



Cohomologie équivariante des groupes
topologiques - cas des groupes de Lie
et de leur variété de drapeaux

MÉMOIRE DE MASTER 2

Arthur GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de David Chataur, Daniel Juteau et Karine Sorlin

2017-2018

Pour Delphine...

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités sur les espaces fibrés	8
1.1 Fibrés définis par des groupes topologiques de transformations	8
1.2 Premières notions sur les fibrés principaux	10
1.3 Changements de base et fibrés principaux	12
1.4 Définition des espaces fibrés à groupe structural	13
1.5 Propriétés fonctorielles des espaces fibrés	14
1.6 Espaces fibrés triviaux et localement triviaux	15
1.7 Description des sections d'un G -espace fibré	16
1.8 G -espaces fibrés nombrables sur $B \times [0, 1]$	17
1.9 Le foncteur contravariant k_G	18
1.10 La construction de Milnor	19
2 Introduction à la cohomologie équivariante	28
2.1 Construction de la cohomologie équivariante	28
2.1.1 Construction de Borel	28
2.2 Propriétés élémentaires de H_G^*	29
2.3 Décomposition de Bruhat des variétés de drapeaux complètes	39
2.3.1 Premier exemple : $G = GL_n(\mathbb{C})$	43
2.3.2 Second exemple : $G = K^{\mathbb{C}}$ avec K un groupe de Lie compact connexe	45
2.3.3 Cas de la variété de drapeaux G/B	52
2.3.4 Décomposition cellulaire des variétés de Schubert	57
2.4 Cas des groupes de Lie et des groupes algébriques : tores maximaux	59
2.5 Théorèmes de localisation et conséquences	68
2.6 Appendice : Cohomologie d'un groupe de Lie compact connexe et de son espace classifiant	75
3 Cohomologie T-équivariante des variétés de drapeaux	81
3.1 Construction de la classe fondamentale d'une sous-variété ; cas des variété projectives lisses	82
3.1.1 Classe d'une sous-variété fermée	85
3.2 Classes de Schubert	87
3.3 Descriptions de Schubert, Borel et Goresky-Kottwitz-MacPherson	90

3.3.1	Description de Schubert	90
3.3.2	Description de Borel	91
3.3.3	Description de GKM	92
3.4	Algorithmes de conversion	104
3.4.1	Borel \rightarrow GKM	107
3.4.2	Schubert \rightarrow Borel	107
3.4.3	Schubert \rightarrow GKM	107
3.4.4	GKM \rightarrow Schubert	108
3.4.5	Borel \rightarrow Schubert	108
3.4.6	GKM \rightarrow Borel	109
3.5	Pratique des algorithmes	110
3.6	Constantes de structures	125

Annexe **131**

A	Fibrations de Serre et suite exacte longue d'homotopie	131
B	La suite spectrale homologique de Serre	134
B.1	Préliminaire : la topologie compacte-ouverte	134
B.2	Homologie singulière à coefficients dans un système local	135
B.3	Suite de Serre : la construction de Dress	140
C	La suite spectrale cohomologique de Serre	150
C.1	Cohomologie à coefficients dans un système local et système local cohomologique d'une fibration de Serre	150
C.2	La suite de Serre : dualisation de la construction de Dress	151
C.3	Récapitulatif	157
C.4	Aperçu de la structure multiplicative sur la suite cohomologique	158
C.5	Suites exactes de Gysin et de Wang	159
D	La suite spectrale d'Eilenberg-Moore	161
D.1	Préliminaires : couples exacts, diagrammes en escalier et suites spectrales	161
D.2	Construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore	164
E	Cohomologie du faisceau constant et cohomologie singulière	171
E.1	Préliminaires : résultats techniques sur l'héréditaire paracompacité	171
E.2	Comparaison des cohomologies : cas des espaces héréditairement paracompacts	173
E.3	Généralisation : théorème de Ramanan-Sella	176

Références **179**

Introduction

Le but principal du présent travail est de donner une introduction à la cohomologie équivariante des espaces munis de l'action d'un groupe topologique G . Il s'agit d'une théorie cohomologique permettant de rendre compte de la structure de l'espace X en question, mais contenant aussi des informations sur la manière dont G agit sur X . Une série d'exemples particulièrement importants est issue des groupes de Lie. Plus précisément, lorsque l'on a un groupe de Lie compact connexe K , muni d'un tore maximal T , on dispose de la *variété de drapeaux* K/T , sur laquelle T agit de façon naturelle et on peut étudier cette action via la cohomologie T -équivariante de K/T . Ce mémoire se penche donc sur la construction et les propriétés élémentaires générales de la cohomologie équivariante, ainsi que sur le cas particulier des groupes de Lie et de leur variété de drapeaux.

Trois résultats remarquables rythmeront notre exposé. Le premier concerne la notion d'*équivariante formalité*, dégagée par Goresky-Kottwitz-MacPherson en 1998 (voir [37]). Celle-ci est intéressante car elle englobe beaucoup de cas d'actions topologiques et, en particulier, le cas de la variété de drapeaux. Le théorème que nous démontrerons est le suivant

Théorème 0.0.1. (2.4.18)

Soient G un groupe de Lie compact connexe et X un G -espace. On suppose que la cohomologie rationnelle de X est de dimension finie en tout degré et que X est connexe par arcs. On considère également l'espace fibré $\omega_G[X] = (X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} B_G)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La suite spectrale de Leray-Serre associée à $\omega_G[X]$

$$E_{p,q}^2 = H^p(B_G, H^q(X)) \implies H_G^{p+q}(X)$$

dégénère en deuxième page.

ii) X est équivariamment formel, i.e. on a un isomorphisme de $H^(B_G)$ -modules :*

$$H_G^*(X) \simeq H^*(B_G) \otimes H^*(X).$$

iii) Le $H^(B_G)$ -module $H_G^*(X)$ est libre.*

iv) Le morphisme ι^ est un épimorphisme.*

De plus, sous une de ces hypothèses, le morphisme π^ est un monomorphisme.*

Un deuxième outil fondamental de cohomologie équivariante est le *principe de localisation*. Il s'agit de comparer la cohomologie équivariante d'un G -espace X avec celle de ses points fixes. En fait, modulo localisation, elles sont isomorphes ; plus précisément, on prouvera le

Théorème 0.0.2. (Localisation de Borel-Atiyah-Segal-Hsiang, 2.5.8)

Soient G un groupe de Lie compact agissant sur un espace paracompact X , de dimension cohomologique finie, $R := H^(B_G)$ et $S \subset Z(R)$ un système multiplicatif et $s \in S$. Posons*

$$X^S := \{x \in X ; S \cap \ker(R \rightarrow H^*(B_{G_x})) = \emptyset\}.$$

Alors, le localisé de la restriction est un isomorphisme de R -modules

$$S^{-1}H_G^*(X) \xrightarrow{\simeq} S^{-1}H_G^*(X^s).$$

De plus, si X ne possède qu'un nombre fini de types d'orbites, alors on a un isomorphisme

$$S^{-1}H_G^*(X) \xrightarrow{\simeq} S^{-1}H_G^*(X^S).$$

Dans le cas où l'action est équivariamment formelle, ce théorème possède un corollaire particulièrement intéressant, qui nous sera utile dans l'étude de la variété de drapeaux K/T , puisqu'il nous permettra de donner une description combinatoire explicite de la cohomologie équivariante $H_T^*(K/T)$, due à GKM. Il s'agit du résultat suivant

Corollaire 0.0.3. (2.5.12)

Soit M une variété lisse compacte connexe sur laquelle agit un tore compact T . Supposons l'action équivariamment formelle et notons $\iota_M : M^T \hookrightarrow M$ l'inclusion canonique. Alors, la restriction

$$\iota_M^* : H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T)$$

est injective.

Enfin, dans le cas de la variété de drapeaux K/T , on a le groupe de Weyl W associé au système de racines de T et K . Nous verrons que l'on peut, pour chaque $w \in W$, construire une classe de cohomologie équivariante $\mathcal{X}_w \in H_T^*(K/T)$, appelée *classe de Schubert*. Ces classes permettent de décomposer $H_T^*(K/T)$ comme suit :

Théorème 0.0.4. (3.2.3)

En notant $R := H^*(B_T)$, on a un isomorphisme de R -modules

$$H_T^*(K/T, \mathbb{Q}) \simeq \bigoplus_{w \in W} R \langle \mathcal{X}_w \rangle.$$

Ceci sera notre point de départ dans l'étude de $H_T^*(K/T)$. Ce dernier espace étant canoniquement muni d'une structure de R -algèbre, il est naturel de se demander quelle est le comportement du cup-produit sur $H_T^*(K/T)$, ce que nous étudierons. Signalons que nous ne démontrerons complètement que le cas ordinaire de ce résultat ; le cas équivariant sera seulement décrit succinctement.

Nous décomposons notre travail en plusieurs parties. En premier lieu, nous verrons que la construction de la cohomologie équivariante présente déjà quelques subtilités. Par exemple, pour obtenir une cohomologie de l'espace X tenant compte de l'action du groupe G , on serait tenter de définir la cohomologie équivariante $H_G^*(X, R)$ à coefficients dans l'anneau R comme la cohomologie ordinaire du quotient X/G . Cependant, nous verrons que ceci n'est pas satisfaisant ; en prenant le quotient, on perd trop d'information sur la topologie de X . Pour remédier à cela, nous emploierons la définition de Borel, datant de 1959, utilisant une construction (due à Milnor en 1956) d'espace fibré *universel* attaché à un groupe topologique G donné. Dans la première partie, nous nous attardons donc sur quelques propriétés élémentaires des espaces fibrés, et sur cette construction.

Ensuite, nous construisons la cohomologie équivariante H_G^* et en donnons quelques premières propriétés. Après avoir décrit la *décomposition de Bruhat* d'un groupe de Lie et de sa variété de drapeaux, nous l'utilisons de manière cruciale dans l'étude du comportement cohomologique des groupes de Lie. Ceci débouche en particulier sur la réduction aux tores et sur la localisation. Nous terminons cette partie par une description sommaire de la cohomologie d'un groupe de Lie $H^*(G, \mathbb{Q})$, en analysant sa structure d'*algèbre de Hopf*.

Nous en venons alors à l'étude de la cohomologie T -équivariante de la variété de drapeaux K/T d'un groupe de Lie compact connexe K . Plus précisément, nous construisons les classes de Schubert ordinaires $X_w \in H^*(K/T, \mathbb{Q})$ indexées par le groupe de Weyl. Puis, nous nous inspirons de ceci pour construire les classes de Schubert équivariantes $\mathcal{X}_w \in H_T^*(K/T, \mathbb{Q})$. Par la suite, nous donnons trois descriptions de $H_T^*(K/T)$: celle de Schubert, consistant à écrire une classe de cohomologie dans la base formée des classes \mathcal{X}_w , celle de Borel permettant de voir $H_T^*(K/T)$ comme le quotient d'une algèbre de polynômes et celle de GKM, plus combinatoire et basée sur le *graphe de GKM* du groupe de Weyl. Chacune de ces descriptions possède ses avantages et inconvénient : par exemple, celle de Borel permet de calculer facilement le produit de deux classes dans $H_T^*(K/T)$, quand celle de GKM le permet de façon encore plus efficace et rapide. Cependant, ces deux descriptions font perdre le lien avec la géométrie de K/T et avec les classes de Schubert. C'est pourquoi nous décrivons quelques algorithmes de conversions permettant de passer d'une description à une autre. Nous étudions alors le cas des systèmes de racines irréductibles de rang 2. D'autre part, ces algorithmes permettront également de résoudre le problème des *constantes de structure*, qui consiste à déterminer les $c_{u,v}^w \in R = H^*(B_T)$ pour lesquels on a

$$\forall u, v \in W, \mathcal{X}_u \cup \mathcal{X}_v = \sum_{w \in W} c_{u,v}^w \mathcal{X}_w.$$

Trouver les $c_{u,v}^w$ revient donc à déterminer totalement la structure de R -algèbre de $H_T^*(K/T)$.

Par ailleurs, nous donnons en annexe les résultats importants de topologie algébrique nécessaires et, plus particulièrement, la suite exacte longue d'homotopie d'une fibration de Serre, ainsi que les constructions des suites spectrales de Leray-Serre et d'Eilenberg-Moore. Nous terminons ceci par une comparaison entre la cohomologie singulière et la cohomologie du faisceau constant sur un espace topologique. Plus précisément, nous démontrerons que ces cohomologies coïncident naturellement au-moins dans le cas d'un espace *héréditairement paracompact* et *localement contractile* ; ce qui est le cas des espaces que nous considérons dans ce travail. Ce résultat nous permet de justifier la convention suivante : dans ce travail, **sauf mention explicite du contraire, lorsque l'on parle de la cohomologie d'un espace topologique, nous faisons référence à sa cohomologie singulière**. Ainsi, si l'on préfère travailler avec la cohomologie des faisceaux, plus universelle, on est libre d'appliquer le résultat susdit, et les énoncés donnés ici restent donc inchangés.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement David Chataur, Daniel Juteau et Karine Sorlin pour leur gentillesse, leur disponibilité, leur patience et le secours qu'ils m'ont porté tout au long de cette aventure. Je remercie également infiniment ma famille et ma compagne Delphine pour leur soutien, leur écoute et leur amour...

Première partie

Généralités sur les espaces fibrés

Pour construire la cohomologie équivariante H_G^* , on a besoin d'un peu de théorie générale des G -fibrés (avec G un groupe topologique) et notamment de l'existence d'un G -fibré principal universel $E_G \rightarrow B_G$. On va suivre ici la construction de Milnor (voir [56]) donnée dans [46]. On verra ensuite la construction de Borel.

Pour ce qui suit, on renvoie le lecteur au chapitre 4 de [46].

Définition 1.0.1. On appelle ici *fibré* tout triplet topologique (E, p, B) avec $p : E \rightarrow B$ continue. E est appelé *espace total*, B est la *base* et, pour $b \in B$, $p^{-1}(b)$ est une *fibres*. On notera $\xi = (E, p, B)$ un tel triplet. Un morphisme de fibrés $\varphi : \xi \rightarrow \xi'$ est un couple $\varphi = (f_E, f_B)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f_E} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f_B} & B' \end{array}$$

De plus, si $B = B'$ est $f_B = id_B$, on dit qu'on a un B -morphisme. Les catégories ainsi obtenues sont notées respectivement \mathfrak{Bun} et \mathfrak{Bun}_B .

1.1 Fibrés définis par des groupes topologiques de transformations

Définition 1.1.1. Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie rendant l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (s, t) & \mapsto & st^{-1} \end{array}$$

continue. Autrement dit, c'est un objet en groupes dans la catégorie des espaces topologiques, i.e. c'est un espace topologique G muni d'applications continues $m : G \times G \rightarrow G$, $\iota : G \rightarrow G$ et $e : pt \rightarrow G$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{id \times m} & G \times G \\ m \times id \downarrow & & \downarrow m \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G \times pt & \xrightarrow{id \times e} & G \times G \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow m \\ G & \xrightarrow{=} & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow{id \times \iota} & G \times G \\ \downarrow & & \downarrow \iota \times id & & \downarrow m \\ pt & \xrightarrow{e} & G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

Ce dernier diagramme peut se réécrire plus symétriquement :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G \times G & & \\
 & \nearrow^{id \times \iota} & & \searrow^m & \\
 G \times G & \xleftarrow{\Delta} & G & \xrightarrow{\text{pt}} & G \\
 & \searrow_{\iota \times id} & & \nearrow_m & \\
 & & G \times G & &
 \end{array}$$

Exemple 1.1.2. Les groupes suivants sont naturellement topologiques :

$$\mathbb{R}, \mathbb{R}^\times, GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{C}), O(n, \mathbb{R}), SO(n, \mathbb{R}), U(n), SU(n), Sp(2n, \mathbb{R}), \dots$$

Définition 1.1.3. Si G est un groupe topologique, un G -espace (à droite) est un espace X , muni d'une application continue $\mu : X \times G \rightarrow X$ telle que

$$\begin{array}{ccc}
 X \times G \times G & \xrightarrow{id \times m} & X \times G \\
 \mu \times id \downarrow & & \downarrow \mu \\
 X \times G & \xrightarrow{\mu} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X \times \text{pt} & \xrightarrow{id \times e} & X \times G \\
 \parallel & & \downarrow \mu \\
 X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

i.e. $(x \cdot s) \cdot t = x \cdot (st)$ et $x \cdot 1 = x$. et de même pour une action à gauche $\mu : G \times X \rightarrow X$.

On a une correspondance naturelle entre les deux notions d'action ci-dessus.

Exemple 1.1.4. \mathbb{R}^n est un $GL_n(\mathbb{R})$ -espace à gauche et un $O(n)$ -espace à gauche.

Définition 1.1.5. Une application $h : X \rightarrow Y$ entre G -espaces est un G -morphisme si $h(xs) = h(x)s$ pour tous $x \in X$ et $s \in G$, i.e. le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 X \times G & \xrightarrow{\mu_X} & X \\
 h \times id \downarrow & & \downarrow h \\
 Y \times G & \xrightarrow{\mu_Y} & Y
 \end{array}$$

On note $M_G(X, Y)$ l'ensemble des G -morphisms et on obtient alors la catégorie \mathfrak{Sp}_G des G -espaces.

On a une relation d'équivalence classique

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists s \in G ; x' = xs$$

et on note xG l'orbite de $x \in X$, ainsi que $X \pmod{G} := X/G := \{xG, x \in X\}$. On dispose de la projection canonique $\pi = \pi_X : X \rightarrow X/G$ et on munit X/G de la topologie quotient.

Proposition 1.1.6. *Pour un G -espace X , l'application*

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X \\ x &\mapsto xs \end{aligned}$$

est un homéomorphisme pour tout $s \in G$ et la projection

$$\pi : X \rightarrow X/G$$

est une application continue ouverte.

De ceci, on tire que tout G -espace X détermine un fibré

$$\alpha(X) := (X, \pi, X/G).$$

Si $h \in M_G(X, Y)$, on a $h(xG) \subset h(x)G$ pour tout x et on a donc une application quotient

$$\begin{aligned} \bar{h} : X/G &\rightarrow Y/G \\ xG &\mapsto h(x)G \end{aligned}$$

ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/G & \xrightarrow{\bar{h}} & Y/G \end{array}$$

et on note $\alpha(h) := (h, \bar{h}) : \alpha(X) \rightarrow \alpha(Y)$ le morphisme de fibrés associé.

Proposition 1.1.7. *La collection $\alpha : \mathfrak{Sp}_G \rightarrow \mathfrak{Bun}$ est un foncteur pleinement fidèle.*

Définition 1.1.8. Un fibré $\xi = (X, p, B)$ est un G -fibré s'il existe une structure de G -espace sur X et un homéomorphisme $f : X/G \rightarrow B$ tels que $(id, f) : \alpha(X) \rightarrow \xi$ soit un isomorphisme de fibrés. Autrement dit, on requiert l'existence d'un homéomorphisme $f : X/G \rightarrow B$ tel que $f\pi = p$:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow p & \searrow \pi & \\ B & \xleftarrow[\sim]{f} & X/G \end{array}$$

1.2 Premières notions sur les fibrés principaux

Définition 1.2.1. Un G -espace X est dit *libre* si l'action est libre, c'est-à-dire si chaque stabilisateur est trivial.

Pour un G -espace libre X , on pose

$$X^* := \{(x, x') \in X^2 ; \exists s \in G ; x' = xs\}.$$

Autrement dit, X^* est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X^* & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X/G \end{array}$$

Il existe alors une unique fonction $\tau : X^* \rightarrow G$ telle que

$$\forall (x, x') \in X^*, \quad x\tau(x, x') = x',$$

que l'on nomme *fonction de translation*. Elle vérifie de plus

$$\forall x, x', x'' \in X, \quad \begin{cases} \tau(x, x) = 1 \\ \tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'') \\ \tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1} \end{cases}$$

Définition 1.2.2. Un G -espace X est dit *principal* si c'est un G -espace libre et si la fonction de translation $\tau : X^* \rightarrow G$ est continue.

Un G -fibré *principal* est un G -fibré (X, p, B) tel que le G -espace X est principal.

Exemple 1.2.3. • L'espace produit $B \times G$ est un G -espace, une fois muni de l'action $(b, t) \cdot s := (b, ts)$. C'est un espace principal. En effet, on a

$$((b, t), (b', t')) \in (B \times G)^* \Leftrightarrow b = b'$$

et on a

$$\tau((b, t), (b', t')) = t^{-1}t'.$$

Le G -fibré principal associé $(B \times G, pr_1, B)$ est le fibré produit. On l'appelle le G -fibré *principal produit* (ou *trivial*).

- Soit G un sous-groupe fermé d'un groupe topologique Γ . On a une action par multiplication $\Gamma \times G \rightarrow \Gamma$ et on a $(x, x') \in \Gamma^*$ si et seulement si $x^{-1}x' \in G$, d'où la continuité de $\tau(x, x') = x^{-1}x'$. L'espace de base du G -fibré principal associé est l'ensemble des classes à gauche, Γ/G .
- Soit $G = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_2$ et soit \mathbb{S}^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} , munie de l'action de G donnée par l'antipode. Alors, $(\mathbb{S}^n)^* = \{(x, \pm x), x \in \mathbb{S}^n\}$ et $\tau(x, -x) = -1$, qui est continue (de toute façon il ne peut en être autrement puisque $G = \mathbb{Z}_2$ est discret). Ce \mathbb{Z}_2 -espace principal définit un \mathbb{Z}_2 -fibré principal de base $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Nous rencontrerons à nouveau cet exemple plus tard.

Proposition 1.2.4. Soit $\xi = (X, p, B)$ un G -fibré principal. Alors, ξ est un fibré de fibre G .

Définition 1.2.5. Un morphisme $(u, f) : (X, p, B) \rightarrow (X', p', B')$ entre G -fibré principaux tel que $u : X \rightarrow X'$ soit un G -morphisme est appelé un *morphisme principal*. Si $B = B'$ et $f = id_B$, u est appelé un *B -morphisme principal*.

Remarque 1.2.6. Dans ce cas, puisque $p^{-1}(p(x)) = xG$ et que $f(xG) = u(x)G$, la donnée de u détermine f et donc suffit à définir le morphisme de fibrés.

Comme la composée de morphismes principaux (resp. de B -morphismes principaux) est un morphisme principal (resp. un B -morphisme principal), on peut considérer la catégorie $\mathfrak{Bun}(G)$ des G -fibrés principaux, ainsi que la sous-catégorie $\mathfrak{Bun}_B(G)$ des G -fibrés principaux au-dessus de B . On a deux foncteurs d'oubli canoniques

$$\mathfrak{Bun}_B(G) \rightarrow \mathfrak{Bun}(G) \rightarrow \mathfrak{Bun}.$$

Théorème 1.2.7. *La catégorie $\mathfrak{Bun}_B(G)$ est un groupoïde. C'est-à-dire que tout morphisme dans $\mathfrak{Bun}_B(G)$ est un isomorphisme.*

1.3 Changements de base et fibrés principaux

On rappelle que si on a un fibré $\xi = (X, p, B)$ et $f : B' \rightarrow B$, on en déduit un fibré $f^*(\xi) = (X', p', B')$, où $X' = B' \times_B X$, via le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B X & \longrightarrow & X \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

La propriété d'être un G -fibré (principal) est invariante par changement de base. Plus précisément :

Proposition 1.3.1. *Soit X un G -espace, de fibré associé $\xi = (X, p, B)$. Pour chaque $f : B' \rightarrow B$, l'espace total $X' = B' \times_B X$ de $f^*(\xi) = (X', p', B')$ a une structure naturelle de G -espace et on a un homéomorphisme $g : X'/G \rightarrow B'$ tel que*

$$\begin{array}{ccccc} & & X' & \xrightarrow{f_\xi} & X \\ & \swarrow \pi & & \searrow p' & \downarrow p \\ X'/G & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

De plus, la structure de G -espace sur X' est unique si l'on impose à f_ξ d'être un G -morphisme. Enfin, si ξ est un G -fibré principal, alors $f^(\xi)$ est aussi un G -fibré principal.*

Dans la démonstration de ceci et du théorème qui suit, on a besoin des trois lemmes suivants, pour lesquels on fixe un fibré quelconque $\xi = (E, p, B)$, une application continue $f : B' \rightarrow B$ et $f^*(\xi) = (E', p', B')$:

Lemme 1.3.2. *L'application p' est ouverte dès que p l'est.*

Lemme 1.3.3. *Considérons $f_\xi : E' \rightarrow E$. Alors, pour tout morphisme de fibrés de la forme $(v, f) : \eta \rightarrow \xi$, il existe un unique B' -morphisme $w : \eta \rightarrow f^*(\xi)$ tel que $f_\xi \circ w = v$.*

Lemme 1.3.4. *On a un foncteur*

$$f^* : \mathfrak{Bun}_B \rightarrow \mathfrak{Bun}_{B'}.$$

De plus, pour un B' -morphisme $u : \xi \rightarrow \eta$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & E(f^*(\eta)) & \xrightarrow{f_\eta} & E(\eta) \\
 & f^*(u) \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 E(f^*(\xi)) & \xrightarrow{f_\xi} & E(\xi) & \xrightarrow{u} & E(\eta) \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & B' & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Théorème 1.3.5. *Soient $(v, f) : \eta \rightarrow \xi$ un morphisme de G -fibrés principaux et*

$$\eta \xrightarrow{w} f^*(\xi) \xrightarrow{f_\xi} \xi$$

la factorisation du deuxième lemme ci-dessus. Alors w est un isomorphisme de fibrés principaux au-dessus de $B(\eta)$ et donc η et $f^(\xi)$ sont des G -fibrés principaux isomorphes. Finalement, la collection*

$$f^* : \mathfrak{Bun}_B(G) \rightarrow \mathfrak{Bun}_{B'}(G)$$

est un foncteur.

1.4 Définition des espaces fibrés à groupe structural

Définition 1.4.1. Soient $\xi = (X, p, B)$ un G -fibré principal et F un G -espace à gauche. La relation $(x, y) \cdot s := (xs, s^{-1}y)$ définit une structure de G -espace à droite sur $X \times F$. On considère le quotient

$$X_F := (X \times F) / G$$

et $p_F : X_F \rightarrow B$ la factorisation de la composée $X \times F \xrightarrow{pr_1} X \xrightarrow{p} B$ par la projection $X \times F \rightarrow X_F$:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times F & \xrightarrow{pr_1} & X \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 X_F & \xrightarrow{p_F} & B
 \end{array}$$

i.e. $p_F((x, y)G) = p(x)$ pour tout $(x, y) \in X \times F$. Le fibré $(X_F, p_F, B) =: \xi[F]$ est par définition le G -espace fibré sur B de fibre F (vu comme G -espace), de fibré principal associé ξ . G est appelé le *groupe structural* de l'espace fibré $\xi[F]$.

Exemple 1.4.2. Soit ξ le \mathbb{Z}_2 -fibré principal

$$\begin{array}{c} \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1 \end{array}$$

et soit $F := [-1, 1]$ le \mathbb{Z}_2 -espace à gauche muni de l'action $(\pm 1)t := \pm t$. Alors, l'espace total du \mathbb{Z}_2 -espace fibré $\xi[F]$ est la bande de Möbius. Informellement, on part du fibré principal, on attache le segment $[-1, 1]$ aux deux points de \mathbb{S}^1 au-dessus d'un point de $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{S}^1$ et on fait tourner le segment autour de la base pour obtenir la bande de Möbius.

Remarque 1.4.3. Intuitivement, un G -fibré principal $\xi = (X, p, B)$ consiste en copies de G , une pour chaque point de B , recollées via la topologie de X . Le G -espace fibré associé $\xi[F]$ consiste en copies de F , une pour chaque point de B , recollées via la topologie de X , l'action de G sur X et l'action de G sur F . De manière générale, l'espace total de $\xi[F]$ reflète la "torsion" dans la topologie de X et celle de l'action $G \curvearrowright F$.

Proposition 1.4.4. Soit $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ le G -espace fibré associé au G -fibré principal $\xi = (X, p, B)$ et à la fibre F . Pour tout $b \in B$, la fibre $p_F^{-1}(b)$ est homéomorphe à F .

1.5 Propriétés fonctorielles des espaces fibrés

Soient $\xi = (X, p, B)$, $\xi' = (X', p', B')$ deux G -fibrés principaux, $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ un morphisme principal et F un G -espace à gauche. Le morphisme (u, f) définit un G -morphisme $u \times id_F : X \times F \rightarrow X' \times F$ et en passant au quotient, on obtient $u_F : X_F \rightarrow X'_F$, induisant un morphisme de fibrés $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$.

Définition 1.5.1. Un morphisme de G -espaces fibrés $\xi[F] \rightarrow \xi'[F]$ est un morphisme de fibrés de la forme $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$, où $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ est un morphisme de fibrés principaux. Si $B = B'$ et $f = 1_B$, alors $u_F : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$ est un morphisme d'espaces fibrés au-dessus de B .

Le but ici est d'étudier $\mathfrak{Bun}(G)$ et la catégorie des espaces fibrés de fibre F et de groupe structural G .

Proposition 1.5.2. Les associations $\xi \mapsto \xi[F]$ et $(u, f) \mapsto (u_F, f)$ définissent un foncteur de $\mathfrak{Bun}(G)$ dans la catégorie des espaces fibrés admettant une structure d'espace fibré de fibre F et de groupe structural G .

