 et 41 de* $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ *coïncident.*

Démonstration. On observe que la suite

$$0 \longrightarrow \Omega_M \xrightarrow{\iota} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

est exacte et, d'après la Définition 40, on obtient $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ comme étant

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_0, N) \circ \iota)$$

qui est précisément le conoyau de

$$\mathrm{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\iota, N)} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M, N)\,,$$

tandis que la Définition 41 exprime $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ comme étant

$$\ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_1,N)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\partial_0,N)).$$

Mais, on a

$$\ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_1,N)) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathrm{Hom}_A(P_1,N)\ ;\ \alpha\circ\partial_1 = 0\}$$

et

$$\Omega_M = \ker\varepsilon = \mathrm{im}\,\partial_0 = \mathrm{im}\,\iota,$$

ainsi que

$$\mathrm{coker}\,\partial_1 = P_1 \Big/ \mathrm{im}\,(\partial_1) = P_1 \Big/ \ker(\partial_0) \simeq \mathrm{im}\,(\partial_0) = \Omega_M$$

et comme, pour tout $\alpha \in \ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_1,N))$, on a $\alpha\circ\partial_1 = 0 = \partial_0\circ\partial_1$, par proptiété universelle de $\mathrm{coker}\,(\partial_1) = \Omega_M$, il existe un unique $\delta \in \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N)$ tel que $\delta\circ\partial_0 = \alpha$. On obtient donc un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) & \overset{\sim}{\to} & \ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_1,N)) \\ \delta & \mapsto & \delta\circ\partial_0 \end{array}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\partial_0,N)) &= \{\beta\circ\partial_0,\ \beta \in \mathrm{Hom}_A(P_0,N)\} \\ &= \{\beta\circ\iota,\ \beta \in \mathrm{Hom}_A(P_0,N)\} = \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\iota,N)) \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{im}\,\iota = \Omega_M = \mathrm{im}\,\partial_0$; Finalement,

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ (\mathrm{Hom}_A(P_0,N)\circ\iota) \simeq \mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\iota,N)$$

et

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_M,N) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\iota,N) \simeq \ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_1,N)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\partial_0,N)),$$

comme souhaité. □

Lemme 36. *La construction de la Définition 41 ne dépend pas de la résolution projective choisie.*

Démonstration. Le deuxième point de la Remarque 34 montre que $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ ne dépend pas du choix de la couverture projective utilisée pour définir $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$. Par construction, on a

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,N) = \mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{i-1}_M,N),\ \forall i \geq 1.$$

On sait que Ω_M est bien défini à facteurs directs projectifs et isomorphisme près, il en est donc de même pour Ω^{i-1}_M. Il nous faut donc montrer que si Q est un module projectif, on a

$$\mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{i-1}_M \oplus Q,N) \simeq \mathrm{Ext}^1_A(\Omega^{i-1}_M,N).$$

Mais on sait que c'est le cas, en utilisant le Lemme 35 et le troisième point de la Remarque 34. □

Terminons cette section par quelques propriétés élémentaires des groupes Ext . Les deux derniers résultats ne seront pas utilisés dans la suite et ne sont donnés ici qu'à titre culturel. Aussi ne démontrerons-nous pas ces faits. On pourra consulter [40] (pages 96-101) pour des preuves complètes.

Lemme 37. *Soient M_1, M_2 et N trois A-modules. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_A(M_1 \oplus M_2, N) \simeq \mathrm{Ext}^{\,n}_A(M_1, N) \oplus \mathrm{Ext}^{\,n}_A(M_2, N)$$

et

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_A(N, M_1 \oplus M_2) \simeq \mathrm{Ext}^{\,n}_A(N, M_1) \oplus \mathrm{Ext}^{\,n}_A(N, M_2).$$

Démonstration. Considérons une résolution projective de N :

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0\,.$$

On peut alors lui appliquer

$$\mathrm{Hom}_A(-, M_1 \oplus M_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(-, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_A(-, M_2)$$

et en notant $M := M_1 \oplus M_2$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_2, M) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_1, M) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(P_0, M) \\
& \| & & \| & & \| \\
& \mathrm{Hom}_A(P_2, M_1) & & \mathrm{Hom}_A(P_1, M_1) & & \mathrm{Hom}_A(P_0, M_1) \\
\cdots \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus \\
& \mathrm{Hom}_A(P_2, M_2) & & \mathrm{Hom}_A(P_1, M_2) & & \mathrm{Hom}_A(P_0, M_2)
\end{array}$$

et ceci nous donne le second isomorphisme.
Le premier isomorphisme s'obtient en utilisant le fait qu'une résolution projective de M_1

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

et une résolution projective de M_2

$$\cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

induisent une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow P_2 \oplus Q_2 \longrightarrow P_1 \oplus Q_1 \longrightarrow P_0 \oplus Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de M. On obtient alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(N, P_2 \oplus Q_2) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(N, P_1 \oplus Q_1) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}_A(N, P_0 \oplus Q_0) \\
& \| & & \| & & \| \\
& \mathrm{Hom}_A(N, P_2) & & \mathrm{Hom}_A(N, P_1) & & \mathrm{Hom}_A(N, P_0) \\
\cdots \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus \\
& \mathrm{Hom}_A(N, Q_2) & & \mathrm{Hom}_A(N, Q_1) & & \mathrm{Hom}_A(N, Q_0)
\end{array}$$

d'où le premier isomorphisme. □

On peut généraliser légèrement ceci, en utilisant quasiment la même démonstration :

Lemme 38. *Pour un ensemble I, des familles $(M_i)_{i\in I}, (N_i)_{i\in I}$ de A-modules et M, N deux A-modules, on a les isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}\left(M, \prod_{i\in I} N_i\right) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M, N_i),$$

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M_i, N).$$

De plus, si I est fini, alors

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M_i, N).$$

Lemme 39. *Soient A et B deux K-algèbres. Supposons qu'il existe un morphisme de K-modules $B \to A$ (munissant ainsi A d'une structure de B-module). Alors, pour tout A-module M et tout B-module N, on a*

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(A \otimes_B N, M) \simeq \mathrm{Ext}^{\,n}_{B}(N, M), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, si A est un B-module projectif, alors

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M, A \otimes_B N) \simeq \mathrm{Ext}^{\,n}_{B}(M, N), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 40. *Soient T un A-module et*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de A-modules. Alors, on a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^{\,1}_{A}(T, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\,1}_{A}(T, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\,1}_{A}(T, L)\ .$$

Remarque 35. Soient M, N deux A-modules. Comme nous l'avons vu en Section 3.2, une résolution projective de M :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+1}} P_{i+1} \xrightarrow{\partial_i} P_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

peut être vue comme un complexe de chaînes borné à droite et en lui appliquant le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(-, N)$, on obtient un complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\varepsilon, N)} \mathrm{Hom}_A(P_0, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\partial_0, N)} \mathrm{Hom}_A(P_1, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(\partial_1, N)} \cdots .$$

Alors

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M, N) \overset{\text{def}}{=} \ker(\mathrm{Hom}_A(\partial_n, N)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_A(\partial_{n-1}, N))$$

est le $n^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe ainsi formé. Sa cohomologie est donc

$$\mathrm{Ext}_A(M, N) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^{\,n}_{A}(M, N).$$

Une telle construction peut se généraliser et constitue ce que l'on appelle le "foncteur dérivé", comme nous le verrons en 4.3.
Enfin, on peut redémontrer le Lemme 36 en utilisant la théorie des complexes. En effet, les Corollaires 11 et 12 montrent directement que la cohomologie $\mathrm{Ext}_A(M, N)$ ne dépend pas de la résolution projective choisie pour M.

4.2 Cohomologie des groupes et classification des extensions

Nous allons étudier ici une application de la construction précédente au cas des groupes, et ainsi former ce que l'on appelle la "cohomologie d'un groupe". Cet objet donne des informations sur les relations qu'entretient un groupe donné G avec un "G-module". Nous allons donner une interprétation des espaces de cohomologie de petite dimension (typiquement 0, 1 et 2) et de plus, nous verrons que le second espace de cohomologie permet de classifier les extensions (suites exactes courtes) de groupes.
Pour formaliser ceci, on définit tout d'abord la notion d'algèbre d'un groupe, qui permet d'étendre le concept de représentation. On se donne donc un groupe G et un anneau commutatif R, que nous fixons.

Définition 42. L'anneau de groupe RG (ou $R[G]$) comme R-module est défini par

$$RG := \bigoplus_{g\in G} R\cdot e_g,$$

où, pour $g \in G$

$$e_g := (\delta_{g,h})_{h\in G} \in \bigoplus_{h\in G} R \qquad (R\cdot e_g \simeq R,\ \forall g\in G),$$

avec $\delta_{g,h}$ le delta de Kronecker ($\delta_{g,h} = 1$ si $g = h$ et 0 sinon). RG peut être muni d'une structure de R-algèbre via

$$\left(\sum_{g\in G} r_g e_g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G} s_h e_h\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{hk=g} r_h s_k\right) e_g = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_h s_{h^{-1}g}\right) e_g.$$

De plus, un module sur $\mathbb{Z}G$ sera appelé un G-module.

Remarque 36. Le groupe des unités $(RG)^\times$ de RG contient G comme sous-groupe via l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & (RG)^\times \\ g & \mapsto & 1\cdot e_g \end{array}$$

L'image de ce monomorphisme sera encore notée G et on notera également $e_g = g \in RG$. En fait, le lemme suivant montre que RG est universel pour cette propriété.

Lemme 41. *Soit A une R-algèbre. Pour tout morphisme de groupes $\alpha : G \to A^\times$, il existe un unique morphisme de R-algèbres $\beta : RG \to A$ tel que $\beta_{|G} = \alpha$.*

Démonstration. Pour obtenir une application R-linéaire $RG \to A$ qui coïncide avec α sur G, on doit définir

$$\begin{array}{rccc} \beta\ : & RG & \to & A \\ & \sum_{g\in G} r_g e_g & \mapsto & \sum_{g\in G} r_g \alpha(g) \end{array}$$

De plus, en définissant β ainsi, on a

$$\beta\left(\left(\sum_{g\in G} r_g e_g\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} s_g e_g\right)\right) = \beta\left(\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_h s_{h^{-1}g}\right) e_g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_h s_{h^{-1}g}\right)\alpha(g)$$

$$= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_h s_{h^{-1}g}\right)\beta(e_g) = \left(\sum_{g\in G} r_g\beta(e_g)\right)\cdot\left(\sum_{g\in G} s_g\beta(e_g)\right) = \beta\left(\sum_{g\in G} r_g e_g\right)\cdot\beta\left(\sum_{g\in G} s_g e_g\right),$$

d'où le résultat. □

Lemme 42. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout morphisme de groupes $\rho : G \to GL_n(R)$, il existe une unique structure $\widehat{\rho}$ de RG-module sur R^n telle que $\widehat{\rho}_{|G} = \rho$. De plus, si K est un corps, la restriction à G du morphisme de structure $\widehat{\rho} : KG \to \mathrm{End}_K(M)$, avec M un KG-module, induit une représentation de G dans K, de degré $\dim_K(M)$.*

Démonstration. Par définition, $GL_n(R) = \mathcal{M}_n(R)^\times$ et le Lemme 41 implique qu'il existe un unique $RG \xrightarrow{\widehat{\rho}} \mathcal{M}_n(R)$ avec $\widehat{\rho}_{|G} = \rho$. □

Remarque 37. Autrement dit, ce Lemme construit la structure de module sur R^n de la façon suivante. Supposons que l'on ait $\rho : G \to GL_n(R)$. Alors

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\rho} & : & RG & \to & \mathrm{End}_R(R^n) \\ & & \sum_{g\in G} r_g e_g & \mapsto & \sum_{g\in G} r_g\rho(g) \end{array}$$

est un morphisme de R-algèbres.
Ceci montre également qu'il n'y a pas de distinction à faire entre les KG-modules et les K-représentations de G. Une représentation n'étant définie que sur un corps, la notion de RG-module, pour R un anneau commutatif, est plus appropriée pour définir le concept de représentation d'un groupe dans R.
Comme nous allons le voir, l'algèbre d'un groupe est aussi un outil fondamental dans l'étude de la cohomologie des groupes.

Définition 43. On définit le morphisme d'augmentation de RG par

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon & : & RG & \to & R \\ & & \sum_{g\in G} r_g e_g & \mapsto & \sum_{g\in G} r_g \end{array}$$

Son noyau $\ker(\varepsilon) =: I(RG)$ est l'idéal d'augmentation de RG.

Remarque 38. $I(RG)$ est engendré par $1 - g \in RG$, où g parcourt G. En effet,

$$x = \sum_{g\in G} r_g e_g \in \ker(\varepsilon) \Leftrightarrow \sum_{g\in G} r_g = 0 \Leftrightarrow x = x - \left(\sum_{g\in G} r_g\right) e_1 = \sum_{g\in G} r_g(e_g - e_1) = \sum_{g\in G} r_g(g-1).$$

Définition 44. Soient G un groupe et M un G-module.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le $n^{\text{ième}}$ espace de cohomologie du groupe G à coefficients dans M comme étant le groupe abélien

$$H^n(G, M) := \mathrm{Ext}^{\,n}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M),$$

où $\mathbb{Z}$ désigne le $\mathbb{Z}G$-module trivial. On peut aussi définir la cohomologie de G :

$$H^*(G, M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(G, M) = \mathrm{Ext}_{\,\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M).$$

Remarque 39. La terminologie trouve son explication dans la Remarque 35 de la section précédente.

Nous allons maintenant décrire les espaces $H^n(G,M)$ pour $n \in \{0,1,2\}$ et donner quelques unes de leurs propriétés élémentaires.

Commençons par le degré 0. Par définition, si M^G désigne le module des G-invariants de M :

$$M^G := \{m \in M \ ; \ g \cdot m = m, \ \forall g \in G\},$$

(M^G est l'ensemble des points fixes de M sous l'action de G), alors on a

$$H^0(G,M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = M^G.$$

Pour le degré 1, nous avons déjà quelques calculs à effectuer. $\mathbb{Z}G$ étant par définition libre, une façon naturelle d'amorcer une résolution projective de $\mathbb{Z}$ est

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\ \iota\ } \mathbb{Z}G \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ .$$

$I(\mathbb{Z}G)$ est alors un premier syzygy de $\mathbb{Z}$. On définit les dérivations de G dans M :

$$Z^1(G,M) := \Delta(G,M) := \{f : G \to M \ ; \ \forall g,h \in G, \ f(gh) = gf(h) + f(g)\}$$

ainsi que les dérivations intérieures de G dans M :

$$B^1(G,M) := \Delta_0(G,M) := \{f : G \to M \ ; \ \exists m \in M \ ; \ \forall g \in G, \ f(g) = gm - m\}.$$

On dit aussi qu'une dérivation (resp. une dérivation intérieure) est un 1-cocycle (resp. un 1-cobord).