Remarque 1.5.3. Un morphisme de G -espaces fibrés $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$ est un isomorphisme si et seulement si $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ est un isomorphisme de fibrés principaux.

Proposition 1.5.4. Soient $\xi = (X, p, B)$ un G -fibré principal et $\xi[F]$ un G -espace fibré associé. Pour toute application $f : B' \rightarrow B$, il existe un isomorphisme canonique de fibrés au-dessus de B' , $f^*(\xi[F]) \xrightarrow{g} f^*(\xi)[F]$ tel que le morphisme naturel $f_{\xi[F]} : f^*(\xi[F]) \rightarrow \xi[F]$ se factorise

$$\begin{array}{ccc} f^*(\xi[F]) & \xrightarrow{f_{\xi[F]}} & \xi[F] \\ \downarrow g & \nearrow (f_{\xi})_F & \\ f^*(\xi)[F] & & \end{array}$$

Considérons un fibré $\xi = (X, p, B)$ et $A \subset B$ un sous-ensemble. Puisqu'on a $\xi|_A := \iota^*(\xi)$ où $\iota : A \hookrightarrow B$, de la proposition précédente, on tire le

Corollaire 1.5.5. Soient $\xi[F]$ un G -espace fibré au-dessus de B et $A \subset B$. Alors, on a un A -isomorphisme canonique de fibrés

$$\xi[F]|_A \xrightarrow{\cong} (\xi|_A)[F].$$

1.6 Espaces fibrés triviaux et localement triviaux

Le lecteur aura remarqué que, contrairement à la terminologie usuelle, ce que nous avons appelé jusqu'ici un *espace fibré* n'a aucune raison d'être localement trivial. C'est pourquoi, dans la définition 1.4.1, nous avons insisté sur le mot *G -espace fibré*, la dénomination *espace fibré* étant alors simplement un raccourci. Aussi, dans la suite, ce que nous appellerons *espace fibré* désignera un *espace fibré de fibre F* , au sens usuel; c'est-à-dire un fibré localement isomorphe au fibré produit.

Soient $\xi = (B \times G, pr_1, B)$ le G -fibré principal produit et F un G -espace à gauche. Alors, le G -espace fibré $\xi[F] = (Y, q, B)$ est B -isomorphe au fibré produit $(B \times F, pr_1, B)$. En effet, le morphisme

$$g : \begin{array}{ccc} Y & \rightarrow & B \times F \\ (b, s, y)G & \mapsto & (b, sy) \end{array}$$

Définition 1.6.1. Deux G -fibrés principaux ξ et η sur B sont *localement isomorphes* si tout $b \in B$ admet un voisinage ouvert U tel que $\xi|_U$ et $\eta|_U$ soient U -isomorphes comme fibrés principaux. Deux espaces fibrés $\xi[F]$ et $\eta[F]$ sont *localement isomorphes* si ξ et η le sont.

Définition 1.6.2. Un G -fibré principal ξ sur B est *trivial* (resp. *localement trivial*) si ξ est un G -fibré principal isomorphe (resp. *localement isomorphe*) au G -fibré principal produit. Un G -espace fibré $\xi[F]$ est *trivial* (resp. *localement trivial*) si ξ l'est.

Remarque 1.6.3. La nature est bien faite : par le corollaire 1.5.5, un G -fibré principal ou un G -espace fibré qui est trivial ou localement trivial est aussi trivial ou localement trivial en tant que fibré. Ainsi, par le laïus introductif de cette section, un G -espace fibré localement trivial est un exemple d'espace fibré. Par contre, la réciproque est fausse :

Contre-exemple 1.6.4. On prend $\xi = (X, p, B)$ non trivial (par exemple $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$). Soit $F \neq \text{pt}$ muni de l'action triviale de G . Alors, $\xi[F]$ est un G -espace fibré non trivial mais est trivial de fibre F . En effet, comme on a $(x, y)s = (xs, y)$, il vient

$$X_F = (X \times F) / G \simeq X / G \times F \simeq B \times F$$

et $p_F((x, y)G) = p(x)$ donc $p_F = pr_1$ et donc $\xi[F] = (B \times F, pr_1, B)$ est trivial.

1.7 Description des sections d'un G -espace fibré

Théorème 1.7.1. Soient $\xi = (X, p, B)$ un G -fibré principal, $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ un G -espace fibré associé avec F un G -espace à gauche. En notant $\Gamma(B, \xi[F])$ l'ensemble des sections du fibré $\xi[F]$, on a une correspondance bijective

$$\Gamma(B, \xi[F]) \longleftrightarrow \{ \phi : X \rightarrow F ; \phi(xt) = t^{-1}\phi(x), \forall x \in X, \forall t \in G \},$$

la section associée à $\phi : X \rightarrow F$ est

$$s_\phi(xG) = (x, \phi(x))G \in X_F, \forall xG \in B.$$

Si on fait agir G sur F par $u \cdot g := g^{-1}u$ et si $s \in \Gamma(B, \xi[F])$, alors on a $\phi_s \in M_G(X, F)$ et donc

$$M_G(X, F) \approx \Gamma(B, \xi[F]).$$

Cette observation mène aux corollaires suivants :

Corollaire 1.7.2. Soient $\xi = (X, p, B)$, $\xi' = (X', p', B')$ deux G -fibrés principaux. Tout morphisme de G -fibrés principaux $\xi \rightarrow \xi'$ est de la forme (ϕ_s, f) , pour $s \in \Gamma(B, \xi[F])$. De plus, en utilisant la relation $X_{X'} = X'_X$, on a $f = (p'_X)s$. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{X'} & \xlongequal{\quad} & (X \times X') / G & \xlongequal{\quad} & X'_X \\ \begin{array}{c} \uparrow s \\ \downarrow p_{X'} \end{array} & & & & \downarrow p'_X \\ B & \xrightarrow{\quad f \quad} & & & B' \end{array}$$

Remarque 1.7.3. Ce résultat réduit le problème de l'existence de morphismes principaux $\xi \rightarrow \xi'$ à celui, plus maniable, de l'existence de sections.

Corollaire 1.7.4. Pour un G -fibré principal ξ , les assertions suivantes s'équivalent

- i) Le fibré ξ admet une section,
- ii) Le fibré ξ est isomorphe à $f^*(\eta)$ où η est le fibré produit sur un point et f est l'unique application constante,
- iii) Le fibré ξ est trivial.

1.8 G -espaces fibrés nombrables sur $B \times [0, 1]$

Définition 1.8.1. Un recouvrement ouvert localement fini $(U_i)_{i \in S}$ d'un espace B est *nombrable* s'il existe une partition de l'unité (localement finie) $(u_i)_{i \in S}$ telle que

$$\forall i \in S, \overline{u_i^{-1}([0, 1])} \subset U_i.$$

Par définition, il revient au même d'imposer l'existence de fonctions $u_i : X \rightarrow [0, 1]$ telles que

1. $\text{supp}(u_i) \subset U_i$,
2. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x sur lequel seuls un nombre fini des u_i sont non nulles,
3. $\forall x \in X, \sum_{i \in S} u_i(x) = 1$.

Une telle partition (u_i) est dite *subordonnée* au recouvrement (U_i) . Dans ce cas, le recouvrement ouvert $(u_i^{-1}([0, 1]))$ est un raffinement de (U_i) .

Remarque 1.8.2. On a un résultat classique de topologie générale affirmant qu'un espace séparé est paracompact si et seulement si tout recouvrement ouvert est nombrable.

Définition 1.8.3. Un G -fibré principal ξ sur un espace B est *nombrable* si B admet un recouvrement nombrable (U_i) tel que $\xi|_{U_i}$ soit trivial pour tout i .

Remarque 1.8.4. Tout G -fibré principal nombrable est un espace fibré (i.e. est localement trivial) et tout G -fibré principal localement trivial sur un espace paracompact est nombrable.

Proposition 1.8.5. Soient $f : B' \rightarrow B$ une application continue et ξ un fibré nombrable sur B . Alors $f^*(\xi)$ est un fibré nombrable sur B' .

Lemme 1.8.6. Soit ξ un G -fibré principal sur $B = B_1 \cup B_2$ où $B_1 = A \times [a, c]$ et $B_2 = A \times [c, b]$, $a < c < b$. Si $\xi|_{B_1}$ et $\xi|_{B_2}$ sont triviaux, alors il en est de même de ξ .

Lemme 1.8.7. Posons $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et soit ξ un G -fibré nombrable sur $B \times I$. Alors, il existe un recouvrement nombrable $(U_i)_{i \in S}$ de B tel que, pour tout $i \in S$, $\xi|_{U_i \times I}$ soit trivial.

Théorème 1.8.8. Définissons

$$\begin{aligned} r : B \times I &\rightarrow B \times I \\ (b, t) &\mapsto (b, 1) \end{aligned}$$

et soit $\xi = (E, p, B \times I)$ un G -fibré principal nombrable sur $B \times I$. Il existe alors $g : E \rightarrow E$ tel que $(g, r) : \xi \rightarrow \xi$ soit un morphisme principal.

Corollaire 1.8.9. *Avec les notations du théorème 1.8.8, on a un $(B \times I)$ -isomorphisme entre les G -fibrés principaux ξ et $r^*(\xi)$.*

Remarque 1.8.10. Soient $\xi = (X, p, B)$ un G -fibré principal et W un espace localement compact. Alors la relation $(x, w)s = (xs, w)$ confère à $X \times W$ une structure de G -espace à droite. La translation τ_1 pour $X \times W$ s'écrit $\tau_1((x, w), (x', w)) = \tau(x, x')$ où τ est la translation pour X . La fonction

$$\begin{aligned} \phi : (X \times W)/G &\rightarrow X/G \times W \\ (x, w)G &\mapsto (xG, w) \end{aligned}$$

est alors un homéomorphisme. Nous sommes ici intéressés par le cas $W = I = [0, 1]$

Théorème 1.8.11. *Soit ξ un G -fibré principal nombrable sur $B \times I$. Alors, les fibrés ξ , $(\xi|_{B \times 1}) \times I$ et $(\xi|_{B \times 0}) \times I$ sont G -isomorphes. De plus, si on note $\epsilon_i : B \rightarrow B \times I$ avec $\epsilon_i(b) = (b, i)$, pour $i = 0, 1$, alors $\epsilon_0^*(\xi)$ et $\epsilon_1^*(\xi)$ sont des fibrés B -isomorphes.*

Théorème 1.8.12. *Soient ξ un G -fibré principal nombrable sur B et $f_t : B' \rightarrow B$ une homotopie. Alors, les G -fibrés principaux $f_0^*(\xi)$ et $f_1^*(\xi)$ sont B' -isomorphes.*

1.9 Le foncteur contravariant k_G

Pour chaque espace B , soit $k_G(B)$ l'ensemble des classes d'équivalence de G -fibrés principaux nombrables sur B . On note $\{\xi\}$ la classe de ξ dans $k_G(B)$. Pour une classe d'homotopie $[f] : X \rightarrow Y$, on définit une fonction

$$\begin{aligned} k_G([f]) : k_G(Y) &\rightarrow k_G(X) \\ \{\xi\} &\mapsto \{f^*(\xi)\} \end{aligned}$$

Par le théorème 1.3.5, $\{f^*(\xi)\}$ ne dépend pas du représentant ξ de $\{\xi\}$ choisi et par le théorème 1.8.12, $\{f^*(\xi)\}$ ne dépend pas du représentant f de $[f]$ choisi. Par conséquent, $k_G([f]) : k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$ est bien une fonction et $[f] \mapsto k_g([f])$ est bien définie. Notons \mathfrak{HTop} la catégorie homotopique des espaces topologiques.

Théorème 1.9.1. *Les relations $k_G : \mathfrak{HTop} \rightarrow \mathfrak{Set}$ forment un foncteur contravariant.*

Corollaire 1.9.2. *Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $k_G([f]) : k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$ est une bijection.*

Corollaire 1.9.3. *Si X est contractile, tout G -fibré principal nombrable sur X est trivial.*

Soit $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ un G -fibré principal fixé, nombrable. Pour chaque espace X , on définit une fonction

$$\begin{aligned} \phi_\omega(X) &: [X, B_0] \rightarrow k_G(X) \\ u &\mapsto \{u^*(\omega)\} \end{aligned}$$

où $[X, B_0]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \rightarrow B_0$. Par le théorème 1.8.12, $\phi_\omega(X)$ est bien une fonction.

Proposition 1.9.4. ϕ_ω définit une transformation naturelle

$$\phi_\omega : [-, B_0] \rightarrow k_G$$

entre foncteurs $\mathfrak{H}\mathfrak{Top} \rightarrow \mathfrak{Set}$.

Définition 1.9.5. Un G -fibré principal nombrable $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ est *universel* si $\phi_\omega : [-, B_0] \rightarrow k_G$ est isomorphisme de foncteurs. B_0 est alors appelé l'*espace classifiant* de G .

Proposition 1.9.6. Un G -fibré principal nombrable $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ est universel si et seulement si, pour tout espace X , on a les deux propriétés suivantes

1. Pour tout G -fibré principal nombrable ξ sur X , il existe $f : X \rightarrow B_0$ telle que $\xi \simeq f^*(\omega)$ sur X ,
2. Si $f, g : X \rightarrow B_0$ sont telles que $f^*(\omega) \simeq g^*(\omega)$ sur X , alors f et g sont homotopes.

On a encore une définition concernant l'universalité :

Définition 1.9.7. Un fibré ω est dit *n -universel*, ou *universel pour les dimensions $\leq n$* , dès que $\phi_\omega(X)$ est bijective, pour tout CW-complexe X de dimension au plus n .

1.10 La construction de Milnor

On va maintenant pouvoir construire (et ainsi affirmer l'existence) de G -fibrés universels, en vue de définir la cohomologie équivariante. La construction est celle de John Milnor (voir [56]), détaillée dans [46].

Définition du G -espace E_G : Construisons

$$E_G := G * G * G * \cdots * G * \cdots$$

(pour la définition du joint $X * Y$, voir [17]). Plus précisément, on prend

$$\widetilde{E}_G := \left\{ (x, t) = (x_i, t_i)_{i \geq 0} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} G \times I ; |\{i ; t_i \neq 0\}| < \infty, \sum_{i=0}^{\infty} t_i = 1 \right\},$$

et considérons la relation d'équivalence

$$(x, t) \sim (x', t') \Leftrightarrow \forall i, t_i = t'_i \text{ et } \forall j ; t_j = t'_j > 0, x_j = x'_j$$

et formons le quotient

$$E_G := \widetilde{E}_G / \sim.$$

La classe de (x, t) dans E_G sera notée $\overline{(x, t)} =: \langle x, t \rangle = (t_0 x_0, t_1 x_1, \dots, t_k x_k, \dots)$. On définit une action à droite de G sur E_G :

$$\langle x, t \rangle y := \langle xy, t \rangle, \text{ i.e. } (t_0 x_0, t_1 x_1, \dots,)y = (t_0(x_0 y), t_1(x_1 y), \dots).$$

On met sur E_G une topologie qui en fait un G -espace. Pour ceci, on pose, pour tout $i \geq 0$,

$$t_i : E_G \rightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad x_i : t_i^{-1}(]0, 1]) \rightarrow G$$

$$\langle x, t \rangle \mapsto t_i \quad \quad \quad \langle x, t \rangle \mapsto x_i$$

On a les relations

$$\forall a \in E_G, \forall y \in G, x_i(ay) = x_i(a)y, t_i(ay) = t_i(a),$$

et on munit E_G de la topologie la moins fine rendant continues les $t_i : E_G \rightarrow [0, 1]$ et les $x_i : t_i^{-1}(]0, 1]) \rightarrow G$, où $t_i^{-1}(]0, 1])$ est muni de la topologie induite. Formellement, sur $t_i^{-1}(]0, 1])$, on prend la topologie initiale associée aux $t_i : t_i^{-1}(]0, 1]) \rightarrow [0, 1]$ et aux $x_i : t_i^{-1}(]0, 1]) \rightarrow G$ et on décrète qu'un sous-ensemble $U \subset E_G$ est ouvert si $U \cap t_i^{-1}(]0, 1])$ est ouvert dans $t_i^{-1}(]0, 1])$ pour tout $i \geq 0$ (topologie faible). On dispose alors de la propriété universelle suivante :

Une application $f : X \rightarrow E_G$ est continue si et seulement si $t_i f$ est continue, ainsi que $x_i f : f^{-1}(t_i^{-1}(]0, 1])) \rightarrow G$, pour tout $i \geq 0$.

Chaque $t_i^{-1}(]0, 1]) \times G \rightarrow t_i^{-1}(]0, 1])$ est continue car $t_i(ay) = t_i(a)$ et on a les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} t_i^{-1}(]0, 1]) \times G & \longrightarrow & t_i^{-1}(]0, 1]) \\ x_i \times id \downarrow & & \downarrow x_i \\ G \times G & \xrightarrow{m} & G \end{array}$$

(illustrant les relations $x_i(ay) = x_i(a)y$) et comme G est un groupe topologique, chaque

$$\begin{array}{ccc} t_i^{-1}(]0, 1]) \times G & \longrightarrow & G \\ & \searrow & \nearrow x_i \\ & & t_i^{-1}(]0, 1]) \end{array}$$

est continue, ainsi que $t_i^{-1}(]0, 1]) \times G \rightarrow [0, 1]$, donc par propriété universelle, l'application

$$E_G \times G \rightarrow E_G$$

est continue et donc E_G est un G -espace.

On note le quotient $B_G := E_G / G$ et on a un G -fibré

$$\omega_G := (E_G, p, B_G).$$

C'est la construction de Milnor.

Théorème 1.10.1. *Le G -fibré ω_G est un G -fibré principal nombrable.*

Démonstration. Tout d'abord, ω_G est un G -fibré principal. En effet, l'action de G est libre et, sur $t_i^{-1}(]0, 1])^2 \cap E_G^*$, on a

$$\tau(a, a') = x_i(a)x_i(a')^{-1}.$$

Comme $E_G \subset \bigcup_i t_i^{-1}(]0, 1])$, $\tau : E_G^* \rightarrow G$ est continue et le G -fibré ω_G est donc principal.

Ensuite, puisque $t_i(ay) = t_i(a)$, on peut définir une unique application continue $u_i : B_G \rightarrow]0, 1]$ telle que

$$\begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{t_i} &]0, 1] \\ p \downarrow & \nearrow u_i & \\ B_G & & \end{array}$$

On montre alors que ω_G est trivial sur $V_i := u_i^{-1}(]0, 1]) = p(t_i^{-1}(]0, 1]))$ en définissant une section continue $s_i \in \Gamma(V_i, \omega_G)$ et en utilisant le corollaire 1.7.4. Posons

$$\begin{array}{ccc} s'_i : t_i^{-1}(]0, 1]) & \rightarrow & t_i^{-1}(]0, 1]) \\ a & \mapsto & ax_i(a)^{-1} \end{array}$$

On a

$$s'_i(ay) = ayx_i(ay)^{-1} = ay(x_i(a)y)^{-1} = ax_i(a)^{-1} = s'_i(a).$$

En passant au quotient, on obtient $s_i : V_i \rightarrow t_i^{-1}(]0, 1]) \hookrightarrow E_G$ telle que

$$\begin{array}{ccc} t_i^{-1}(]0, 1]) & \xrightarrow{s'_i} & E_G \\ p \downarrow & \nearrow s_i & \\ V_i & & \end{array}$$

Pour $a \in t_i^{-1}(]0, 1])$, on a $p(a) = p(s'_i(a))$, donc pour tout $b \in V_i$, en notant $b = p(a)$, on a $ps_i(b) = p(s_i(p(a))) = p(s'_i(a)) = p(a) = b$, donc $s_i \in \Gamma(V_i, \omega_G) \neq \emptyset$. Ceci montre que $\omega_G|_{V_i}$ est trivial.

Enfin, pour prouver que ω_G est nombrable, il nous reste à construire une partition de l'unité localement finie $(v_i)_{i \geq 0}$ sur B_G telle que $v_i^{-1}(]0, 1]) \subset V_i = u_i^{-1}(]0, 1])$. Posons

$$w_i : b \mapsto \max \left(0, u_i(b) - \sum_{j < i} u_j(b) \right).$$

Alors, $w_i : B_G \rightarrow [0, 1]$ est continue et $w_i^{-1}(]0, 1]) \subset V_i$. Pour $b \in B_G$, soient $m := \min\{i ; u_i(b) \neq 0\}$ et $n := \max\{i ; u_i(b) \neq 0\}$. Alors, on a $\sum_{m \leq i \leq n} u_i(b) = 1$. Aussi, $u_m(b) = w_m(b)$ et $B_G = \bigcup_i w_i^{-1}(]0, 1])$. Puisque $u_i(b) = 0$ pour tout $i > n$, on a $u_i(b') < \frac{1}{2}$ pour b' tel que $\sum_{0 \leq i \leq n} u_i(b') > \frac{1}{2}$. Notons

$$N_n(b) := \left\{ b' \in B_G ; \sum_{i=0}^n u_i(b') > \frac{1}{2} \right\}.$$

Alors, $N_n(b)$ est un voisinage ouvert de b dans B_G et pour tout $b' \in N_n(b)$, on a $w_i(b') = 0$ pour tout $i > n$. Ainsi, on a

$$\forall i > n, N_n(b) \cap w_i^{-1}(]0, 1]) = \emptyset$$

et le recouvrement ouvert $(w_i^{-1}(]0, 1]))_i$ de B_G est localement fini. On remplace alors w_i par $v_i := \frac{w_i}{\sum_j w_j}$ pour achever la preuve. \square

Remarque 1.10.2. On a des filtrations

$$\begin{aligned} \cdots \subset E_G(n) \subset E_G(n+1) \subset \cdots \subset E_G &= \varinjlim E_G(n) \\ \cdots \subset B_G(n) \subset B_G(n+1) \subset \cdots \subset B_G &= \varinjlim B_G(n) \end{aligned}$$

où $(t_0x_0, t_1x_1, \dots) \in E_G(n)$ si $t_i = 0$ pour tout $i > n$ et $B_G(n) = p(E_G(n))$.

Exemple 1.10.3. 1. $G = \mathbb{Z}_2$: On a $E_{\mathbb{Z}_2}(n) \simeq \mathbb{S}^n$ et l'action de \mathbb{Z}_2 sur \mathbb{S}^n est l'antipode et $B_{\mathbb{Z}_2}(n) = \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, les injections $E_{\mathbb{Z}_2}(n) \hookrightarrow E_{\mathbb{Z}_2}(n+1)$ et $B_{\mathbb{Z}_2}(n) \hookrightarrow B_{\mathbb{Z}_2}(n+1)$ étant les injections naturelles $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ et $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$. On a

$$E_{\mathbb{Z}_2} = \varinjlim \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^\infty \quad \text{et} \quad G_{\mathbb{Z}_2} = \varinjlim \mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty.$$

Le fibré $(\mathbb{S}^{n+1}, p, \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1})$ est alors n -universel et $E_{\mathbb{Z}_2}$ est asphérique.

2. $G = \mathbb{S}^1$: On prend $E_{\mathbb{S}^1}(n) \simeq \mathbb{S}^{2n+1}$ avec action donnée par

$$(z_0, \dots, z_n) e^{i\theta} := (e^{i\theta} z_0, \dots, e^{i\theta} z_n).$$

Alors $B_{\mathbb{S}^1}(n) = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ et les inclusions sont les naturelles $\mathbb{S}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+3}$ et $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$. On a

$$E_{\mathbb{S}^1} = \varinjlim E_{\mathbb{S}^1}(n) = \mathbb{S}^\infty \quad \text{et} \quad B_{\mathbb{S}^1} = \varinjlim B_{\mathbb{S}^1}(n) = \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty.$$

Là aussi, le fibré $(\mathbb{S}^{2n+1}, p, \mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ est $2n$ -universel et $E_{\mathbb{S}^1}$ est également asphérique.

Remarque 1.10.4. Par un théorème de Dold (voir [25], theorem 7.5), un G -fibré principal nombrable $\xi = (E, p, B)$ est universel si et seulement si l'espace total E est contractile. Dans l'exemple ci-dessus, les E_G construits sont asphériques, donc ont de bonnes chances d'être contractiles : on est sur la bonne voie...

Montrons maintenant que le fibré de Milnor ω_G est universel.

Proposition 1.10.5. *Soit $\xi = (E, p, B)$ un G -fibré principal nombrable. Alors, il existe une partition de l'unité dénombrable $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $\xi_{|u_n^{-1}([0,1])}$ soit trivial pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit $(v_i)_{i \in T}$ une partition de l'unité sur B telle que $\xi_{|v_i^{-1}([0,1])}$ soit trivial pour tout $i \in T$. Pour une partie finie $S \subset T$, on définit l'ouvert

$$W(S) := \{b \in B ; v_i(b) > v_j(b), \forall i \in S, \forall j \in T \setminus S\} \subset v_k^{-1}([0,1]), \forall k \in S$$

qui trivialise ξ . Soit $u_S : B \rightarrow [0,1]$ donnée par

$$u_S : b \mapsto \max(0, \min_{i \in S, j \notin S} (v_i(b) - v_j(b))).$$

Alors, $W(S) = u_S^{-1}([0,1])$. Si $S \neq S'$ mais $\text{card}(S) = \text{card}(S')$, alors $W(S) \cap W(S') = \emptyset$ car si $i \in S \setminus S'$ et $j \in S' \setminus S$, on a $v_i(b) > v_j(b)$ pour $b \in W(S)$ et $v_i(b) < v_j(b)$ pour $b \in W(S')$ et ces relations sont incompatibles. Enfin, posons

$$W_m := \bigcup_{\text{card}(S)=m} W(S), \quad w_m : b \mapsto \sum_{\text{card}(S)=m} u_S(b).$$

Alors, $\sum_n w_n(b) \neq 0, +\infty$, $w_m^{-1}(]0, 1]) = \bigcup_S u_S^{-1}(]0, 1]) = \bigcup_S W(S) = W_m$ et soit

$$u_m(b) := \frac{w_m(b)}{\sum_n w_n(b)}.$$

Comme $u_n^{-1}(]0, 1]) = W_n$ et que W_n est une union disjointe, $\xi_{|W(S)}$ est trivial, donc $\xi_{|W_n}$ aussi et $(u_n)_{n \geq 0}$ est la partition de l'unité désirée. \square

Montrons maintenant la condition 1. de la proposition 1.9.6 pour ω_G :

Théorème 1.10.6. *Pour tout G -fibré principal nombrable $\xi = (E, p, B)$, il existe $f : B \rightarrow B_G$ telle que ξ et $f^*(\omega_G)$ soient des G -fibrés principaux B -isomorphes.*

Démonstration. Par le théorème 1.3.5, pour montrer que $f^*(\omega_G)$ et ξ sont isomorphes, il suffit de trouver un G -morphisme $(g, f) : \xi \rightarrow \omega_G$:

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{(g, f)} & \omega_G \\ & \searrow \sim & \nearrow f_{\omega_G} \\ & f^*(\omega_G) & \end{array}$$

Par la Proposition 1.10.5, on peut supposer qu'il existe une partition de l'unité dénombrable $(u_n)_n$ sur B telle que $\xi_{|U_n}$ soit trivial pour tout n , où $U_n = u_n^{-1}(]0, 1])$ et soit $h_n : U_n \times G \rightarrow E(\xi_{|U_n}) \subset E(\xi) = E$ un U_n -isomorphisme. On définit $g : E \rightarrow E_G$ par

$$g(z) = (u_0 p(z)(q_0 h_0^{-1}(z)), \dots, u_n p(z)(q_n h_n^{-1}(z)), \dots)$$

où $q_n = p r_2 : U_n \times G \rightarrow G$. Si, pour un $z \in E$, $h_n^{-1}(z)$ n'est pas défini, alors $u_n p(z) = 0$, donc g est bien définie et continue. En effet, par la propriété universelle de la topologie de E_G , il suffit de montrer que $t_i g$ et $x_i g$ sont continues sur leurs domaines respectifs. Or, $t_i g = u_i p$ est continue et $g^{-1}(t_i^{-1}(]0, 1])) = p^{-1}(V_i)$ donc $x_i g = q_i h_i^{-1}$ sur $p^{-1}(V_i)$, donc est continue et donc g est bien continue. Ensuite, pour $z' = h_n(z)$, on a $h_n^{-1}(z's) = h_n^{-1}(z)s$ donc $g(z's) = g(z)s$ et donc $g : E \rightarrow E_G$ est un G -morphisme. g induit alors $f : B \rightarrow B_G$ par factorisation :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E_G \\ p \downarrow & & \downarrow p_G \\ B & \xrightarrow{f} & B_G \end{array}$$

et $(g, f) : \xi \rightarrow \omega_G$ est un G -morphisme ; d'où le résultat. \square

Posons

$$\begin{cases} E_G^{\text{od}} := \{ \langle x, t \rangle \in E_G ; t_{2i+1} = 0, \forall i \geq 0 \} = \bigcap_{i \geq 0} t_{2i+1}^{-1}(0) \\ E_G^{\text{ev}} := \{ \langle x, t \rangle \in E_G ; t_{2i} = 0, \forall i \geq 0 \} = \bigcap_{i \geq 0} t_{2i}^{-1}(0) \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} B_G^{\text{od}} = p_G(E_G^{\text{od}}) \\ B_G^{\text{ev}} := p_G(E_G^{\text{ev}}) \end{cases}$$