Proposition 24. *Sous ces hypothèses, on a un isomorphisme*

$$H^1(G,M) \simeq Z^1(G,M) \Big/ B^1(G,M) = \Delta(G,M) \Big/ \Delta_0(G,M).$$

Démonstration. Soit

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

une résolution projective de $\mathbb{Z}$. On observe que

$$\ker(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_1,M)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M).$$

En effet, on a $\operatorname{coker}(\partial_1) = P_1 \Big/ \operatorname{im}(\partial_1) = P_1 \Big/ \ker(\partial_0) = \operatorname{im}(\partial_0) = \ker(\varepsilon) = I(\mathbb{Z}G)$ et si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,M)$ est tel que $\varphi \circ \partial_1 = 0$, par propriété universelle de $I(\mathbb{Z}G) = \operatorname{coker}(\partial_1)$, il existe un unique $\delta_\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M)$ tel que $\delta_\varphi \circ j = \varphi$ où $j : P_1 \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(\partial_1)$ est la projection canonique. Réciproquement, si $\delta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M)$, alors $\varphi_\delta := \delta \circ j \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_1,M)$ vérifie $\varphi_\delta \circ \partial_1 = \delta \circ j \circ \partial_1 = 0$, d'où un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \ker(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_1,M)) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M) \\ \varphi & \mapsto & \delta_\varphi \end{array}$$

Ensuite, on a clairement une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M).$$

Inversement, pour que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M)$ soit un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$, il faut et il suffit que pour tout $\lambda = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \mathbb{Z}G$, et tout $x \in I(\mathbb{Z}G)$, on ait

$$\sum_{g\in G} \lambda_g (g \cdot \varphi(x)) = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \varphi(x) = \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) = \varphi\left(\sum_{g\in G} \lambda_g (g \cdot x)\right) = \sum_{g\in G} \lambda_g \varphi(g \cdot x),$$

ce qui revient à imposer

$$\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x),\ \forall x \in I(\mathbb{Z}G),\ \forall g \in G,$$

qui est encore équivalent à

$$\varphi(g(h-1)) = g\varphi(h-1),\ \forall g, h \in G,$$

puisque $\{h-1,\ h \in G\}$ engendre $I(\mathbb{Z}G)$. D'autre part, pour tous $g, h \in G$ on a $g(h-1) = gh - h = (gh-1) - (g-1)$ et donc

$$\ker(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_1, M)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$$

$$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M)\ ;\ \varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x),\ \forall x \in I(\mathbb{Z}G),\ \forall g \in G\}$$

$$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I(\mathbb{Z}G), M)\ ;\ g\varphi(h-1) = \varphi(g(h-1)) = \varphi(gh-1) - \varphi(g-1),\ \forall g, h \in G\}$$

$$= \{f : G \to M\ ;\ gf(h) = f(gh) - f(g),\ \forall g, h \in G\} = \Delta(G, M) = Z^1(G, M).$$

Ensuite, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_0, M)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\iota, M)) \\ \varphi \circ \partial_0 & \mapsto & \varphi \circ \iota \end{array}$$

d'où

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_0, M)) \simeq \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\iota, M))$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)\ ;\ \exists \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)\ ;\ f = \varphi \circ \iota\}$$

et on a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \xrightarrow{\sim} & M \\ \varphi & \mapsto & \varphi(1) =: m \end{array}$$

Ainsi, pour tout $f \in \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\iota, M))$, il vient

$$f(g-1) = \varphi \circ \iota(g-1) = \varphi(g-1) = \varphi((g-1)\cdot 1) = (g-1) \cdot \varphi(1) = (g-1)m = gm - m.$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_0, M)) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)\ ;\ \exists \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)\ ;\ f = \varphi \circ \iota\}$$

$$= \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)\ ;\ \exists m \in M\ ;\ f(g-1) = gm - m,\ \forall g \in G\}$$

$$= \{f : G \to M\ ;\ \exists m \in M\ ;\ f(g) = gm - m,\ \forall g \in G\} = \Delta_0(G, M) = B^1(G, M)$$

et donc

$$H^1(G, M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_1, M)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\partial_0, M)) \simeq \Delta(G, M) \Big/ \Delta_0(G, M).$$

□

Le degré 2 requiert plus de travail. Pour calculer $H^2(G,M) \overset{\text{def}}{=} \text{Ext}^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M)$, on doit trouver explicitement une résolution projective du module trivial $\mathbb{Z}$, de façon à convenir à tout groupe G. Dans le cas des algèbres, cette résolution s'appelle la "résolution bar". Nous étudierons ceci plus tard.
En utilisant le fait que

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte et que $\mathbb{Z}G$ est libre, on doit trouver un G-module projectif P et un épimorphisme $P \twoheadrightarrow I(\mathbb{Z}G)$. On considère $P := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ avec action de $\mathbb{Z}G$ sur le terme de gauche. D'après le Lemme 5 de l'annexe, on a que $P = \mathbb{Z}(G \times G)$ est libre, donc projectif.

Remarque 40. Afin d'alléger les notations, on pose

$$\mathbb{Z}G^{\otimes n} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G$$

(i.e. $\mathbb{Z}G^{\otimes n} := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ n-fois), avec action sur le terme de gauche. $\mathbb{Z}G^{\otimes n}$ est alors appelée la $n^{\text{ème}}$ puissance tensorielle de $\mathbb{Z}G$.

Posons

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G & \overset{\partial_0}{\to} & \mathbb{Z}G \\ g_1 \otimes g_2 & \mapsto & g_1(g_2 - 1) \end{array}$$

∂_0 est bien défini et $I(\mathbb{Z}G)$ étant engendré par $\{g-1,\ g \in G\}$, on voit que $\text{im}\,(\partial_0) = I(\mathbb{Z}G)$. Soit ensuite

$$Q := \mathbb{Z}G^{\otimes 3} = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(G \times G) = \mathbb{Z}(G \times G \times G).$$

Q est un G-module libre donc projectif et on peut définir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G^{\otimes 3} & \overset{\partial_1}{\to} & \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \\ g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 & \mapsto & g_1g_2 \otimes g_3 - g_1 \otimes g_2g_3 + g_1 \otimes g_2 \end{array}$$

alors ∂_1 est $\mathbb{Z}G$-linéaire et déterminée par le cas $g_1 = 1$. On calcule

$$\partial_0 \circ \partial_1(1 \otimes g_2 \otimes g_3) = \partial_0(g_2 \otimes g_3 - 1 \otimes g_2g_3 + 1 \otimes g_2) = g_2(g_3 - 1) - (g_2g_3 - 1) + g_2 - 1 = 0.$$

Enfin, on introduit

$$\mathbb{Z}G^{\otimes 4} \overset{\partial_2}{\to} \mathbb{Z}G^{\otimes 3}$$

défini par

$$\partial_2 : g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \otimes g_4 \mapsto g_1g_2 \otimes g_3 \otimes g_4 - g_1 \otimes g_2g_3 \otimes g_4 + g_1 \otimes g_2 \otimes g_3g_4 - g_1 \otimes g_2 \otimes g_3$$

et comme précédemment, on vérifie que

$$\partial_2 \circ \partial_1 = 0.$$

On définit ensuite trois applications $\mathbb{Z}$-linéaires

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \overset{h_0}{\to} & \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \\ g & \mapsto & 1 \otimes g \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G^{\otimes 2} & \overset{h_1}{\to} & \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \\ g_1 \otimes g_2 & \mapsto & 1 \otimes g_1 \otimes g_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G^{\otimes 3} & \overset{h_2}{\to} & \mathbb{Z}G^{\otimes 4} \\ g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 & \mapsto & 1 \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \end{array}$$

et on observe que

$$\begin{cases} \partial_1 \circ h_1 + h_0 \circ \partial_0 = id_{\mathbb{Z}G^{\otimes 2}} \\ \partial_2 \circ h_2 + h_1 \circ \partial_1 = id_{\mathbb{Z}G^{\otimes 3}} \end{cases}$$

En effet, on a

$$(\partial_1 \circ h_1 + h_0 \circ \partial_0)(1 \otimes g) = \partial_1(1 \otimes 1 \otimes g) + h_0(g-1) = 1 \otimes g - 1 \otimes g + 1 \otimes 1 + 1 \otimes (g-1) = 1 \otimes g,$$

ainsi que

$$(\partial_2 \circ h_2 + h_1 \circ \partial_1)(1 \otimes g \otimes h) = \partial_2(1 \otimes 1 \otimes g \otimes h) + h_1(g \otimes h - 1 \otimes gh + 1 \otimes g)$$

$$= 1 \otimes g \otimes h - 1 \otimes g \otimes h + 1 \otimes 1 \otimes gh - 1 \otimes 1 \otimes g + 1 \otimes g \otimes h - 1 \otimes 1 \otimes gh + 1 \otimes 1 \otimes g = 1 \otimes g \otimes h.$$

Ensuite, si $u \in \ker(\partial_0)$, alors

$$\partial_1(h_1(u)) = -h_0(\partial_0(u)) + u = u \ \Rightarrow \ u \in \mathrm{im}\,(\partial_1)$$

et de même, $v \in \ker(\partial_1) \ \Rightarrow \ v \in \mathrm{im}\,(\partial_2)$. Ainsi, la suite

$$\mathbb{Z}G^{\otimes 4} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{9}$$

est exacte, c'est donc le début d'une résolution projective de $\mathbb{Z}$.
Un élément de $\mathrm{Ext}^{\,2}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ est donné par un morphisme de G-modules $\varphi : \mathbb{Z}G^{\otimes 3} \to M$ tel que $\varphi \circ \partial_2 = 0$. Deux morphismes φ et φ' sont égaux dans $\mathrm{Ext}^{\,2}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$ si et seulement s'il existe $\psi : \mathbb{Z}G^{\otimes 2} \to M$ un morphisme de G-modules tel que $\varphi - \varphi' = \psi \circ \partial_1$. Comme φ et ψ sont supposées $\mathbb{Z}G$-linéaires, leurs valeurs sont déterminées par les éléments de la forme $1 \otimes g_2 \otimes g_3$ pour φ et $1 \otimes g_2$ pour ψ. La condition $\varphi \circ \partial_2 = 0$ s'écrit

$$0 = \varphi \circ \partial_2(1 \otimes g_2 \otimes g_3 \otimes g_4) = \varphi(g_2 \otimes g_3 \otimes g_4) - \varphi(1 \otimes g_2 g_3 \otimes g_4) + \varphi(1 \otimes g_2 \otimes g_3 g_4) - \varphi(1 \otimes g_2 \otimes g_3)$$

$$= g_2\varphi(1 \otimes g_3 \otimes g_4) - \varphi(1 \otimes g_2 g_3 \otimes g_4) + \varphi(1 \otimes g_2 \otimes g_3 g_4) - \varphi(1 \otimes g_2 \otimes g_3)$$

et en posant $f(g_2, g_3) := \varphi(1 \otimes g_2 \otimes g_3)$, on a que $f : G \times G \to M$ donne un élément de $H^2(G, M)$ si et seulement si, pour tous $g_2, g_3, g_4 \in G$, on a

$$g_2 f(g_3, g_4) - f(g_2 g_3, g_4) + f(g_2, g_3 g_4) - f(g_2, g_3) = 0.$$

La différence de deux telles applications f, f' est nulle dans $H^2(G, M)$ si et seulement si $f - f' = \psi \circ \partial_1$. De nouveau, ∂_1 et ψ étant $\mathbb{Z}G$-linéaires, il suffit de calculer la composition sur les éléments de la forme $1 \otimes g_2 \otimes g_3$ pour $g_2, g_3 \in G$. On a

$$\psi \circ \partial_1(1 \otimes g_2 \otimes g_3) = \psi(g_2 \otimes g_3) - \psi(1 \otimes g_2 g_3) - \psi(1 \otimes g_2)$$

$$= g_2\psi(1 \otimes g_3) - \psi(1 \otimes g_2 g_3) + \psi(1 \otimes g_2) = g_2\sigma(g_3) - \sigma(g_2 g_3) + \sigma(g_2)$$

où

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : & G & \to & M \\ & & g & \mapsto & \psi(1 \otimes g) \end{array}$$

<u>Définition</u> 45. On pose

$$Z^2(G, M) := \{f : G \times G \to M \ ; \ \forall g, h, k \in G, \ gf(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0\}$$

et

$$B^2(G, M) := \{f : G \times G \to M \ ; \ \exists \sigma : G \to M \ ; \ \forall g, h \in G, \ f(g, h) = g\sigma(h) - \sigma(gh) + \sigma(g)\}.$$

$Z^2(G, M)$ est le groupe abélien des <u>2-cocycles</u> et $B^2(G, M)$ est le sous-groupe des <u>2-cobords</u>.

Proposition 25. *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme*

$$H^2(G,M) \simeq Z^2(G,M) \Big/ B^2(G,M).$$

Démonstration. Les considérations ci-dessus montrent que la suite (9) est le début d'une résolution projective de $\mathbb{Z}$ et donnent explicitement la structure de groupe de $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = H^2(G,M)$. □

Proposition 26. *Si l'on suppose de plus que G est fini, alors on a*

$$|G| \cdot H^2(G,M) = 0.$$

Autrement dit, l'ordre de tout élément de $H^2(G,M)$ divise l'ordre de G.

Démonstration. Soit $f \in Z^2(G,M)$ un 2-cocycle. Alors, pour $g,h,k \in G$, on a

$$gf(h,k) - f(gh,k) + f(g,hk) = f(g,h).$$

Le membre de droite est indépendant de k et en sommant sur $k \in G$, on obtient

$$g\sum_{k\in G} f(h,k) - \sum_{k\in G} f(gh,k) + \sum_{k\in G} f(g,hk) = |G| f(g,h).$$

Si l'on pose $\sigma : g \mapsto \sum_{k\in G} f(g,k)$, comme k parcourt G si et seulement si hk parcourt G, il vient

$$g\sigma(h) - \sigma(gh) + \sigma(g) = |G| f(g,h),$$

ce qui implique que $|G|f \in B^2(G,M)$ et donc $|G|f = 0$ dans $H^2(G,M)$, d'où le résultat. □

Corollaire 16. *Soient G un groupe et M un G-module fini. Alors, on a*

$$|M| \cdot H^2(G,M) = 0.$$

En particulier, si G est un groupe fini, si M est un G-module fini et si $|M|$ et $|G|$ sont premiers entre eux, alors

$$H^2(G,M) = 0.$$

Démonstration. La seconde assertion découle de la première et de la Proposition 26. En effet, on a alors $|G| \cdot H^2(G,M) = 0 = |M| \cdot H^2(G,M)$ et comme $pgcd(|G|,|M|) = 1$, on en conclut que $H^2(G,M) = 0$.
Il s'agit donc de montrer que

$$|M| \cdot \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$|M| \cdot \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M) = 0.$$

Pour ceci, nous allons d'abord montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G),M)$ possède une structure de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M)$-module (à gauche). On utilise alors le Théorème 9 et soit

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de G-modules, ainsi que $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M)$. On peut former la somme amalgamée $Y := M \sqcup_M X$ pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et la deuxième suite exacte est par définition le résultat de l'action à gauche de l'endomorphisme α sur la première suite. Si $\alpha' \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M)$ on peut composer pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et on voit alors que la troisième suite est la somme amalgamée sur $\alpha \circ \alpha'$. On montre de la même manière que cette action est distributive à droite et à gauche, en utilisant la somme de Baer. De plus, il est clair que id_M appliquée à une suite donne une suite équivalente à la première. $\mathrm{Ext}^{\,1}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$ est donc bien un $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(M)$-module.
Ensuite, en utilisant à nouveau la somme de Baer, on observe que la multiplication par $|M|$ sur les éléments de $H^2(G, M) = \mathrm{Ext}^{\,1}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$ est équivalente à l'action de l'endomorphisme de multiplication par $|M|$ sur $\mathrm{Ext}^{\,1}_{\mathbb{Z}G}(I(\mathbb{Z}G), M)$. Mais, d'après le théorème de Lagrange, cet endomorphisme est nul, d'où le résultat. □

Remarque 41. Toutes ces considérations nous donnent une description agréable de $H^1(G, M)$ et $H^2(G, M)$ en termes de cocycles et de cobords. On peut reproduire le schéma appliqué ici pour calculer $H^n(G, M),\ n \geq 3$, mais les formules obtenues alors sont moins aisées à utiliser.

Nous allons voir à présent que l'on peut paramétrer les extensions de groupes par l'espace $H^2(G, M)$.

Définition 46. Soient M, G, E trois groupes. On dit qu'une suite

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

est exacte courte si α et β sont des morphismes de groupes tels que

$$\begin{cases} \ker(\alpha) = 1 \\ \mathrm{im}\,(\beta) = G \\ \ker(\beta) = \mathrm{im}\,(\alpha) \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit aussi que E est une extension de G par M.
De plus, on dit que deux suites exactes courtes

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} G \longrightarrow 1$$

sont <u>équivalentes</u> s'il existe un morphisme de groupes $E \xrightarrow{\lambda} E'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

<u>Remarque</u> 42. 1. En fait, il s'agit de l'exact analogue pour les groupes des mêmes définitions pour les modules. De plus, si $\lambda : E \to E'$ est un morphisme comme dans la définition ci-dessus, alors c'est un isomorphisme.
En effet, si $y \in E'$, il existe $z \in E$ tel que $\beta(z) = \beta'(y)$ et alors $\beta'(\lambda(z)^{-1}y) = \beta'(\lambda(z))^{-1}\beta'(y) = \beta(z)^{-1}\beta(z) = 1$ donc $\lambda(z)^{-1}y \in \ker(\beta') = \mathrm{im}\,(\alpha')$ et donc $\lambda(z)^{-1}y = \alpha'(m) = \lambda(\alpha(m))$ pour $m \in M$ et dans ce cas, $y = \lambda(z\alpha(m))$ et λ est surjectif. De plus, si $\lambda(x) = 1$, alors $\beta(x) = \beta'(\lambda(x)) = 1$ d'où $x \in \ker(\beta) = \mathrm{im}\,(\alpha)$ et il existe $y \in M$ tel que $\alpha(y) = x$ et $1 = \lambda(x) = \lambda(\alpha(y)) = \alpha'(y)$ donc $y = 1$ et $x = 1$ donc λ est injectif.

2. Si on a un sous-groupe abélien M de E et une suite exacte

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1\ ,$$

alors $M \trianglelefteq E$ et ${}^{E}\!/_{M} \simeq G$. De plus, comme M est abélien, la conjugaison de E sur M est en fait la conjugaison d'un relevé de G sur M. Soit en effet l'action par conjugaison

$$E \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Aut}(M)\ .$$

Posons

$$\begin{array}{rccc} \overline{\gamma} & : & G & \to & \mathrm{Aut}\,(M) \\ & & \overline{e} & \mapsto & \gamma(e) \end{array}$$

Ceci est bien défini car si $\overline{e} = \overline{f}$, il existe $n \in M$ tel que $e = fn$ et, pour $m \in M$, on a $\gamma(e)(m) = eme^{-1} = fnmn^{-1}f^{-1} = fnn^{-1}mf^{-1} = fmf^{-1} = \gamma(f)(m)$ d'où $\gamma(e) = \gamma(f)$, comme voulu. La suite considérée permet donc de munir M d'une structure de $\mathbb{Z}G$-module.

3. Rappelons que pour un groupe G et un anneau commutatif R, on note $I(RG)$ l'idéal (à gauche) d'augmentation, noyau du morphisme d'augmentation

$$\begin{array}{ccc} RG & \xrightarrow{\varepsilon} & R \\ \sum_{g\in G} r_g g & \mapsto & \sum_{g\in G} r_g \end{array}$$

Si E est un groupe et si $N \trianglelefteq E$, alors $I(RN)E$ est le noyau du morphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} RE & \to & R\left({}^{E}\!/_{N}\right) \simeq (RE)\Big/ I(RN)E \\ \sum_{e\in E} r_e e & \mapsto & \sum_{e\in E} r_e (eN) \end{array}$$

$I(RN)E$ est alors engendré par $\{n-1,\ n \in N\}$ en tant que RE-module et comme $N \trianglelefteq E$, on a $I(RN)\cdot RE = RE \cdot I(RN)$, donc $I(RN)$ est un idéal bilatère de RE.

Revenons au cas qui nous intéresse et supposons désormais que $R = \mathbb{Z}$. Soient une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

avec M un $\mathbb{Z}G$-module, $e \in E$ et $n \in M$. Sur $I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$, multiplier par e revient à multiplier par en. En effet, $e - en = e(1-n)$ et pour $m \in M$, multiplier un élément générique $m-1$ par $en - e$ donne

$$(e - en)(m-1) = e(1-n)(m-1) \in I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M).$$

Donc la multiplication par e coïncide avec la multiplication par en sur $I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$. Enfin, pour tout $g \in G$, on peut trouver un $e_g \in E$ avec $\beta(e_g) = g$. Ainsi, la multiplication de $m-1$ par e_g définit une action de G sur $I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$. Cette action par multiplication est un fait l'action de G sur M, comme le montre le lemme suivant :

Lemme 43. *Soient G, E deux groupes et M un sous-groupe distingué abélien de E tels que $G \simeq E/M$. Alors, on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}G$-modules*

$$M \simeq I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M).$$

Démonstration. On observe que

$$I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \leq I(\mathbb{Z}M)E$$

et posons

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\lambda} & I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \\ m & \mapsto & \overline{m-1} \end{array}$$

Comme, pour tous $m, n \in M$, on a

$$mn - 1 = (m-1) + (n-1) + (m-1)(n-1),$$

il vient

$$\lambda(mn) = \overline{mn-1} = \overline{m-1} + \overline{n-1} + \overline{(m-1)(n-1)} = \overline{m-1} + \overline{n-1} = \lambda(m) + \lambda(n),$$

et λ est donc un morphisme de groupes abéliens. Ensuite, pour $g \in G$, on peut choisir $e_g \in E$ tel que $\beta(e_g) = g$ où $\beta : E \twoheadrightarrow G$ est la projection canonique. Pour $g \in G$ et $m \in M$, on a

$$(e_g m - e_g)(e_g^{-1} - 1) = e_g m e_g^{-1} - 1 - e_g m + e_g = (e_g m e_g^{-1} - 1) - (e_g m - e_g)$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda({}^g m) = \lambda(e_g m e_g^{-1}) &= \overline{e_g m e_g^{-1} - 1} = \overline{(e_g m - e_g)(e_g^{-1} - 1) + (e_g m - e_g)} \\ &= \overline{e_g(m-1)(e_g^{-1} - 1)} + \overline{e_g m - e_g} = \overline{e_g m - e_g} = \overline{e_g(m-1)} = g \cdot \lambda(m), \end{aligned}$$

où l'action de g sur $I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$ est la multiplication par e_g. De plus, pour définir un morphisme

$$I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow M$$

il suffit de le définir pour $\overline{m-1},\ m \in M$. En effet, la discussion précédente implique que $e(m-1) = eme^{-1} - 1$ dans le quotient. Donc, en posant

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \stackrel{\mu}{\to} & M \\ \overline{m-1} & \mapsto & m \end{array}$$

on voit que μ est une réciproque à λ, qui est donc un isomorphisme. □

Soit maintenant

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

une suite exacte courte de groupes, avec $M \trianglelefteq E$ abélien. Alors, le troisième point de la Remarque 42 montre que

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}M)E \longrightarrow \mathbb{Z}E \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de E-modules et comme $\mathbb{Z}E$ et $\mathbb{Z}G$ admettent des morphismes d'augmentation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}E & \to & \mathbb{Z} \\ e & \mapsto & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \to & \mathbb{Z} \\ g & \mapsto & 1 \end{array}$$

on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}M)E & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E) & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}M)E & \longrightarrow & \mathbb{Z}E & \longrightarrow & \mathbb{Z}G & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

qui produit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}M)E \longrightarrow I(\mathbb{Z}E) \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{Z}E$-modules. Ensuite, en quotientant par $I(\mathbb{Z}M)I(\mathbb{Z}E)$, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I(\mathbb{Z}M)E \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0\,.$$

Cependant, M agit trivialement sur chaque terme comme on l'a vu précédemment, c'est donc une suite exacte courte de $\mathbb{Z}G$-modules. Le Lemme 43 montre enfin qu'on a une suite exacte courte de G-modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0\,.$$

De plus, si on a un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

alors la construction précédente appliquée aux deux suites exactes courtes induit un diagramme commutatif de G-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E') \Big/ I(\mathbb{Z}E')I(\mathbb{Z}M) & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et ces deux suites de G-modules sont donc équivalentes. On obtient alors une application Φ définie sur les classes d'équivalence d'extensions de groupes

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow ? \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

et à valeurs dans les classes d'équivalence de suites exacte courtes de G-modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow ? \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0\,.$$

Nous allons montrer que Φ réalise une bijection, et ce en définissant explicitement une réciproque Ψ.
Soit donc une suite exacte courte de G-modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0$$

et définissons

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\overline{\alpha}}{\to} & I(\mathbb{Z}G) \\ g & \mapsto & g-1 \end{array}$$

On produit une suite exacte de groupes par le produit fibré $E := X \times_{I(\mathbb{Z}G)} G$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\alpha}} & & \\ & & M & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G & & \end{array}$$

et définissons la structure de groupe de E. On rappelle que

$$E = \{(x,g) \in X \times G \ ;\ \pi(x) = \overline{\alpha}(g) = g-1\}$$

et posons, pour $x, x' \in X$ et $g, g' \in G$,

$$(x,g)\cdot(x',g') := (x + g\cdot x', gg').$$

Comme X est un G-module, $x + g\cdot x'$ est défini, donc le produit ci-dessus a un sens. On observe que E est un sous-ensemble du produit semi-direct $X \rtimes G$ (NB : On pourra consulter le chapitre 5 de [22] au sujet du produit semi-direct). Comme $X \rtimes G$ est un groupe, le produit ainsi défini est donc associatif et il nous suffit de montrer que E est stable pour ce produit, par passage à l'inverse et qu'il est unifère.
Tout d'abord, si $\pi(x) = g-1$ et $\pi(x') = g'-1$, alors on a $\pi(x + g\cdot x') = \pi(x) + g\cdot\pi(x') = g - 1 + g(g'-1) = gg' - 1$ et E est donc stable. De plus, $(x,g)^{-1} = (-g^{-1}\cdot x, g^{-1})$ et $\pi(-g^{-1}\cdot x) = -g^{-1}\cdot\pi(x) = -g^{-1}(g-1) = g^{-1} - 1$ et donc $(x,g) \in E \ \Rightarrow\ (x,g)^{-1} \in E$.

Enfin, $(0,1) \in E$ est le neutre. Ainsi, E est un groupe et M est un sous-groupe distingué, plongé dans E via

$$\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & E \\ m & \mapsto & (m,1) \end{array}$$

et G agit sur M par la structure de G-module de M. En effet, si $m \in M \subseteq X$, alors

$$(x,g)\cdot(m,1)\cdot(-g^{-1}x,g^{-1}) = (x+gm,g)\cdot(-g^{-1}x,g^{-1})$$

$$= (x+gm-gg^{-1}x,1) = (gm,1),\ \forall (x,g)\in E.$$

Par propriété universelle du produit fibré, on voit que ceci définit une application Ψ comme voulue.
Montrons que $\Phi\circ\Psi$ est l'identité, ainsi que $\Psi\circ\Phi$. Soit donc

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de G-modules. On produit une extension de groupes par le produit fibré

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\pi} & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{\alpha}} & & \\ & & M & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & G & & \end{array}$$

et, de cette extension, on produit la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I(\mathbb{Z}E)\Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0\,.$$

Posons

$$\begin{array}{ccc} I(\mathbb{Z}E)\Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \xrightarrow{\widehat{\alpha}} & X \\ \sum_{i=1}^n z_i((x_i,g_i)-1) & \mapsto & \sum_{i=1}^n z_i x_i \end{array}$$

avec $x_i \in X, g_i \in G$ tels que $(x_i,g_i)\in E$ pour $1\le i\le n$. Montrons que ceci est bien défini. Pour $m\in M$ et $e=(x,g)\in E$, on a

$$((m,1)-1)((x,g)-1) = ((m+x,g)-1) - ((x,g)-1) - ((m,1)-1)$$

et ceci est envoyé par $\widehat{\alpha}$ sur $m+x-x-m=0$, donc $\widehat{\alpha}$ est bien défini. De plus, $\widehat{\alpha}$ est $\mathbb{Z}G$-linéaire car l'action de G sur le G-module $I(\mathbb{Z}E)\Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$ est donnée par la multiplication d'un certain (x,g) sur ce module $I(\mathbb{Z}E)\Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M)$. Maintenant, on a

$$\widehat{\alpha}\left((x,g)\left(\sum_{i=1}^n z_i((x_i,g_i)-1)\right)\right) = \widehat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n z_i((x,g)\cdot(x_i,g_i)-(x,g))\right)$$

$$= \widehat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n z_i(((x+gx_i,gg_i)-1)-((x,g)-1))\right) = \sum_{i=1}^n z_i(x+gx_i-x) = \sum_{i=1}^n z_i g x_i$$

$$= g\cdot\left(\sum_{i=1}^n z_i x_i\right) = g\cdot\widehat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n z_i((x_i,g_i)-1)\right).$$

Finalement, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \widehat{\alpha} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif, comme on le vérifie aisément. Ainsi, $\Phi \circ \Psi$ est l'identité.
Ensuite, étant donnée une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

pour $M \trianglelefteq E$ abélien, on forme une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) \longrightarrow I(\mathbb{Z}G) \longrightarrow 0\,,$$

on construit le produit fibré ensembliste à travers

$$\begin{array}{ccc} G & \stackrel{\overline{\alpha}}{\to} & I(\mathbb{Z}G) \\ g & \mapsto & g-1 \end{array}$$

et on prétend que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow \alpha & & \uparrow \overline{\alpha} & & \\ & & M & \hookrightarrow & E & \stackrel{\overline{\pi}}{\twoheadrightarrow} & G & & \end{array}$$

est un produit fibré ensembliste avec $\alpha(e) = \overline{e-1}$. En effet, comme les noyaux de π et $\overline{\pi}$ coïncident ($\ker(\pi) \simeq M \simeq \ker(\overline{\pi})$), en utilisant la Proposition 13, le diagramme ci-dessus est un produit fibré de groupes. Mais, les produits fibrés de groupes sont en fait les mêmes que les produits fibrés d'ensembles. Ceci montre que $\Psi \circ \Phi$ est l'identité.

Proposition 27. *Soient G un groupe et M un G-module. Alors, $H^2(G, M)$ est en bijection avec les classes d'équivalence d'extensions de groupes*

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow ? \longrightarrow G \longrightarrow 1\,.$$

La construction explicite étant donnée par l'application Φ. De plus, les extensions scindées correspondent à l'élément nul de $H^2(G, M)$.

Démonstration. La correspondance Φ a été établie lors de la discussion qui précède. Ensuite, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(\mathbb{Z}M) & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & I(\mathbb{Z}G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow \alpha & & \uparrow \overline{\alpha} & & \\ & & M & \hookrightarrow & E & \stackrel{\overline{\pi}}{\twoheadrightarrow} & G & & \end{array}$$

si $\overline{\pi}$ admet une section $\overline{\sigma}$, le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : & I(\mathbb{Z}G) & \to & I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(M) \\ & & \sum_{i=1}^n z_i(g_i-1) & \mapsto & \sum_{i=1}^n z_i\alpha(\sigma(g_i)) \end{array}$$

définit une section de π. Il nous reste à montrer que si π est scindée, alors $\overline{\pi}$ aussi. Si $\sigma : I(\mathbb{Z}G) \to I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(M)$ est une section de π, on définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & M \rtimes G & \to & E \\ & & (m,g) & \mapsto & (\sigma(g-1)+\iota(m),g) \end{array}$$

où $\iota : M \hookrightarrow I(\mathbb{Z}E) \Big/ I(\mathbb{Z}E)I(M)$ est l'injection naturelle. Ceci est bien défini car on a $\pi(\sigma(g-1)+\iota(m)) = g-1+\pi(\iota(m)) = g-1$ et $\varphi(m,g) \in E$. C'est de plus un morphisme car

$$\varphi(m,g)\varphi(m',g') = (\iota(m)+\sigma(g-1),g)(\iota(m')+\sigma(g'-1),g')$$
$$= (\iota(m)+\sigma(g-1)+g\iota(m')+\sigma(gg'-g),gg') = (\iota(m+gm')+\sigma(gg'-1),gg')$$
$$= \varphi(m+gm',gg') = \varphi((m,g)(m',g')).$$

Ensuite, si $(x,g) \in E$, comme $\pi(x) = g-1$, on a $\pi(x-\sigma(g-1)) = \pi(x)-\pi(\sigma(g-1)) = \pi(x)-(g-1) = 0$ et il existe alors un $m \in M$ tel que $\iota(m) = x-\sigma(g-1)$ et alors$(x,g) = (\sigma(g-1)+\iota(m),g) = \varphi(m,g)$. Enfin, si $\varphi(m,g) = (0,1)$, alors $g = 1 \Rightarrow \sigma(g-1) = 0$ donc $(0,1) = (\iota(m),1)$ d'où $\iota(m) = 0$ et ι étant un monomorphisme, $m = 0$ et $(m,g) = (0,1)$. Ainsi, φ est un isomorphisme et donc

$$E \simeq M \rtimes G,$$

ceci montre que $\overline{\pi}$ est scindée. □

Remarque 43. La Proposition 27 montre en particulier que l'extension

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

correspond à l'élément trivial de $H^2(G,M)$ si et seulement si $E \simeq M \rtimes G$.