Soient ensuite $I_n := \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ ainsi que

$$\begin{aligned} \alpha_n &: I_n \rightarrow [0, 1] \\ t &\mapsto 2(2^n t - 2^n + 1) \end{aligned}$$

On a $\alpha_n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$ et $\alpha_n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$. On définit ensuite une homotopie

$$\begin{aligned} h_s^{\text{od}} &: E_G \rightarrow E_G \\ \langle x, t \rangle &\mapsto \langle x', t' \rangle \end{aligned}$$

telle que $h_s^{\text{od}}(x, t)y = h_s^{\text{od}}(xy, t)$, où, pour $s \in I_n$,

$$\begin{cases} x'_i := \begin{cases} x_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ x_{n+j} & \text{si } \begin{cases} i = n + 2j - 1, & 0 < j < \infty \\ i = n + 2j, & 0 < j < \infty \end{cases} \end{cases} \\ t'_i := \begin{cases} t_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ \alpha_n(s)t_{n-j} & \text{si } i = n + 2j - 1, \quad 0 < j < \infty \\ (1 - \alpha_n(s))t_{n-j} & \text{si } i = n + 2j, \quad 0 < j < \infty \end{cases} \end{cases}$$

et, pour $s = 1$, on prend $\langle x', t' \rangle := \langle x, t \rangle$. Si $s = 1 - 2^{-n} \in I_n \cap I_{n-1}$, on a

$$\begin{aligned} x'_i &= \begin{cases} x_i & 0 \leq i < n \\ x_{n-1+j} & \begin{cases} i = n + 2(j-1) \\ i = n + 2j - 1 \end{cases} \end{cases} \quad | \quad x''_i = \begin{cases} x_i & 0 \leq i \leq n \\ x_{n+j} & \begin{cases} i = n + 2j - 1 \\ i = n + 2j \end{cases} \end{cases} \\ t'_i &= \begin{cases} t_i & 0 \leq i < n \\ t_{n-1+j} & i = n + 2(j-1) \\ 0 & i = n + 2j - 1 \end{cases} \quad | \quad t''_i = \begin{cases} t_i & 0 \leq i \leq n \\ 0 & i = n + 2j - 1 \\ t_{n+j} & i = n + 2j \end{cases} \end{aligned}$$

$n-1$

n

et alors $\langle x', t' \rangle = \langle x'', t'' \rangle$ et donc h_s^{od} est bien définie et donne

$$\begin{aligned} h^{\text{od}} &: I \times E_G \rightarrow E_G \\ (s, \langle x, t \rangle) &\mapsto h_s^{\text{od}}(\langle x, t \rangle) \end{aligned}$$

Remarque 1.10.7. Pour $s \in I_n$, on a plus explicitement

$$h_s^{\text{od}}(t_0 x_0, \dots, t_k x_k, \dots) = (t_0 x_0, \dots, t_n x_n, \alpha_n(s)t_{n+1}x_{n+1}, (1 - \alpha_n(s))t_{n+1}x_{n+1}, \alpha_n(s)t_{n+2}x_{n+2}, \dots).$$

On voit alors aisément que $t_i h^{\text{od}} : I \times E_G \rightarrow [0, 1]$ est continue, ainsi que $x_i h^{\text{od}} : h^{\text{od}^{-1}}(t_i^{-1}([0, 1])) \rightarrow G$, pour tout i et donc h^{od} est continue. Chaque $h_s^{\text{od}} : E_G \rightarrow E_G$ induit $g_s^{\text{od}} : B_G \rightarrow B_G$, d'où $g^{\text{od}} : I \times B_G \rightarrow B_G$ et $(h_s^{\text{od}}, g_s^{\text{od}}) : \omega_G \rightarrow \omega_G$, ainsi qu'un morphisme principal $(h^{\text{od}}, g^{\text{od}}) : I \times \omega_G \rightarrow \omega_G$. $(h^{\text{od}}, g^{\text{od}})$ réalise une homotopie entre les G -morphisms $(h_0^{\text{od}}, g_0^{\text{od}})$ et 1_{ω_G} . De plus, on a

$$h_0^{\text{od}}(\langle x, t \rangle) = (t_0 x_0, 0, t_1 x_1, 0, t_2 x_2, \dots) \in E_G^{\text{od}}$$

ainsi que $h_0^{\text{od}}(E_G) = E_G^{\text{od}}$ et $g_0^{\text{od}}(B_G) = B_G^{\text{od}}$.

En définissant

$$h_s^{\text{ev}} : E_G \rightarrow E_G \\ \langle x, t \rangle \mapsto \langle x'', t'' \rangle$$

par

$$\begin{cases} x_i'' := \begin{cases} x_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ x_{n+j} & \text{si } \begin{cases} i = n + 2j - 1, & 0 < j < \infty \\ i = n + 2j, & 0 < j < \infty \end{cases} \end{cases} \\ t_i'' := \begin{cases} t_i & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ (1 - \alpha_n(s))t_{n+j} & \text{si } i = n + 2j - 1, \quad 0 < j < \infty \\ \alpha_n(s)t_{n+j} & \text{si } i = n + 2j, \quad 0 < j < \infty \end{cases} \end{cases}$$

et $h_1^{\text{ev}} = 1_{\omega_G}$, on obtient de même une homotopie $(h^{\text{ev}}, g^{\text{ev}})$ entre $(h_0^{\text{ev}}, g_0^{\text{ev}})$ et 1_{ω_G} , avec $h_0^{\text{ev}}(E_G) = E_G^{\text{ev}}$ et $g_0^{\text{ev}}(B_G) = B_G^{\text{ev}}$. Enfin, le fait que $(h_1^{\text{od}}, g_1^{\text{od}}) = (h_1^{\text{ev}}, g_1^{\text{ev}}) = 1$ permet d'invoquer le théorème 1.8.12 pour avoir $(g_0^{\text{od}})^*\omega_G \simeq \omega_G \simeq (g_0^{\text{ev}})^*\omega_G$. Pour résumer, on a prouvé la

Proposition 1.10.8. *Il existe deux homotopies $(h^{\text{od}}, g^{\text{od}})$ (resp. $(h^{\text{ev}}, g^{\text{ev}})$) entre le morphisme $(h_0^{\text{od}}, g_0^{\text{od}})$ (resp. $(h_0^{\text{ev}}, g_0^{\text{ev}})$) et $1_{\omega_G} : \omega_G \rightarrow \omega_G$ telles que*

$$\begin{cases} h_0^{\text{od}}(E_G) = E_G^{\text{od}} \\ g_0^{\text{od}}(B_G) = B_G^{\text{od}} \end{cases} \quad \begin{cases} h_0^{\text{ev}}(E_G) = E_G^{\text{ev}} \\ g_0^{\text{ev}}(B_G) = B_G^{\text{ev}} \end{cases}$$

De plus, les fibrés ω_G , $(g_0^{\text{od}})^*\omega_G$ et $(g_0^{\text{ev}})^*\omega_G$ sont isomorphes.

On peut maintenant montrer que la condition 2. de la proposition 1.9.6 est remplie :

Théorème 1.10.9. *Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow B_G$ telles que $f_0^*(\omega_G) \simeq f_1^*(\omega_G)$, alors f_0 et f_1 sont homotopes.*

Démonstration. Soit $\xi = (E, p, B)$ un G -fibré principal nombrable isomorphe à $f_0^*(\omega_G)$ et $f_1^*(\omega_G)$. Alors, par la Proposition 1.10.8, f_0 est homotope à $g_0^{\text{od}}f_0$ et f_1 est homotope à $g_0^{\text{ev}}f_1$. Par conséquent, quitte à remplacer f_0 par $g_0^{\text{od}}f_0$ et f_1 par $g_0^{\text{ev}}f_1$, on peut supposer que $f_0(X) \subset B_G^{\text{od}}$ et $f_1(X) \subset B_G^{\text{ev}}$. Définissons un G -morphisme $(k, f) : \xi \times I \rightarrow \omega_G$ tel que $f|_{X \times 0} = f_0$ et $f|_{X \times 1} = f_1$. Posons $f_j^*(\omega_G) := (E_j, p_j, X)$ pour $j = 0, 1$:

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{g_0} & E_G \\ p_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f_0} & B_G \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g_1} & E_G \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f_1} & B_G \end{array}$$

et

$$(\varphi_j, 1_X) : \xi \xrightarrow{\sim} f_j^*(\omega_G).$$

Posons aussi, pour $z \in E$,

$$\begin{cases} t_n(z) = \begin{cases} t_n(g_1\varphi_1(z)) & \text{si } n \text{ impair} \\ t_n(g_0\varphi_0(z)) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \\ x_n(z) = \begin{cases} x_n(g_1\varphi_1(z)) & \text{si } n \text{ impair} \\ x_n(g_0\varphi_0(z)) & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \end{cases}$$

de telle sorte que

$$\begin{cases} g_0\varphi_0(z) = (t_0(z)x_0(z), 0, t_2(z)x_2(z), 0, \dots) =: k(z, 0) \\ g_1\varphi_1(z) = (0, t_1(z)x_1(z), 0, t_3(z)x_3(z), \dots) =: k(z, 1) \end{cases}$$

On prolonge ceci à $E \times I$:

$$\begin{aligned} k &: E \times I \rightarrow E_G \\ (z, s) &\mapsto ((1-s)t_0(z)x_0(z), st_1(z)x_1(z), (1-s)t_2(z)x_2(z), \dots) \end{aligned}$$

Pour $y \in G$, on a $k(z, sy) = k(z, s)y$, donc k induit

$$f : X \times I \rightarrow B_G$$

et un morphisme de fibrés

$$(k, f) : \xi \times I \rightarrow \omega_G$$

vérifiant, pour $p(z) = x$,

$$f(x, 0) = p_G(k(z, 0)) = p_G(g_0\varphi_0(z)) = f_0p_0\varphi_0(z) = f_0(p(z)) = f_0(x),$$

donc $f(-, 0) = f_0$ et de même, $f(-, 1) = f_1$. Ainsi, $f : X \times I \rightarrow B_G$ est une homotopie entre f_0 et f_1 , ce qui achève la démonstration. \square

Ainsi, par la proposition 1.9.6, le fibré de Milnor ω_G est universel. En somme, on a prouvé :

Théorème 1.10.10. (*Théorème de Milnor*)

Tout groupe topologique G admet un G -fibré principal nombrable universel $\omega_G = (E_G, p_G, B_G)$.

Exemple 1.10.11. Si $G = \mathbb{Z}_2$ ou $G = \mathbb{S}^1$, on a $E_G = \mathbb{S}^\infty$. Rappelons que le théorème de Dold ([25], thm 7.5) affirme qu'un G -fibré principal nombrable est universel si et seulement si son espace total est contractile. Or, \mathbb{S}^∞ est contractile. En effet, c'est un CW-complexe (avec une n -cellule pour tout $n \geq 0$), par le théorème de Whitehead (voir [29], théorème 7.21 ou [39], theorem 4.5), il suffit qu'il soit asphérique (i.e. que tous ses groupes d'homotopie soient triviaux) et par le théorème de Hurewicz (voir [29], théorème 7.18 ou [39], theorem 4.32 et corollary 4.33), il suffit que son homologie singulière soit triviale. Or, si $n \geq 1$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc à la limite (voir [39], proposition 3.33 et section 3.F), on obtient

$$\mathbb{S}^\infty = \varinjlim \mathbb{S}^n \Rightarrow H_k(\mathbb{S}^\infty) = \varinjlim H_k(\mathbb{S}^n) = 0, \forall k > 0,$$

donc \mathbb{S}^∞ est bien contractile. Ainsi, les fibrés

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \text{et} & \mathbb{S}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S}^\infty & & \mathbb{S}^\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{RP}^\infty & & \mathbb{CP}^\infty \end{array}$$

sont bien des fibrés universels pour \mathbb{Z}_2 et \mathbb{S}^1 , respectivement.

Exemple 1.10.12. On peut donner plus explicitement l'espace E_G dans le cas où G est un groupe de Lie compact (voir [64], Proposition 3.1) ou un groupe algébrique.

Supposons que G soit un groupe de Lie compact. Par le corollaire 4.6.5 de [28], il existe une représentation linéaire fidèle $G \hookrightarrow GL(V)$ avec V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Si G est un groupe algébrique, par [60], Chapter 3, §6, Theorem 8, il existe une représentation rationnelle fidèle $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ et on peut remplacer $V_{n,k}$ dans ce qui suit par l'espace des familles libres à n vecteurs de \mathbb{C}^k . Ainsi, il suffit de traiter le cas où G est un groupe de Lie compact. Puisque G est compact, on peut supposer qu'on a un plongement $G \hookrightarrow U(n)$. Par le théorème 4.3 de [10], si on a un fibré principal universel $E_{U(n)} \rightarrow B_{U(n)}$, le fibré $E_{U(n)} \rightarrow E_{U(n)}/G$ en sera un pour G (il est universel en vertu du théorème de Dold). Il reste donc à trouver un espace contractile $E_{U(n)}$ sur lequel $U(n)$ agit librement.

Soit

$$F_n(\mathbb{C}^k) =: V_{n,k}(\mathbb{C}) =: V_{n,k}$$

l'espace des familles orthonormales de n vecteurs de \mathbb{C}^k (variété de Stiefel) et soit

$$Gr_{n,k} = Gr_{n,k}(\mathbb{C})$$

l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension n de \mathbb{C}^k (variété de Grassmann, ou grassmannienne). Le groupe $U(n)$ agit librement sur $V_{n,k}$ et on a

$$V_{n,k} / U(n) \simeq Gr_{n,k}.$$

On peut supposer $n \geq 2$ et on a un espace fibré de fibre $V_{n-1,k-1}$:

$$\begin{array}{ccc} V_{n,k} & \rightarrow & \mathbb{S}^{2k-1} \\ (e_1, \dots, e_n) & \mapsto & e_n \end{array}$$

ainsi que la suite exacte longue d'homotopie

$$\dots \longrightarrow \pi_{p+1}(\mathbb{S}^{2k-1}) \longrightarrow \pi_p(V_{n-1,k-1}) \longrightarrow \pi_p(V_{n,k}) \longrightarrow \pi_p(\mathbb{S}^{2k-1}) \longrightarrow \dots$$

et si $p < 2k - 2$, alors $\pi_p(\mathbb{S}^{2k-1}) = \pi_{p+1}(\mathbb{S}^{2k-1}) = 0$ et donc $\pi_p(V_{n-1,k-1}) = \pi_p(V_{n,k})$. Ensuite, si $k > \frac{1}{2}p + n - 1$, alors $p < 2k - 2$ et alors

$$\pi_p(V_{n,k}) = \pi_p(V_{n-1,k-1}) = \dots = \pi_p(V_{1,k-n+1}) = \pi_p(\mathbb{S}^{k-n})$$

et ce dernier groupe est trivial dès que $k > n + p$. Posons alors

$$V_{n,\infty} := \varinjlim_k V_{n,k}.$$

Si on a une application continue $\gamma : \mathbb{S}^p \rightarrow V_{n,\infty}$, comme \mathbb{S}^p est compact, $\gamma(\mathbb{S}^p) \subset V_{n,k}$ pour un certain $k \gg 0$ et si k est assez grand, alors $\pi_p(V_{n,k}) = 0$, donc $[\gamma] = 0$ et on en déduit que $\pi_p(V_{n,\infty}) = 0$ pour tout $p \geq 1$, i.e. $V_{n,\infty}$ est asphérique. Par ailleurs, l'action de $U(n)$ sur $V_{n,\infty}$ est libre et les espaces $V_{n,k}$ et $Gr_{n,k}$ sont des CW -complexes. On peut en outre choisir une décomposition cellulaire telle que celle de $V_{n,k+1}$ (resp. $Gr_{n,k+1}$) soit induite par celle de $V_{n,k}$ (resp. $Gr_{n,k}$), donc $V_{n,\infty}$ est un CW -complexe et par le théorème de Whitehead, $V_{n,\infty}$ est contractile, donc $E_{U(n)} := V_{n,\infty}$ convient et $B_{U(n)} = E_{U(n)} / U(n) \simeq Gr_{n,\infty} := \varinjlim Gr_{n,k}$.

Deuxième partie

Introduction à la cohomologie équivariante

2.1 Construction de la cohomologie équivariante

Nous allons introduire ici la cohomologie équivariante. Grossièrement parlant, il s'agit d'une théorie cohomologique permettant de retranscrire le comportement de l'action d'un groupe topologique sur un espace donné. Donnons d'abord une motivation pour l'introduction d'une telle théorie, que l'on trouvera dans [71]. Pour ce qui concerne cette section et la suivante, on pourra se référer à [54], [47] et [64].

Supposons que l'on ait une action topologique $G \curvearrowright X$. Un premier candidat pour la cohomologie équivariante $H_G^*(X)$ serait de prendre $H_G^*(X) := H^*(X/G)$. Malheureusement, ceci n'est pas une bonne idée car on perd trop d'information sur l'action. Par exemple, si on fait agir $G = \mathbb{S}^1$ sur $X = \mathbb{S}^2$ par rotation autour de l'axe z , alors $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1 \simeq [-1, 1]$ est contractile, donc n'a pas de cohomologie supérieure, mais l'action n'est pas triviale. Pour que le quotient X/G se comporte bien, il faut que l'action soit libre, ce qui n'est pas le cas ici. C'est là l'intérêt d'introduire l'espace E_G , sur lequel l'action de G est libre. L'action $g \cdot (e, x) := (eg^{-1}, gx)$ est libre sur $E_G \times X$, quelle que soit l'action de G sur X et comme E_G est contractile, $E_G \times X$ a le même type d'homotopie que X et on peut donc poser

$$H_G^*(X) := H^*((E_G \times X)/G).$$

Nous allons formaliser ceci.

2.1.1 Construction de Borel

Soient G un groupe topologique et X un G -espace (disons à gauche). Considérons un G -fibré universel $\omega_G := (E_G, p_G, B_G)$. On définit une action $G \curvearrowright E_G \times X$ par $g \cdot (e, x) := (eg^{-1}, gx)$. Alors, $X_E := E_G \times X$ est un G -espace libre et soit

$$X_G := X_E / G = (E_G \times X) / G =: E_G \times_G X.$$

On obtient un G -fibré principal $X_E \xrightarrow{\pi} X_G$ de fibre G , ainsi qu'un espace fibré $\omega_G[X] = (X_G, p_X, B_G)$ dont la fibre est X (voir la proposition 1.4.4). Ce fibré est la *construction de Borel* associée à $G \curvearrowright X$.

Définition 2.1.1. Pour un anneau R et une action topologique $G \curvearrowright X$, on définit la *cohomologie équivariante de X à coefficients dans R* par

$$H_G^*(X, R) := H^*(X_G, R) = H^*(E_G \times_G X, R).$$

À première vue, il semble que cette définition dépende du fibré universel ω_G . En fait, il n'en est rien :

Proposition 2.1.2. *La cohomologie $H^*(X_G)$ ne dépend pas du G -fibré principal universel ω_G choisi.*

Démonstration. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.3. *Soit $F = \pi^{-1}(b) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ un espace fibré avec F contractile (où $b = \pi(e)$). Alors, on a un isomorphisme linéaire*

$$\pi^* : H^*(B) \rightarrow H^*(E).$$

Démonstration. Comme F est contractile, il est asphérique et par la suite exacte longue d'homotopie, on a que $\pi_* : \pi_n(E, e) \rightarrow \pi_n(B, b)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 1$ (et une bijection pour $n = 0$), donc π est une équivalence faible d'homotopie et d'après [39], Proposition 4.21), π préserve donc la cohomologie. \square

Maintenant, si $\omega'_G = (E'_G, p'_G, B'_G)$ est un autre G -fibré principal universel, alors les projections

$$(E'_G \times E_G \times X) / G \xrightarrow{\pi} E_G \times_G X \quad \text{et} \quad (E'_G \times E_G \times X) / G \xrightarrow{\pi'} E'_G \times_G X$$

sont des espaces fibrés de fibres respectives E'_G et E_G , qui sont contractiles, donc le Lemme donne

$$H^*(E_G \times_G X) \simeq H^*((E'_G \times E_G \times X) / G) \simeq H^*(E'_G \times_G X),$$

d'où le résultat. \square

Remarque 2.1.4. On a la suite spectrale de Serre associée à l'espace fibré $X \rightarrow X_G \rightarrow B_G$

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, \underline{H^q(X, R)}) \implies H_G^{p+q}(X, R).$$

Cette suite spectrale nous servira un peu plus tard. Nous l'appellerons occasionnellement la *suite spectrale de Borel*. Remarquons que si G est connexe, alors B_G est simplement connexe et cette suite spectrale se réécrit alors

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, H^q(X, R)) \implies H_G^{p+q}(X, R).$$

2.2 Propriétés élémentaires de H_G^*

Sauf mention explicite du contraire, toutes les cohomologies intervenant ici seront supposées à coefficients dans un corps commutatif \mathbb{k} .

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de G -espaces, alors on obtient $id \times f : E_G \times X \rightarrow E_G \times Y$ qui passe au quotient $\bar{f} : E_G \times_G X \rightarrow E_G \times_G Y$ et celui-ci induit $\bar{f}^* : H_G^*(Y) \rightarrow H_G^*(X)$, d'où la

Proposition 2.2.1. *H_G^* est un foncteur contravariant $\mathfrak{Sp}_G \rightarrow \mathbb{k}\mathfrak{Alg}$.*

Exemple 2.2.2. • Si $X = \text{pt}$ est un point, alors on a

$$H_G^*(\text{pt}) = H^*(E_G \times \text{pt} / G) = H^*(E_G / G) = H^*(B_G).$$

De plus, comme pt est final dans la catégorie \mathfrak{Sp}_G , pour tout G -espace X , on a un morphisme de \mathbb{k} -algèbres

$$H^*(B_G) = H_G^*(\text{pt}) \rightarrow H_G^*(X),$$

qui confère à $H_G^*(X)$ une structure canonique de $H^*(B_G)$ -module, et même de $H^*(B_G)$ -algèbre. En outre, le morphisme $\bar{f}^* : H_G^*(Y) \rightarrow H_G^*(X)$ est un morphisme de $H^*(B_G)$ -algèbres et donc H_G^* est en fait un foncteur contravariant

$$H_G^* : \mathfrak{Sp}_G \rightarrow_{H^*(B_G)} \mathfrak{Alg}.$$

- En fait, si X est un G -espace contractile, on a que $E_G \times X$ est contractile et comme l'action de G sur $E_G \times X$ est libre, on a encore

$$H_G^*(X) = H^*(E_G / G) = H^*(B_G).$$

- Si $G \simeq (\mathbb{S}^1)^m$ est un tore compact, alors on a un fibré universel

$$(\mathbb{S}^\infty)^m \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^m,$$

donc, puisque $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{k}[\alpha]$, avec $|\alpha| = 2$ (où $|\alpha| = \deg(\alpha)$ désigne le degré de α , voir [39], Theorem 3.12), il vient

$$H^*(B_G, \mathbb{k}) = H_G^*(\text{pt}, \mathbb{k}) = H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^m, \mathbb{k}) = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m],$$

où $\deg(x_i) = 2$ pour tout $1 \leq i \leq m$; et ce en vertu du théorème de Künneth (on utilise ici le fait que \mathbb{k} est un corps). Cet exemple montre en particulier qu'une variété de dimension n peut avoir des H_G^k non nuls, même si $k > n$.

Proposition 2.2.3. *Si l'action $G \curvearrowright X$ est triviale, alors on a un isomorphisme d'anneaux*

$$H_G^*(X) \simeq H^*(B_G) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(X) \simeq H_G^*(\text{pt}) \otimes H^*(X).$$

Démonstration. Ceci découle directement du théorème de Künneth appliqué au produit

$$E_G \times_G X = (E_G \times X) / G \simeq E_G / G \times X = B_G \times X.$$

□

Remarque 2.2.4. Si $G = 1$ est trivial, alors $\text{pt} \rightarrow \text{pt}$ est un fibré principal universel, donc

$$H_G^*(X) = H^*\left((\text{pt} \times X) / G\right) = H^*(\text{pt} \times X) = H^*(X),$$

et on retrouve la cohomologie usuelle de X .

Proposition 2.2.5. *Si on a une action libre $G \curvearrowright X$, alors*

$$H_G^*(X) \simeq H^*(X/G).$$

Démonstration. Le quotient X/G nous donne une fibration de Serre à fibre contractile

$$E_G \hookrightarrow E_G \times_G X \rightarrow X/G,$$

et on a déjà vu (voir Lemme 2.1.3) que ceci entraîne $H^*(E_G \times_G X) \simeq H^*(X/G)$. \square

Un diagramme

Nous allons maintenant explorer rapidement les propriétés fonctorielles de H_G^* par rapport à l'espace mais aussi au groupe G considéré. On pourra consulter [44], Chapter III, §1.A.

Soient G, K deux groupes topologiques et $h : G \rightarrow K$ un morphisme (continu), ainsi que $\omega_G = (E_G, p_G, B_G)$ et $\omega_K = (E_K, p_K, B_K)$ deux fibrés universels. On a une action à droite de G sur $E_G \times K$ donnée par $(e, x) \cdot g = (eg, h(g^{-1})x)$ et on fait agir K sur $E_G \times_G K$ via $((e, x)G) \cdot k := (e, xk)G$ (on notera les orbites $(e, x)G =: e *^G x$) et on obtient que $\omega_G[K] = (E_G \times_G K, p, B_G)$ est un K -fibré principal et comme ω_K est universel, on obtient $B_h : B_G \rightarrow B_K$ telle que $\omega_G[K] \simeq B_h^*(\omega_K)$ et soit E_h la composée

$$E_h : E_G \hookrightarrow E_G \times K \twoheadrightarrow E_G \times_G K \rightarrow E_K.$$

On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{E_h} & E_K \\ p_G \downarrow & & \downarrow p_K \\ B_G & \xrightarrow{B_h} & B_K \end{array}$$

Pour obtenir ce carré, on peut aussi partir des constructions de Milnor et poser

$$\begin{array}{ccc} E_G^{\text{Milnor}} & \rightarrow & E_K^{\text{Milnor}} \\ (t_0 x_0, \dots, t_k x_k, \dots) & \mapsto & (t_0 h(x_0), \dots, t_k h(x_k), \dots) \end{array}$$

et utiliser l'universalité de ω_K et ω_G pour obtenir un morphisme (ou plutôt une application h -équivariante i.e. vérifiant $f(gx) = h(g)f(x)$)

$$E_h : E_G \rightarrow E_G^{\text{Milnor}} \rightarrow E_K^{\text{Milnor}} \rightarrow E_K$$

et prendre $B_h : B_G \rightarrow B_K$ par factorisation.

De plus, pour tout G -espace X , on a clairement un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E_G & \longleftarrow & E_G \times X & \longrightarrow & X \\ p_G \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ B_G & \xleftarrow{\pi_1} & X_G & \xrightarrow{\pi_2} & X/G \end{array}$$

Donc, si Y est un K -espace, si $h : G \rightarrow K$ et $f : X \rightarrow Y$ est h -équivariante, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
E_G & \longleftarrow & E_G \times X & \longrightarrow & X \\
\downarrow p_G & \searrow E_h & \downarrow & \searrow E_h \times f & \downarrow & \searrow f \\
& & E_K & \longleftarrow & E_K \times Y & \longrightarrow & Y \\
& & \downarrow p_K & & \downarrow & & \downarrow \\
B_G & \longleftarrow & X_G & \longrightarrow & X/G & \longrightarrow & Y/K \\
& \searrow B_h & \downarrow & \searrow f_h & \downarrow & \searrow \bar{f} & \downarrow \\
& & B_K & \longleftarrow & Y_K & \longrightarrow & Y/K
\end{array}$$

Tout ceci est donc fonctoriel et on a un *foncteur de cohomologie équivariante* :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (G\text{-espace } X) & \mapsto (H_G^*(X) = H^*(X_G)) \\ (X \xrightarrow{f} Y, h\text{-equivariante}) & \mapsto (f_h^* : H_K^*(Y) \rightarrow H_G^*(X)) \end{array} \right.$$

Exemple 2.2.6. • Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G , alors on a un isomorphisme

$$H_G^*(G/H, \mathbb{k}) \simeq H^*(B_H, \mathbb{k}).$$

En effet, G/H est naturellement un G -espace et on a un homéomorphisme

$$\begin{array}{ll} (E_G \times G/H) / G & \rightarrow E_G/H \\ G(x, gH) & \mapsto Hg^{-1}x \end{array}$$

d'inverse $Hx \mapsto G(x, H)$. Comme G est un groupe de Lie, $G \rightarrow G/H$ est un H -fibré principal (voir [10], Theorem 4.3). Ainsi, $(E_G, \bar{p}_G, E_G/H)$ est un H -fibré principal universel, on peut donc prendre pour classifiant $B_H = E_G/H$, d'où

$$H^*(B_H) = H^*(E_G/H) \xrightarrow{\sim} H^*(E_G \times_G G/H) = H_G^*(G/H).$$

De plus, si on note $q : E_G/H \rightarrow B_G$, $Hx \mapsto p_G(x)$, alors $q^* : H^*(B_G) \rightarrow H_G^*(G/H)$ donne à $H_G^*(G/H)$ une structure de $H_G^*(\text{pt})$ -algèbre.