Un corollaire important de ceci est le puissant théorème de Schur-Zassenhaus, qui donne un critère pratique pour repérer si un groupe fini est produit semi-direct de deux autres. Cependant, ce résultat ne sera pas utilisé dans la suite et la démonstration peut être omise en première lecture. Nous la donnons ici afin d'illustrer l'efficacité de la cohomologie et comment l'on peut l'utiliser en théorie des groupes ; mais également pour son élégance.

Théorème 10. *(Schur-Zassenhaus)*
Soient G un groupe fini, $N \trianglelefteq G$ et $H := G/N$. Supposons que $|N|$ et $|H|$ soient premiers entre eux. Alors

$$G \simeq N \rtimes H.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $|G|$.

Soit $S \in \mathrm{Syl}_p(N)$ un p-sous-groupe de Sylow de N, avec p un nombre premier divisant $|N|$. Alors, pour tout $g \in G$, le groupe gSg^{-1} est encore un p-Sylow de N, puisque N est distingué dans G. D'après le second théorème de Sylow, S et gSg^{-1} sont conjugués et il existe $n \in N$ tel que $ngSg^{-1}n^{-1} = S$. Ainsi, $ng \in N_G(S)$ ($N_G(S)$ désigne le normalisateur de S dans G) et donc $g \in N \cdot N_G(S)$. Ceci montre que $G = N \cdot N_G(S)$. Ce résultat reste vrai sans les hypothèses de relative primalité ; on l'appelle "Argument de Frattini".

Mais, par définition du normalisateur, on a $N_G(S) \cap N = N_N(S)$ et de plus, $N_N(S) \trianglelefteq N_G(S)$. Alors

$$H = {}^{G}\!/_{N} = {}^{(N \cdot N_G(S))}\!/_{N} \simeq {}^{N_G(S)}\Big/_{(N \cap N_G(S))} = {}^{N_G(S)}\Big/_{N_N(S)}.$$

Par ailleurs, $N_N(S)$ est un sous-groupe de N, ce qui implique que les ordres de $N_N(S)$ et de H soient premiers entre eux. Distinguons plusieurs cas :

Si $N_G(S) \neq G$, par hypothèse de récurrence, on a

$$N_G(S) \simeq N_N(S) \rtimes H.$$

Mais, comme $N_G(S) \leq G$, cela signifie que G contient un sous-groupe $\widehat{H}$ isomorphe à H. Maintenant, par hypothèse, on a $N \cap \widehat{H} = 1$ et $|G| = |N| \cdot |H|$ montre que $N \cdot \widehat{H} = G$ et donc $G \simeq N \rtimes \widehat{H}$.

On peut donc supposer que $N_G(S) = G$ ou, ce qui revient au même, que $S \trianglelefteq G$. Puisque S est un p-groupe, son centre $Z := Z(S)$ est non trivial. De plus, c'est un sous-groupe caractéristique de S qui est distingué dans G, Z est donc distingué dans G. Ainsi,

$${}^{N}\!/_{Z} \trianglelefteq {}^{G}\!/_{Z}$$

et comme

$$\left({}^{G}\!/_{Z}\right)\Big/\left({}^{N}\!/_{Z}\right) \simeq {}^{G}\!/_{N} = H,$$

il vient

$${}^{G}\!/_{Z} \simeq {}^{N}\!/_{Z} \rtimes \overline{H}$$

où $\overline{H} \simeq H$; et ce par hypothèse de récurrence. Soit K la préimage de $\overline{H}$ dans G par le morphisme naturel

$$G \twoheadrightarrow {}^{G}\!/_{Z} \simeq {}^{N}\!/_{Z} \rtimes \overline{H} \twoheadrightarrow \overline{H}.$$

On a $Z \trianglelefteq K$ et ${}^{K}\!/_{Z} = \overline{H} \simeq H$.

Si $Z \neq N$, alors $|K| < |G|$ et par hypothèse de récurrence, on obtient $K \simeq Z \rtimes H$. Dans ce cas, il existe un sous-groupe $\widetilde{H}$ de K isomorphe à H et comme précédemment, on a

$$G = N \cdot \widetilde{H} \simeq N \rtimes H.$$

On peut alors supposer que $Z = N$ et N est alors un p-groupe abélien. Par le Corollaire 16, on a

$$H^2(H, N) = 0,$$

et, d'après la Proposition 27, il s'ensuit que la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

est scindée et donc

$$G \simeq N \rtimes H.$$

□

4.3 Foncteurs dérivés

Nous nous permettons ici une digression sur les foncteurs dérivés. Il s'agit d'une construction qui généralise celle des groupes Ext étudiés plus haut et nous allons voir que beaucoup de propriétés satisfaites par les Ext restent valables en général. En fait, il s'agit d'estimer le défaut d'exactitude d'un foncteur "presque exact". On peut encore généraliser ceci et définir la notion de foncteur dérivé dans le cadre de ce que l'on appelle les "catégories dérivées". Cependant, il nous manque encore quelques outils pour développer cette dernière théorie et une construction propre nous entraînerait trop loin. Le lecteur intéressé pourra consulter la Section 3.5.3 de [40], ou encore [24], pages 1-91, [35] ou les deux premiers chapitres de [37].

Définition 47. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes.

1. On dit qu'un foncteur covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est
   (a) exact à droite si toute suite exacte courte
   $$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
   est envoyée sur une suite exacte
   $$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0\,,$$
   (b) exact à gauche si toute suite exacte courte
   $$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
   est envoyée sur une suite exacte
   $$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)\,,$$
   (c) exact si F est exact à droite et à gauche.
2. De même, on dit qu'un foncteur contravariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est
   (a) exact à droite si une suite exacte
   $$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
   est envoyée sur une suite exacte
   $$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0\,,$$
   (b) exact à gauche si toute suite exacte
   $$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$
   a pour image une suite exacte
   $$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)\,,$$
   (c) exact s'il est exact à droite et à gauche.

Fixons deux catégories abéliennes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et considérons $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur contravariant exact à gauche. On suppose de plus que $\mathcal{A}$ possède suffisamment de projectifs.

Pour un objet X de $\mathcal{A}$, on peut choisir une résolution projective $P^\bullet$ de X :

$$P^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\partial_i} P_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_1} P_1 \xrightarrow{\partial_0} P_0 \longrightarrow 0 .$$
$$P_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0$$

En appliquant F à $P^\bullet$, on obtient un complexe $F(P^\bullet)$:

$$0 \longrightarrow F(P_0) \xrightarrow{F(\partial_0)} F(P_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow F(P_i) \xrightarrow{F(\partial_i)} F(P_{i+1}) \longrightarrow \cdots .$$
$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(P_0)$$

Définition 48. *([39], 2.5.1)*
Le $n^{\text{ème}}$ espace de cohomologie du complexe $F(P^\bullet)$ formé ci-dessus est par définition la valeur en X du <u>$n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à droite de F</u> :

$$\mathbb{R}^n F(X) := H^n(F(P^\bullet)) = \ker(F(\partial_n)) \big/ \operatorname{im}(F(\partial_{n-1}))$$

et en particulier, on a

$$\mathbb{R}^0 F(X) = F(X).$$

Proposition 28. *Cette définition est indépendante du choix de la résolution projective de X et induit une famille de foncteurs contravariants*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbb{R}^n F} \mathcal{B} .$$

Démonstration. Dans le but de simplifier la preuve, on utilise le théorème de Freyd-Mitchell qui nous permet alors de supposer que $\mathcal{A} = A - \mathfrak{Mod}$ et $\mathcal{B} = B - \mathfrak{Mod}$ avec A et B deux algèbres. Soient M un A-module et

$$P^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow P_i \longrightarrow P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 ,$$

$$Q^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow Q_i \longrightarrow Q_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0 ,$$

deux résolutions projectives de M. D'après le Corollaire 11, on a $P^\bullet \simeq Q^\bullet$ dans $\mathcal{K}^-(A-\mathfrak{Proj})$. Alors, on a $F(P^\bullet) \simeq F(Q^\bullet)$ naturellement dans $\mathcal{K}^+(A - \mathfrak{Proj})$ et alors $H^*(F(P^\bullet)) \simeq H^*(F(Q^\bullet))$ en vertu du Corollaire 12. Ensuite, $\mathbb{R}^n F(M) = H^n(F(P^\bullet))$ est un foncteur contravariant car H^n est un foncteur covariant. $\square$

Lemme 44. (Lemme du fer à cheval (horseshoe), cf [39], 2.2.8 (Lemma))
Soit

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$. Étant données deux résolutions projectives P^X et P^Z de X et Z respectivement, il existe une résolution projective P^Y de Y telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i^X & \xrightarrow{\partial_{i-1}^X} & P_{i-1}^X & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{\partial_1^X} & P_1^X & \xrightarrow{\partial_0^X} & P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon^X} & X & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_i} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i^Y & \xrightarrow{\partial_{i-1}^Y} & P_{i-1}^Y & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_2^Y & \xrightarrow{\partial_1^Y} & P_1^Y & \xrightarrow{\partial_0^Y} & P_0^Y & \xrightarrow{\varepsilon^Y} & Y & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \beta_i} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_0} & & \downarrow{\scriptstyle p} & \\
\cdots & \longrightarrow & P_i^Z & \xrightarrow{\partial_{i-1}^Z} & P_{i-1}^Z & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_2^Z & \xrightarrow{\partial_1^Z} & P_1^Z & \xrightarrow{\partial_0^Z} & P_0^Z & \xrightarrow{\varepsilon^Z} & Z & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

soit commutatif et telle que la suite exacte

$$0 \longrightarrow P^X \xrightarrow{\alpha} P^Y \xrightarrow{\beta} P^Z \longrightarrow 0$$

soit scindée.

Démonstration. Pour $n \geq 0$, posons

$$P_n^Y := P_n^X \oplus P_n^Z$$

et soit la suite exacte courte (scindée) naturelle

$$0 \longrightarrow P_n^X \xrightarrow{\alpha_n} P_n^Y \xrightarrow{\beta_n} P_n^Z \longrightarrow 0\,.$$

Soit aussi

$$\varepsilon^Y := \begin{pmatrix} j_X & j_Z \end{pmatrix} : P_0^X \oplus P_0^Z \to Y,$$

avec

$$\begin{cases} j_X : P_0^X \oplus P_0^Z \twoheadrightarrow P_0^X \xrightarrow{\varepsilon^X} X \xhookrightarrow{\iota} Y \\ j_Z : P_0^X \oplus P_0^Z \twoheadrightarrow P_0^Z \xrightarrow{\zeta} Y \end{cases}$$

où $\zeta : P_0^Z \to Y$ est un relèvement de p à ε^Z :

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \overset{\exists \zeta}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\
P_0^Z & \xrightarrow[\varepsilon^Z]{} & Z
\end{array}$$

qui existe puisque P_0^Z est projectif. En degré 0, on a alors

$$\begin{array}{ccccc}
P_0^X & \xhookrightarrow{\alpha_0} & P_0^X \oplus P_0^Z & \xrightarrow{\beta_0} & P_0^Z \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon^X} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon^Y} & \swarrow{\scriptstyle \zeta} & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon^Z} \\
X & \xhookrightarrow[\iota]{} & Y & \xrightarrow[p]{} & Z
\end{array}$$

et il est clair que ε^Y est surjectif. Définissons la différentielle de P^Y :

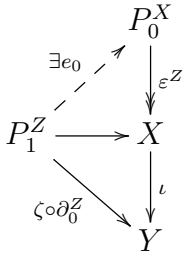
$$\partial_n^Y := \begin{pmatrix} \partial_n^X & (-1)^n e_n \\ 0 & \partial_n^Z \end{pmatrix} : P_{n+1}^X \oplus P_{n+1}^Z \to P_n^X \oplus P_n^Z,$$

où on construit $(e_n)_{n\geq 0}$ par récurrence comme suit :

- Par définition de ζ et comme P^Z est un complexe, on a

  $$p \circ \zeta \circ \partial_0^Z = \varepsilon^Z \circ \partial_0^Z = 0,$$

  donc, $\zeta \circ \partial_0^Z : P_1^Z \to Y$ se factorise en $P_1^Z \to X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y$. De plus, P^X étant une résolution projective de X, $P_0^X \overset{\varepsilon^X}{\to} X$ est un épimorphisme et P_1^Z étant projectif, il existe un relèvement e_0 :

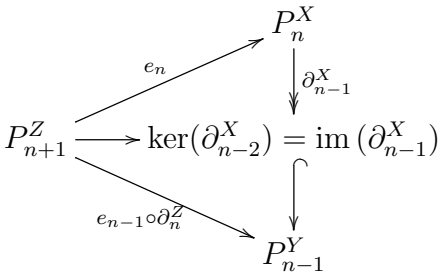
- Ensuite, supposons $e_{n-1} : P_n^Z \to P_{n-1}^X$ construit. Par hypothèse de récurrence, on a

  $$\partial_{n-2}^X \circ e_{n-1} \circ \partial_n^Z = \begin{cases} \partial_0^Z \circ \partial_1^Z & \text{si} \quad n = 1 \\ e_{n-2} \circ \partial_{n-1}^Z \circ \partial_n^Z & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \partial_{n-2}^X \circ e_{n-1} \circ \partial_n^Z = 0,$$

  donc $e_{n-1} \circ \partial_n^Z$ se factorise en

  $$e_{n-1} \circ \partial_n^Z : P_{n+1}^Z \to \ker(\partial_{n-2}^X) = \operatorname{im}(\partial_{n-1}^X) \hookrightarrow P_{n-1}^X.$$

  De plus, $\partial_{n-1}^X : P_n^X \to \operatorname{im}(\partial_{n-1}^X)$ est un épimorphisme et P_{n+1}^Z est projectif, on peut donc choisir un relèvement

On vérifie ensuite que

$$\partial_n^Y \circ \partial_{n+1}^Y = \begin{pmatrix} \partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X & (-1)^n(e_n \circ \partial_{n+1}^Z - \partial_n^X \circ e_{n+1}) \\ 0 & \partial_n^Z \circ \partial_{n+1}^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

par définition des $(e_n)_n$. Ainsi, (P^Y, ∂^Y) est un complexe et on a clairement une suite exacte courte scindée

$$0 \longrightarrow P^X \longrightarrow P^Y \longrightarrow P^Z \longrightarrow 0\,.$$

On le voit par construction, mais le fait que P_n^Z soit projectif pour tout $n \geq 0$ l'implique automatiquement.

Il reste à montrer que P^Y est une résolution projective de Y. D'après la Proposition 18, la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow P^X \longrightarrow P^Y \longrightarrow P^Z \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(P^Y) \longrightarrow H^{n-1}(P^Z) \xrightarrow{\delta} H^n(P^X) \longrightarrow H^n(P^Y) \longrightarrow \cdots$$

et donc, P^X et P^Z étant des résolutions projectives de X et Z, pour $n \geq 1$, on a effectivement $H^n(P^Y) = 0$. Il reste le cas du degré 0 à vérifier. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow H^0(P^Y) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

qui s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & H^0(P^Y) & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et φ est un isomorphisme d'après le Lemme 32, d'où le résultat. □

Remarque 44. Le nom du Lemme précédent provient du diagramme donné par l'hypothèse :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^X & \xrightarrow{\partial_1^X} & P_1^X & \xrightarrow{\partial_0^X} & P_0^X & \xrightarrow{\varepsilon^X} & X & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\ & & & & & & & & Y & & \\ & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^Z & \xrightarrow{\partial_1^Z} & P_1^Z & \xrightarrow{\partial_0^Z} & P_0^Z & \xrightarrow{\varepsilon^Z} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Proposition 29. ([26], Theorem 41)
Sous les même hypothèses, pour une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{A}$, on a une suite exacte longue dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \\ \quad \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(X) \\ \quad \longrightarrow \mathbb{R}^2F(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^2F(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^2F(X) \\ \quad \longrightarrow \mathbb{R}^3F(Z) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Démonstration. Choisissons P^X et P^Z des résolutions projectives de X et Z. D'après le Lemme du fer à cheval (Lemme 44), on peut choisir une résolution projective P^Y de Y telle que la suite

$$0 \longrightarrow P^X \longrightarrow P^Y \longrightarrow P^Z \longrightarrow 0$$

soit exacte scindée. Comme F est un foncteur, la suite

$$0 \longrightarrow F(P^Z) \longrightarrow F(P^Y) \longrightarrow F(P^X) \longrightarrow 0$$

est encore scindée, donc exacte et elle induit alors une suite exacte longue en homologie

$$0 \longrightarrow H^0F(P^Z) \longrightarrow H^0F(P^Y) \longrightarrow H^0F(P^X) \longrightarrow H^1F(P^Z) \longrightarrow H^1F(P^Y) \longrightarrow \cdots$$

qui, par définition, correspond à

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^0F(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^0F(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^0F(X) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Y) \longrightarrow \cdots,$$

ce qui s'écrit encore

$$0 \longrightarrow F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Z) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^1F(X) \longrightarrow \cdots.$$

□

Corollaire 17. *Le foncteur F est exact si et seulement si on a*

$$\mathbb{R}^nF = 0, \ \forall n \geq 1.$$

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Inversement, si F préserve les suites exactes courtes et si $P^\bullet$ est une résolution projective d'un objet X, il en est de même de $F(P^\bullet)$ et alors

$$\mathbb{R}^nF(X) \overset{\text{def}}{=} H^n(F(P^\bullet)) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Remarque 45. Par définition, on a immédiatement que pour deux A-modules M, N, avec A une algèbre,

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = \mathbb{R}^n(\mathrm{Hom}_A(-,N))(M), \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \textit{(cf [39], Definition 2.5.2)},$$

et on retrouve ainsi certaines propriétés de Ext^*, notamment que si

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de A-modules, alors, pour tout T, on a une suite exacte longue

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,T) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(P,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(N,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,T) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(P,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(N,T) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(M,T) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^3_A(P,T) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

On peut, de manière analogue, définir les dérivés des autres types de foncteurs (à savoir : contravariant et exact à droite, covariant et exact à droite, covariant et exact à gauche).

Définition 49. Si X est un objet d'une catégorie abélienne, on dit qu'une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^i \longrightarrow I^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

est une résolution injective de X si, pour tout $n \geq 0$, I^n est un objet injectif.

Remarque 46. On observe que la version duale du Théorème 3 montre que, dans une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs, les résolutions injectives existent toujours.

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ trois catégories abéliennes telles que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) possède suffisamment d'injectifs (resp. de projectifs). Soient des foncteurs

$$\begin{array}{c} E : \mathcal{A} \to \mathcal{C} \\ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C} \\ G : \mathcal{B} \to \mathcal{C} \end{array}$$

On suppose que E est covariant, exact à gauche, que F est contravariant, exact à droite et que G est covariant, exact à droite.

Définition 50. Soient X un objet de $\mathcal{A}$, Y un objet de $\mathcal{B}$ et

$$I_\bullet \ : \ 0 \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective de X, ainsi qu'une résolution projective de Y :

$$P^\bullet \ : \ \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 \, .$$

On définit, pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n(E(X)) := H^n(E(I_\bullet)) \\ \mathbb{L}_n(F(X)) := H_n(F(I_\bullet)) \\ \mathbb{L}_n(G(Y)) := H_n(G(P^\bullet)) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n(E(X))$ est le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à droite de E et $\mathbb{L}_n(F(X))$ (resp. $\mathbb{L}_n(G(Y))$) est le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche de F (resp. G).

Remarque 47. On peut montrer que

$$\mathrm{Ext}^{\,n}_A(M, N) = \mathbb{R}^n(\mathrm{Hom}_A(M, -))(N) \quad \textit{(cf [39], Theorem 2.7.6)},$$

et on en déduit en particulier le Lemme 40.

En utilisant des arguments parfaitement similaires à ceux employés précédemment, on peut montrer :

Proposition 30. *Les constructions données ici ne dépendent pas des récolutions choisies.*

Proposition 31. *Reprenons les notations de la définition 50 et soit une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$ (resp. dans $\mathcal{B}$) :*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0\,.$$

Alors, on a des suites exactes longues :

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow E(X) \longrightarrow E(Y) \longrightarrow E(Z) \\ \longrightarrow \mathbb{R}^1E(X) \longrightarrow \mathbb{R}^1E(Y) \longrightarrow \mathbb{R}^1E(Z) \\ \longrightarrow \mathbb{R}^2E(X) \longrightarrow \cdots \end{array},$$

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow \mathbb{L}_2F(X) \\ \longrightarrow \mathbb{L}_1F(Z) \longrightarrow \mathbb{L}_1F(Y) \longrightarrow \mathbb{L}_1F(X) \\ \longrightarrow F(Z) \longrightarrow F(Y) \longrightarrow F(X) \longrightarrow 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow \mathbb{L}_2G(Z) \\ \longrightarrow \mathbb{L}_1G(X) \longrightarrow \mathbb{L}_1G(Y) \longrightarrow \mathbb{L}_1G(Z) \\ \longrightarrow G(X) \longrightarrow G(Y) \longrightarrow G(Z) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Terminons cette section par une autre application de ces constructions : les groupes Tor .

Lemme 45. *Soient A une algèbre, M, N, P trois A-modules à droite, avec une suite exacte*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0\,,$$

et T un A-module à gauche. Alors

$$M \otimes_A T \xrightarrow{f\otimes id_T} N \otimes_A T \xrightarrow{g\otimes id_T} P \otimes_A T \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de groupes abéliens.

Démonstration. Soit X un A-module. Comme la suite

$$M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

est exacte, d'après le Lemme 31, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, X))$$

est exacte et avec le Lemme 2.4 de l'annexe, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P \otimes_A T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_A T, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_A T, X)$$

est exacte, et ce de manière fonctorielle en X, pour tout groupe abélien X. D'après le Lemme 31, on en déduit que la suite

$$M \otimes_A T \longrightarrow N \otimes_A T \longrightarrow P \otimes_A T \longrightarrow 0$$

est exacte, d'où le résultat. □

Corollaire 18. *Le foncteur covariant $- \otimes_A N$ est exact à droite pour tout A-module N.*

Définition 51. Soient M, N deux A-modules. On définit $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ comme étant le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche de $- \otimes_A N$ appliqué à M :

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) := \mathbb{L}_n(- \otimes_A N)(M).$$

En utilisant les résultats précédents sur les foncteurs dérivés et en consultant [39], on obtient

Proposition 32. *1. Soit $P^\bullet$ une résolution projective de M. Alors, $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ est le $n^{ème}$ espace d'homologie du complexe*

$$\cdots \longrightarrow P_i \otimes_A N \longrightarrow P_{i-1} \otimes_A N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A N \longrightarrow P_0 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

et, en particulier, on a

$$\mathrm{Tor}_0^A(M, N) \simeq M \otimes N.$$

2. $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ est indépendant de $P^\bullet$.

3. Si A est commutative, on a

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = \mathbb{L}_n(M \otimes_A -)(N),$$

en d'autres termes,

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \simeq \mathrm{Tor}_n^A(N, M).$$

4. Si P est projectif, alors $\mathrm{Tor}_n^A(P, N) = 0$, pour tout $n \geq 1$.

5. Si

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte, alors la suite

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Tor}_2^A(Z, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(X, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(Y, M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(Z, M) \longrightarrow X \otimes M \longrightarrow Y \otimes M \longrightarrow Z \otimes M \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout M.

6. *On a*
$$\mathrm{Tor}_n^A\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\right) \simeq \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}_n^A(M_j, N)$$
et
$$\mathrm{Tor}_n^A\left(M, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \simeq \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}_n^A(M, N_j).$$
7. *On a*
$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(M, N) = 0,\ \forall n \geq 2.$$
8. *Si A est commutative et si $a \in A$ n'est pas un diviseur de 0, alors*
$$\mathrm{Tor}_1^A\left({}^A\!/_{aA}, M\right) = \{m \in M\ ;\ am = 0\}.$$
Ceci justifie le nom Tor *pour "torsion".*

Démonstration. Nous ne donnons ici qu'un schéma de preuve, la majeure partie du travail ayant déjà été effectuée.

1. C'est la définition.
2. Nous avons déjà étudié ce fait dans la proposition 30.
3. [39], Theorem 2.7.2.
4. C'est évident en utilisant 3.
5. C'est la proposition 31.
6. Il suffit de le vérifier.
7. [39], Proposition 3.1.2.
8. [39], Example 3.1.7.

□

4.4 Cohomologie de Hochschild et Théorème de Wedderburn-Malcev

Nous allons étudier ici la cohomologie de Hochschild, qui est à rapprocher de la cohomolgie des groupes, mais s'applique cette fois aux algèbres. Tout comme pour le cas des groupes nous allons exprimer les premiers espaces de (co)homologie de Hochschild en termes de (co)cycles et de (co)bords ; et nous verrons ensuite que la seconde cohomologie classifie les "suites exactes courtes d'algèbres". Nous appliquerons enfin ceci au résultat de Wedderburn-Malcev qui affine, en quelque sorte, le Théorème de Wedderburn (Théorème 2).

On fixe K un anneau commutatif et A une K-algèbre. Nous allons donner une résolution libre générale (mais non minimale) de A comme K-algèbre, appelée la résolution bar, notée $\mathbb{B}A$. Dans la suite, on notera $\otimes$ pour $\otimes_K$ (i.e. les produits tensoriels sont sur K), ainsi que

$$A^{\otimes n} := \bigotimes_{i=1}^{n} A,$$

la $n^{\text{ème}}$ puissance tensorielle de A.

Définition 52. *([29])*
On appelle algèbre enveloppante de A le produit tensoriel

$$A^e := A \otimes A^{op} = A \otimes_K A^{op}.$$

Remarque 48. A peut alors être considérée comme un A^e-module à gauche (ou à droite puisque $(A^e)^{op} \simeq A^e$). De plus, il est clair qu'un A-A-bimodule est exactement un A^e-module.

Définition 53. Considérons le complexe $(\mathbb{B}A, \partial_\bullet)$ dont la composante homogène de degré n est

$$(\mathbb{B}A)_n := A^{\otimes(n+2)}$$

et dont la différentielle de degré n est

$$\partial_n : (\mathbb{B}A)_n \to (\mathbb{B}A)_{n-1}$$

définie par

$$\partial_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) := a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_ia_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} + (-1)^n a_0 \otimes \cdots \otimes a_na_{n+1}.$$

$(\mathbb{B}A, \partial_\bullet)$ est appelé le complexe bar de A.

Proposition 33. *On suppose que A est K-projective. Alors, $(\mathbb{B}A, \partial_\bullet)$ est une résolution libre du A^e-module A.*

Démonstration. Tout d'abord, on a

$$\operatorname{coker}(\partial_1) = \operatorname{coker}(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \mapsto a_0a_1 \otimes a_2 - a_0 \otimes a_1a_2)$$

et l'application surjective

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \stackrel{\mu}{\to} & A \\ a_0 \otimes a_1 & \mapsto & a_0a_1 \end{array}$$

vérifie $\mu \circ \partial_1 = 0$. On définit le <u>complexe augmenté</u> $(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial}_\bullet)$:

$$(\widehat{\mathbb{B}A})_n := (\mathbb{B}A)_n, \ \forall n \geq 0,$$

$$(\widehat{\mathbb{B}A})_{-1} := A,$$

$$\widehat{\partial}_n := \partial_n, \ \forall n \geq 1,$$

$$\widehat{\partial}_0 := \mu.$$

$(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial}_\bullet)$ est donc le complexe

$$\begin{array}{rccccccccccc} \widehat{\mathbb{B}A} \ : & \cdots \longrightarrow & (\widehat{\mathbb{B}A})_3 & \xrightarrow{\widehat{\partial_3}} & (\widehat{\mathbb{B}A})_2 & \xrightarrow{\widehat{\partial_2}} & (\widehat{\mathbb{B}A})_1 & \xrightarrow{\widehat{\partial_1}} & (\widehat{\mathbb{B}A})_0 & \xrightarrow{\widehat{\partial_0}} & (\widehat{\mathbb{B}A})_{-1} \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ & \cdots \longrightarrow & (\mathbb{B}A)_3 & \xrightarrow{\partial_3} & (\mathbb{B}A)_2 & \xrightarrow{\partial_2} & (\mathbb{B}A)_1 & \xrightarrow{\partial_1} & (\mathbb{B}A)_0 & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

Il s'agit de montrer que $(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial}_\bullet)$ est exact. On définit l'application K-linéaire (même A^{op}-linéaire) :

$$\begin{array}{rccc} h_n \ : & (\mathbb{B}A)_{n-1} & \to & (\mathbb{B}A)_n \\ & a_0 \otimes \cdots \otimes a_n & \mapsto & 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \end{array}$$

Alors, on a

$$(\partial_0 \circ h_0)(a_0) = \partial_0(1 \otimes a_0) = \mu(1 \otimes a_0) = 1 \cdot a_0 = a_0 \ \Rightarrow \ \partial_0 \circ h_0 = id_A = id_{(\widehat{\mathbb{B}A})_{-1}}.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, on calcule

$$(h_n \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_{n+1})(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$= h_n(a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i h_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$+(-1)^n h_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_na_{n+1}) + \partial_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$= 1 \otimes a_0a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + (-1)^n(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_na_{n+1})$$

$$+a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i+1}a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n+1}(1 \otimes \cdots \otimes a_na_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} = a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}.$$

Il vient alors

$$h_n \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_{n+1} = id_{(\widehat{\mathbb{B}A})_n},$$

et donc

$$h \circ \widehat{\partial_\bullet} + \widehat{\partial_\bullet} \circ h = id_{\widehat{\mathbb{B}A}}.$$

Ainsi, dans $\mathcal{C}(K - \mathfrak{Mod})$, le complexe $(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial_\bullet})$ est homotope à zéro, son homologie est donc nulle dans $\mathcal{C}(K - \mathfrak{Mod})$, donc aussi dans $\mathcal{C}(A^e - \mathfrak{Mod})$ et $(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial_\bullet})$ est donc exact. □

Corollaire 19. *On suppose encore que A est K-projective. Pour tout A-module L, le complexe $(\mathbb{B}A \otimes_A L, \partial_\bullet \otimes_A id_L)$ est une résolution projective de L, en tant que A-module.*

Démonstration. En effet, la résolution augmentée $(\widehat{\mathbb{B}A}, \widehat{\partial_\bullet})$ est homotope à zéro dans la catégorie $\mathcal{C}(A - \mathfrak{Mod})$, comme on l'a vu précédemment. De plus, on a

$$id_{(\widehat{\mathbb{B}A})_n} \otimes_A id_L = id_{(\widehat{\mathbb{B}A})_n} \otimes_A id_L^2 = (h_n \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_{n+1}) \otimes_A id_L^2$$

$$= (h_n \circ \partial_n) \otimes_A id_L^2 + (\partial_{n+1} \circ h_{n+1}) \otimes_A id_L^2 = (h_n \otimes_A id_L) \circ (\partial_n \otimes id_L) + (\partial_{n+1} \otimes_A id_L) \circ (h_{n+1} \otimes_A id_L)$$

et $h_\bullet \otimes_A id_L$ est une homotopie entre $id_{\widehat{\mathbb{B}A} \otimes_A L}$ et 0. Ainsi, $(\widehat{\mathbb{B}A} \otimes_A L, \widehat{\partial_\bullet} \otimes_A id_L)$ est homotope à 0, donc exact. □

Définition 54.
1. On suppose que A est K-projective et soit L un A-module. On dit que $(\mathbb{B}A \otimes_A L, \partial_\bullet \otimes_A id_L)$ (resp. $(\mathbb{B}A, \partial_\bullet)$) est la résolution bar de L (resp. A).
2. Soit M un A^e-module. Les cycles de degré n de $\mathrm{Hom}_{A^e}((\mathbb{B}A, \partial_\bullet), M)$ sont appelés les cocycles de Hochschild de degré n et les bords de degré n sont les cobords de Hochschild de degré n.