Remarquons qu'en général, le fait que H soit un sous-groupe de G ne permet pas de dire que E_G/H est un classifiant de H . Par exemple (voir [59]), on peut prendre $G = (\mathbb{R}, +)$ est $H = \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas un \mathbb{Q} -fibré principal car sinon, il serait localement trivial et comme \mathbb{R}/\mathbb{Q} est muni de la topologie triviale, il le serait globalement, ce qui est absurde.

• Si H est un sous-groupe fermé et Y un H -espace, alors $G \times_H Y$ existe et on a

$$H_G^*((G \times_H Y) \simeq H^*(E_G \times_G (G \times_H Y)) \simeq H^*(E_G \times_H Y) \simeq H_H^*(Y).$$

Proposition 2.2.7. Soit H un sous-groupe de G et supposons que G/H est contractile. Si X est un G -espace, alors on a

$$H_G^*(X) \simeq H_H^*(X).$$

Démonstration. Soit $\omega_G = (E_G, p, B_G)$ un G -fibré principal universel. L'action restreinte $E_G \circlearrowleft H$ est libre et on a un espace fibré

$$E_G \times_H X \rightarrow E_G \times_G X$$

dont la fibre en $e *^G x \in E_G \times_G X$ est donnée par $p^{-1}(e *^G x) = \{H(f, y), (f, y) \in e *^G x\} = \{H(eg^{-1}, gx), g \in G\}$ et ce dernier espace est homéomorphe, via $H(eg^{-1}, gx) \mapsto gH$, à G/H . On a donc un espace fibré

$$G/H \hookrightarrow E_G \times_H X \rightarrow E_G \times_G X$$

et comme G/H est supposé contractile, par le Lemme 2.1.3, on en tire

$$H_H^*(X) = H^*(E_G \times_H X) \simeq H^*(E_G \times_G X) = H_G^*(X).$$

□

Remarque 2.2.8. • En particulier, si G est contractile, alors $H_G^* = H^*$. On peut aussi le voir directement car dans ce cas, $G \rightarrow \text{pt}$ est un fibré principal universel et on a que $g *^G x \mapsto g^{-1}x$ est un homéomorphisme $E_G \times_G X = G \times_G G \rightarrow X$.

- Si $\mathbb{R}^n \circlearrowleft X$, alors $H_{\mathbb{R}^n}^*(X) = H^*(X)$: cet exemple n'est pas très intéressant...
- Soit le tore algébrique $T := (\mathbb{C}^\times)^d$ et considérons le tore compact maximal $K := (\mathbb{S}^1)^d$. On a

$$T/K \simeq \left(\mathbb{C}^\times / \mathbb{S}^1\right)^d = (\mathbb{R}_+^\times)^d,$$

donc T/K est contractile et par la Proposition 2.2.7, si X est un T -espace, alors on a

$$H_T^*(X) \simeq H_K^*(X).$$

Dans ce cas, on peut rendre les choses plus explicites (pour ceci, voir [47], 1.6, p. 7-8). Posons

$$\begin{cases} E_T^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})^d \\ B_T^n = (\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_K^n = (\mathbb{S}^{2n+1})^d \\ B_K^n = B_T^n = (\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d \end{cases}$$

ainsi que, pour $U \in \{T, K\}$,

$$\begin{cases} E_U^\infty = \varinjlim E_U^n \\ B_U^\infty = \varinjlim B_U^n \end{cases}$$

On a un T -fibré (resp. un K -fibré) principal $E_T^n \rightarrow B_T^n$ (resp. $E_K^n \rightarrow B_K^n$) et un T -fibré universel $E_T^\infty \rightarrow B_T^\infty$ (resp. $E_K^\infty \rightarrow B_K^\infty$). Soit X un T -espace. Alors, on a $X_T = E_T^\infty \times_T X = \varinjlim (E_T^n \times_T X)$ et $X_K = \varinjlim (E_K^n \times_K X)$, donc ([39], Theorem 3F.5), on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall U \in \{T, K\}, H_U^i(X, \mathbb{C}) = \varinjlim H^i(E_U^n \times_U X, \mathbb{C}) = \varinjlim H^i((E_U^n \times X)/U, \mathbb{C}).$$

En particulier,

$$H^i(B_T, \mathbb{C}) = \varinjlim H^i((\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d, \mathbb{C}).$$

Or, comme on a ([39], Theorem 3.12)

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[x] / (x^{n+1}) \quad \text{où} \quad \deg(x) = 2,$$

d'où un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] / (x_1^{n+1}, \dots, x_d^{n+1}) \xrightarrow{\sim} H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d, \mathbb{C}), \quad |x_i| = 2. \quad (1)$$

Si $n \geq 1$, l'isomorphisme de (1) envoie bijectivement $\sum_i \mathbb{C}x_i$ sur $H^2((\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d, \mathbb{C})$ et l'inclusion $\iota_n : (\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d \hookrightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})^d$ induit, pour $n \geq 1$, un isomorphisme $\iota_n^* : H^2((\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})^d, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^2((\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d, \mathbb{C})$ (on peut le voir en utilisant la cohomologie cellulaire, en utilisant le fait que $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cup e_{2(n+1)}$). Ainsi, on a

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \simeq \varinjlim \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] / (x_1^{n+1}, \dots, x_d^{n+1}) = \varinjlim H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^n)^d, \mathbb{C}) = H^*(B_T, \mathbb{C}).$$

Ensuite, si X est un T -espace, l'inclusion $E_K^n = (\mathbb{S}^{2n+1})^d \hookrightarrow (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})^d = E_T^n$ induit

$$\psi_n : E_K^n \times_K X \rightarrow E_T^n \times_T X.$$

On recouvre B_T^n par des ouverts V pour lesquels on a des homéomorphismes $\varphi_V : V \times T \rightarrow p_n^{-1}(V)$ et $\varphi'_V = \varphi_V|_{V \times K} : V \times K \rightarrow (p'_n)^{-1}(V)$. L'image réciproque de V dans $E_K^n \times_K X$ et $E_T^n \times_T X$ s'identifie à $V \times X$ et, sous cette identification, ψ_n est l'identité. ψ_n est donc un homéomorphisme et donc on a un isomorphisme $\varinjlim H^*(\psi_n)$ qui donne

$$H_K^*(X, \mathbb{C}) \simeq \varinjlim H^*(E_K^n \times_K X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim H^*(E_T^n \times_T X, \mathbb{C}) \simeq H_T^*(X, \mathbb{C}).$$

Avant de continuer, rappelons le

Théorème 2.2.9. (Leray-Hirsch, cf. [39], Theorem 4D.1)

Soit $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} B$ un espace fibré et soit R un anneau commutatif. On suppose que

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H^n(F, R)$ est un R -module libre de type fini,
2. Il existe des classes $c_j \in H^{k_j}(E, R)$ telles que $\iota^*(c_j)$ forment une base de $H^*(F, R)$ sur chaque fibre F .

Alors, l'application

$$\begin{aligned} \phi : H^*(B, R) \otimes_R H^*(F, R) &\rightarrow H^*(E, R) \\ \sum_{i,j} b_i \otimes \iota^*(c_j) &\mapsto \sum_{i,j} p^*(b_i) \cup c_j \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $H^*(B, R)$ -modules.

On en déduit (cf [64], Proposition 4.5) :

Proposition 2.2.10. Faisons agir \mathbb{S}^1 sur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ par rotation autour de l'axe vertical. Alors, on a un isomorphisme de $H^*(B_{\mathbb{S}^1})$ -modules :

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{S}^2) \simeq H^*(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^*(\mathbb{S}^2).$$

Avant de regarder la preuve, énonçons le principe de Mayer-Vietoris, version équivariante :

Théorème 2.2.11. (Mayer-Vietoris)

Si le G -espace X s'écrit $X = U \cup V$ avec U et V deux ouverts G -invariants de X , alors on a une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H_G^{n-1}(U \cap V) \longrightarrow H_G^n(X) \longrightarrow H_G^n(U) \oplus H_G^n(V) \longrightarrow H_G^n(U \cap V) \longrightarrow H_G^{n+1}(X) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. Puisque l'application $E_G \times X \rightarrow E_G \times_G X$ est ouverte, on a une décomposition en ouverts $E_G \times_G X = (E_G \times_G U) \cup (E_G \times_G V)$ et on peut appliquer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris à cet espace pour obtenir le résultat. \square

Démonstration. (de la proposition 2.2.10). On a un espace fibré

$$\mathbb{S}^2 \hookrightarrow E_{\mathbb{S}^1} \times_{\mathbb{S}^1} \mathbb{S}^2 \rightarrow B_{\mathbb{S}^1}$$

et comme $H^*(\mathbb{S}^2)$ est de type fini, par le théorème de Leray-Hirsch, il suffit de montrer que $H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{S}^2) \simeq H^*(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^*(\mathbb{S}^2)$ comme \mathbb{C} -espace vectoriel pour avoir le résultat. On a

$$H^*(B_{\mathbb{S}^1}) = H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[x], \quad |x| = 2$$

donc

$$\begin{cases} \dim H^{2k+1}(B_{\mathbb{S}^1}) = 0 \\ \dim H^{2k}(B_{\mathbb{S}^1}) = 1 \end{cases}$$

Soient $N := \{z \in \mathbb{S}^2 ; z_2 > -\frac{1}{2}\}$ et $S := \{z \in \mathbb{S}^2 ; z_3 < \frac{1}{2}\}$. N et S sont contractiles et \mathbb{S}^1 invariants, donc par l'exemple 2.2.2, on a

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(N) \simeq H_{\mathbb{S}^1}^*(S) = H^*(B_{\mathbb{S}^1}).$$

Ensuite, \mathbb{S}^1 agit librement sur $S \cap N$ et le quotient est un segment ouvert, donc par la Proposition 2.2.5, il vient

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(S \cap N) = H^*(S \cap N / \mathbb{S}^1) = H^*(\text{pt}).$$

Par le Théorème 2.2.11, on a une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^{n-1}(N \cap S) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^n(N) \oplus H_{\mathbb{S}^1}^n(S) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^n(N \cap S) \longrightarrow \dots$$

qui se réécrit

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(\text{pt}) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow H^n(B_{\mathbb{S}^1})^2 \longrightarrow H^n(\text{pt}) \longrightarrow H_{\mathbb{S}^1}^{n+1}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \dots$$

Distinguons trois cas, dans lesquels on notera $h_G^n(X) := \dim H_G^n(X)$:

- * $n = 0$: On a $H_{\mathbb{S}^1}^0(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$ donc $h_{\mathbb{S}^1}^0(\mathbb{S}^2) = 1 = \dim(H^0(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^0(\mathbb{S}^2))$.
- * $n = 1$: On a $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H_{\mathbb{S}^1}^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$ donc $h_{\mathbb{S}^1}^1(\mathbb{S}^2) = 0 = \dim\left(\bigoplus_{p+q=1} H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^q(\mathbb{S}^2)\right)$.
- * $n \geq 2$: Comme $H^n(\text{pt}) = 0$, on a $H_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) \simeq H^n(B_{\mathbb{S}^1})^2$, donc

$$h_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) = 2h^n(B_{\mathbb{S}^1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

et

$$\dim\left(\bigoplus_{p+q=n} H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^q(\mathbb{S}^2)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \dim H_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) &= \sum_{p+q=n} \dim H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \dim H^q(\mathbb{S}^2) \\ &= \sum_{p+q=n} \dim(H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes_{\mathbb{C}} H^q(\mathbb{S}^2)) = \dim \left(\bigoplus_{p+q=n} H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes_{\mathbb{C}} H^q(\mathbb{S}^2) \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{\mathbb{S}^1}^n(\mathbb{S}^2) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^q(\mathbb{S}^2) \stackrel{\text{def}}{=} (H^*(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes H^*(\mathbb{S}^2))^n$$

et donc, en tant qu'espaces vectoriels complexes, on a

$$H_{\mathbb{S}^1}^*(\mathbb{S}^2) \simeq H^*(B_{\mathbb{S}^1}) \otimes_{\mathbb{C}} H^*(\mathbb{S}^2),$$

comme souhaité. □

Ce genre de résultat mène à la définition suivante :

Définition 2.2.12. ([64], définition 4.4)

Un G -espace X est dit *équivariamment formel* (equivariantly formal) dès qu'on a un isomorphisme de $H_G^*(\text{pt})$ -modules

$$H_G^*(X) \simeq H^*(B_G) \otimes H^*(X).$$

On verra un peu plus loin d'autres définitions essentiellement équivalentes à celle-ci.

Exemple 2.2.13. • Comme dans la preuve de la Proposition 2.2.10, par le théorème de Leray-Hirsch, si $H^*(X)$ est de dimension finie, pour montrer que X est équivariamment formel, il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $H_G^*(X) \simeq H^*(B_G) \otimes H^*(X)$.

- La Proposition 2.2.10 dit exactement que l'action par rotation horizontale fait de \mathbb{S}^2 un \mathbb{S}^1 -espace équivariamment formel.
- Par la Proposition 2.2.3, si l'action de G sur X est triviale, alors X est équivariamment formel et l'exemple précédent $\mathbb{S}^1 \curvearrowright \mathbb{S}^2$ montre que la réciproque est fautive.

Remarque 2.2.14. Si $K = (\mathbb{S}^1)^d$ est un tore compact et X un K -espace, alors on peut prendre $E_K = (\mathbb{S}^\infty)^d$ et $B_K = (\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^d$. On a une fibration de Serre

$$K \hookrightarrow (\mathbb{S}^\infty)^d \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^d$$

et par la suite exacte longue d'homotopie, on a $\pi_0(B_K) = \pi_1(B_K) = 1$, donc B_K est simplement connexe et comme on a l'espace fibré

$$\omega_K[X] = (X \hookrightarrow X_K \rightarrow B_K)$$

qui est une fibration de Serre, on obtient la suite spectrale de Serre

$$E_2^{p,q} = H^p(B_K, H^q(X, \mathbb{R})) \implies H_K^{p+q}(X, \mathbb{R}).$$

Dans l'article [37] (section 1.2), l'équivariante formalité de X se définit en termes de dégénérescence de cette suite en deuxième page. Nous allons tout de suite comparer ces différentes définitions.

Le lemme suivant concerne l'hypothèse de dimension finie dans le corollaire D.6 de l'Annexe. On pourrait s'en passer mais dans notre cas, c'est vrai.

Lemme 2.2.15. *Si $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ est un espace fibré à base simplement connexe et si les cohomologies de F et B sont de dimension finie en tout degré, alors il en est de même pour E .*

Démonstration. On utilise la suite spectrale de Leray-Serre associée à l'espace fibré :

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F)) \implies H^{p+q}(E).$$

Fixons $n = p + q \geq 0$. Par convergence, on a une filtration finie

$$0 = F^{n+1} \subset F^n \subset \dots \subset F^1 \subset F^0 = H^n(E)$$

et par récurrence, pour montrer que $\dim_{\mathbb{k}} H^n(E) < \infty$, il suffit de montrer que les quotients successifs sont tous de dimension finie. Or on a

$$F^p / F^{p+1} \simeq E_{\infty}^{p,q}$$

donc il suffit de montrer que $\dim E_{\infty}^{p,q} < \infty$ pour tous p et q . Or, pour p, q fixés, il existe r tel que $E_r^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$ (en fait $r > \max(p, q + 1)$ convient) et comme les $E_r^{p,q}$ sont des sous-quotients de $E_2^{p,q}$, il suffit de montrer que $\dim E_2^{p,q} < \infty$. Or, on a $E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F))$. Comme on est sur un corps, on peut utiliser le théorème des coefficients universels pour obtenir

$$\forall p, q \geq 0, H^p(B, H^q(F)) \simeq H^p(B) \otimes_{\mathbb{k}} H^q(F)$$

et ce dernier espace est de dimension finie par hypothèse, comme souhaité. \square

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal, concernant l'action des tores compacts sur des espaces raisonnables :

Théorème 2.2.16. *Soient $T := (\mathbb{S}^1)^d$ un tore compact et X un T -espace. On suppose que la cohomologie de X sur \mathbb{k} est de dimension finie en tout degré et que X est connexe par arcs. On considère également la construction de Borel $\omega_T[X] = (X \xrightarrow{\iota} X_T \xrightarrow{\pi} B_T)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *La suite spectrale de Leray-Serre associée à la construction de Borel :*

$$E_2^{p,q} = H^p(B_T, H^q(X)) \implies H_T^{p+q}(X)$$

dégénère en deuxième page.

ii) *X est équivariamment formel, i.e. on a un isomorphisme de $H^*(B_T)$ -modules :*

$$H_T^*(X) \simeq H^*(B_T) \otimes H^*(X).$$

iii) *$H_T^*(X)$ est un $H^*(B_T)$ -module libre.*

iv) *ι^* est un épimorphisme.*

De plus, sous une de ces hypothèses, le morphisme π^ est un monomorphisme.*

Démonstration. On va montrer $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$.

• Notons provisoirement $H^n := H_T^n(X) = H^n(X_T)$. On a une filtration en \mathbb{k} -espaces vectoriels

$$0 = F^{n+1}H^n \subset F^n H^n \subset \dots \subset F^1 H^n \subset F^0 H^n = H^n$$

avec des isomorphismes

$$F^p H^n / F^{p+1} H^n \simeq E_\infty^{p,n-p} \simeq E_2^{p,n-p},$$

le dernier isomorphisme provenant de la dégénérescence de la suite de Serre. Comme on est en présence d'espaces vectoriels, on a

$$\begin{aligned} H^n &= F^0 H^n \simeq F^1 H^n \oplus \left(F^0 H^n / F^1 H^n \right) \simeq \dots \\ &\simeq \bigoplus_{0 \leq p \leq n} F^p H^n / F^{p+1} H^n \simeq \bigoplus_{0 \leq p \leq n} E_\infty^{p,n-p} \simeq \bigoplus_{p+q=n} E_2^{p,q}. \end{aligned}$$

Comme X est connexe par arcs, on a $E_2^{p,0} = H^p(B_T)$ et comme G est connexe, B_T est simplement connexe et $E_2^{0,q} = H^q(X)$. Par ailleurs, on a le théorème des coefficients universels, qui donne

$$H^p(B_T, H^q(X)) \simeq H^p(B_T) \otimes_{\mathbb{k}} H^q(X),$$

d'où $E_2^{p,q} = H^p(B_T) \otimes H^q(X)$ et donc, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\forall n \geq 0, H_T^n(X) \simeq \bigoplus_{p+q=n} E_2^{p,q} \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(B_T) \otimes H^q(X) = (H^*(B_T) \otimes H^*(X))^n$$

donc, en tant qu'espaces vectoriels, on a un isomorphisme

$$H_T^*(X) \simeq H^*(B_T) \otimes H^*(X).$$

Maintenant, comme pour la Proposition 2.2.10, comme $H^n(X)$ est de type fini sur \mathbb{k} pour tout n , le théorème de Leray-Hirsch permet de conclure.

• Cette implication est triviale. En effet, si on a $H^*(X) = \mathbb{k}^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i \in I} \mathbb{k}$ avec I un ensemble, alors on a

$$H_T^*(X) \simeq H^*(B_T) \otimes H^*(X) \simeq (H^*(B_T) \otimes \mathbb{k})^{(I)} \simeq H^*(B_T)^{(I)}.$$

• On a la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

$${}^{EM} E_2^{p,q} = \text{Tor}^{H^*(B_T)}(\mathbb{k}, H_T^*(X)) \implies H^{p+q}(X)$$

et, comme $H_T^*(X)$ est libre sur $H^*(B_T)$, les foncteurs Tor supérieurs s'annulent et cette suite spectrale s'effondre en deuxième page et donc

$$H^*(X) \simeq \mathbb{k} \otimes_{H^*(B_T)} H_T^*(X).$$

On obtient alors que $\iota^* : H_T^*(X) \rightarrow H^*(X)$ est surjective, ce qu'il fallait montrer. Pour ceci, consulter [32], Proposition 2.2.

• On a une décomposition (voir [58], 2.10.9)

$$\begin{array}{ccc} H_T^n(X) & \xrightarrow{\quad \iota^* \quad} & H^n(X) \\ \text{edge} \downarrow & & \parallel \\ E_\infty^{0,n} & \xlongequal{\quad} E_{n+2}^{0,n} \hookrightarrow E_{n+1}^{0,n} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_3^{0,n} \hookrightarrow & E_2^{0,n} \end{array}$$

et, comme ι^* est un épimorphisme, on obtient

$$\forall r \geq 2, E_\infty^{0,n} = E_r^{0,n} = E_2^{0,n},$$

donc $d_r^{0,n} = 0$ pour tout $r \geq 2$. De plus, par le théorème des coefficients universels, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q} & \xrightarrow{\simeq} & E_2^{p,q} \\ \parallel & & \parallel \\ H^p(B_T) \otimes H^q(X) & \xrightarrow{\simeq} & H^p(B_T, H^q(X)) \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme horizontale du haut est donné par la structure multiplicative de la suite spectrale de Leray-Serre (cf [58], Chapter III, Lemma 2.15). Par récurrence sur $r \geq 2$, si $E_r^{p,q} = E_2^{p,q}$, alors on a $E_r^{p,q} \simeq E_r^{p,0} \otimes E_r^{0,q}$ et comme $d_r^{p,0} = 0$ (la suite est de premier quadrant), pour tout $E_r^{p,q} \ni z = x \otimes y \in E_r^{p,0} \otimes E_r^{0,q}$, on a

$$d_r^{p,q} z = d_r^{p,q}(x \otimes y) = d_r^{p,0} x \otimes y + (-1)^{p+q} x \otimes d_r^{0,q} y = 0 \Rightarrow d_r^{p,q} = 0 \text{ et } E_{r+1}^{p,q} = E_r^{p,q}$$

et ceci montre que pour tout $r \geq 2$, on a $d_r = 0$ et donc la suite spectrale de Serre dégénère en deuxième page. Pour ces arguments, voir [58], Chapter III, Lemma 2.15, Theorem 4.2 et Theorem 4.4.

* Enfin, en supposant $i)$, on a une décomposition (voir [58], 2.10.10)

$$\begin{array}{ccc} H^n(B_T) & \xrightarrow{\pi^*} & H^n(X_T) = H_T^n(X) \\ \parallel & & \uparrow \text{edge} \\ E_2^{n,0} & \twoheadrightarrow E_3^{n,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n,0} & \xlongequal{\quad} E_\infty^{n,0} \end{array}$$

et si la suite dégénère, alors tous les morphismes horizontaux du bas sont des isomorphismes et donc π^* est injective, d'où le résultat. \square

Remarque 2.2.17. On note que l'implication $i) \Rightarrow iv)$ est toujours vraie et que les relations $i) \Leftrightarrow iv)$ et $ii) \Rightarrow iv)$ restent vraies si X est juste supposé connexe par arcs. Concernant cette question d'équivalences des définitions d'équivariante formalité, on pourra également consulter [33], [52] ou encore [23].

2.3 Décomposition de Bruhat des variétés de drapeaux complètes

Avant d'aller plus loin dans la cohomologie équivariante, nous allons discuter ici de la décomposition de Bruhat de la complexification G d'un groupe de Lie compact connexe K et celle de la variété de drapeaux associée $K/T \simeq G/B$. Plus précisément, nous emploierons l'axiomatique des systèmes de Tits (appelés aussi (B, N) -paires) : nous allons définir les systèmes de Tits et leur associer une décomposition de Bruhat, puis nous construirons

un système de Tits associé au groupe de Lie complexe $GL_n(\mathbb{C})$ et, plus généralement, au complexifié d'un groupe de Lie compact connexe, en utilisant la décomposition d'Iwasawa. Nous verrons ensuite que cette décomposition induit une décomposition cellulaire de K/T en cellules de dimension paire, dites *de Schubert*, ce qui nous donnera de précieuses informations sur la cohomologie rationnelle de K/T , utilisées dans la preuve du théorème 2.4.9.

Notre référence principale pour cette section est le chapitre 27 de [12]. Aussi admettrons nous les bases de la théorie structurale des groupes de Lie (tout voisinage de 1 engendre le groupe, l'existence de l'exponentielle, le système de racines associé à un tore maximal, etc) ; pour lesquelles on pourra consulter les chapitre 1 et 2 de [12], ou encore [10], [60], ainsi que [28]. Il y a cependant là une mise en garde à faire : nous utiliserons ici une notion de *système de racines* légèrement différente de celle généralement employée. Plus précisément, on utilisera la définition suivante :

Définition 2.3.1. ([12], Definition 18.1)

Soit \mathcal{V} un espace euclidien. Un ensemble $\Phi \neq \emptyset$ de vecteurs de \mathcal{V} est un *système de racines (réel)* de \mathcal{V} si

(RS1) l'ensemble Φ est fini et ne contient pas 0,

(RS2) Pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $s_\alpha(\Phi) = \Phi$, où s_α est la réflexion par rapport à l'hyperplan α^\perp , i.e.

$$s_\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad x \mapsto x - 2 \frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha,$$

(RS3) Pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, on a $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$, i.e. $2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$,

(RS4) Pour tout $\alpha \in \Phi$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\lambda\alpha \in \Phi$, alors $\lambda = \pm 1$.

La dimension de \mathcal{V} est alors appelée le *rang* du système de racines.

On a aussi une autre définition, valable dans le cas complexe :

Définition 2.3.2. ([70], Definition 18.2.1)

Un sous-ensemble $\Psi \neq \emptyset$ d'un espace vectoriel complexe de dimension finie \mathcal{W} est un *système de racines complexe* si

(CS1) l'ensemble Ψ est fini et ne contient pas 0,

(CS2) Pour tout $\alpha \in \Psi$, il existe $\alpha^\vee \in \mathcal{W}^*$ tel que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ et $s_\alpha(\Psi) = \Psi$, où

$$s_\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}, \quad x \mapsto x - \alpha^\vee(x)\alpha,$$

(CS3) Pour tous $\alpha, \beta \in \Psi$, on a $\alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$,

(CS4) Pour tout $\alpha \in \Psi$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, si $\lambda\alpha \in \Psi$, alors $\lambda = \pm 1$.

Là aussi, le *rang* de Ψ est la dimension de \mathcal{W} .

On remarque que si (\mathcal{V}, Φ) est un système réel, alors on peut poser $\mathcal{W} := \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et regarder Φ comme un sous-ensemble de \mathcal{W} . Alors (\mathcal{W}, Φ) est un système de racines complexe. En fait, la discussion faite dans le §17 du chapitre V de [67] assure que si (\mathcal{W}, Ψ) est un système complexe et si l'on considère \mathcal{V} le sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathcal{W} engendré par Ψ , alors on a $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\Psi)$ et (\mathcal{V}, Ψ) est un système réel. On peut donc identifier les systèmes réels et complexes, via la complexification. En particulier, nous pourrions identifier le système de racines réel Φ défini sur $\mathcal{V} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{T} \simeq \mathfrak{t}^*$ par un tore maximal T d'un groupe de Lie compact

connexe K (d'algèbres réelles \mathfrak{t} et \mathfrak{k}) et le système complexe défini sur $\mathcal{W} = \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{h}^*$ par la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ associée au tore complexifié, dans l'algèbre complexe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$.

Un *système de racines* au sens de Bourbaki (qui est un sens plus communément usité, par exemple dans [45], §9.2 ou encore [10], V, Definition 3.3) est alors un système de racines au sens de la définition 2.3.1, pour lequel on suppose en plus que Φ engendre linéairement \mathcal{V} . Dans la suite, le système Φ associé au tore maximal T que nous rencontrerons ne vérifiera pas cette propriété, à moins que K ne soit semi-simple. Dans ce cas en complexifiant, on retrouve la théorie classique du système de racines associé à une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie complexe semi-simple, pour laquelle nous renvoyons au troisième chapitre de [45]. Mentionnons par ailleurs que dans le chapitre 19 de [12], un groupe de Lie compact K est dit *semi-simple*, si le système Φ engendre \mathcal{V} . Nous verrons que ceci est cohérent avec la définition commune (à savoir que son algèbre de Lie \mathfrak{k} est semi-simple).

Signalons enfin que l'on pourra trouver dans [14], §3.1.7, une preuve géométrique de la décomposition de Bruhat, utilisant une décomposition plus générale, dite de Bialynicki-Birula.

Commençons par quelques rappels sur la complexification d'un groupe de Lie réel.

Définition 2.3.3. Soit K un groupe de Lie réel connexe. Une *complexification* de K est un groupe de Lie complexe G , muni d'un morphisme de groupes de Lie réels $\iota : K \hookrightarrow G$ tels que, pour tout groupe de Lie complexe H et tout morphisme de groupes réels $f : K \rightarrow H$, il existe un unique morphisme de groupes de Lie complexes $\bar{f} : G \rightarrow H$ tel que $\bar{f} \circ \iota = f$. En particulier, les représentations de dimension finie de K sont en bijection avec les représentations *holomorphes* de G .