Définition 55. *([29], Remark 2.4)*
Soient A une K-algèbre et M un A-bimodule. Le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M est le groupe

$$HH_n(A, M) := \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, M).$$

De même, le $n^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de Hochschild de A à coefficients dans M est

$$HH^n(A, M) := \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, M).$$

On définit aussi la (co)homologie de Hochschild de A :

$$HH_n(A) := HH_n(A, A) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A),$$

$$HH^n(A) := HH^n(A, A) = \mathrm{Ext}_{A^e}^n(A, A).$$

Remarque 49.
1. L'homologie et la cohomologie de Hochschild d'une algèbre en sont d'importants invariants.

2. Comme la résolution bar est une résolution de A en tant que A^e-module, on peut l'utiliser pour décrire la (co)homologie de Hochschild de A et dans de rares cas, pour la calculer explicitement.

Nous allons rapidement décrire le degré 0, ainsi que la cohomologie en degré 1 et 2.

Proposition 34. ([36], Propositions 2.1 & 2.2)
Pour un A^e-module M, on a

$$HH^0(A,M) \simeq Z_A(M)$$

et

$$HH_0(A,M) \simeq {}^{M}\Big/_{[A,M]},$$

où $[A,M]$ est le sous-K-module de M engendré par $\{am-ma,\ m\in M,\ a\in A\}$ (appelé le sous-module des coinvariants) et où $Z_A(M) := \{m\in M\ ;\ am=ma,\ \forall a\in A\}$ (appelé le centralisateur de M dans A).

Démonstration. On a $HH^0(A,M) = \mathrm{Ext}^0_{A^e}(A,M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$. Posons

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M) & \to & Z_A(M) \\ & & f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

Si $f\in \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$, alors pour tout $a\in A$, on a $a\cdot f(1) = af(1)\cdot 1 = (a\otimes 1)\cdot f(1) = f((a\otimes 1)\cdot 1) = f(a\cdot 1\cdot 1) = f(a) = f(1\cdot 1\cdot a) = f((1\otimes a)\cdot 1) = (1\otimes a)f(1) = f(1)\cdot a$, d'où $f(1)\in Z_A(M)$. Donc φ est bien définie et c'est clairement un morphisme. Ensuite, si $x\in Z_A(M)$, on définit

$$\begin{array}{rccc} f_x & : & A & \to & M \\ & & a & \mapsto & a\cdot x = x\cdot a \end{array}$$

Alors, pour tous $a,b\in A$ et tout $z\in M$,

$$f_x((a\otimes b)\cdot z) = f_x(azb) = x\cdot azb = xazb = axzb = af_x(z)b = (a\otimes b)\cdot f_x(z),$$

et donc $f_x\in \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M)$. Ceci montre que l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & Z_A(M) & \to & \mathrm{Hom}_{A^e}(A,M) \\ & & x & \mapsto & f_x \end{array}$$

est un morphisme, réciproque de φ, donc φ est un isomorphisme.
Ensuite, on a $HH_0(A,M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_0(A,M) = A\otimes_{A^e} M$. Posons

$$\begin{array}{rccc} f & : & {}^{M}\Big/_{[A,M]} & \to & A\otimes_{A^e} M \\ & & \overline{m} & \mapsto & 1\otimes m \end{array}$$

Ceci est bien défini car si $m = an-na$, alors $1\otimes m = 1\otimes(an-na) = 1\otimes an - 1\otimes na = a\otimes n - a\otimes n = 0$. De plus, si

$$\begin{array}{rccc} g & : & A\otimes_{A^e} M & \to & {}^{M}\Big/_{[A,M]} \\ & & a\otimes m & \mapsto & a\overline{m} \end{array}$$

alors $f\circ g(a\otimes m) = f(a\overline{m}) = 1\otimes am = a\otimes m$ et $g\circ f(\overline{m}) = 1\cdot\overline{m} = \overline{m}$ et donc f est un isomorphisme. □

Corollaire 20. *On a*

$$HH^0(A) \simeq Z(A)$$

et

$$HH_0(A) \simeq A \Big/ [A, A].$$

On peut aussi calculer $HH^1(A, M)$:

Proposition 35. ([36], Proposition 2.3)
Posons

$$Z^1(A, M) := \{f : A \to M \ ; \ f(ab) = af(b) + f(a)b, \ \forall a, b \in A\}$$

ainsi que

$$B^1(A, M) := \{f : A \to M \ ; \ \exists m \in M \ ; \ \forall a \in A, \ f(a) = am - ma\}.$$

Alors, on a un isomorphisme

$$HH^1(A, M) \simeq Z^1(A, M) \Big/ B^1(A, M).$$

Démonstration. Soit la résolution bar de A :

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes 4} \xrightarrow{\partial_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{\partial_1} A \otimes A \longrightarrow 0 \, .$$

Elle donne un complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_1, M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, M) \longrightarrow \cdots$$

et on a

$$HH^1(A, M) = \mathrm{Ext}^{\,1}_{A^e}(A, M) = \ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_1, M)).$$

Or,

$$\ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M)) = \{f : A^{\otimes 2} \to M \ ; \ f \circ \partial_2 = 0\}$$

$$= \{f : A^{\otimes 3} \to M \ ; \ \forall a_0, a_1, a_2, a_3 \in A, \ f(a_0a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 - a_0 \otimes a_1a_2 \otimes a_3 + a_0 \otimes a_1 \otimes a_2a_3) = 0\}$$

$$\simeq \{f : A \to M \ ; \ \forall a, b \in A, \ af(b) + f(a)b - f(ab) = 0\} = Z^1(A, M),$$

via l'identification

$$(f : A^{\otimes 3} \to M) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc} \widetilde{f} & : & A & \to & M \\ & & a & \mapsto & f(1 \otimes a \otimes 1) \end{array} \right).$$

De même, on a

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_1, M)) = \{g : A^{\otimes 3} \to M \ ; \ \exists f : A \otimes A \to M \ ; \ g = f \circ \partial_1\}$$

$$= \{g : A^{\otimes 3} \to M \ ; \ \exists f : A \otimes A \to M \ ; \ \forall a, b, c \in A, \ g(a \otimes b \otimes c) = f(ab \otimes c) - f(a \otimes bc)\}$$

$$\simeq \{g : A \to M \ ; \ \exists m \in M \ ; \ g(a) = am - ma, \ \forall a \in A\}$$

via l'identification

$$(g : A^{\otimes 3} \to M) \mapsto \left(\begin{array}{ccccc} \widetilde{g} & : & A & \to & M \\ & & a & \mapsto & g(1 \otimes a \otimes 1) \end{array} \right)$$

et en posant $m := f(1 \otimes 1)$. D'où $\mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)) \simeq B^1(A, M)$, et le résultat. □

À présent, donnons une interprétation de $HH^2(A,M)$ en termes d'extensions.

Définition 56. *([29], Definition 3.5)*
Une extension B de A est un épimorphisme de K-algèbres $\varphi : B \to A$ qui est scindé.

Remarque 50. Avec les mêmes notations, soit $M := \ker\varphi$. Comme M est un idéal bilatère de B, M est un B-module. De plus, le produit sur B induit un produit sur M. Si ce produit vérifie $M^2 = 0$, alors on peut considérer M comme un A-bimodule via

$$\begin{cases} a \cdot m := b \cdot m & \text{où} \quad \varphi(b) = a, \\ m \cdot a := m \cdot b & \text{où} \quad \varphi(b) = a, \end{cases} \tag{10}$$

et ceci est bien défini car $\varphi(b) = \varphi(b') \ \Rightarrow \ b - b' \in M \ \Rightarrow \ (b-b')m = 0$ car $M^2 = 0$.
Réciproquement, si M a une structure de A-bimodule vérifiant (10), alors le produit sur M induit par le produit sur B est nul.

Définition 57.
1. Soient A une K-algèbre et M un A-bimodule. Une extension de A par M est une "suite exacte courte"

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ \varphi\ } A \longrightarrow 0$$

avec φ un épimorphisme d'algèbres K-scindé et i est un monomorphisme de K-modules tels que

$$\forall b \in B,\ \forall m \in M, \quad \begin{cases} i(\varphi(b) \cdot m) = b \cdot i(m), \\ i(m \cdot \varphi(b)) = i(m) \cdot b. \end{cases} \tag{11}$$

2. Deux extensions de A par M sont équivalentes si on a la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow f & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec f un morphisme d'algèbres (qui est automatiquement un isomorphisme).

Théorème 11. *Soient K un corps et A une K-algèbre. Alors, pour tout A-bimodule M, le groupe $HH^2(A,M)$ paramétrise les classes d'équivalence d'extensions de M par A :*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } A \longrightarrow 0$$

où B est une K-algèbre et où M est un idéal bilatère nilpotent d'ordre 2 de B (i.e. $M^2 = 0$). De plus, pour g un 2-cocycle de Hochschild, on définit $\overline{A} := M \rtimes_g A$ comme le K-espace vectoriel $M \oplus A$, muni de la multiplication

$$(m,a) \cdot (n,b) := (mb + an + g(a \otimes b), ab).$$

Sous cette construction, g est un 2-cobord de Hochschild si et seulement si la suite exacte courte correspondante est scindée.

Démonstration. Soit une application A^e-linéaire $f \in \ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_3, M))$. f donne alors un élément de $HH^2(A,M) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ext}^2_{A^e}(A,M)$. La condition $f \circ \partial_3 = 0$ s'écrit

$$0 = f(ab \otimes c \otimes d \otimes e - a \otimes bc \otimes d \otimes e + a \otimes b \otimes cd \otimes e - a \otimes b \otimes c \otimes de)$$

$$= abf(1 \otimes c \otimes d \otimes 1)e - af(1 \otimes bc \otimes d \otimes 1)e + af(1 \otimes b \otimes cd \otimes 1)e - af(1 \otimes b \otimes c \otimes 1)de$$

$$= abg(c \otimes d)e - ag(bc \otimes d)e + ag(b \otimes cd)e - ag(b \otimes c)de$$

pour $g(b \otimes c) := f(1 \otimes b \otimes c \otimes 1)$. On voit que l'on peut supposer $a = e = 1$ et imposer à g d'être K-linéaire. On obtient qu'une application K-linéaire $g : A \otimes A \to M$ donne un élément de $HH^2(A,M)$ si et seulement si

$$\forall b, c, d \in A,\ bg(c \otimes d) - g(bc \otimes d) + g(b \otimes cd) - g(b \otimes c)d = 0. \tag{12}$$

Dans ce cas, on dit que g est un 2-cocycle de A à valeurs dans M. Une telle application K-linéaire g donne l'élément 0 dans $HH^2(A,M)$ (i.e. $f_g \in \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M))$) si et seulement s'il existe $h \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, M)$ telle que

$$\forall a, b, c, d \in A,\ ag(b \otimes c)d (= f_g(a \otimes b \otimes c \otimes d)) = h \circ \partial_2(a \otimes b \otimes c \otimes d).$$

À nouveau, on peut supposer que $a = d = 1$ et que h est K-linéaire. Ainsi, $g = 0$ dans $HH^2(A,M)$ si et seulement s'il existe $h : A \to M$ telle que

$$\forall b, c \in A,\ g(b \otimes c) = bh(c) - h(bc) + h(b)c. \tag{13}$$

Dans ce cas, on dit que g est un 2-cobord de Hochschild.

Sur le K-espace vectoriel $M \oplus A$, on définit

$$(m,a) \cdot (n,b) := (mb + an + g(a \otimes b), ab),\ \forall a, b \in A,\ \forall m, n \in M.$$

On observe que cette loi est associative si et seulement si g satisfait (12). En effet, on a

$$((m,a)\cdot(n,b))\cdot(l,c) = (mb+an+g(a\otimes b), ab)\cdot(l,c) = (mbc+anc+abl+g(a\otimes b)c+g(ab\otimes c), abc)$$

$$= (mbc+anc+abl+ag(b\otimes c)+g(a\otimes bc), abc) = (m,a)\cdot(nc+bl+g(b\otimes c), bc) = (m,a)\cdot((n,b)\cdot(l,c)),$$

pour tous $m, n, l \in M$ et tous $a, b, c \in A$. La réciproque est immédiate, en lisant la suite d'égalités précédentes dans le sens inverse. Par analogie avec le produit semi-direct, on dénote par $M \rtimes_g A$ l'algèbre obtenue à partir du 2-cocycle g ; son unité étant $(-g(1 \otimes 1), 1)$.

Ensuite, si on a une suite exacte K-scindée comme dans l'énoncé, soit σ une section de p. On pose

$$g(a \otimes b) := \sigma(a)\sigma(b) - \sigma(ab).$$

Dans ce cas, on a $g : A \otimes A \to M$ car $p(g(a \otimes b)) = ab - ab = 0$ et car σ est K-linéaire. De plus, on voit qu'alors $B \simeq M \rtimes_g A$. En notant $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions, on a une application surjective :

$$\ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_3, M)) \to \mathscr{E}.$$

Par ailleurs, deux extensions $M \rtimes_{g_1} A$ et $M \rtimes_{g_2} A$ sont équivalentes si et seulement si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \rtimes_{g_1} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow f & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \rtimes_{g_2} A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

avec f un morphisme d'algèbres. La commutativité du diagramme implique que

$$f(m,a) = (m + h(a), a),$$

pour un certain $h \in \mathrm{Hom}_K(A, M)$. f est un morphisme d'algèbres si et seulement si

$$g_1(a \otimes b) - g_2(a \otimes b) = ah(b) - h(ab) + h(a)b, \ \forall a, b \in A$$

i.e. si et seulement si $g_1 - g_2 \in \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M))$. En effet, pour $m, n \in M$ et $a, b \in A$, on calcule

$$f(m,a) \cdot f(n,b) = (m + h(a), a) \cdot (n + h(b), b) = (mb + h(a)b + an + ah(b) + g_2(a \otimes b), ab)$$

et

$$f((m,a) \cdot (n,b)) = f(mb + an + g_1(a \otimes b), ab) = (mb + an + g_1(a \otimes b) + h(ab), ab),$$

d'où

$$f(m,a) \cdot f(n,b) - f((m,a) \cdot (n,b)) = 0 \ \Leftrightarrow \ h(a)b + ah(b) + g_2(a \otimes b) - h(ab) - g_1(a \otimes b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ g_2(a \otimes b) - g_1(a \otimes b) = h(ab) - ah(b) - h(a)b.$$

On a donc une bijection

$$HH^2(A, M) = \mathrm{Ext}^{\,2}_{A^e}(A, M) = \ker(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_3, M)) \Big/ \mathrm{im}\,(\mathrm{Hom}_{A^e}(\partial_2, M)) \approx \mathscr{E}.$$

(Voir *[29], Proposition 3.7* pour cet argument).

Maintenant, la projection canonique $\pi : M \rtimes_g A \twoheadrightarrow A$ sur la seconde composante admet une section si et seulement si g est un 2-cobord. En effet, supposons qu'il existe h, reliée à g par (13). Alors,

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & A & \to & M \rtimes_g A \\ & & a & \mapsto & (-h(a), a) \end{array}$$

est une section de π. En effet, on a $\pi \circ \varphi(a) = \pi(-h(a), a) = a$ et $\varphi(a)\varphi(b) = (-h(a), a) \cdot (-h(b), b) = (-h(a)b - ah(b) + g(a \otimes b), ab) = (-h(ab), ab) = \varphi(ab)$ et φ est un morphisme de A^e-modules. Inversement, toute section de π est de la forme φ pour un certain h vérifiant (13). Donc g est un 2-cobord si et seulement si la suite

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \rtimes_g A \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

est scindée.

On observe enfin que le produit de deux éléments de M est nul dans $M \rtimes_g A$, donc le module engendré par de tels produits est trivial, i.e. $M^2 = 0$. □

La démonstration précédente montre en particulier le

Corollaire 21. *Soient A une K-algèbre et M un A-bimodule. Si l'on pose*

$$Z^2(A, M) := \{g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes 2}, M) \ ; \ ag(b \otimes c) - g(ab \otimes c) + g(a \otimes bc) - g(a \otimes b)c = 0, \ \forall a, b, c \in A\},$$

et

$$B^2(A, M) := \{g \in \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes 2}, M) \ ; \ \exists h \in \mathrm{Hom}_K(A, M) \ ; \ g(a \otimes b) = ah(b) - h(ab) + h(a)b, \ \forall a, b \in A\},$$

alors on a

$$HH^2(A, M) \simeq Z^2(A, M) \Big/ B^2(A, M).$$

Lemme 46. *Soit A une K-algèbre telle que A^e soit semi-simple. Alors, pour tout A-bimodule M, on a*

$$HH^2(A, M) = 0.$$

Démonstration. En effet, tout sous-bimodule d'un A-bimodule en est un facteur direct, donc toute suite exacte courte de A-bimodules est scindée et donc tout A-bimodule est projectif. C'est en particulier le cas du A-bimodule régulier ${}_AA_A$. Il vient alors

$$HH^2(A, M) = \mathrm{Ext}^{\,2}_{A^e}({}_AA_A, M) \simeq \mathrm{Ext}^{\,1}_{A^e}(\Omega_{{}_AA_A}, M) = 0,$$

car ${}_AA_A$ est projectif et on peut donc choisir $\Omega_{{}_AA_A} = 0$. □

Passons enfin à l'importante conséquence qu'est le théorème de Wedderburn-Macev :

Théorème 12. *(Wedderburn-Malcev)*
Soient K un corps algébriquement clos et A une K-algèbre de dimension finie. Alors il existe une sous-algèbre semi-simple S de A telle que

$$A \simeq S \oplus rad(A),$$

où la somme directe est une somme directe de K-espaces vectoriels. De plus, on a $S \simeq A \Big/ rad(A)$.

Démonstration. On prétend tout d'abord que l'algèbre

$$\left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right)^e = \left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right) \otimes_K \left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right)^{op}$$

est semi-simple. En effet, A est un K-module artinien et noethérien, donc d'après le Lemme 5, $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$ est semi-simple et comme K est algébriquement clos, d'après le Corollaire 1 du Théorème de Wedderburn, on a

$$A \Big/ \mathrm{rad}(A) \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{n_i}(K).$$

Ensuite, d'après le Lemme 7 de l'annexe, on a

$$\left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right) \otimes_K \left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right)^{op} \simeq \left(\prod_{i=1}^{r} \mathcal{M}_{n_i}(K)\right) \otimes_K \left(\prod_{j=1}^{r} \mathcal{M}_{n_j}(K)\right)^{op}$$

$$\simeq \prod_{1\le i,j\le r} \mathcal{M}_{n_i}(K) \otimes_K \mathcal{M}_{n_j}(K)^{op} \simeq \prod_{1\le i,j\le r} \mathcal{M}_{n_i}(K) \otimes_K \mathcal{M}_{n_j}(K) \simeq \prod_{1\le i,j\le r} \mathcal{M}_{n_in_j}(K),$$

et donc $\left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)\right)^e$ est semi-simple en vertu de la Proposition 5.

Posons maintenant

$$\overline{A} := A \Big/ \mathrm{rad}(A).$$

D'après le Lemme 46 on a

$$HH^2(\overline{A}, M) = 0,$$

pour tout $\overline{A}^e$-module M.

Ensuite, d'après le Lemme 4, $\mathrm{rad}(A)$ est un idéal nilpotent de A. Supposons que $\mathrm{rad}(A)^n = 0$, avec n minimal. On procède par récurrence sur n :

$*$ Si $n = 1$, alors A est semi-simple et il n'y a alors rien à démontrer.

$*$ Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. On considère

$$\widehat{A} := A \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1}$$

et on observe que

$$\mathrm{rad}(A) \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1} \simeq \mathrm{rad}(\widehat{A}).$$

En effet, l'algèbre $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$ est noethérienne et artinienne et $\widehat{A}$ est un $A \Big/ \mathrm{rad}(A)$-module, donc en utilisant le Lemme 7, il vient

$$\mathrm{rad}(\widehat{A}) = \mathrm{rad}(A) \cdot \widehat{A} = \mathrm{rad}(A) \cdot \left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1} \right) \simeq \mathrm{rad}(A) \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1}.$$

Ainsi, $\mathrm{rad}(\widehat{A})^{n-1} = 0$ et on a

$$\widehat{A} \Big/ \mathrm{rad}(\widehat{A}) = \left(A \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1} \right) \Big/ \left(\mathrm{rad}(A) \Big/ \mathrm{rad}(A)^{n-1} \right) \simeq A \Big/ \mathrm{rad}(A) = \overline{A}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\widehat{A} \simeq \widehat{S} \oplus \mathrm{rad}(\widehat{A}),$$

avec $\widehat{S}$ une algèbre semi-simple vérifiant $\widehat{S} \simeq \widehat{A} \Big/ \mathrm{rad}(\widehat{A}) \simeq \overline{A}$. Si $A \xrightarrow{\pi} \widehat{A}$ désigne la projection naturelle, alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{rad}(A)^{n-1} \longrightarrow \pi^{-1}(\widehat{S}) \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow 0 \tag{14}$$

est exacte (et K-scindée). De plus, le morphisme de droite est un morphisme d'algèbres et le noyau $\mathrm{rad}(A)^{n-1}$ est nilpotent d'ordre 2. Comme $\widehat{S} \simeq \overline{A}$, on peut utiliser le fait que

$$HH^2(\overline{A}, \mathrm{rad}(A)^{n-1}) = 0$$

pour conclure, par le Théorème 11 que la suite (14) est scindée. Il existe donc un morphisme d'algèbres $\sigma : \overline{A} \to \pi^{-1}(\widehat{S})$ tel que $\pi \circ \sigma = id_{\overline{A}}$. Soit donc

$$S := \sigma(\overline{A}) \simeq \overline{A} \simeq \widehat{S}.$$

Alors, S est semi-simple et on a

$$\pi^{-1}(\widehat{S}) \simeq S \oplus \mathrm{rad}(A)^{n-1}.$$

Finalement,

$$A = \pi^{-1}(\widehat{A}) \simeq \pi^{-1}(\widehat{S}) + \pi^{-1}(\mathrm{rad}(\widehat{A})) \simeq (S \oplus (\mathrm{rad}(A)^{n-1}) + \pi^{-1}(\mathrm{rad}(\widehat{A}))$$

$$\simeq S \oplus (\mathrm{rad}(A)^{n-1} + \mathrm{rad}(A)) \simeq S \oplus \mathrm{rad}(A).$$

Ceci termine la démonstration.

□

Annexe

Produit tensoriel d'algèbres

Nous allons ici donner quelques résultats techniques concernant le produit tensoriel de modules, aussi bien que d'algèbres (non supposées commutatives) dont nous avons besoin dans notre exposé. Avant toute chose, rappelons une construction importante :

Définition 1. Soient A une K-algèbre, avec K un anneau commutatif, M un A-module et S un sous-ensemble de M. On dit que M est libre sur S si, pour tout module N, et toute application (ensembliste) $f : S \to N$, il existe un unique morphisme $\varphi : M \to N$ tel que $\varphi_{|S} = f$.

Proposition-Définition 1. *Soient S un ensemble et*

$$F_S := \{f : S \to A \ ; \ |f^{-1}(A \setminus \{0\})| < +\infty\}.$$

Alors, F_S est un A-module, libre sur S.

Démonstration. Il est immédiat de vérifier que F_S, muni des lois composante par composante, est un A-module. Soit ensuite, pour $t \in S$,

$$\begin{array}{rccc} f_t & : & S & \to & A \\ & & s & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & s = t \\ 0 & \text{si} & s \neq t \end{array} \right. \end{array}$$

et soit

$$S' := \{f_t, \ t \in S\}.$$

Soit N un module et soit $g : S' \to N$ une application. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & F_S & \to & N \\ & & f & \mapsto & \sum_{s \in S} f(s) g(f_s) \end{array}$$

φ est bien définie car $f(s) = 0$ pour presque tout $s \in S$. On a clairement $\varphi_{|S'} = g$ et φ est unique car tout $f \in F_S$ est une combinaison linéaire unique finie d'éléments de S'. Et comme $S' \approx S$, on a le résultat. □

Corollaire 1. *Tout A-module est quotient d'un module libre.*

Démonstration. Soit en effet M un A-module. On peut considérer le A-module $F_M \simeq \bigoplus_{m\in M} A$ libre sur M, ainsi que l'épimorphisme

$$\begin{array}{rccc} f & : & F_M & \twoheadrightarrow & M \\ & & \sum_{m\in M} a_m & \mapsto & \sum_{m\in M} a_m \cdot m \end{array}$$

Alors, d'après le premier théorème d'isomorphisme, on a

$$M \simeq {}^{F_M}\big/_{\ker f}.$$

□

Définition 2. Soient A un anneau, M un A-module à gauche et N un A-module à droite. On rappelle que le groupe abélien libre $F_{N\times M}$ sur $N \times M$ est défini par

$$F_{N\times M} := \{f : N \times M \to \mathbb{Z} \ ; \ f(n,m) = 0 \text{ pour presque tout } (n,m) \in N \times M\},$$

muni de l'addition canonique. On considère le sous-groupe $R_{N\times M,A}$ de $F_{N\times M}$ engendré par les éléments de la forme

$$(n_1 + n_2, m) - (n_1, m) - (n_2, m), \ n_1, n_2 \in N, \ m \in M,$$

$$(n, m_1 + m_2) - (n, m_1) - (n, m_2), \ n \in N, \ m_1, m_2 \in M,$$

$$(na, m) - (n, am), \ a \in A, \ n \in N, \ m \in M$$

et on pose

$$N \otimes_A M := {}^{F_{N\times M}}\Big/_{R_{N\times M,A}}.$$

Enfin, pour $(n,m) \in N \times M$, on note $n \otimes m$ la classe de (n,m) dans $N \otimes_A M$.

Remarque 1. En général, $N \otimes_A M$ est seulement un groupe abélien.

Définition 3. Soient A un anneau, M un A-module à gauche, N un A-module à droite, B un groupe abélien et $\varphi : N \times M \to B$ une application (ensembliste). On dit que φ est A-balancée si

$$\begin{cases} \varphi(n_1 + n_2, m) = \varphi(n_1, m) + \varphi(n_2, m), \ \forall n_1, n_2 \in N, \ \forall m \in M. \\ \varphi(n, m_1 + m_2) = \varphi(n, m_1) + \varphi(n, m_2), \ \forall n \in N, \ \forall m_1, m_2 \in M. \\ \varphi(na, m) = \varphi(n, am), \ \forall a \in A, \ \forall m \in M, \ \forall n \in N. \end{cases}$$

Nous allons voir ici que le produit tensoriel est solution d'un problème universel important ; on peut ramener l'étude des applications bilinéaires à celle des applications linéaires, ou plus généralement, celle des applications balancées à celle des morphismes de groupes abéliens.

Proposition 1. *Soient A un anneau, M un A-module à gauche, N un A-module à droite, B un groupe abélien et $\varphi : N \times M \to B$ une application A-balancée. Alors, il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\widehat{\varphi} : N \otimes_A M \to B$ tel que*

$$\forall (n,m) \in N \times M, \ \varphi(n,m) = \widehat{\varphi}(n \otimes m).$$

Démonstration. $F_{N\times M}$ étant libre sur $N \times M$, il existe un unique morphisme de groupes abéliens

$$F_\varphi : F_{N\times M} \to B$$

qui prolonge φ. Comme φ est A-balancée, on a $F_\varphi(R_{N\times M,A}) = 0$ et F_φ se factorise en $\widehat{\varphi}$ comme voulu. L'unicité vient du fait que l'image de tout élément de $N \otimes_A M$ est entièrement déterminée par celles de $n \otimes m$, éléments engendrant $N \otimes_A M$. □

Définition 4. Soient R et S deux anneaux. Un R-S-bimodule M est un $R \times S^{op}$-module. Plus précisément, on a une action de R à gauche, une action de S à droite et ces deux actions commutent en ce sens que

$$(rm)s = r(ms),\ \forall r \in R,\ \forall s \in S,\ \forall m \in M.$$

Lemme 1. *Soient R, S, T, V quatre anneaux, M un R-V-bimodule, N un S-R-bimodule et U un T-R-bimodule. Alors,*

1. *$N \otimes_R M$ est un S-V-bimodule vérifiant*

$$s \cdot (n \otimes m) \cdot v = (sn) \otimes (mv),\ \forall s \in S,\ \forall v \in V,\ \forall n \in N,\ \forall m \in M.$$

2. *$\mathrm{Hom}_R(N, U)$ est un T-S-bimodule via l'opération définie par*

$$(t \cdot f \cdot s)(n) := tf(sn),\ \forall s \in S,\ \forall n \in N,\ \forall t \in T,\ \forall f \in \mathrm{Hom}_R(N, U).$$

Démonstration.