Exemple 2.3.4. $GL_n(\mathbb{C})$ (resp. $SL_n(\mathbb{C})$) est une complexification de $U(n)$ (resp. de $SU(n)$ et $SL_n(\mathbb{R})$). De plus, si T est un tore compact, $T \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$, alors une complexification de T est donnée par $T^{\mathbb{C}} := (\mathbb{C}^{\times})^r$. Le tore T possède cette propriété remarquable que tout *caractère linéaire* de T (i.e un morphisme continu $T \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$) s'étend de façon unique en un *caractère rationnel* de $T^{\mathbb{C}}$ (i.e un morphisme holomorphe $T^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$). Pour ceci, voir [12], Proposition 15.6.

Proposition 2.3.5. ([12], Theorem 24.1)

Si K est un groupe de Lie compact connexe, alors K admet une complexification $\iota : K \rightarrow G$ (K est alors appelé une forme réelle de G). De plus, le morphisme induit $\pi_1(\iota) : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(G)$ est un isomorphisme et, si $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$ et $\mathfrak{k} := \text{Lie}(K)$, alors on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Par ailleurs, toute représentation complexe fidèle de K s'étend en une représentation holomorphe (analytique) fidèle de G et toute représentation holomorphe de G est complètement réductible.

Indiquons rapidement comment l'on construit G . On veut que $\text{Lie}(G) = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$. On sait que K admet une représentation complexe fidèle (de dimension finie), qui est unitarisable : $K \hookrightarrow U(n)$, de différentielle $\mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{u}(n) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ et ceci s'étend (de façon unique) en un morphisme d'algèbres de Lie complexes $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. On pose alors $P := \{\exp(iX), X \in \mathfrak{k}\} = \exp(i\mathfrak{k}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ et $G = PK \subset GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 2.3.6. En particulier, \mathfrak{g} est réductible et admet une décomposition en sous-espaces de poids, associée au système de racines donné par un tore maximal T de K (voir [12], Chapitre 18).

Définissons à présent les *systèmes de Tits*, qui nous donnent un cadre axiomatique à la décomposition de Bruhat.

Définition 2.3.7. Si G est un groupe (quelconque), B et N deux sous-groupes de G satisfaisant :

- (TS1) Le sous-groupe $T := B \cap N$ est distingué dans N ,
 - (TS2) Il existe un système S de générateurs du *groupe de Weyl* $W := N/T$, formé d'éléments d'ordre 2,
 - (TS3) Pour $w \in W$ et $s \in S$, on a $wBs \subset BwsB \cup BwB$,
 - (TS4) Pour tout $s \in S$, $sBs^{-1} \neq B$ (i.e. $S \cap N_G(B) = \emptyset$),
 - (TS5) Le groupe G est engendré par N et B ;
- alors on dit que (B, N, S) est un *système de Tits* pour G .

En fait, on choisit un représentant $\dot{w} \in N$ de w et on pose $BwB := B\dot{w}B$, ainsi que $Bw := B\dot{w}$; définitions indépendantes du représentant choisi. En considérant $\mathcal{C}(w) := BwB$, on voit que l'axiome (TS3) est équivalent à l'une des inclusions équivalentes suivantes :

$$\mathcal{C}(w)\mathcal{C}(s) \subset \mathcal{C}(w) \cup \mathcal{C}(ws), \quad \mathcal{C}(s)\mathcal{C}(w) \subset \mathcal{C}(w) \cup \mathcal{C}(sw).$$

Dans ce contexte, on a une décomposition de Bruhat axiomatique :

Théorème 2.3.8. (Décomposition de Bruhat d'un système de Tits, [12], Theorem 27.3)
Soient G un groupe et (B, N, S) un système de Tits pour G , de groupe de Weyl $W := N/T = N/(N \cap B)$. Alors, on a $G = BWB$ et plus précisément, on a une partition

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB = \bigsqcup_{w \in W} \mathcal{C}(w).$$

Cette décomposition s'appelle la décomposition de Bruhat de G relativement à (B, N, S) .

Démonstration. Montrons que $\bigcup_{w \in W} \mathcal{C}(w)$ est un sous-groupe de G . Cet ensemble est clairement stable par inversion et contient 1. Il reste à montrer qu'il est stable par multiplication. Soient $v, w \in W$ et considérons $\mathcal{C}(v) \cdot \mathcal{C}(w)$. On va montrer par récurrence sur la longueur $l(w)$ de w (relativement à (W, S)) que ceci est inclus dans une union de doubles classes. Rappelons que la *longueur* de w est le nombre minimal de réflexions simples nécessaires à l'écriture de w en produit de telles réflexions. Si $l(w) = 0$ alors $w = 1$, auquel cas l'assertion est claire. Si $l(w) > 0$, on peut écrire $w = sw'$ pour $s \in S$ et $l(w') < l(w)$. Par (TS3), on a

$$\mathcal{C}(v)\mathcal{C}(w) = BvBsw'B \subset BvsBw'B \cup BvBw'B = \mathcal{C}(vs)\mathcal{C}(w') \cup \mathcal{C}(v)\mathcal{C}(w')$$

et ceci est contenu dans une union de doubles classes, par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\bigcup_w \mathcal{C}(w)$ est un sous-groupe, qui contient clairement B et N , donc qui contient $\langle B, N \rangle$ qui est égal à G par (TS5), d'où $G = \bigcup_w \mathcal{C}(w)$.

Il reste à montrer que l'union est disjointe. Comme on a affaire à des doubles classes, si $\mathcal{C}(w) \cap \mathcal{C}(w') \neq \emptyset$, alors $\mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(w')$ et montrons que, dans ce cas, on a $w = w'$. On peut supposer que $l(w) \leq l(w')$ et procédons par récurrence sur $l(w)$. Si $l(w) = 0$, alors $w = 1$ et alors $\mathcal{C}(w') = B = \mathcal{C}(1)$. Ainsi, dans N , on a un représentant de w' qui est aussi dans B et comme $B \cap N = T$, ceci implique $w' = 1 = w$. Supposons maintenant que $l(w) > 0$ et que,

dès qu'on a $l(w_1) < l(w)$, alors l'égalité $\mathcal{C}(w_1) = \mathcal{C}(w'_1)$, entraîne $w_1 = w'_1$. Écrivons $w = w''s$ pour $s \in S$, de telle sorte que $l(w'') < l(w)$. Alors, $w''s \in \mathcal{C}(w')$ et, comme s est d'ordre 2, on a par (TS3),

$$w'' \in \mathcal{C}(w')s \subset \mathcal{C}(w's) \cup \mathcal{C}(w').$$

Comme des doubles classes sont disjointes ou égales, on en tire

$$\mathcal{C}(w'') = \mathcal{C}(w') \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{C}(w'') = \mathcal{C}(w's).$$

Par hypothèse de récurrence, ceci entraîne $w'' = w'$ ou bien $w'' = w's$. Le premier cas est exclu car $l(w'') < l(w) \leq l(w')$. Ainsi, on a $w'' = w's$ et alors $w = w''s = w's^2 = w'$, comme annoncé. \square

2.3.1 Premier exemple : $G = GL_n(\mathbb{C})$

On prend T le groupe des matrices diagonales de $G = GL_n(\mathbb{C})$, $N = N_G(T)$ son normalisateur (qui est le groupe des matrices monômiales), et B le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles. On a bien $B \cap N = T$. Soit $S := \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des *réflexions simples*, i.e. s_i est l'image dans $W = N/T$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_{i-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & I_{n-i-1} \end{pmatrix} \in N$$

Si l'on se rappelle que le groupe de Weyl est le groupe symétrique $W \simeq \mathfrak{S}_n$, qui est engendré par les transpositions consécutives $(i, i+1)$, on voit que s_i est l'image dans le quotient de la matrice associée à la transposition $(i, i+1)$.

Soit $X^*(T) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}\text{ol}}(T, \mathbb{C}^\times)$ le groupe des caractères rationnels de T . Dans ce contexte, à une *racine* $\alpha \in X^*(T)$, on peut associer un isomorphisme $x_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow X_\alpha \leq G$, le sous-groupe X_α étant formé des matrices unipotentes, tel que

$$\forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{C}, tx_\alpha(\lambda)t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\lambda).$$

Ici, on a $n^2 - n$ racines, données par

$$\alpha_{i,j}(t) := t_i t_j^{-1}, \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, on a $\alpha_{i,j} = e_i - e_j$. De plus, la racine $\alpha_{i,j}$ est positive si $i < j$ et les racines simples sont les $\alpha_{i,i+1}$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Notons Φ le système de racines de G (qui est isomorphe à celui de \mathfrak{g}).

Remarque 2.3.9. Rappelons que si l'on a un groupe de Lie compact connexe K , muni d'un tore maximal T et si on a une représentation complexe $\rho : K \rightarrow GL(V)$, alors ρ se restreint en une représentation de T , qui est alors complètement réductible et se décompose en représentations de dimension 1. Les éléments de $\widehat{T} = \text{Hom}_{\mathfrak{S}\text{op}}(T, \mathbb{C}^\times)$ qui apparaissent dans $\rho|_T$ sont appelés les *poids* de ρ . De plus, les poids non nuls de la représentation adjointe sont appelés les *racines* de G relativement à T . Leur ensemble est noté Φ : c'est un système de racines réduit (voir [12], Theorem 18.2).

Revenons à notre discussion. Pour x_α , on peut poser

$$x_\alpha(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}, \quad \text{où } \alpha = \alpha_{i,j},$$

avec $E_{i,j}$ la matrice élémentaire, d'entrées 1 en position (i, j) et 0 ailleurs. On remarque que la relation de conjugaison désirée est vérifiée et que la différentielle $dx_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}$ est donnée par $\lambda \mapsto \lambda E_{i,j} \in \mathfrak{g}_\alpha$, où $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} ; \forall H \in \mathfrak{t}, [H, X] = d\alpha(H)X\}$ désigne le sous-espace de poids de α . Soit $\alpha = \alpha_{i,i+1} \in \Pi$ une racine simple et soit $T_\alpha := \ker \alpha \trianglelefteq T$. Soient aussi $M_\alpha := C_G(T_\alpha)$ et $P_\alpha := \langle B, M_\alpha \rangle$. Le sous-groupe P_α est dit *parabolique standard* (i.e. il contient B). On a $P_\alpha = M_\alpha U_\alpha = M_\alpha \times U_\alpha$ où $U_\alpha := \langle x_\beta(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}, \beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\} \rangle$.

Exemple 2.3.10. Si $n = 4$ et $\alpha = \alpha_{2,3}$, alors on a

$$T_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & t_2 & \\ & & & t_3 \end{pmatrix} \right\}, \quad P_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & * & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}, \quad U_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & 0 & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Lemme 2.3.11. ([12], Lemma 27.1)

Avec les notations ci-dessus, si s est une réflexion simple, alors $B \cup \mathcal{C}(s)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. On écrit $s = s_\alpha = s_{\alpha_{i,i+1}}$. On a $\mathcal{C}(s_\alpha) \subset P_\alpha$ et $B \subset P_\alpha$. Il suffit de montrer que $P_\alpha \subset \mathcal{C}(s_\alpha) \cup B$; on aura alors égalité et l'union considérée sera un sous-groupe, car égale à P_α . Comme $U_\alpha \subset B$, ces deux doubles classes sont invariantes par multiplication à droite par U_α , donc il suffit de montrer que $M_\alpha \subset \mathcal{C}(s_\alpha) \cup B$. En passant au quotient dans $P_\alpha/U_\alpha \simeq M_\alpha \simeq GL_2(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\times)^{n-2}$, on est ramené au cas $n = 2$. Dans ce cas, on a une seule racine simple $\alpha = \alpha_{1,2}$ et on a

$$\mathcal{C}(s_\alpha) = Bs_\alpha B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) ; c \neq 0 \right\}$$

et donc $\mathcal{C}(s_\alpha) \cup B = GL_2(\mathbb{C})$. □

On a une action de W sur Φ (induite par l'action naturelle sur \widehat{T}) et si $w = \bar{w} \in N/T$, alors on a

$$w(\alpha) \in \Phi^+ \Rightarrow \dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1} \in x_{w(\alpha)}(\mathbb{C}). \quad (2)$$

Lemme 2.3.12. ([12], Lemma 27.2)

Avec les notations ci-dessus, si $\alpha \in \Pi$ est une racine simple, $s := s_\alpha \in S$ et $w \in W$ tel que $w(\alpha) \in \Phi^+$, alors on a

$$\mathcal{C}(w)\mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(ws).$$

Démonstration. Montrons que $wBs \subseteq BwsB$. Ceci suffit car en multipliant à droite et à gauche par B , on obtient $\mathcal{C}(w)\mathcal{C}(s) \subset BwsB = \mathcal{C}(ws)$ et l'autre inclusion est claire. Soient $\dot{w}, \dot{s} \in N$ tels que $\overline{\dot{w}} = w$ et $\overline{\dot{s}} = s$ dans W et soit $b \in B$. On peut écrire $b = tx_\alpha(\lambda)u$ pour $t \in T$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in U_\alpha$. Alors, il vient

$$\dot{w}\dot{s} = (\dot{w}t\dot{w}^{-1})(\dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1})\dot{w}\dot{s}(\dot{s}^{-1}u\dot{s}).$$

Or, $\dot{w}t\dot{w}^{-1} \in T \subset B$ car $\dot{w} \in N(T)$, puis $\dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1} \in x_{w(\alpha)}(\mathbb{C}) \subset B$ avec (2) et enfin, $\dot{s}^{-1}u\dot{s} \in U_\alpha \subset B$ car $M_\alpha \subset N_G(U_\alpha)$ et $\dot{s} \in M_\alpha$. Donc $\dot{w}\dot{s} \in B\dot{w}\dot{s}B$, comme voulu. \square

Théorème 2.3.13. ([12], Theorem 27.1)

Si T est le groupe des matrices diagonales dans $GL_n(\mathbb{C})$, $N := N(T)$ son normalisateur, B le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures inversibles et S l'ensemble des réflexions simples associées, alors (B, N, S) est un système de Tits pour $GL_n(\mathbb{C})$. En particulier, on a la décomposition de Bruhat de $GL_n(\mathbb{C})$:

$$GL_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{w \in W} BwB = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B\sigma B.$$

Démonstration. Le normalisateur $N(T)$ est formé des matrices de permutations généralisées, donc le fait que N et B engendrent G résulte du pivot de Gauß. Il reste donc à prouver que (TS3) est satisfait. Soit $s = s_\alpha \in S$ pour $\alpha \in \Pi$ et soit $w \in W$. Si $w(\alpha) \in \Phi^+$, par le Lemme 2.3.12, on a

$$wBs \subset BwsB \subset BwsB \cup BwB.$$

Si $w(\alpha) \in \Phi^-$ alors $ws_\alpha(\alpha) = w(-\alpha) = -w(\alpha) \in \Phi^+$ et toujours par le Lemme 2.3.12, on a

$$wsBs \subset Bws^2B = BwB. \quad (3)$$

Ensuite, par le Lemme 2.3.11, $B \cup BsB$ est un groupe contenant un représentant de $s \in N/T$, donc $B \cup BsB = sB \cup sBsB$ et donc $Bs \subset sB \cup sBsB$ et par (3), il vient alors

$$wBs \subset wsB \cup wsBsB \subset BwsB \cup BwB.$$

\square

2.3.2 Second exemple : $G = K^\mathbb{C}$ avec K un groupe de Lie compact connexe

Tout d'abord, rappelons l'important résultat suivant concernant les groupes de Lie simplement connexes :

Théorème 2.3.14. ([12], Theorem 14.2)

Si G, H sont deux groupes de Lie réels, d'algèbres de Lie respectives \mathfrak{g} et \mathfrak{h} et si G est simplement connexe, alors tout morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est la différentielle d'un morphisme de groupes de Lie $G \rightarrow H$.

Soient K un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, $G := K^{\mathbb{C}}$ la complexification de K , de tore $T^{\mathbb{C}}$. Posons $\mathfrak{k} := \text{Lie}(K)$, $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$, $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. On considère la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{g} et le système de racines associé Φ , dont l'ensemble des racines simples est noté Π (on confond ce système avec celui de K et T). On a la décomposition en sous-espaces de poids (voir [12], chapitre 18) :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Remarque 2.3.15. On peut à présent compléter la remarque sur la semi-simplicité faite au début de cette section. Plus précisément, en identifiant les systèmes de racines sur \mathfrak{t}^* et \mathfrak{h}^* , on a que K est semi-simple si et seulement si $\mathfrak{h}^* = \text{Vect}(\Phi)$, c'est-à-dire si et seulement si Φ est un système de racines au sens de Bourbaki. En effet, par définition, dire que K est semi-simple c'est dire que \mathfrak{k} est semi-simple, ce qui revient à dire que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ est semi-simple. On sait déjà (cf [10], Theorem 3.12 et Remark 3.14) que si \mathfrak{g} est semi-simple, alors $\mathfrak{h}^* = \text{Vect}(\Phi)$. Réciproquement, comme \mathfrak{g} est réductive, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est semi-simple ([70], Corollary 20.5.5). Il suffit donc de montrer que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ dès que Φ engendre \mathfrak{h}^* . Si $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, alors x normalise toute sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} . En particulier, $x \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Soit $\alpha \in \Phi$ et soit $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha} \setminus \{0\}$. Comme $x \in \mathfrak{h}$ est central, on a $0 = [x, x_{\alpha}] = \alpha(x)x_{\alpha}$ donc $\alpha(x) = 0$ et ceci vaut pour tout $\alpha \in \Phi$. Comme $\mathfrak{h}^* = \text{Vect}(\Phi)$, on a $\lambda(x) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et donc $x = 0$.

Soient encore les sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} définies par $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$ et $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. On admet le résultat suivant :

Théorème 2.3.16. ([12], Theorem 26.2)

1. Soient $U := \exp(\mathfrak{n}) \leq G$ et $B := T^{\mathbb{C}}U$. Alors U et B sont des sous-groupes fermés connexes de G , d'algèbres de Lie respectives \mathfrak{n} et \mathfrak{b} .
2. On peut choisir un plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ de telle sorte que K consiste en matrices unitaires, $T^{\mathbb{C}}$ en matrices diagonales et B en matrices triangulaires supérieures.
3. Si \mathfrak{v} est une sous-algèbre de Lie complexe (resp. réelle) de \mathfrak{n} , alors $V := \exp(\mathfrak{v})$ est un sous-groupe de Lie complexe (resp. réel) connexe et 1-connexe de U , et \mathfrak{v} est son algèbre de Lie.
4. Si $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ sont des sous-algèbres de Lie (complexes) de \mathfrak{n} telles que $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{w}$, alors $V := \exp(\mathfrak{v})$ et $W := \exp(\mathfrak{w})$ sont des sous-groupes complexes de U tels que $V \cap W = 1$ et $U = VW$.

Définition 2.3.17. Le sous-groupe B du résultat précédent est appelé *sous-groupe de Borel standard*. De plus, un sous-groupe conjugué à B est dit *de Borel* et un sous-groupe contenant B (resp. un conjugué de B) est un sous-groupe *parabolique standard* (resp. un sous-groupe *parabolique*).

Soient $\mathfrak{a} := i\mathfrak{t}$ et considérons le sous-groupe fermé connexe $A := \exp(\mathfrak{a})$ de T . Notons qu'on a $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{t} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{g}_{\alpha} \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{k}$. En fait, cette somme est directe. Si on plonge K et G dans $GL_n(\mathbb{C})$ comme dans le théorème ci-dessus, alors T est formé de matrices diagonales et A consiste en les matrices de T dont les valeurs propres sont réelles positives. Dans ce contexte, on a le théorème suivant, qui découle du cas $G = GL_n(\mathbb{C})$ ([12], Proposition 26.1) et du plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$:

Théorème 2.3.18. (Décomposition d'Iwasawa, [12], Theorem 26.3)

Avec les notations précédentes, on a un difféomorphisme

$$\begin{aligned} A \times U \times K &\rightarrow G \\ (a, u, k) &\mapsto auk \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons acquis le cas où $G' = GL_n(\mathbb{C})$, $K' = U(n)$. Notons A' le sous-groupe de T formé des matrices à valeurs propres réelles positives, U' le sous-groupe de G' formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Par le théorème 2.3.16, on peut plonger G dans G' pour un n convenable de telle sorte que K soit envoyé dans K' et alors A est envoyé dans A' et U dans U' . On a un carré commutatif dans lequel les flèches horizontales sont les inclusions

$$\begin{array}{ccc} A \times U \times K & \hookrightarrow & A' \times U' \times K' \\ \text{mult.} \downarrow & & \downarrow \text{mult.} \\ G & \hookrightarrow & G' \end{array}$$

Par le cas de G' , la composée

$$A \times U \times K \hookrightarrow A' \times U' \times K' \rightarrow G'$$

est un difféomorphisme sur son image, donc la multiplication $A \times U \times K \rightarrow G$ est aussi un difféomorphisme sur son image. Il reste à montrer qu'elle est surjective. Comme A , U et K sont fermés respectivement dans A' , U' et K' , l'image de la composée ci-dessus est fermée dans G' , donc aussi celle de $A \times U \times K \rightarrow G$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} d(\text{mult.})_e : \mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{k} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y, z) &\mapsto x + y + z \end{aligned}$$

et cette application est surjective puisque $\mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$; donc la multiplication $A \times U \times K \rightarrow G$ est une submersion, donc est ouverte. Son image est donc ouverte et fermée dans G qui est connexe, donc est égale à G et donc $A \times U \times K \rightarrow G$ est un difféomorphisme.

Il reste à considérer le cas de $G = GL_n(\mathbb{C})$, avec $K = U(n)$. Posons $B_0 := AU$. Le sous-groupe U est distingué dans B et B_0 donc les écritures $B_0 = AU = UA$ et $B = TU$ traduisent des produits semi-directs. Dans ce cas, montrons d'abord que la multiplication $U \times A \times K \rightarrow G$ est un difféomorphisme. Soit $g \in G$ et soient v_1, \dots, v_n les lignes de g . Par orthogonalisation de Gram-Schmidt, on trouve des constantes $\theta_{i,j} \in \mathbb{C}$, pour $i < j$, telles que les vecteurs

$$u_i := v_i + \sum_{j>i} \theta_{i,j} v_j, \quad n \geq i \geq 1$$

(i.e. $u_n = v_n$, $u_{n-1} := v_{n-1} + \theta_{n-1,n} v_n, \dots$) soient orthogonaux. Définissons

$$u^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & \theta_{1,2} & \cdots & \theta_{1,n} \\ & 1 & & \theta_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que u_1, \dots, u_n soient les lignes de $u^{-1}g$. Soit $a := \text{diag}(|u_1|, \dots, |u_n|) \in A$. Alors $k := a^{-1}u^{-1}g$ a des lignes orthonormales et donc $g = uak = b_0k$ est unitaire, où $b_0 = ua \in UA =: B_0$. Ceci montre que la multiplication $U \times A \times K \rightarrow G$ est surjective.

De plus, puisqu'on a $B_0 \cap K = 1$ et $A \cap U = 1$, celle-ci est aussi injective. Par ailleurs, on voit aisément que les matrices a , u et k dépendent continûment de g , donc $U \times A \times K \rightarrow G$ est un homéomorphisme lisse, donc est un difféomorphisme puisque c'est une immersion et une submersion, grâce au fait que $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k} = \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Enfin, puisque $AU = UA$, pour tout $(a, u) \in A \times U$ on peut trouver un unique $u' \in U$ tel que $au = u'a$ et l'application $A \times U \times K \rightarrow U \times A \times K$ définie par $(a, u, k) \mapsto (u', a, k)$ est un difféomorphisme. Maintenant, la multiplication $A \times U \times K \rightarrow G$ étant la composée $A \times U \times K \rightarrow U \times A \times K \rightarrow G$, c'est un difféomorphisme également, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 2.3.19. On peut aussi utiliser l'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour prouver le même résultat dans le cas où $G = GL_n(\mathbb{R})$, $K = O(n)$, A le sous-groupe des matrices diagonales à valeurs propres positives et U le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes.

De ceci, on tire un première conséquence sur la variété de drapeaux :

Corollaire 2.3.20. ([12], Theorem 26.4)

Si K est un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, G le complexifié de K et B un sous-groupe de Borel associé, alors K/T est difféomorphe à la variété de drapeaux G/B . En particulier, K/T peut être muni d'une structure complexe telle que les translations $g : xT \rightarrow gxT$ soient holomorphes.

Démonstration. Par la décomposition d'Iwasawa, on a $G = AUK = BK$ et comme $K \cap B = T$ (ceci est clair pour $K = U(n)$ et le cas général découle alors du point 2. du théorème 2.3.16), on a

$$G/B \simeq BK/B \simeq K/(B \cap K) = K/T$$

et ce difféomorphisme est K -équivariant. De plus, comme B est un sous-groupe analytique du groupe de Lie complexe G , le quotient G/B a une structure de variété analytique et l'action de G , donc de K , consiste en applications holomorphes. \square

Soient maintenant B le sous-groupe de Borel standard du théorème 2.3.16, $N := N_G(T^\mathbb{C})$, S l'ensemble des réflexions simples de W et montrons que le triplet (B, N, S) associé à $G = K^\mathbb{C}$ est un système de Tits pour G .

Rappelons que l'on a

$$W = N/T^\mathbb{C} \simeq N_K(T)/T \simeq W(\Phi),$$

où $W(\Phi)$ désigne le groupe de Weyl abstrait associé au système de racines Φ . Utilisons la théorie des \mathfrak{sl}_2 -triplets pour définir des sous-groupes M_α , U_α et P_α comme dans le cas de $GL_n(\mathbb{C})$: pour $\alpha \in \Phi^+$ fixons $0 \neq e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$ et soit $c : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la conjugaison $X + iY \mapsto X - iY$. Par la proposition 18.4 de [12], on a $c(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $[e_\alpha, c(e_\alpha)] \in i\mathfrak{t} \setminus \{0\}$, ainsi que

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \begin{cases} \mathfrak{h} & \text{si } \alpha + \beta = 0 \\ \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \in \Phi \end{cases}$$

Posons ici $f_\alpha := c(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ et $h_\alpha := [e_\alpha, f_\alpha] \in \mathfrak{h}$. Alors, le tripleton $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ engendre une sous-algèbre \mathfrak{sl}_α de \mathfrak{g} isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et on a un isomorphisme

$$di_\alpha : \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_\alpha$$

tel que

$$di_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_\alpha, \quad di_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f_\alpha, \quad di_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h_\alpha.$$

On a donc les relations

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha, \quad [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$$

Posons $\mathfrak{k}_\alpha := \mathfrak{k} \cap \mathfrak{sl}_\alpha$. Remarquons que, pour $h \in \mathfrak{t}$, on a $[h, e_\alpha] = d\alpha(h)e_\alpha$, donc si $h \in \mathfrak{t}_\alpha := \ker(d\alpha)$, alors $[h, e_\alpha] = [h, f_\alpha] = 0$ et donc, pour tout $x \in \mathfrak{k}_\alpha$, on a $[h, x] = 0$; autrement dit, \mathfrak{t}_α centralise \mathfrak{k}_α . On a donc aussi un isomorphisme $di_\alpha : \mathfrak{su}_2 \rightarrow \mathfrak{k}_\alpha$ et comme $SU(2)$ est simplement connexe, le théorème 2.3.14 affirme que $di_\alpha : \mathfrak{su}_2 \rightarrow \mathfrak{k}$ est la différentielle d'un morphisme que l'on note encore $i_\alpha : SU(2) \rightarrow K$ et puisque \mathfrak{k}_α centralise \mathfrak{t}_α , la connexité de $SU(2)$ entraîne que $i_\alpha(SU(2)) \subset C_K(T_\alpha)^0$, où $T_\alpha = \ker \alpha \leq T$. Par complexification, on obtient $i_\alpha : SL_2(\mathbb{C}) = SU(2)^\mathbb{C} \rightarrow C_K(T_\alpha)^\mathbb{C} \subset C_G(T_\alpha^\mathbb{C})$ d'où un morphisme $i_\alpha : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow C_G(T_\alpha^\mathbb{C})^0$.

Soit donc $\alpha \in \Pi$ une racine simple et soit $i_\alpha : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow C_G(T_\alpha^\mathbb{C})^0$ le morphisme construit ci-dessus. Considérons le sous-groupe parabolique standard

$$P_\alpha := \langle i_\alpha(SL_2(\mathbb{C})), B \rangle.$$

Considérons aussi

$$M_\alpha := \langle i_\alpha(SL_2(\mathbb{C})), T^\mathbb{C} \rangle,$$

ainsi que

$$\mathfrak{u}_\alpha := \bigoplus_{\beta \in \Phi^+, \beta \neq \alpha} \mathfrak{g}_\beta.$$

Comme $\alpha \in \Pi$, \mathfrak{u}_α est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{n} et par le théorème 2.3.16, 3), il existe un sous-groupe de Lie complexe U_α de U , d'algèbre de Lie \mathfrak{u}_α .

Proposition 2.3.21. ([12], Proposition 27.2)

Avec les notations ci-dessus, M_α normalise U_α et on a un produit semi-direct $P_\alpha = M_\alpha U_\alpha$.

Démonstration. Clairement, B normalise U_α (car B et U_α sont connexes et \mathfrak{b} normalise \mathfrak{u}_α). Il reste à montrer que $i_\alpha(SL_2) \subset N_G(U_\alpha)$. Si $\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ et $\delta = \pm\alpha$, alors $\gamma + \delta \neq 0$ et si $\gamma + \delta \in \Phi$, alors $\gamma + \delta \in \Phi^+$ et $\gamma + \delta \neq \alpha$. Ainsi, on a $[\mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \mathfrak{g}_\gamma] \subseteq \mathfrak{u}_\alpha$ et l'algèbre de Lie de $i_\alpha(SL_2(\mathbb{C}))$ étant engendré par \mathfrak{g}_α et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, il s'ensuit que l'algèbre de Lie de $i_\alpha(SL_2(\mathbb{C}))$ normalise celle de U_α et comme ces groupes sont connexes, on obtient que $i_\alpha(SL_2(\mathbb{C}))$ normalise U_α et donc $M_\alpha \subset N_G(U_\alpha)$, on peut donc définir $M_\alpha U_\alpha = M_\alpha \times U_\alpha$ et on a alors $P_\alpha = M_\alpha U_\alpha$. \square

Lemme 2.3.22. ([12], Lemma 27.3)

Toujours avec les mêmes notations, si $s \in S$ est une réflexion simple, alors $\mathcal{C}(s) \cup B$ est un sous-groupe de G .

Démonstration. Si $s = s_\alpha$ pour $\alpha \in \Pi$, montrons que $\mathcal{C}(s_\alpha) \cup B = P_\alpha$.

Tout d'abord, M_α contient un représentant de $s_\alpha \in N/T^\mathbb{C}$. En effet, reprenons $i_\alpha : SU(2) \rightarrow C_K(T_\alpha)^0$ et $di_\alpha : \mathfrak{su}_2 \rightarrow \mathfrak{k}$ et soit

$$w_\alpha := i_\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K.$$

Alors, $w_\alpha \in N_K(T)$ et son image $w_\alpha \in W$ induit s_α pour l'action sur $X^*(T)$. Ici, on note $X^*(T) = \widehat{T}$ le groupe des caractères *continus* $T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui, par la proposition 15.6 de [12], est isomorphe au groupe $X^*(T^\mathbb{C})$ des caractères *holomorphes* $T^\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de $T^\mathbb{C}$. Par la proposition 18.4 de [12], on a $-ih_\alpha \notin \mathfrak{t}_\alpha$, donc \mathfrak{t} est engendrée par \mathfrak{t}_α et $di_\alpha(\mathfrak{su}_2) \cap \mathfrak{t}$. Comme $\text{Lie}(T_\alpha) = \mathfrak{t}_\alpha$, T est engendré par T_α et $T \cap i_\alpha(SU(2))$. Par construction, w_α normalise

$$T \cap i_\alpha(SU(2)) = i_\alpha \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}, y \in \mathbb{S}^1 \right\}$$

et comme $i_\alpha(SU(2)) \subset C_K(T_\alpha)^0$, on a $w_\alpha \in N_K(T_\alpha)$ et donc $w_\alpha \in N_K(T)$. Par ailleurs, W agit par conjugaison sur $X^*(T)$ et si on munit $\mathcal{V} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X^*(T)$ de l'action canonique de W qui est fini, on peut choisir un produit scalaire W -invariant sur \mathcal{V} et on retrouve alors le système de racines (\mathcal{V}, Φ) associé à T (voir [12], Theorem 18.2). Remarquons que si $T \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$, alors $X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^r$ et $\mathcal{V} \simeq \mathbb{R}^r \stackrel{\text{lin.}}{\simeq} \mathfrak{t}^*$ et en complexifiant, on voit que le système Φ est isomorphe à celui de \mathfrak{h}^* associé à la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} . Ici, tout élément de W agit donc de façon orthogonale et comme w_α centralise T_α , il agit trivialement sur \mathfrak{t}_α , donc fixe ponctuellement un hyperplan de \mathcal{V} . Comme $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$, w_α agit de la même façon que la réflexion s_α ; donc le représentant $w_\alpha \in i_\alpha(SL_2) \subset M_\alpha$ de s_α convient et l'assertion est prouvée.

De ceci, on tire que $B \cup \mathcal{C}(s_\alpha) \subset P_\alpha$. Réciproquement, B et $\mathcal{C}(s_\alpha)$ sont invariants par multiplication à droite par U_α , donc par la Proposition 2.3.21, comme $P_\alpha = M_\alpha U_\alpha$, il reste à montrer que $M_\alpha \subset B \cup \mathcal{C}(s_\alpha)$. De plus, B et $\mathcal{C}(s_\alpha)$ étant invariants par multiplication à droite par $T^\mathbb{C}$, il est suffisant de montrer que $i_\alpha(SL_2) \subset B \cup \mathcal{C}(s_\alpha)$. On a

$$di_\alpha \left(\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathbb{C}e_\alpha \subset \mathfrak{h} \oplus g_\alpha \subset \mathfrak{b},$$

donc, B étant connexe, on a

$$i_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B.$$

Ensuite, si $c \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \subset SL_2(\mathbb{C})$$

et donc

$$i_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in i_\alpha \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \cdot w_\alpha \cdot i_\alpha \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset Bs_\alpha B = \mathcal{C}(s_\alpha),$$

d'où

$$i_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{cases} B & \text{si } c = 0 \\ \mathcal{C}(s_\alpha) & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

et donc $i_\alpha(SL_2) \subset B \cup \mathcal{C}(s_\alpha)$, comme annoncé. \square

Lemme 2.3.23. *Si $\alpha \in \Pi$ est une racine simple, $s := s_\alpha \in S$ la réflexion simple associée et $w \in W$ est tel que $w(\alpha) \in \Phi^+$, alors on a*

$$\mathcal{C}(w)\mathcal{C}(s) = \mathcal{C}(ws).$$

Démonstration. Choisissons des représentants $\dot{w}, \dot{s} \in N$ respectifs de w et s . Par la preuve du Lemme 2.3.22, on peut supposer que $\dot{s} \in M_\alpha$. Comme pour le Lemme 2.3.12, il suffit de montrer que

$$wBs \subseteq BwsB.$$

Construisons les x_β comme pour $GL_n(\mathbb{C})$. Si $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, soit

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_\beta &: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}_\beta \hookrightarrow \mathfrak{u}_\alpha \\ \lambda &\mapsto \lambda e_\beta \end{aligned}$$

et considérons $x_\beta : \mathbb{C} \rightarrow U_\alpha$ tel que $dx_\beta = \widetilde{x}_\beta$. Alors, U_α est engendré par les $x_\beta(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$. De plus, comme $w(\alpha) \in \Phi^+$, en considérant le plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ donné par le point 2) du théorème 2.3.16, on a la relation analogue à (2) :

$$\dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1} \in x_{w(\alpha)}(\mathbb{C}) \subset B.$$

Enfin, si $b \in B$, on peut écrire $b = tx_\alpha(\lambda)u$ avec $t \in T^\mathbb{C}$ et $u \in U_\alpha$. On a alors

$$\dot{w}b\dot{s} = (\dot{w}t\dot{w}^{-1})(\dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1})\dot{w}\dot{s}(\dot{s}^{-1}u\dot{s})$$

et $\dot{w}t\dot{w}^{-1} \in T^\mathbb{C} \subset B$, $\dot{w}x_\alpha(\lambda)\dot{w}^{-1} \in B$ et $\dot{s}^{-1}u\dot{s} \in U_\alpha \subset B$ car M_α normalise U_α et $\dot{s} \in M_\alpha$. Ainsi, $\dot{w}b\dot{s} \in B\dot{w}\dot{s}B$, d'où le résultat. \square

Lemme 2.3.24. *Avec les mêmes notations, le triplet (B, N, S) satisfait l'axiome (TS3) des systèmes de Tits.*

Démonstration. On peut reproduire la preuve du Théorème 2.3.13 en utilisant les Lemmes 2.3.22 et 2.3.23 au lieu des Lemmes 2.3.11 et 2.3.12. \square

De plus, en considérant le plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, comme $GL_n(\mathbb{C})$ vérifie (TS5), G le vérifie aussi et on a $T^\mathbb{C} = B \cap N \trianglelefteq N$, d'où (TS1). Ensuite, (TS2) et (TS3) ont déjà été vus et si $s \in S$, alors $s(\Phi^+) \neq \Phi^+$ et donc $s \in G$ ne normalise pas \mathfrak{b} , donc ne normalise pas non plus B et ceci montre (TS4). En résumé, on a obtenu le

Théorème 2.3.25. ([12], Theorem 27.2)

Soient K un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal de K et $G := K^\mathbb{C}$ le complexifié de K , de tore $T^\mathbb{C}$. Si B est le sous-groupe de Borel standard de G , $N := N_G(T^\mathbb{C})$ et S l'ensemble des réflexions simples du groupe de Weyl $W = N/T^\mathbb{C}$, alors le triplet (B, N, S) est un système de Tits pour G .

En particulier, on a la décomposition de Bruhat :

$$G = BWB = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

Remarque 2.3.26. On peut montrer (cf [5], Chapter IV, §14.15) que si G est un groupe algébrique (affine) connexe réductif, avec T un tore maximal dans G , B un sous-groupe de Borel de G , $N := N_G(T)$ et $W = N/T$ le groupe de Weyl, alors (B, N, S) est un système de Tits et on a donc une décomposition de Bruhat similaire à celle du Théorème 2.3.25.

En fait, si K est un groupe de Lie compact connexe, alors le complexifié $K^\mathbb{C}$ possède une unique structure de groupe réductif connexe (voir [60], V, §5) et la décomposition de Bruhat donnée par 2.3.25 découle alors de celle du groupe algébrique réductif $K^\mathbb{C}$.

2.3.3 Cas de la variété de drapeaux G/B

Reprenons les notations précédentes : K groupe de Lie compact connexe, de tore maximal T , $G := K^{\mathbb{C}}$ son complexifié, etc. La décomposition de Bruhat

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

induit une décomposition de la variété de drapeaux

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} (BwB)/B$$

et posons

$$Y_w^{\circ} := (BwB)/B, \quad \forall w \in W.$$

Nous allons analyser la structure topologique des orbites Y_w , appelées *cellules de Schubert*. Fixons $w \in W$. On a le sous-groupe unipotent U , d'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$ et de même, à la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_{\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ correspond un sous-groupe fermé connexe U_- de G . Définissons

$$U_+^w := U \cap wUw^{-1}, \quad \text{et} \quad U_-^w := U \cap wU_-w^{-1}.$$

Alors on a

$$\mathfrak{u}_+^w := \text{Lie}(U_+^w) = \mathfrak{n} \cap \text{Lie}(wUw^{-1}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cap w\Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

ainsi que

$$\mathfrak{u}_-^w := \text{Lie}(U_-^w) = \mathfrak{n} \cap \text{Lie}(wU_-w^{-1}) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cap w\Phi^-} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Ensuite, on a un homéomorphisme

$$\begin{aligned} U_-^w &\rightarrow Y_w^{\circ} \\ u &\mapsto uwB \end{aligned}$$

En effet, il suffit de montrer que c'est une bijection, car $Y_w^{\circ} := \overline{Y_w^{\circ}} \subset G/B \simeq K/T$ est compact et $u \mapsto uwB$ est continue. on a clairement $BwB/B = UwB/B$ et si $u, u' \in U$ sont tels que $uwB = u'wB$, alors $u^{-1}u'wB = wB$ et donc $u^{-1}u' \in U \cap wUw^{-1} = U_+^w$. Il reste donc à montrer que toute classe dans U/U_+^w possède un unique représentant dans U_-^w ; ce qui résulte du point 4) du théorème 2.3.16, puisque $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_-^w \oplus \mathfrak{u}_+^w$. Considérons maintenant

$$\exp : \mathfrak{u}_-^w \rightarrow U_-^w.$$

On a un plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ et si $X \in \mathfrak{u}_-^w$, $Y := \exp(X) \in U_-^w$, alors

$$Y = I_n + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!},$$

cette série est finie car X est nilpotent. Pour le voir, on note le plongement $G \hookrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ (on identifie la matrice $X \in \mathfrak{b}$ avec son image) et par le théorème de Lie ([12], Theorem 26.1), on peut choisir une base de \mathbb{C}^n telle que tous les $X \in \mathfrak{b}$, soient triangulaires supérieurs. Il nous faut donc montrer que si $X \in \mathfrak{n}$, alors les entrées diagonales de X sont nulles et il suffit de le faire pour $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, pour $\alpha \in \Phi^+$. Par définition d'une racine, le caractère α de T

n'est pas trivial, donc $d\alpha \neq 0$. Choisissons donc $H \in \mathfrak{t}$ tel que $d\alpha(H) \neq 0$ et le commutateur $[H, X] = d\alpha(H)X$ est un multiple non nul de X et, en tant que multiple non nul d'un commutateur de matrices triangulaires supérieures, la matrice X est triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc est nilpotente.

De plus, $Y - I_n$ est une somme finie de matrices triangulaires supérieures nilpotentes, donc est elle-même nilpotente et alors la série finie suivante est bien définie pour toute matrice triangulaire supérieure unipotente Y :

$$(Y - I_n) - \frac{1}{2}(Y - I_n)^2 + \frac{1}{3}(Y - I_n)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(Y - I_n)^n =: \log(Y)$$

et on a $X = \log(Y)$ dès que $Y = \exp(X)$. Ainsi, la série

$$\log(Y) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(Y - I)^n}{n}$$

définit une application continue

$$\log : U_-^w \rightarrow \mathfrak{u}_-^w$$

qui constitue une réciproque à $\exp : \mathfrak{u}_-^w \rightarrow U_-^w$. Ainsi, les espaces topologiques U_-^w et \mathfrak{u}_-^w sont homéomorphes, via l'exponentielle et le logarithme. Remarquons que le même argument fonctionne en remplaçant U_-^w par un sous-groupe connexe fermé de U et montre en particulier qu'un tel sous-groupe est simplement connexe (puisque homéomorphe à un espace euclidien).

On obtient donc une suite d'homéomorphismes

$$Y_w^o \stackrel{\text{def}}{=} (BwB)/B \approx U_-^w \approx \mathfrak{u}_-^w \approx \mathbb{C}^{\dim \mathfrak{u}_-^w}$$

et, puisque

$$\dim \mathfrak{u}_-^w = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \cap w\Phi^-} \dim \mathfrak{g}_\alpha = |\Phi^+ \cap w\Phi^-| = l(w)$$

et finalement, Y_w^o est homéomorphe à $\mathbb{C}^{l(w)}$, donc est une cellule (réelle) de dimension $2l(w)$, ce qui justifie la terminologie de *cellule de Schubert*.

Remarque 2.3.27. Un premier intérêt de la variété de drapeaux concernant la théorie des représentations est le théorème de Borel-Weil ([12], Theorem 27.5), qui permet de réaliser une représentation irréductible d'un groupe de Lie compact connexe (ou de son complexifié) comme une action sur l'espace des sections globales d'un fibré en droites holomorphe sur la variété de drapeaux. Cependant, nous n'irons pas plus loin dans cette direction.

De la discussion précédente, on tire alors le

Théorème 2.3.28. *Soient K un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal dans K , $G := K^{\mathbb{C}}$ le complexifié de K , $N := N_G(T^{\mathbb{C}})$, B le sous-groupe de Borel standard de G associé à $T^{\mathbb{C}}$ et $W := N/T^{\mathbb{C}} \simeq N_K(T)/T$ le groupe de Weyl. La décomposition de Bruhat de G :*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

induit une décomposition de la variété de drapeaux G/B (également appelée décomposition de Bruhat) :

$$K/T \simeq G/B = \bigsqcup_{w \in W} Y_w^o, \quad \text{où} \quad Y_w^o := BwB/B.$$

De plus, celle-ci constitue une décomposition cellulaire de G/B en $|W|$ cellules (homéomorphes à $\mathbb{C}^{l(w)}$), de dimension réelle paire $2l(w)$, appelées cellules de Schubert.

On en tire enfin le corollaire suivant, qui est utilisé dans la preuve du Théorème 2.4.9 :

Corollaire 2.3.29. *Si K est un groupe de Lie (réel) compact connexe et si T en est un tore maximal, alors on a*

$$\forall k \geq 0, H^{2k+1}(K/T, \mathbb{Q}) = 0$$

et

$$\chi(K/T) = \dim H^*(K/T, \mathbb{Q}) = |W|.$$

Démonstration. La première égalité résulte du calcul de la cohomologie cellulaire de $K/T \simeq G/B$, qui est bien nulle en degrés impairs puisque les cellules Y_w^o sont de dimension paire $2l(w)$. On a donc aussi

$$\chi(K/T) = \chi(G/B) = \sum_{n \geq 0} \dim H^{2n}(G/B, \mathbb{Q}) = \dim H^*(G/B, \mathbb{Q}) = \dim H^*(K/T, \mathbb{Q})$$

et ceci vaut $|W|$, le nombre de cellules de Schubert de G/B . □

On peut même donner une borne explicite optimale pour la cohomologie de K/T , en utilisant l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl :

Corollaire 2.3.30. *Soient K un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal. Posons $\ell := \dim K - \text{rg } K = \text{codim}_G(T)$. Alors on a*

$$H^\ell(K/T, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad H^k(K/T, \mathbb{Q}) = 0, \quad \forall k > \ell.$$

Démonstration. Soient $G := K^\mathbb{C}$, $N := N_G(T^\mathbb{C})$ le normalisateur de $T^\mathbb{C}$, B le Borel standard de G , Φ le système de racines associé et $W := N/T^\mathbb{C} \simeq N_K(T)/T \simeq W(\Phi)$ le groupe de Weyl. On a la décomposition de Bruhat de G/B en cellules de Schubert :

$$G/B = \bigcup_{w \in W} BwB/B = \bigcup_{w \in W} Y_w^o.$$

Soit $w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur de W . La cellule de Schubert $Y_{w_0}^o \simeq \mathbb{C}^{l(w_0)}$ est de dimension réelle maximale $2l(w_0)$; et c'est la seule cellule de cette dimension. Donc on a

$$H^{2l(w_0)}(K/T, \mathbb{Q}) = H^{2l(w_0)}(G/B, \mathbb{Q}) = H^{2l(w_0)}(Y_{w_0}^o, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

et

$$H^k(K/T, \mathbb{Q}) = H^k(G/B, \mathbb{Q}) = 0, \quad \forall k > 2l(w_0).$$

Il reste donc à montrer que $2l(w_0) = \ell \stackrel{\text{def}}{=} \dim K - \text{rg } K$. Rappelons que le rang $\text{rg } K$ de K est par définition la dimension de T , qui est indépendante du tore maximal choisi. Puisque w_0 est caractérisé par $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$, on a $l(w_0) = |\Phi^+|$, donc $2l(w_0) = |\Phi|$. Soient $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) = \text{Lie}(K)^\mathbb{C} =: \mathfrak{k}^\mathbb{C}$ et $\mathfrak{h} := \text{Lie}(T^\mathbb{C}) = \text{Lie}(T)^\mathbb{C} =: \mathfrak{t}^\mathbb{C}$. On a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

et, pour tout $\alpha \in \Phi$, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ ([12], Proposition 18.6). Il vient alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Phi} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} + |\Phi|$$

et donc

$$2l(w_0) = |\Phi| = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}.$$

Or, on a

$$\dim K := \dim_{\mathbb{R}} K = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} (\mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} (\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$$

et de même $\text{rg } K := \dim_{\mathbb{R}} T = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$, d'où

$$2l(w_0) = |\Phi| = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \dim K - \text{rg } K = \ell.$$

□

Dans le cas particulier où $K = U(n)$, on peut interpréter la variété G/B en termes de *drapeaux* (fait qui donne son nom à G/B) et ceci nous permet de donner une borne sur le degré maximal de cohomologie non nulle de G/B , sans utiliser la décomposition de Bruhat. Nous utiliserons plutôt les grassmanniennes.

Soient donc $K := U(n)$, $G = K^{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{C})$, $T \simeq (\mathbb{S}^1)^n$ le sous-groupe de K formé des matrices diagonales, de complexifié $T^{\mathbb{C}} \simeq (\mathbb{C}^{\times})^n$ le groupe des matrices diagonales de G et $N = N_G(T^{\mathbb{C}})$ le groupe des matrices monômiales. On a alors $W = N/T^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{S}_n$. Soit encore B le sous-groupe de Borel standard de G , constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles. On va décrire la variété G/B en termes de drapeaux.

Commençons par quelques rappels sur les variétés de Grassmann. De façon ensembliste, la *grassmannienne complexe* $Gr(k, m)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de \mathbb{C}^m . On peut munir ceci d'une structure de variété complexe de dimension $k(n - k)$ (donc aussi une variété réelle lisse de dimension $2k(n - k)$). De plus, $Gr(k, n)$ peut se voir comme une sous-variété analytique d'un espace projectif comme suit. Si $W \in Gr(k, m)$, on choisit une base (w_1, \dots, w_k) de W , on considère l'élément $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ de $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$ et on pose $\iota(W) := [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^m)$. On voit alors que $\iota(W)$ ne dépend pas de la base choisie et ceci définit une injection

$$\iota : Gr(k, m) \hookrightarrow \mathbb{P} \left(\bigwedge^k \mathbb{C}^m \right).$$

De plus, on a $\dim \bigvee^k \mathbb{C}^m = \binom{m}{k}$ et $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^m) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\binom{m}{k}}) \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{m}{k}-1}$, donc

$$\iota : Gr(k, m) \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{m}{k}-1} \tag{4}$$

Ce plongement est appelé *plongement de Plücker*.

Ensuite, soit l'ensemble des drapeaux de \mathbb{C}^n

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &:= \{(V_0, \dots, V_n) ; V_i \leq \mathbb{C}^n, V_i \subseteq V_{i+1}, \dim V_i = i\} \\ &= \{0 = V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_n = \mathbb{C}^n, \dim(V_{i+1}/V_i) = 1\}. \end{aligned}$$

Considérons la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n et soit

$$F_0 := (0, \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, \dots, \langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{C}^n) \in \mathcal{F}_n$$

le drapeau de référence. On a une action naturelle $G \curvearrowright \mathcal{F}_n$ et posons

$$\begin{aligned} \varphi &: G \rightarrow \mathcal{F}_n \\ g &\mapsto gF_0 \end{aligned}$$

Comme l'action de G est transitive, l'application φ est surjective et $g \in G$ vérifie $gF_0 = F_0$ si et seulement si $g \in B$. On obtient donc une bijection

$$\phi : G/B \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n.$$

Ceci permet de donner à \mathcal{F}_n une structure de variété analytique, induite par celle de G/B . Cette variété \mathcal{F}_n s'appelle la *variété de drapeaux* de \mathbb{C}^n . C'est ce phénomène qui donne son nom à la variété G/B dans le cas général. De plus, on a un plongement canonique

$$\mathcal{F}_n \hookrightarrow Gr(1, n) \times Gr(2, n) \times \cdots \times Gr(n, n), \quad (5)$$

qui fait de la variété de drapeaux une sous-variété complexe d'un produit de grassmanniennes (donc aussi d'un espace projectif, via les plongement de Plücker et de Segre).

Par ailleurs, $G/B \simeq K/T$ est aussi une variété réelle lisse compacte, ce qui permet d'utiliser la théorie de de Rham pour calculer la cohomologie de K/T . Pour une variété lisse compacte M , on pose provisoirement

$$\text{cd}(M) := \max\{k \geq 0 ; H^k(M, \mathbb{R}) \neq 0\} = \max\{k ; H^k(M, \mathbb{Q}) \neq 0\}.$$

Comme M est localement contractile et compacte, la cohomologie $H^*(M, \mathbb{R})$ est celle du faisceau constant \mathbb{R} (au sens foncteur dérivé des sections globales) et de plus, le théorème de de Rham assure que

$$\forall k \in \mathbb{N}, H^k(M, \mathbb{R}) = H^k(M, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^k(M).$$

Donc, si $k > \dim M$, alors $H^k(M, \mathbb{R}) = H_{\text{dR}}^k(M) = 0$ et donc $\text{cd } M \leq \dim M$. Ici, on veut une majoration de $\text{cd}(K/T)$. On a

$$\text{cd}(K/T) \leq \dim_{\mathbb{R}} K/T = 2 \dim_{\mathbb{C}} K/T = 2 \dim_{\mathbb{C}} G/B = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_n$$

et en utilisant le plongement (5), on a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_n &\leq \dim_{\mathbb{C}} \left(\prod_{1 \leq k \leq n} Gr(k, n) \right) = \sum_{1 \leq k \leq n} \dim_{\mathbb{C}} Gr(k, n) = \sum_{1 \leq k \leq n} k(n-k) \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}, \end{aligned}$$

et donc

$$\text{cd}(K/T) \leq 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_n \leq \frac{n+1}{3}(n^2 - n).$$

On obtient finalement

$$\forall k > \frac{n+1}{3}(n^2 - n), H^k(K/T, \mathbb{Q}) = 0,$$

ce qui est une estimation moins précise que celle donnée par le Corollaire 2.3.30. En effet, on a $\dim K = n^2$, $\text{rg } K = n$ et 2.3.30 donne alors

$$H^{n^2-n}(K/T, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad H^k(K/T, \mathbb{Q}) = 0, \quad \forall k > n^2 - n.$$

2.3.4 Décomposition cellulaire des variétés de Schubert

Reprenons les notations usuelles : K désigne un groupe de Lie compact connexe (réel), T un tore maximal, $G = K^{\mathbb{C}}$ le complexifié de K , Φ le système de racines, B le Borel standard, W le groupe de Weyl, etc.

Rappelons que, sur W , on a l'ordre de Bruhat défini comme suit : si on a $u, w \in W$, avec une écriture réduite de w en produit de réflexions simples $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, alors on dit que $u \leq w$ s'il existe une sous-suite $(j_1, \dots, j_l) \subset (i_1, \dots, i_k)$ telle que $u = s_{j_1} \cdots s_{j_l}$ (dans ce cas, on doit avoir $l(u) \leq l(w)$). La proposition 25.4 de [12] assure que ceci est bien défini et munit W d'un ordre partiel. En notant $Y_w^o := BwB/B \simeq \mathbb{C}^{l(w)}$ la cellule de Schubert de w , et $Y_w := \overline{Y_w^o}$ son adhérence (au sens de Zariski), appelée *variété de Schubert*, on peut se demander quelles cellules contiennent la variété de Schubert Y_w . La réponse est donnée par l'ordre de Bruhat :

$$Y_w = \bigcup_{u \leq w} Y_u^o.$$

Nous nous proposons ici de prouver cette formule. Elle nous sera grandement utile dans l'étude des classes de Schubert, dans la partie suivante.

Reprenons les notations des systèmes de Tits, introduite en début de section. On a

Lemme 2.3.31. ([12], Proposition 27.1)

Si $w \in W$ s'écrit $w = s_1 \cdots s_r$ avec $l(w) = r$ (i.e. on a une décomposition réduite), alors on a la relation

$$\mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(s_1) \cdots \mathcal{C}(s_k).$$

En particulier, si on a un $w' = s'_1 \cdots s'_{r'}$, alors $ww' = s_1 \cdots s_r s'_1 \cdots s'_{r'}$ et si $l(ww') = r + r'$, alors $\mathcal{C}(ww') = \mathcal{C}(s_1) \cdots \mathcal{C}(s_r) \mathcal{C}(s'_1) \cdots \mathcal{C}(s'_{r'})$, d'où

$$\forall w, w' \in W, l(ww') = l(w) + l(w') \Rightarrow \mathcal{C}(ww') = \mathcal{C}(w)\mathcal{C}(w').$$

Démonstration. Posons $s_r = s_\alpha$, pour $\alpha \in \Pi$ une racine simple et $w' := s_1 \cdots s_{r-1}$. Alors $l(w) = l(w') + 1$ et d'après la Proposition 20.2 de [12], ceci entraîne $w'(\alpha) \in \Phi^+$. On peut donc appliquer le Lemme 2.3.23 pour obtenir $\mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(w')\mathcal{C}(s_r)$ et une récurrence sur r permet alors de conclure. \square

Soient ensuite $r := |\Pi|$ le nombre de racines simples et $\{s_i = s_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq r\}$ l'ensemble des réflexions simples. En prenant $\dot{s}_i \in N_G(T^{\mathbb{C}})$ un représentant de $s_i \in W = N_G(T^{\mathbb{C}})/T^{\mathbb{C}}$, on considère le sous-groupe parabolique minimal

$$P_i := \langle \dot{s}_i, B \rangle.$$

Alors, on a

Lemme 2.3.32. ([12], Proposition 27.4)

On a

$$P_i = \mathcal{C}(1) \cup \mathcal{C}(s_i) = B \cup \mathcal{C}(s_i).$$

De plus, le quotient P_i/B est difféomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. En fait, la variété algébrique P_i/B est isomorphe à la droite projective complexe.