1. Par symétrie, il suffit d'exhiber la structure de S-module. Pour $s \in S$, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} \lambda_s & : & N \times M & \to & N \otimes_R M \\ & & (n, m) & \mapsto & (sn) \otimes m \end{array}$$

qui est clairement R-balancée. Par la Proposition 1, il existe un unique morphisme $\widehat{\lambda_s} : N \otimes_R M \to N \otimes_R M$ tel que

$$s \cdot (n \otimes m) := \widehat{\lambda_s}(n \otimes m) = \lambda(n, m) = (sn) \otimes m.$$

Comme N est un bimodule, $1_S \cdot (n \otimes m) = (1_S n) \otimes m = n \otimes m$, l'opération est distributive et

$$(s_1 s_2) \cdot (n \otimes m) = s_1 \cdot (s_2 \cdot (n \otimes m)),\ \forall s_1, s_2 \in S,\ \forall n \in N,\ \forall m \in M.$$

2. Le fait que l'opération construite dans l'énoncé définisse bien une loi sur $\mathrm{Hom}_R(U, N)$ est clair puisque f est R-linéaire et car N est un bimodule. Le fait que cette loi donne bien à $\mathrm{Hom}_R(N, U)$ une structure de T-S-bimodule découle directement des définitions. □

Lemme 2. *Soient R, S, T, V quatre anneaux, M un T-V-bimodule, N, N' deux S-T-bimodules, U un R-S-bimodule et W un R-V-bimodule. Alors*

1. *$U \otimes_S (N \otimes_T M) \simeq (U \otimes_S N) \otimes_T M$,*
2. *$U \otimes_S (N \oplus N') \simeq (U \otimes_S N) \oplus (U \otimes_S N')$,*

3. $(N \oplus N') \otimes_T M \simeq (N \otimes_T M) \oplus (N' \otimes_T M)$,
4. $\mathrm{Hom}_R(U \otimes_S N, W) \simeq \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(U, W))$. *De plus, ces deux derniers espaces sont isomorphes en tant que T-V-bimodules.*

Démonstration. 1. Pour $u \in U$, on définit

$$\begin{array}{rccc} \lambda_u & : & N \times M & \to & (U \otimes_S N) \otimes_T M \\ & & (n, m) & \mapsto & (u \otimes n) \otimes m \end{array}$$

λ_u est clairement T-balancée et induit donc un morphisme

$$\widehat{\lambda_u} : N \otimes_T M \to (U \otimes_S N) \otimes_T M.$$

On définit ensuite une application

$$\begin{array}{rccc} \lambda & : & U \times (N \otimes_T M) & \to & (U \otimes_S N) \otimes_T M \\ & & (u, x) & \mapsto & \widehat{\lambda_u}(x) \end{array}$$

Montrons que λ est S-balancée. Soient $u_1, u_2 \in U$ et $x = \sum_{i=1}^k n_i \otimes m_i \in N \otimes_T M$. Alors

$$\widehat{\lambda_{u_1+u_2}}(x) = \sum_{i=1}^k ((u_1 + u_2) \otimes n_i) \otimes m_i = \sum_{i=1}^k (u_1 \otimes n_i) \otimes m_i + (u_2 \otimes n_i) \otimes m_i$$

$$= \widehat{\lambda_{u_1}} \left(\sum_{i=1}^k n_i \otimes m_i \right) + \widehat{\lambda_{u_2}} \left(\sum_{i=1}^k n_i \otimes m_i \right) = \widehat{\lambda_{u_1}}(x) + \widehat{\lambda_{u_2}}(x)$$

et les autres propriétés sont analogues. De la même manière on définit une application dans l'autre sens, ce qui montre que l'application est un isomorphisme.

2. On a un morphisme

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_S (N \oplus N') & \to & (U \otimes_S N) \oplus (U \otimes_S N') \\ (u \otimes (n \oplus n')) & \mapsto & (u \otimes n) \oplus (u \otimes n') \end{array}$$

ainsi qu'un morphisme

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes_S N) \oplus (U \otimes_S N') & \to & U \otimes_S (N \oplus N') \\ (u \otimes n) \oplus (u' \otimes n') & \mapsto & (u \otimes n) + (u \otimes n') \end{array}$$

qui sont clairement réciproques l'un de l'autre.

3. On raisonne de la même manière que pour l'étape précédente.

4. Posons

$$\begin{array}{rccc} \Psi & : & \mathrm{Hom}_R(U \otimes_S N, W) & \to & \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(U, W)) \\ & & f & \mapsto & (n \mapsto (u \mapsto f(u \otimes n))) \end{array}$$

Tout d'abord, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_R(U \otimes_S N, W)$, et tout $n \in N$, l'application $(u \mapsto f(u \otimes n))$ est R-linéaire. En effet, si $r \in R$, on a $(ru \mapsto f(ru \otimes n) = rf(u \otimes n))$. De plus, $\Psi(f)$ est S-linéaire puisque

$$(\Psi(f)(sn))(u) = f(u \otimes sn) = f(us \otimes n) = (\Psi(f)(n))(us) = (s \cdot \Psi(f)(n))(u).$$

Posons ensuite

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(U,W)) & \to & \mathrm{Hom}_R(U \otimes_S N, W) \\ & & f & \mapsto & (u \otimes n \mapsto (f(n))(u)) \end{array}$$

Nous devons montrer que ceci est bien défini, i.e. que $\Phi(f)$ est S-balancée. Mais ceci découle immédiatement du fait que f est S-linéaire. De plus, on voit que Φ est la réciproque de Ψ.

□

Lemme 3. *Soient K un anneau commutatif, A une K-algèbre, M un A-module à droite et N un A-module à gauche, alors $M \otimes_A N$ est un K-module.*
Ensuite, pour $s \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de A-modules à gauche

$$A^s \otimes_A N \simeq N^s.$$

Enfin, si K est un corps et si M, N sont de dimension finie sur K, alors

$$\dim_K(M \otimes_K N) = \dim_K(M) \dim_K(N).$$

Démonstration. Le Lemme 1 donne directement que $M \otimes_A N$ est un K-module. De plus, d'après le point 3 du Lemme 2, il suffit de montrer que $A \otimes_A N \simeq N$. En effet, on aura alors

$$A^s \otimes_A N = \left(\bigoplus_{i=1}^{s} A \right) \otimes_A N \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} (A \otimes_A N) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} N \simeq N^s.$$

On remarque que l'application

$$\begin{array}{ccc} A \times N & \to & N \\ (a,n) & \mapsto & an \end{array}$$

est A-balancée et définit donc un morphisme

$$A \otimes_A N \to N.$$

On définit alors l'inverse $N \to A \otimes_A N$ par $n \mapsto 1 \otimes n$. Comme $a \otimes n = 1 \otimes an$ pour tout $a \in A$ et $n \in N$, ces deux morphismes sont réciproques l'un de l'autre.
Enfin, si K est un corps, on vient de voir que

$$K^n \otimes_K K^m \simeq K^{nm}, \ \forall n, m \in \mathbb{N},$$

d'où le résultat. □

Lemme 4. *Soient R un anneau commutatif et A, B deux R-algèbres. Si l'on pose*

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) & \to & A \otimes_R B \\ (a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) & \mapsto & a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{array}$$

alors $A \otimes_R B$ est une R-algèbre.

Démonstration. D'après le Lemme 3, on sait que $A \otimes_R B$ est un R-module. La structure additive est alors claire. Il s'agit donc de définir la structure multiplicative. Pour $a_1 \in A,\ b_1 \in B$, on définit l'application

$$\begin{array}{rcl} A \times B & \to & A \otimes_R B \\ (a_2, b_2) & \mapsto & (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{array}$$

Ceci est R-balancé et définit donc un morphisme

$$A \otimes_R B \to A \otimes_R B.$$

De plus, il est clair que les morphismes induits par $(a_1 r, b_1)$ et $(a_1, r b_1)$ sont les mêmes. Le morphisme induit par $(a_1 + a_1', b_1)$ est la somme des morphismes induits par (a_1, b_1) et (a_1', b_1) est le morphisme induit par $(a_1, b_1 + b_1')$ est la somme des morphismes induits par (a_1, b_1) et (a_1, b_1'). Ainsi, $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ est bien défini. Le fait que ceci donne à $A \otimes_R B$ une structure de R-algèbre consiste en une vérification immédiate. □

Nous en déduisons une application pour les anneaux de groupes :

Lemme 5. *Soient R un anneau commutatif et G, H deux groupes. Alors, on a un isomorphisme de R-algèbres*

$$R(G \times H) \simeq RG \otimes_R RH.$$

Démonstration. Définissons l'application

$$\begin{array}{rccl} \alpha & : & G \times H & \to & RG \otimes_R RH \\ & & (g, h) & \mapsto & g \otimes h \end{array}$$

Comme $1_G \otimes 1_H$ est clairement le neutre de $RG \otimes_R RH$, on a $\alpha(1_G, 1_H) = 1_{RG \otimes_R RH}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \alpha((g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)) &= \alpha(g_1 g_2, h_1 h_2) = g_1 g_2 \otimes h_1 h_2 \\ &= (g_1 \otimes h_1) \cdot (g_2 \otimes h_2) = \alpha(g_1, h_1) \cdot \alpha(g_2, h_2) \end{aligned}$$

et donc α induit un morphisme

$$R(G \times H) \to RG \otimes_R RH,$$

par définition de l'algèbre de groupes. Inversement, les éléments $g \otimes h$ pour $g \in G$ et $h \in H$ engendrent $RG \otimes_R RH$, puisque G (resp. H) est une R-base de RG (resp. RH). Ainsi, l'application

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g, \sum_{h \in H} r_h h \right) \mapsto \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} r_g r_h (g, h)$$

est R-balancée et induit donc un morphisme $\beta : RG \otimes_R RH \to R(G \times H)$. Il est clair que β est la réciproque de α, et ceci achève la démonstration. □

Lemme 6. *Soient R un anneau commutatif et A, B deux R-algèbres. Si M est un A-module et si N est un B-module, alors $M \otimes_R N$ est un $A \otimes_R B$-module.*

Démonstration. D'après le Lemme 1, $M \otimes_R N$ est un A-module. La structure de B-module à gauche sur N est une structure de B^{op}-module à droite sur N. Ainsi, $M \otimes_R N$ est un $A \otimes_R B$-module si et seulement si c'est un A-B^{op}-bimodule, comme on le vérifie facilement. Mais, d'après le Lemme 1, les seules propriétés à vérifier sont que l'action de A à gauche commute avec l'action de B^{op} à droite et que les actions de R sur A et B coïncident. En effet, un $A \otimes_R B$-module a deux structures de R-module : une provenant de A et l'autre provenant de B ; mais comme on a

$$(ar \otimes b) \cdot x = (a \otimes rb) \cdot x,$$

cette dernière assertion est donc claire. De plus, on a

$$a \cdot (m \otimes n) = (am) \otimes n$$

et

$$(m \otimes n) \cdot b = m \otimes (bn),$$

et donc la première assertion est claire également. □

Remarque 2. Cette dernière démonstration peut sembler un peu obscure ; c'est pourquoi on peut aussi démontrer ce Lemme directement en considérant l'action

$$(a \otimes b) \cdot (m \otimes n) := (am \otimes bn).$$

Nous terminons cette annexe par un lemme technique sur les espaces de matrices :

Lemme 7. *Soient K un corps et $n, m \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{M}_n(K) \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \simeq \mathcal{M}_{nm}(K).$$

Démonstration. On définit l'application bilinéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_m(K) & \to & \mathcal{M}_{nm}(K) \\ & & (E^n_{i,j}, E^m_{k,l}) & \mapsto & E^{nm}_{(i-1)m+k,(j-1)m+l} \end{array}$$

où $(E^n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ (resp. $(E^m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq m}$) désigne la base dite canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ (resp. $\mathcal{M}_m(K)$). En d'autres termes,

$$\varphi(A, B) = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

(Voir [3], Définition 3 pour cette illustration). On voit alors que, pour $A, C \in \mathcal{M}_n(K)$ et $B, D \in \mathcal{M}_m(K)$, on a

$$\varphi(AC, BD) = \varphi(A, B)\varphi(C, D)$$

et φ est un morphisme d'algèbres. De plus, on voit que tout élément de la base dite canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ s'écrit $\varphi(E^n_{i,j}, E^m_{k,l})$. Soit $f : \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_m(K) \to P$ une application bilinéaire, avec P un K-espace vectoriel. Pour pouvoir obtenir une application linéaire $\overline{f} : \mathcal{M}_{nm}(K) \to P$ telle que $f = \overline{f} \circ \varphi$, on voit que l'on doit poser

$$\begin{array}{rccc} \overline{f} & : & \mathcal{M}_{nm}(K) & \to & P \\ & & \sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l} E^{nm}_{(i-1)m+k,(j-1)m+l} & \mapsto & \sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l} f(E^n_{i,j}, E^m_{k,l}) \end{array}$$

Réciproquement, si l'on définit $\overline{f}$ comme ceci, on a clairement $\overline{f} \circ \varphi = f$ et la propriété universelle du produit tensoriel (Proposition 1) permet de conclure. □

Remarque 3. Une façon plus élégante (mais peut-être moins évidente) de démontrer le Lemme précédent serait d'écrire

$$\mathcal{M}_n(K) \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \simeq \mathcal{M}_n(K \otimes_K \mathcal{M}_m(K)) \simeq \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_m(K)) \simeq \mathcal{M}_{nm}(K).$$

Références

[1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[2] Kenneth S. Brown, Cohomology of Groups, Springer (1982).

[3] Shaun M. Fallat, *Algebraic Integers and Tensor Product of Matrices*, manuscript, University of Victoria, Canada, pp. 2.

[4] Rolf Farnsteiner, *The Theorem of Wedderburn-Malcev : $H^2(A, N)$ and Extensions*, manuscript, Universität Bielefeld (2005).

[5] Wei Guo Foo, *Derived Functors, Cohomology and Hypercohomology*, mémoire de master 2, Orsay, (2013).

[6] Peter J. Freyd, Abelian Categories : An Introduction to the Theory of Functors, Harper and Row (1964).

[7] Arthur Garnier, *Théorie de De Rham ; Étude cohomologique des formes différentielles sur les variétés lisses*, manuscript, (août 2015).

[8] Paul Garrett, *Homology and Derived Functors*, manuscript, (2011).

[9] Sergei I. Gelfand, Yuri I. Manin, Methods for Homological Algebra, Springer-Verlag Heidelberg (2003).

[10] Alexander Grothendieck, *Sur Quelques Points d'Algèbre Homologique*, 1957.

[11] Peter Hilton, Yel-Chiang Wu, A Course in Modern Algebra, Wiley-Interscience Publication (1974).

[12] Raphael Ho, *Classification of Group Extensions and H^2*, master program memoir, University of Chicago, (2011).

[13] D. Husemoller, Lectures on Cyclic Homology, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1991).

[14] Chris Kottke, Ext, Tor*, and the UCT*, manuscript, Brown University.

[15] Jean-Louis Krivine, Théorie Axiomatique des Ensembles, Cassini (1998), chap. 1, pp. 1-26.

[16] T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer (2001), pp. 25-29.

[17] T. Y. Lam, Lectures on Modules and Rings, Springer (1999), chap. 3.

[18] Serge Lang, Algèbre, Dunod (2004).

[19] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer (1970).

[20] Saunders Mac Lane, Homology, Springer (1975).

[21] Ivan Marin, *Représentation des Groupes*, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne, France (2016).

[22] Ivan Marin, *Théorie des Groupes*, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne, France (2015).

[23] J. P. May, *Notes on* Tor *and* Ext, University of Chicago.

[24] Dragan Miličić, *Lectures on Derived Categories*, University of Utah, Salt Lake City.

[25] Barry Mitchell, Theory of Categories, Academic Press, New York and London (1965).

[26] Daniel Murfet, *Derived Functors*, Lecture Notes, University of Melburne, (2006).

[27] Bodo Pareigis, Kategorien und Funktoren, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH (1969).

[28] Richard S. Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag Heidelberg (1982), chap. 1-4.

[29] María Julia Redondo, *Hochschild Cohomology : Some Methods for Computations*, Resenhas IME-USP 5 (2), 113-137 (2001).

[30] Robert B. Reisel, *A Generalization of the Wedderburn-Malcev Theorem to Infinite Dimensional Algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society 7 (1956), 493-499.

[31] Joseph J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Springer (2009).

[32] Pierre Schapira, *Categories and Homological Algebra*, Université Pierre et Marie Curie, Notes de cours, 2015.

[33] Paul Selick, *Homological Algebra Notes*, Notes de cours, Université de Toronto, 2013.

[34] Romyar Sharifi, *Group and Galois Cohomology*, Notes de cours, University of Arizona.

[35] Evgeny Shinder, *Derived Categories : Lecture 5*, University of Sheffield, Notes de cours, (2013).

[36] Steffen Thaysen, *Hochschild Cohomology*. Mémoire sous la direction de Christoph Schweigert, Universität Hamburg, (2011).

[37] Jean-Louis Verdier, *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes*, Astérisque (1996).

[38] Peter J. Webb, *An Introduction to the Cohomology of Groups*.

[39] Charles A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press (1994).

[40] Alexander Zimmermann, Representation Theory : A Homological Algebra Point of View, Springer (2014).

[41] A Fixpoint of Identity, *Yoneda's lemma and Cayley's theorem*, (2012), (`https://y0o0y.wordpress.com/2012/07/19/yonedas-lemma-and-cayleys-theorem/`).