Démonstration. Par le Lemme 2.3.22, $\mathcal{C}(1) \cup \mathcal{C}(s_i)$ est un sous-groupe de G , on a donc immédiatement $P_i = \mathcal{C}(1) \cup \mathcal{C}(s_i)$. Ensuite, puisque $SL_2(\mathbb{C})$ est simplement connexe, l'injection $\mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathfrak{g}$, correspondant au \mathfrak{sl}_2 -triplet associé à la racine simple α_i telle que $s_{\alpha_i} = s_i$, provient d'un morphisme $\iota_i : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow G$ (on a déjà vu ceci dans la preuve de 2.3.20). L'image de ce morphisme est contenue dans P_i . Comme $s_i \in \iota_i(SL_2)$ (preuve de 2.3.22), on a $P_i = \iota_i(SL_2)B$. Ainsi, on a

$$P_i/B \simeq \iota_i(SL_2) / \iota_i(SL_2) \cap B \simeq SL_2(\mathbb{C}) / B_S \simeq \mathbb{CP}^1,$$

où $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^\times, \mu \in \mathbb{C} \right\}$ est le Borel de SL_2 . Le dernier difféomorphisme est donné par

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \mapsto [a : c].$$

□

Pour un mot réduit $\mathfrak{w} := (i_1, \dots, i_k)$ représentant $w \in W$, on définit une action à droite de B^k sur $P_{i_1} \times \dots \times P_{i_k}$ par

$$(p_1, \dots, p_k) \cdot (b_1, \dots, b_k) := (p_1 b_1, b_1^{-1} p_2 b_2, \dots, b_{k-1}^{-1} p_k b_k).$$

Le quotient $Z_{\mathfrak{w}} := (P_{i_1} \times \dots \times P_{i_k}) / B^k$ est appelé la *variété de Bott-Samelson* de \mathfrak{w} . On a aussi, pour $\mathfrak{w}' := (i_1, \dots, i_{k-1})$, un morphisme

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathfrak{w}} & \rightarrow & Z_{\mathfrak{w}'} \\ (p_1, \dots, p_k) B^k & \mapsto & (p_1, \dots, p_{k-1}) B^{k-1} \end{array}$$

Ceci définit un espace fibré, de fibre typique $P_{i_k}/B \simeq \mathbb{CP}^1$, par 2.3.32. Ainsi, $Z_{\mathfrak{w}}$ est obtenue par fibrations successives de \mathbb{CP}^1 et c'est en particulier une variété réelle compacte (on le savait déjà, puisque c'est une variété projective lisse). La variété de Bott-Samelson $Z_{\mathfrak{w}}$ présente le désavantage d'être moins canonique que celle de Schubert Y_w , puisqu'elle dépend du choix d'un mot réduit \mathfrak{w} représentant l'élément $w \in W$. Cependant, elle est plus facile à étudier, car elle est lisse, contrairement à Y_w qui présente des singularités. On a enfin un morphisme canonique

$$\begin{array}{ccc} \tau : & Z_{\mathfrak{w}} & \rightarrow & G/B \\ & (p_1, \dots, p_k) B^k & \mapsto & p_1 \cdots p_k B \end{array}$$

Le résultat voulu est alors le suivant :

Théorème 2.3.33. ([12], Theorem 27.4)

L'image de τ est Y_w et on a

$$Y_w = \bigcup_{u \leq w} Y_u^o. \quad (6)$$

Démonstration. Comme $\mathcal{C}(s_i)$ est dense (pour la topologie usuelle) dans P_i , le produit $\mathcal{C}(s_{i_1}) \times \dots \times \mathcal{C}(s_{i_k})$ est dense dans $P_{i_1} \times \dots \times P_{i_k}$. Son image dans G/B est $\mathcal{C}(s_{i_1}) \cdots \mathcal{C}(s_{i_k})$, qui est égal à $\mathcal{C}(w)$ d'après le Lemme 2.3.31. Donc, l'image de $\mathcal{C}(s_{i_1}) \times \dots \times \mathcal{C}(s_{i_k})$ est Y_w^o et est dense dans $\tau(Z_{\mathfrak{w}})$. D'autre part, $\tau(Z_{\mathfrak{w}})$ est fermée car $Z_{\mathfrak{w}}$ est compacte, et $Y_w = \overline{Y_w^o}$ est aussi l'adhérence pour la topologie usuelle, donc $\tau(Z_{\mathfrak{w}}) = \overline{Y_w^o} = Y_w$.

Maintenant, $\tau(Z_{\mathfrak{w}})$ est l'union des $\mathcal{C}(s_{j_1}) \cdots \mathcal{C}(s_{j_l})/B$ quand (j_1, \dots, j_l) parcourt l'ensemble

des sous-mots de $(i_1, \dots, i_k) = \mathbf{w}$. Posons, pour un tel sous-mot, $u := s_{j_1} \cdots s_{j_l}$. Si c'est une décomposition réduite, par 2.3.31, on a

$$(\mathcal{C}(s_{j_1}) \cdots \mathcal{C}(s_{j_l})) / B = \mathcal{C}(u) / B$$

et donc chaque Y_u° , pour $u \leq w$, est dans Y_w par définition de l'ordre de Bruhat. Si la décomposition n'est pas réduite, c'est encore une union de $\mathcal{C}(v)/B$ pour $v \leq u$ et ceci provient de la remarque faite juste après la définition 2.3.7 des systèmes de Tits. \square

2.4 Cas des groupes de Lie et des groupes algébriques : tores maximaux

Nous allons ici inspecter quelques résultats supplémentaires de cohomologie équivariante dans le cas des groupes algébriques et surtout des groupes de Lie compact. Nous allons notamment voir comment l'on peut relier la cohomologie équivariante de l'action de G avec celle de l'action restreinte d'un tore maximal T , via le groupe de Weyl $W = N(T)/T$. Grossièrement parlant, les résultats que nous allons voir disent que H_G^* peut se calculer à partir de H_T^* et de W . Nous verrons aussi que l'on peut se restreindre aux groupes connexes, en se ramenant au calcul de $H_{G^0}^*$, avec G^0 la composante connexe de l'identité. On peut traduire ceci par de l'irréductibilité dans le cas des groupes algébriques, en prenant pour G^0 la composante irréductible contenant l'identité.

Avant tout, rappelons quelques faits sur le groupe de Weyl. Dans la suite, un groupe de Lie sera supposé réel et un groupe algébrique sera supposé complexe, affine. Sauf mention du contraire, on notera simplement H^* la cohomologie à coefficients rationnels.

Lemme 2.4.1. ([28], Theorem 3.7.2 ou [10], IV, Theorem 1.5)

Si G est un groupe de Lie compact connexe et T un tore maximal (i.e. un sous-groupe fermé connexe compact abélien maximal), alors le groupe de Weyl $W := N_G(T)/T$ est fini.

Remarque 2.4.2. 1. Comme tous les tores maximaux sont conjugués (cf [28], 3.7.1 et [10], IV, 1.6), le groupe de Weyl ne dépend que de G .

2. Le résultat ci-dessus et l'unicité du groupe de Weyl demeurent vrais pour un groupe algébrique (cf [70], 22.5.11), où un *tore* est par définition un sous-groupe algébrique connexe diagonalisable.
3. Le groupe de Weyl W agit sur le tore T par adjonction et si \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{h}) désigne l'algèbre de Lie de G (resp. de T), alors \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et W agit sur \mathfrak{h} de la même façon que le groupe de Weyl du système de racines associé à \mathfrak{h} (en particulier, W agit comme un groupe de réflexion). Pour ceci, voir [44], Theorem II.3.

Lemme 2.4.3. ([28], 1.9.1 et [70], 22.1.6)

Soit G un groupe de Lie compact (resp. un groupe algébrique) et soit G^0 la composante connexe de G contenant e (resp. l'unique composante irréductible contenant e , qui est aussi la composante connexe de e ; puisqu'un groupe algébrique est connexe si et seulement s'il est irréductible, voir [70], 21.1.7). Alors $G^0 \trianglelefteq G$ et le quotient $\Gamma := G/G^0$ est fini.

Démonstration. Dans les deux cas, on note $\mu : G \times G \rightarrow G$ la multiplication et $\iota : G \rightarrow G$ l'inverse. Alors $\mu(G^0 \times G^0)$ est connexe (resp. irréductible) et contient e , donc $\mu(G^0 \times G^0) \subset G^0$ et de même pour ι ; donc G^0 est un sous-groupe de G . De plus, si $g \in G$, alors $gG^0g^{-1} = {}^gG^0$ est un connexe (resp. un fermé irréductible) contenant e , donc ${}^gG^0 \subset G^0$ et G^0 est bien un sous-groupe distingué de G . Si G est un groupe de Lie compact, alors $\Gamma \approx \pi_0(G)$ est fini et si G est un groupe algébrique, alors ${}^gG^0$ est l'unique composante irréductible de G contenant $g \in G$ et dans tous les cas, on a bien $|\Gamma| < \infty$. \square

Avant de passer aux résultats de réduction, commençons par faire quelques remarques sur les actions de groupes finis, le lien avec leur cohomologie (au sens de la cohomologie des groupes, que l'on notera $H_{\mathfrak{G}}^* = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^*(\mathbb{Z}, -)$) et en particulier, la suite spectrale de Cartan-Leray.

Lemme 2.4.4. ([2], Remark 2.3)

Si G est un groupe fini et M un $\mathbb{Z}G$ -module, alors par la HLP, M définit un système local de coefficients \underline{M} sur le classifiant B_G et on a un isomorphisme d'algèbres

$$H^*(B_G, \underline{M}) \simeq H_{\mathfrak{G}}^*(G, M).$$

De plus, cet isomorphisme demeure en remplaçant \mathbb{Z} par \mathbb{Q} .

Démonstration. G agit librement sur E_G qui est contractile, donc le complexe singulier $S_*(E_G) \rightarrow \mathbb{Z}$ est une résolution $\mathbb{Z}G$ -libre du G -module trivial \mathbb{Z} . De plus, par des calculs élémentaires, on voit que l'on a un isomorphisme $C^*(B_G, \underline{M}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(E_G), M)$, et donc

$$H^*(B_G, M) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(S_*(E_G), M)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^*(\mathbb{Z}, M) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\mathfrak{G}}^*(G, M).$$

\square

Proposition 2.4.5. (Suite spectrale de Cartan-Leray, [13], XVI, §8)

Soit G un groupe fini agissant librement sur un espace séparé X . Alors, on a une suite spectrale d'algèbres de premier quadrant convergente

$$E_2^{p,q} = H_{\mathfrak{G}}^p(G, H^q(X, \mathbb{Q})) \implies H^{p+q}(X/G, \mathbb{Q}).$$

Démonstration. On a la construction de Borel $\omega_G[X] = (X \rightarrow X_G \rightarrow B_G)$ et la suite spectrale de Leray-Serre associée s'écrit

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, \underline{H^q(X, \mathbb{Q})}) \implies H^{p+q}(X_G, \mathbb{Q}).$$

Comme l'action est libre, la Proposition 2.2.5 donne $H^*(X_G, \mathbb{Q}) = H^*(X/G, \mathbb{Q})$. De plus, l'action de G sur X induit une action de G sur la cohomologie $H^q(X, \mathbb{Q})$ qui fait de ce dernier espace un $\mathbb{Q}G$ -module et par le Lemme 2.4.4, on a $H^*(B_G, \underline{H^q(X, \mathbb{Q})}) \simeq H_{\mathfrak{G}}^*(G, H^q(X, \mathbb{Q}))$, d'où le résultat. \square

Corollaire 2.4.6. *Si un groupe fini G agit librement sur un espace séparé X , alors on a un isomorphisme d'algèbres*

$$H^*(X/G, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X, \mathbb{Q})^G.$$

Démonstration. Par [73], Theorem 6.5.8, si M est un $\mathbb{Q}G$ -module et si $m = |G|$, alors pour tout $p > 0$, on a $mH^p(G, M) = 0$ et comme \mathbb{Q} est de caractéristique nulle, on a $H^p(G, M) = 0$ pour tout $p > 0$ et en particulier, la suite spectrale de Cartan-Leray s'effondre en deuxième page et donne donc

$$H^q(X, \mathbb{Q})^G = H_{\mathfrak{G}}^0(G, H^q(X, \mathbb{Q})) = E_2^{0,q} \simeq H^q(X/G, \mathbb{Q}).$$

□

Remarque 2.4.7. Par le théorème 4.3.13 de [26], si X est séparé et si G est un groupe fini agissant librement sur X , alors la projection $X \rightarrow X/G$ est un revêtement fini de fibre G .

Proposition 2.4.8. ([44], Reduction 1, p. 35)

Soient G un groupe de Lie compact et $\Gamma = G/G^0$. Alors on a

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) \simeq H^*(B_{G^0}, \mathbb{Q})^\Gamma.$$

Démonstration. Par 2.4.3, Γ est fini et si $\omega_G = (G \rightarrow E_G \rightarrow B_G)$, alors $E_G/G \simeq B_G$ et on peut prendre $E_G/G^0 \simeq B_{G^0}$ et on a donc une action libre de Γ sur B_{G^0} , de quotient B_G et un revêtement fini $\Gamma \rightarrow B_{G^0} \rightarrow B_G$ et le résultat découle alors du Corollaire 2.4.6. □

Théorème 2.4.9. ([44], III, Lemma 1.1)

Soient G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal et $W = N(T)/T$ le groupe de Weyl de G . Alors $G/N(T) \sim_{\mathbb{Q}} pt$, i.e. on a

$$H^*(G/N(T), \mathbb{Q}) \simeq H^*(G/T, \mathbb{Q})^W \simeq H^*(pt, \mathbb{Q}).$$

Démonstration. W agit librement sur G/T et est fini, donc par 2.4.6, on a

$$H^*(G/N(T), \mathbb{Q}) \simeq H^*(G/T, \mathbb{Q})^W$$

et $W \rightarrow G/T \rightarrow G/N$ est un revêtement fini et la suite spectrale de Serre associée donne

$$\chi(G/N(T)) = \frac{1}{|W|} \chi(G/T),$$

où χ désigne la caractéristique d'Euler. Du corollaire 2.3.29, qui découle de la décomposition de Bruhat de G/T , on tire

$$H^{2k+1}(G/T, \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Q}} H^*(G/T, \mathbb{Q}) = \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{Q}} H^k(G/T, \mathbb{Q}) = \chi(G/T) = |W|$$

et donc

$$H^{2k+1}(G/N(T), \mathbb{Q}) = H^{2k+1}(G/T, \mathbb{Q})^W = 0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{Q}} H^*(G/N, \mathbb{Q}) = \chi(G/N) = \frac{\chi(G/T)}{|W|} = 1,$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.4.10. ([44], Reduction 2, p. 35)

Si G est un groupe de Lie compact, T un tore maximal et $W = N(T)/T$ le groupe de Weyl, vu comme agissant par automorphismes sur T , alors

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) \simeq H^*(B_{N(T)}, \mathbb{Q}) \simeq H^*(B_T, \mathbb{Q})^W.$$

Démonstration. Par 2.4.9, G/N est \mathbb{Q} -acyclique et $G/N \rightarrow B_{N(T)} \xrightarrow{\pi} B_G$ est un espace fibré pour lequel la suite spectrale de Serre s'effondre en deuxième page et donc π^* est un isomorphisme

$$\pi^* : H^*(B_G, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} H^*(B_{N(T)}, \mathbb{Q}).$$

Maintenant, on a $E_{N(T)}/T = B_T$ et on a

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) \xrightarrow[\simeq]{\pi^*} H^*(B_{N(T)}, \mathbb{Q}) \simeq H^*(B_T, \mathbb{Q})^{N(T)/T} = H^*(B_T, \mathbb{Q})^W.$$

□

Proposition 2.4.11. Si G est un groupe de Lie compact, G^0 la composante connexe de l'identité, $\Gamma = G/G^0$ et X un G -espace, alors on a

$$H_G^*(X) \simeq H_{G^0}^*(X)^\Gamma.$$

Démonstration. G agissant librement sur X_G , on a une action libre de Γ sur X_{G^0} , de quotient X_G et on obtient un revêtement $\Gamma \rightarrow X_{G^0} \rightarrow X_G$ et par 2.4.6, on obtient le résultat. □

Remarque 2.4.12. Tout ceci reste vrai si G est un groupe algébrique *réductif* (i.e. $R_u(G) = 1$ où $R_u(G) = \langle \mathcal{U}(G) \rangle$ et le *radical unipotent* de G , avec $\mathcal{U}(G)$ l'ensemble des sous-groupes algébriques unipotents de G). On peut montrer (cf [70], 27.2.1 et 27.2.2) que G est réductif si et seulement si \mathfrak{g} est réductif et si tout élément de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

Exemple 2.4.13. ([44], III, Examples 1, 2)

1. Prenons le groupe de Lie réel compact $G = U(n)$. L'algèbre de Lie de G est $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ et on a un tore maximal

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} e^{2i\pi\theta_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{2i\pi\theta_n} \end{array} \right), \theta_i \in \mathbb{R} \right\} \simeq (\mathbb{S}^1)^n.$$

Ensuite, on a

$$W = N(T)/T = W(\Phi_{\mathfrak{u}(n)}) \simeq \mathfrak{S}_n$$

et W agit sur T en permutant les θ_i . On a vu en 2.2.2 que

$$H^*(B_T, \mathbb{Q}) \simeq H^*(B_{(\mathbb{S}^1)^n}, \mathbb{Q}) \simeq H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n],$$

où les x_i sont de degré 2. Donc, W agit sur $H^*(B_T, \mathbb{Q})$ en permutant les x_i et on a

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) = H^*(B_T, \mathbb{Q})^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Q}[\sigma_1, \dots, \sigma_n],$$

où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires en les x_i .

2. Prenons $G = SO(2n + 1)$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$ est simple de type B_n . Alors $X \simeq \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et on a un tore maximal

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} & \\ (0) & & & 1 \\ 0 & \dots & & \end{array} \right), \theta_i \in \mathbb{R} \right\} \simeq (\mathbb{S}^1)^n.$$

Ici, W agit en permutant les θ_i et en changeant les signes, donc

$$H^*(B_{SO(2n+1)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^W \simeq \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n],$$

où les p_i sont les polynômes symétriques élémentaires en les x_i^2 .

3. Soit $G = SO(2n)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, simple de type D_n . Alors, en notant $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_2)^n ; \sum_i \alpha_i = 0\}$, on a $W \simeq \mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_0^n$ et un tore maximal est donné par

$$T = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} & \\ (0) & & & \end{array} \right), \theta_i \in \mathbb{R} \right\} \simeq (\mathbb{S}^1)^n.$$

et donc

$$H^*(B_{SO(2n)}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_{n-1}, e],$$

avec $e = x_1 \cdots x_n$ (on a alors $e^2 = p_n$).

4. Choisissons enfin $G = SU(2)$, de tore maximal

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{S}^1 \right\}$$

Calculons $N_G(T)$. Par calculs directs, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in N_{SU(2)}(\mathbb{S}^1) \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0,$$

et alors

$$N_{SU(2)}(\mathbb{S}^1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\bar{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{S}^1 \right\rangle.$$

On obtient le groupe de Weyl :

$$W = N_{SU(2)}(\mathbb{S}^1)/\mathbb{S}^1 \simeq \mathfrak{S}_2 = \{1, \sigma\}$$

et l'action de W sur T est donnée par

$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Considérons l'algèbre de cohomologie $H^*(B_T) = H^*(B_{\mathbb{S}^1}) = \mathbb{Q}[x]$ avec $|x| = 2$. $W = \mathfrak{S}_2$ agit sur $H^*(B_T)$ en multipliant x par -1 : $\sigma \cdot x = -x$. Ainsi, si on pose $c := x^2$, on a $\mathbb{Q}[x]^{\mathfrak{S}_2} \simeq \mathbb{Q}[c]$ et $|c| = 4$. Par la Proposition 2.4.10, on a alors

$$H^*(B_{SU(2)}, \mathbb{Q}) = H^*(B_{\mathbb{S}^1})^W = \mathbb{Q}[x]^{\mathfrak{S}_2} = \mathbb{Q}[c], \quad |c| = 4.$$

Plus généralement, on peut montrer que

$$H^*(B_{SU(n)}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[c_2, \dots, c_n], \quad |c_i| = 2i.$$

Des considérations précédentes, on peut tirer les résultats importants suivants, dont certains seront précisés en fin de partie (voir section 2.6).

Proposition 2.4.14. *La cohomologie (rationnelle) de l'espace classifiant d'un groupe de Lie compact est nulle en degrés impairs.*

Démonstration. Par 2.4.8, puisqu'on a $H^*(B_G, \mathbb{Q}) = H^*(B_{G^0}, \mathbb{Q})^\Gamma$ (où $\Gamma = G/G^0$ est fini), il suffit de montrer le résultat pour un groupe connexe. Ensuite, d'après 2.4.10, pour un groupe connexe G , on a $H^*(B_G) = H^*(B_T)^W$ et il suffit donc de regarder le cas où G est un tore compact. Or dans ce cas, on a $G \simeq (\mathbb{S}^1)^n$ et alors,

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) = H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)^n, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n],$$

avec les t_i de degré pair et ceci permet de conclure. \square

Corollaire 2.4.15. *Si G est un groupe de Lie compact connexe, de tore maximal T , alors on a un isomorphisme de $H^*(B_G)$ -modules*

$$H^*(B_T) \simeq H^*(B_G) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G/T).$$

Démonstration. On a une fibration de Serre $G/T \hookrightarrow B_T \rightarrow B_G$ et la suite spectrale associée

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, H^q(G/T, \mathbb{Q})) \implies H^{p+q}(B_T, \mathbb{Q}).$$

Par compacité, on peut appliquer la formule de Künneth et obtenir $E_2^{p,q} = H^p(B_G) \otimes_{\mathbb{Q}} H^q(G/T)$. Or, par la preuve de 2.4.9 et 2.4.14, on a

$$\forall k, H^{2k+1}(B_G) = H^{2k+1}(G/T) = 0,$$

donc la suite dégénère et on obtient alors

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, (H^*(B_G) \otimes H^*(G/T))^n &= \bigoplus_{p+q=n} H^p(B_G) \otimes H^q(G/T) = \bigoplus_{p+q=n} E_2^{p,q} \\ &= \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q} = \bigoplus_{p+q=n} \left(F^p H^n(B_T) / F^{p+1} H^n(B_T) \right) = H^n(B_T), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Remarque 2.4.16. Si G est un groupe de Lie compact connexe et $H \leq G$ un sous-groupe fermé, alors G agit par translation sur G/H et on a

$$(G/H)_G = G/H \times_G E_G = (G \times_G E_G)/H = E_G/H \simeq B_H,$$

donc

$$H_G^*(G/H, \mathbb{Q}) \simeq H_H^*(\text{pt}, \mathbb{Q}).$$

Or, en général on a

$$H_H^*(\text{pt}) \neq H_G^*(\text{pt}) \otimes H^*(G/H),$$

donc l'action $G \curvearrowright G/H$ n'est pas équivariamment formelle. Cependant, le Corollaire 2.4.15 ci-dessus affirme que c'est le cas quand $H = T$ est un tore maximal de G .

Proposition 2.4.17. ([44], III, Proposition 1)

Soient G un groupe de Lie compact connexe, T un tore maximal, $W = N(T)/T$ le groupe de Weyl et X un G -espace. Alors, on a

1.

$$H_G^*(X) \simeq H_{N(T)}^*(X) \simeq H_T^*(X)^W.$$

2.

$$\begin{aligned} H_T^*(X) &\simeq H_G^*(X) \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_T^*(\text{pt}) \\ &= H_G^*(X) \otimes_{H^*(B_G)} H^*(B_T). \end{aligned}$$

Démonstration. 1. On a $G/N \sim_{\mathbb{Q}} \text{pt}$, donc la suite de Serre de l'espace fibré $G/N \rightarrow X_{N(T)} \rightarrow X_G$ donne

$$H^*(X_G, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X_{N(T)}, \mathbb{Q})$$

et $W \rightarrow X_T \rightarrow X_{N(T)}$ étant un revêtement, on obtient

$$H^*(X_{N(T)}, \mathbb{Q}) \simeq H^*(X_T, \mathbb{Q})^W.$$

2. Par 2.4.15, on a un isomorphisme de $H^*(B_G)$ -modules

$$H^*(B_T) \simeq H^*(B_G) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G/T)$$

donc $H^*(B_T)$ est un $H^*(B_G)$ -module libre. Ceci permet d'affirmer que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B_G)}(H^*(B_T), H_G^*(X)) \implies H_T^{p+q}(X)$$

s'effondre en deuxième page :

$$\forall p \neq 0, E_2^{p,\bullet} = \text{Tor}_{p,\bullet}^{H^*(B_G)}(H^*(B_T), H_G^*(X)) = 0$$

et on a

$$H_T^*(X) = E_2^{0,*} = \text{Tor}_{0,*}^{H^*(B_G)}(H^*(B_T), H_G^*(X)) = H^*(B_T) \otimes_{H^*(B_G)} H_G^*(X).$$

□

Regardons maintenant quelques applications à la notion d'équivariant formalité. En inspectant la preuve du Théorème 2.2.16, on constate que la seule information sur $H^*(B_G)$ utilisée est qu'elle s'annule en degré impair. On peut donc recopier mot pour mot cette preuve pour généraliser ce résultat au cas des groupes compact connexes :

Théorème 2.4.18. *Soient G un groupe de Lie compact connexe et X un G -espace. On suppose que la cohomologie de X est de dimension finie en tout degré et que X est connexe par arcs. On considère également l'espace fibré $X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *La suite spectrale de Borel :*

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, H^q(X)) \implies H_G^{p+q}(X)$$

dégénère en deuxième page.

ii) *X est équivariamment formel, i.e. on a un isomorphisme de $H^*(B_G)$ -modules :*

$$H_G^*(X) \simeq H^*(B_G) \otimes H^*(X).$$

iii) *$H_G^*(X)$ est un $H^*(B_G)$ -module libre.*

iv) *ι^* est un épimorphisme.*

De plus, sous une de ces hypothèses, le morphisme π^ est un monomorphisme.*

On en vient au résultat assez surprenant suivant, donnant une condition suffisante d'équivariante formalité pour les actions de groupes de Lie compacts connexes.

Corollaire 2.4.19. *Soit G un groupe de Lie compact connexe agissant sur un espace X . Si X ne possède pas de cohomologie en degré impair, alors il est équivariamment formel.*

Démonstration. Dans la suite spectrale de Borel (Leray-Serre)

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, H^q(X, \mathbb{Q})) \implies H_G^{p+q}(X),$$

on a $E_2^{p,q} = 0$ dès que p ou q est impair, donc cette suite dégénère et par le théorème 2.4.18, on obtient le résultat. \square

Remarque 2.4.20. On retrouve le fait que l'action par rotation de \mathbb{S}^1 sur \mathbb{S}^2 est équivariamment formelle, puisque $H^k(\mathbb{S}^2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ si $k = 0, 2$ et 0 sinon.

Soit maintenant G un groupe compact connexe (de sorte que B_G est simplement connexe). Si $G \curvearrowright X$ et $H \leq G$ un sous-groupe fermé de G , alors on a un diagramme de fibrations de Serre

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longrightarrow & X_H & \longrightarrow & X_G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longrightarrow & B_H & \longrightarrow & B_G \end{array}$$

et par le cas générale de la suite d'Eilenberg-Moore D.3, on obtient le

Théorème 2.4.21. *Dans ce contexte un a une suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B_G)}(H^*(B_H), H_G^*(X)) \implies H_H^{p+q}(X).$$

Exemple 2.4.22. 1. Si $H = 1$, cette suite se réécrit

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B_G)}(\mathbb{Q}, H_G^*(X)) \implies H^*(X),$$

ce qui donne une première information sur la façon de retrouver la cohomologie usuelle à partir de la cohomologie équivariante.

2. Si G agit sur X et sur Y , alors $G \times G$ agit sur $X \times Y$ et la diagonale $\Delta : G \rightarrow G \times G$ muni ainsi $X \times Y$ d'une action de G et, sous cette G -action, on adonne

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B_{G \times G})}(H^*(B_G), H^*(X_G \times Y_G)) \implies H_G^{p+q}(X \times Y),$$

ce qui peut s'interpréter comme une formule de Künneth en cohomologie équivariante. Nous allons en donner ci-après une version plus simple dans le cas où l'un des deux espaces au-moins est équivariamment formel.

Un des intérêts de l'équivariante formalité est qu'on peut retrouver la cohomologie usuelle d'un espace équivariamment formel à partir de sa cohomologie équivariante (voir [37], équation (1.2.4)). Plus précisément, on a

Corollaire 2.4.23. *Soit G un groupe de Lie compact connexe agissant sur une variété lisse compacte connexe M . Supposons que l'action soit équivariamment formelle. Alors, si S_G^+ désigne l'idéal d'augmentation de l'algèbre $H_G^*(\text{pt}, \mathbb{Q})$ (i.e. l'idéal engendré par les éléments homogènes de degré > 0), alors on a un isomorphisme d'algèbres graduées*

$$H^*(M) \simeq H_G^*(M) / S_G^+ H_G^*(M).$$

Démonstration. Par le Théorème 2.4.18, le $H_G^*(\text{pt})$ -module $H_G^*(M)$ est libre, donc la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de l'exemple 2.4.22 s'effondre en deuxième page et on obtient un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H^*(M) \simeq E_2^{0,*} = \text{Tor}_{0,*}^{H_G^*(\text{pt})}(\mathbb{Q}, H_G^*(M)) \simeq \mathbb{Q} \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_G^*(M).$$

Considérons ensuite le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} H_G^*(M) & \rightarrow & \mathbb{Q} \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_G^*(M) \\ \alpha & \mapsto & 1 \otimes \alpha \end{array}$$

Celui-ci se factorise par $S_G^+ H_G^*(M)$ puisque, si $u \in S_G^+$ et $\alpha \in H_G^*(M)$, la triviale de l'action de l'algèbre de cohomologie sur $H^*(\text{pt}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ donne

$$1 \otimes (u\alpha) = u \otimes \alpha = 0 \otimes \alpha = 0.$$

De plus, l'application $u \otimes v \mapsto [uv]$ définit un morphisme d'algèbres $\mathbb{Q} \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_G^*(M) \rightarrow H_G^*(M) / S_G^+ H_G^*(M)$, qui constitue clairement un inverse au morphisme ci-dessus, d'où le résultat. \square

L'équivariant formalité permet aussi de donner une version équivariante de la formule de Künneth :

Proposition 2.4.24. (Théorème de Künneth, [64], Proposition 4.25)

Soient X, Y deux G -espaces, avec G un groupe de Lie compact connexe. Supposons que Y soit équivariamment formel, connexe par arcs et que sa cohomologie $H^*(Y)$ soit de dimension finie sur \mathbb{Q} . Alors, on a un isomorphisme d'algèbres graduées

$$H_G^*(X \times Y) \simeq H_G^*(X) \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_G^*(Y).$$

Démonstration. Par le théorème 2.4.18, dire que Y est équivariamment formel entraîne que la restriction $\iota_Y^* : H_G^*(Y) \rightarrow H^*(Y)$ est une surjection et aussi que $H_G^*(Y) \simeq H^*(Y) \otimes_{\mathbb{Q}} H_G^*(\text{pt})$. Ensuite, l'inclusion $Y \xrightarrow{\iota_Y} Y \times_G E_G$ se factorise par $(X \times Y) \times_G E_G$, donc on a une surjection $H_G^*(X \times Y) \rightarrow H^*(Y)$. On peut donc appliquer le théorème de Leray-Hirsch 2.2.9 à l'espace fibré

$$Y \hookrightarrow (X \times Y) \times_G E_G \rightarrow X \times_G E_G$$

pour obtenir des isomorphismes d'algèbres

$$H_G^*(X \times Y) \simeq H_G^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(Y) = H_G^*(X) \otimes_{H_G^*(\text{pt})} (H_G^*(\text{pt}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(Y)) \simeq H_G^*(X) \otimes_{H_G^*(\text{pt})} H_G^*(Y).$$

□

2.5 Théorèmes de localisation et conséquences

Nous allons terminer cette initiation à la cohomologie équivariante en nous penchant sur un résultat classique très puissant : le théorème de localisation. Celui-ci permet de relier la cohomologie équivariante d'un espace à celle de ses points fixes. Plus précisément, il permet de coder l'information géométrique sur les points fixes dans de la torsion au niveau de la cohomologie. Historiquement, une première version de ce résultat apparaît dans [6]. Nous allons le présenter, puis nous nous intéresserons à une version plus générale exposée dans [44] et [21]. Comme conséquences de ceci, nous retrouverons le théorème de point fixe de Borel pour les actions de tores compacts, puis nous reviendrons rapidement sur l'équivariante formalité. Pour cet exposé, nous aurons besoin de résultats techniques (provenant de [6] et [63]) que nous ne prouverons pas.

Proposition 2.5.1. ([44], III, §2, Proposition 2 ou [6], IV, §5, Lemma 5.2)

Soit X un \mathbb{S}^1 -espace de dimension finie (ici, cela signifie que $H^k(U, \mathbb{Q})$ est de dimension finie pour tout k et il existe n tel que $H^k(U) = 0$ pour $k > n$) et soit $F := F(\mathbb{S}^1, X) = X^{\mathbb{S}^1}$ l'ensemble des points fixes sous action. Alors

1. On a un isomorphisme $H_{\mathbb{S}^1}^*(X - F) = H^*((X - F)/\mathbb{S}^1)$ et ce $H^*(B_{\mathbb{S}^1})$ -module est de torsion,
2. Si $r^* : H_{\mathbb{S}^1}^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\mathbb{S}^1}^*(F, \mathbb{Q}) \simeq H^*(F) \otimes H^*(B_{\mathbb{S}^1})$ est induit par l'inclusion $r : F \hookrightarrow X$, alors $\ker r^*$ et $\text{coker } r^*$ sont de torsion.

Démonstration. En utilisant la suite exacte longue en cohomologie équivariante de la paire (X, F) , 2. se déduit immédiatement de 1.. Ensuite, $X - F$ est ouvert dans X et le fait que $H^*((X - F)/\mathbb{S}^1)$ soit de dimension finie (au sens de l'énoncé) (et donc de $H^*(B_{\mathbb{S}^1})$ -torsion) résulte du lemme 5.2 de [6], IV. Il reste donc à prouver que $H_{\mathbb{S}^1}^*(X - F) \simeq H^*((X - F)/\mathbb{S}^1)$. Si $x \in X - F$, alors le stabilisateur \mathbb{S}_x^1 est un sous-groupe fermé propre de \mathbb{S}^1 , donc est fini (même cyclique) et par 2.4.6, il vient $H^*(B_{\mathbb{S}_x^1}, \mathbb{Q}) = H^*(E_{\mathbb{S}^1}/\mathbb{S}_x^1, \mathbb{Q}) = H^*(E_{\mathbb{S}^1}, \mathbb{Q})^{\mathbb{S}_x^1} = \mathbb{Q}$. Donc, si on note $\pi : (X - F)_{\mathbb{S}^1} \rightarrow (X - F)/\mathbb{S}^1$, alors

$$\begin{aligned} \forall x \in X - F, H^*(\pi^{-1}(\bar{x})) &= H^*(E_{\mathbb{S}^1} \times_{\mathbb{S}^1} (\mathbb{S}^1/\mathbb{S}_x^1)) \\ &= H^*((E_{\mathbb{S}^1} \times \mathbb{S}^1)/\mathbb{S}_x^1) = H^*(E_{\mathbb{S}^1}/\mathbb{S}_x^1) = H^*(B_{\mathbb{S}_x^1}) = \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

donc la suite spectrale de Leray de l'application continue π s'effondre en E_2 et il vient

$$H^*((X - F)/\mathbb{S}^1) = E_2^{*,0} = H^*((X - F)/\mathbb{S}^1) = H_{\mathbb{S}^1}^*(X - F).$$

□

Pour le résultat suivant (qui n'est pas encore tout-à-fait le plus général que nous présenterons), nous aurons besoin de l'existence de *slices*, ou *tranches*, associées à l'action d'un groupe de Lie compact.

Définition 2.5.2. ([6], VIII, Définition 3.2)

Soit G un groupe topologique agissant sur un espace X et soit $x \in X$. Une partie $S \subset X$ est appelée *slice*, ou *tranche* en x si :

1. S est G_x -stable,
2. $G(S) := \bigsqcup_{s \in S} G(s)$ est un voisinage ouvert de l'orbite $G(x)$ dans X ,
3. $G(S) \simeq G \times_{G_x} S$.

Dans ce cas, $G(S)$ est un voisinage ouvert G -invariant de x qui se rétracte équivariamment sur $G(x)$.

Proposition 2.5.3. ([6], VIII, 3.9)

Si X est un G -espace complètement régulier, avec G un groupe de Lie compact, alors tout $x \in X$ admet un slice.

En particulier, ceci est vrai si X est compact; puisque dans ce cas X est complètement régulier.

Avant de passer à la suite, énonçons deux résultats utiles dûs à Quillen :

Lemme 2.5.4. ([63], 1.9, p. 552)

Si A est un fermé G -invariant d'un G -espace X (avec G un groupe de Lie compact) et si X est paracompact (ou bien si A est compact dans X séparé), alors on a

$$H_G^*(A) = \varinjlim_{U \supset A} H_G^*(U)$$

où U parcourt un système fondamental de voisinages (ouverts ou fermés) invariant de A dans X .

Lemme 2.5.5. ([63], Proposition A.11, p. 572)

Si G est un groupe de Lie compact agissant sur un espace paracompact X , alors la dimension cohomologique (au sens des faisceaux) de X/G est au-plus égale à celle de X .

Remarque 2.5.6. Par le corollaire A.10 de [63], tout CW-complexe fini est de dimension cohomologique finie, donc le résultat ci-dessus est vrai si X est un CW-complexe.

Soient maintenant un groupe de Lie compact G , $R := H^*(B_G) = H_G^*(\text{pt})$, $S \subset R$ un système multiplicatif (supposé inclus dans le centre de R) et X un G -espace. Considérons X^S l'ensemble des points de x pour lesquels aucun élément de S n'est envoyé sur zéro par le morphisme naturel $R \rightarrow H^*(B_{G_x}) = H_{G_x}^*(\text{pt})$. Autrement dit

$$X^S := \{x \in X ; S \cap \ker(R \rightarrow H_{G_x}^*(\text{pt})) = \emptyset\}.$$

Théorème 2.5.7. ([44], Theorem III.1)

Soit G un groupe de Lie compact agissant sur un espace compact X et soit $S \subset R = H_G^(\text{pt})$ un système multiplicatif. Alors, on a un isomorphisme canonique de R -modules*

$$S^{-1}H_G^*(X) \xrightarrow[\simeq]{S^{-1}l_G^*} S^{-1}H_G^*(X^S),$$

induit par l'inclusion équivariante $\iota : X^S \hookrightarrow X$.

Démonstration. • On suppose d'abord que $X^S = \emptyset$ et montrons que $S^{-1}H_G^*(X) = 0$. Il suffit pour cela de montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $\pi_1^*(s) = 0 \in H_G^*(X)$, où $\pi_1 : X_G \rightarrow B_G$ provient de la construction de Borel $\omega_G[X]$. Par la proposition précédente, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert G -invariant U_x de $G(x)$ dans X , dont $G(x)$ est un rétract équivariant. Comme X est compact, on peut choisir un nombre fini U_{x_1}, \dots, U_{x_q} de tels voisinages recouvrant X . Comme $X^S = \emptyset$, pour $1 \leq i \leq q$, on a $x_i \notin X^S$, i.e.

$$\forall 1 \leq i \leq q, \exists s_i \in S ; s_i \in \ker(R \rightarrow H^*(B_{G_{x_i}})) = \ker(R \rightarrow H_G^*(G(x_i))),$$

cette dernière égalité provenant du fait que

$$H^*(B_{G_{x_i}}) = H^*(E_G/G_{x_i}) = H^*((E_G \times (G/G_{x_i}))/G) = H_G^*(G/G_{x_i}) = H_G^*(G(x_i)).$$

On a donc $s_i \in \ker(R \rightarrow H_G^*(U_{x_i}))$, car U_{x_i} se rétracte équivariamment sur $G(x_i)$ et donc, si $s := s_1 \cdots s_q \in S$, alors $\pi_1^*(s) = 0$ dans $H_G^*(X) = H_G^*(U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_q})$.

• Dans le cas général, par la suite exacte longue de la paire (X, X^S) , comme la localisation est un foncteur exact, il suffit de montrer que

$$S^{-1}H_G^*(X, X^S) = 0.$$

Pour cela, il suffit de montrer que si $x \in H_G^n(X, X^S)$, il existe $s \in S$ tel que $s \cdot x = 0$. On rappelle que l'on peut prendre pour B_G un CW-complexe et posons $X_G^k := \pi_1^{-1}(B_G^k)$, avec B_G^k le k -squelette de B_G . Alors, si $k > n$, on a (cohomologie cellulaire) $H^n(X_G) = H^n(X_G^k)$ et on peut alors supposer que

$$x \in H_G^n(X, X^S) \stackrel{\text{def}}{=} H^n(X_G, X_G^S) = H^n(X_G^k, X_G^S \cap X_G^k).$$

L'application π_1 étant propre et B_G^k compact, X_G^k est compact. De plus, l'ensemble

$$\mathcal{V} := \{V_G \cap X_G^k, V \text{ voisinage fermé invariant de } X^S\}$$

est un système fondamental de voisinages de $X_G^S \cap X_G^k$ dans X_G^k et par le lemme 2.5.4, on obtient

$$H_G^n(X, X^S) = H^n(X_G^k, X_G^S \cap X_G^k) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} H^n(X_G^k, V_G \cap X_G^k) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} H_G^n(X, V).$$

Ainsi, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}$ tel que

$$x \in \text{im}(H_G^n(X, V) \rightarrow H_G^n(X, X^S)).$$

D'autre part, on peut choisir un sous-espace compact invariant $Y \subset X - X^S$ tel que $X = V \cup \mathring{Y}$ (prendre par exemple $Y = X - \mathring{V} = \overline{X} - \overline{V}$). Comme on a $Y^S = \emptyset$, par le premier point, il existe $s \in S$ tel que $\pi_1^*(s) = 0$ dans $H_G^*(Y)$. Par la suite exacte longue de la paire (X, Y) :

$$\dots \longrightarrow H_G^{\ell-1}(Y) \xrightarrow{\delta} H_G^\ell(X, Y) \longrightarrow H_G^\ell(X) \longrightarrow H_G^\ell(Y) \longrightarrow \dots$$

on obtient $\pi_1^*(s) \in \text{im}(H_G^*(X, Y) \rightarrow H_G^*(X))$ et donc, comme on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_G^n(X, Y) & \longrightarrow & H_G^*(X) \\ & \searrow & \nearrow \\ & H_G^*(X, \mathring{Y}) & \end{array}$$

on a aussi $\pi_1^*(s) \in \text{im}(H_G^*(X, \mathring{Y}) \rightarrow H_G^*(X))$ et donc

$$s \cdot x \in \text{im}(H_G^*(X, V \cup \mathring{Y}) \rightarrow H_G^*(X, X^S)),$$

i.e. $s \cdot x = 0$. □

Nous pouvons maintenant passer au résultat principal, tel que l'on le trouve dans [44], Theorem III.1' et dans [21], Theorem 2.2. Rappelons d'abord que deux orbites sont dites *de même type* si leurs stabilisateurs le sont, c'est-à-dire s'ils sont conjugués.

Théorème 2.5.8. (Localisation de Borel-Atiyah-Segal-Hsiang)

Soient G un groupe de Lie compact agissant sur un espace paracompact X , de dimension cohomologique finie, $R := H_G^*(pt)$ et $S \subset Z(R)$ un système multiplicatif et $s \in S$. Alors, le localisé de la restriction est un isomorphisme de R -modules

$$S^{-1}H_G^*(X) \xrightarrow{\cong} S^{-1}H_G^*(X^s).$$

De plus, si X possède un nombre fini de types d'orbites, alors on a un isomorphisme

$$S^{-1}H_G^*(X) \xrightarrow{\cong} S^{-1}H_G^*(X^S).$$

Démonstration. • Tout d'abord, la première assertion entraîne la seconde. Pour ceci, il suffit de montrer que si X consiste en un nombre fini de types d'orbites, alors il existe $s \in S$ tel que $X^S = X^s$. Soient donc G_1, \dots, G_m des représentants des types de stabilisateurs de points de $X - X^S$. Si on note $G_i = G_{x_i}$, alors $x_i \notin X^S$ et on peut choisir $s_i \in S$ tel que $s_i \in \ker(R \rightarrow H^*(B_{G_i}))$ et posons $s := s_1 \cdots s_m \in S$. Alors on a clairement $X^S \subset X^s$ et comme $s \in \bigcap_i \ker(R \rightarrow H_{G_i}^*(\text{pt}))$, on a aussi $X^s \subset X^S$ comme voulu.

• Supposons que, si $X^s = \emptyset$, alors il existe $N \gg 0$ tel que $\pi_1^*(s^{N+1}) = 0$ dans $H_G^*(X)$. On procède comme pour le Théorème précédent en montrant que

$$S^{-1}H_G^*(X, X^s) = 0.$$

Soit donc $\alpha \in H_G^n(X, X^s)$ et montrons qu'il existe $t \in S$ tel que $t \cdot \alpha = 0$. Prenons B_G^k le k -squelette de B_G et posons $X_G^k := \pi_1^{-1}(B_G^k)$, où $\pi_1 : X_G \rightarrow B_G$. Si $k > n$, on a

$$\alpha \in H_G^n(X, X^s) = H^n(X_G^k, X_G^s \cap X_G^k).$$

Là encore, $\mathcal{V} := \{V_G \cap X_G^k, V \text{ voisinage fermé invariant de } X^s\}$ est un système fondamentale de voisinages de $X_G^s \cap X_G^k$ dans X_G^k et comme X est paracompact, par le lemme 2.5.4, on a

$$H_G^n(X, X^s) = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}} H_G^n(X, V)$$

et on peut donc choisir un voisinage fermé invariant V de X^s tel que

$$\alpha \in \text{im}(H_G^*(X, V) \rightarrow H_G^*(X, X^s)).$$

Soit $Y \subset X - X^s$ un sous-espace paracompact invariant tel que $V \cup \overset{\circ}{Y} = X$. Comme on a $Y^s = \emptyset$, par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que $\pi_1^*(s^{N+1}) = 0 \in H_G^*(Y)$ et, toujours par la suite exacte longue de la paire (X, Y) , on obtient $\pi_1^*(s)^{N+1} = \pi_1^*(s^{N+1}) \in \text{im}(H_G^*(X, Y) \rightarrow H_G^*(X))$ et donc

$$\pi_1^*(s)^{N+1} \in \text{im}(H_G^*(X, \overset{\circ}{Y}) \rightarrow H_G^*(X)).$$

Ainsi, on a

$$\pi_1(s)^{N+1} \alpha \in \text{im}(H_G^*(X, V \cup \overset{\circ}{Y}) \rightarrow H_G^*(X, X^s))$$

d'où $s^{N+1} \cdot \alpha = 0$ et donc $t = s^{N+1} \in S$ convient.

• Il reste donc à prouver que, si $X^s = \emptyset$, alors

$$\exists N \geq 0 ; \pi_1^*(s^{N+1}) = 0.$$

Par le lemme 2.5.5, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $H^k(X/G, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $k > N$ et tout faisceau abélien \mathcal{F} sur X/G . Notons $\pi_2 : X_G \rightarrow X/G$ et \mathcal{H}^q le faisceau sur X/G associé au préfaisceau $U \mapsto H^q(\pi_2^{-1}(U))$, de fibre

$$\mathcal{H}_x^q = H^q(\pi_2^{-1}(\bar{x})) = H^q(E_G \times_G (G/G_x)) = H^q(E_G/G_x) = H^q(B_{G_x})$$

en $\bar{x} \in X/G$. Alors, on a la suite spectrale de Leray de π_2 :

$$E_2^{p,q} = H^p(X/G, \mathcal{H}^q) \implies H_G^{p+q}(X)$$

et ici, on a $E_2^{p,q} = 0$ pour $p > N$. Par convergence, il existe une filtration multiplicative $F^p H_G^*(X)$ telle que $F^{N+1} H_G^*(X) = 0$ et

$$E_\infty^{p,*} = F^p H_G^*(X) / F^{p+1} H_G^*(X).$$

Comme $X^s = \emptyset$, on a

$$s \in \bigcap_{x \in X} \ker(R \rightarrow H^*(B_{G_x})) \Rightarrow s \in \bigcap_{\bar{x} \in X/G} \ker(R \rightarrow \mathcal{H}_{\bar{x}}^*)$$

donc s est envoyé sur 0 dans $E_2^{0,*} = H^0(X/G, \mathcal{H}^*)$ et donc aussi dans $E_{\infty}^{0,*}$. Comme on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow F^1 \longrightarrow F^0 \longrightarrow E_{\infty}^{0,*} \longrightarrow 0,$$

il vient $\pi_1^*(s) \in F^1 H_G^*(X)$ et, la filtration étant multiplicative, on en tire

$$\pi_1^*(s^{N+1}) = \pi_1^*(s)^{N+1} \in F^{N+1} H_G^*(X) = 0 \Rightarrow \pi_1^*(s^{N+1}) = 0,$$

et ceci achève la démonstration. \square

Nous allons enfin tirer quelques conséquences de ce Théorème, en étudiant les points fixes des actions de tores compacts sur des espaces raisonnables, et plus précisément le théorème de point fixe de Borel.

Fixons $T = \mathbb{T}^k := (\mathbb{S}^1)^k$ un tore compact. On a son algèbre de cohomologie équivariante (rationnelle)

$$R = H^*(B_T, \mathbb{Q}) = H^*((\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^k, \mathbb{Q}) = \bigotimes_{1 \leq i \leq k} H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty}, \mathbb{Q}) = \bigotimes_{1 \leq i \leq k} \mathbb{Q}[t_i] = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_k],$$

avec les t_i de degré 2. Soit aussi X un T -espace que l'on supposera au choix compact, ou bien paracompact, de dimension cohomologique et avec un nombre fini de types d'orbites. Nous allons voir que X^S est l'ensemble des points fixes de X sous action de T , pour le système multiplicatif $S = R \setminus \{0\}$. Pour un groupe topologique abélien G , on note $\widehat{G} := \text{Hom}_{\mathfrak{G}\text{Top}}(G, \mathbb{C}^{\times})$ le groupe des caractères multiplicatifs de G (son dual topologique). On rappelle que

$$\widehat{\mathbb{S}^1} = \text{End}_{\mathfrak{G}\text{Top}}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et on a donc un isomorphisme canonique

$$\widehat{T} \simeq (\widehat{\mathbb{S}^1})^k \simeq \mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{Z}[t_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[t_k] = H^2(B_T, \mathbb{Z}),$$

et il en est de même pour tout sous-groupe fermé $K \leq T$. Ensuite, pour un tel sous-groupe, on a un morphisme $\widehat{T} \rightarrow \widehat{K}$ induit par l'inclusion, qui est injectif si et seulement si $K = T$. Ainsi, pour K un sous-groupe fermé de T , on a

$$\ker(H^2(B_T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B_K, \mathbb{Z})) = 0 \Leftrightarrow K = T$$

et, en tensorisant par \mathbb{Q} , on obtient la même affirmation pour les coefficients rationnels, et, vu que tous les générateurs de $R = H^*(B_T)$ sont homogènes de degré 2, il vient

$$\ker(R \rightarrow H_K^*(\text{pt})) = 0 \Leftrightarrow K = T.$$

Ainsi, si $x \in X$, on a

$$x \in X^T \Leftrightarrow T_x = T \Leftrightarrow \ker(R \rightarrow H_{T_x}^*(\text{pt})) = 0 \Leftrightarrow S \cap \ker(R \rightarrow H_{T_x}^*(\text{pt})) = \emptyset \Leftrightarrow x \in X^S$$

et on a donc $X^T = X^S$, comme annoncé.

Théorème 2.5.9. (Borel, [44], IV, Proposition 1)

Soient $T = \mathbb{T}^k$ un tore compact et X un T -espace paracompact, de dimension cohomologique finie et admettant un nombre fini de types d'orbites (resp. un T -espace compact). En notant $S = R \setminus \{0\}$, avec R l'algèbre de cohomologie équivariante rationnelle de T , alors on a un isomorphisme de R -modules

$$S^{-1}H_T^*(X) \xrightarrow{\simeq} S^{-1}H_T^*(X^T),$$

ce dernier module étant isomorphe canoniquement à $H^*(X^T) \otimes_{\mathbb{Q}} S^{-1}R \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X^T) \otimes_{\mathbb{Q}} \text{Frac}(R)$.

Démonstration. Il suffit de combiner le fait que $X^T = X^S$ avec le Théorème 2.5.8 (resp. avec 2.5.7). \square

Corollaire 2.5.10. (Point fixe de Borel, [44], IV, Corollary 1, p. 45)

Soient $T = \mathbb{T}^k$ un tore compact et X un T -espace paracompact, de dimension cohomologique finie et admettant un nombre fini de types d'orbites (resp. un T -espace compact). Alors, X possède au-moins un point fixe si et seulement si le morphisme $H_T^*(pt) \rightarrow H_T^*(X)$ est injectif.

Démonstration. Si $x_0 \in X^T$ est un point fixe, alors on a une section $B_T \rightarrow \{x_0\}_T \hookrightarrow X_T$ de l'espace fibré $X_T \rightarrow B_T$ et donc $H^*(B_T) \rightarrow H^*(X_T)$ admet une rétraction, donc est injectif. Réciproquement, si $H^*(B_T) \rightarrow H^*(X_T)$ est un monomorphisme, alors $1 \in H_T^*(X)$ est sans torsion sur $H_T^*(pt)$ et donc $S^{-1}H_T^*(X) \neq 0$ et par 2.5.9, ceci entraîne que $S^{-1}H_T^*(X^T) \simeq S^{-1}H_T^*(X) \neq 0$ ce qui implique évidemment que $X^T \neq \emptyset$. \square

Remarque 2.5.11. 1. En notant $R_0 := \text{Frac}(R) = S^{-1}R$, le Théorème 2.5.9 peut se reformuler par

$$H_T^*(X) \otimes_{H_T^*(pt)} R_0 \simeq H_T^*(X^T) \otimes_{H_T^*(pt)} R_0,$$

ce dernier module étant isomorphe à $H^*(X^T) \otimes_{\mathbb{Q}} R_0$.

2. On peut également en déduire (cf [44], IV, Corollary 2, p. 46) que

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^*(X^T) \leq \dim_{\mathbb{Q}} H^*(X),$$

avec égalité équivalente à la dégénérescence de la suite spectrale de Serre de $X_T \rightarrow B_T$.

3. On peut généraliser ces deux derniers résultats au cas où G est un groupe compact connexe abélien de dimension (de recouvrement) finie, avec X un G -espace compact. Pour ceci, on pourra consulter [61], 3.9 à 3.12.

Donnons une dernière application du théorème de localisation, on a le résultat surprenant suivant, concernant les actions équivariamment formelles :

Théorème 2.5.12. (Borel-Hsiang, [64], Theorem 4.17 et [8], §2, Theorem 6)

Soit M une variété lisse compacte connexe sur laquelle agit un tore compact T . Supposons l'action équivariamment formelle et notons $\iota_M : M^T \hookrightarrow M$ l'inclusion. Alors, la restriction

$$\iota_M^* : H_T^*(M) \rightarrow H_T^*(M^T)$$

est injective.

Démonstration. Posons $R := H_T^*(\text{pt}) = H^*(B_T)$ et $S := R \setminus \{0\}$. Alors, par le Théorème 2.5.9, la restriction localisée

$$S^{-1}\iota_M^* : S^{-1}H_T^*(M) \rightarrow S^{-1}H_T^*(M^T)$$

est un isomorphisme. Comme M est équivariamment formelle par 2.2.16, on a un isomorphisme

$$H_T^*(M) \simeq H^*(M) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(B_G) = H^*(M) \otimes_{\mathbb{Q}} R$$

et le R -module $H_T^*(M)$ est libre. Ceci entraîne que ι_M^* est injective. \square

2.6 Appendice : Cohomologie d'un groupe de Lie compact connexe et de son espace classifiant

Nous allons donner ici quelques idées permettant de calculer la cohomologie (rationnelle) d'un groupe de Lie compact connexe et d'en déduire la cohomologie de son classifiant. Le calcul de $H^*(B_G)$ à partir de $H^*(G)$ s'effectue en suivant une idée due à Borel (voir [6]) qui consiste en une analyse minutieuse de la suite spectrale de Serre d'un G -fibré principal ω_G . En ce qui concerne la détermination de $H^*(G)$, l'idée est simple (et jolie!) : puisque G est un groupe, la multiplication $G \times G \rightarrow G$ et l'inversion $G \rightarrow G$ donnent des morphismes d'algèbres graduées commutatives $H^*(G) \rightarrow H^*(G) \otimes H^*(G)$ et $H^*(G) \rightarrow H^*(G)$, qui en font une *algèbre de Hopf* particulière. Il ne reste plus qu'à inspecter quelles peuvent être les structures de telles algèbres de Hopf, puis éliminer les cas trivialement exclus, pour déterminer la structure de $H^*(G)$. Pour cette section, nous suivront les preuves données dans [30] et [31]. Commençons par rappeler ce qu'est une algèbre de Hopf :

Définition 2.6.1. Soit k un anneau commutatif.

- Une k -bialgèbre est un quintuplet $(A, \nabla, \eta, \Delta, \varepsilon)$ consistant en un k -module A , muni d'applications k -linéaires $\nabla : A \otimes A \rightarrow A$, $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\eta : k \rightarrow A$ et $\varepsilon : A \rightarrow k$ telles que (A, ∇, η) soit une k -algèbre, (A, Δ, ε) soit une k -coalèbre et que les diagrammes suivants commutent (on a noté $\tau : x \otimes y \mapsto y \otimes x$)

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A & \xrightarrow{\nabla} & A \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\
 \Delta \otimes \Delta \downarrow & & & \uparrow \nabla \otimes \nabla \\
 A^{\otimes 4} & \xrightarrow{id \otimes \tau \otimes id} & A^{\otimes 4} & \\
 \\
 & & k \otimes k \otimes k & \\
 & & \swarrow \eta \otimes \eta & \searrow \eta \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A & \\
 \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\nabla} & A & \\
 \varepsilon \otimes \varepsilon \searrow & & \swarrow \varepsilon & \\
 & & k \otimes k \otimes k & \\
 \\
 k & \xrightarrow{\quad} & k & \\
 \varepsilon \swarrow & & \searrow \eta & \\
 & & A &
 \end{array}$$

- Une k -algèbre de Hopf est un sextuplet $(A, \nabla, \eta, \Delta, \varepsilon, \sigma)$ où $(A, \nabla, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est un bialgèbre sur k et où $\sigma \in \text{End}_k(A)$, appelée *antipode*, rend commutatif le diagramme

suisant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & \xrightarrow{\sigma \otimes id} & A \otimes A & & \\
 & \nearrow \Delta & & & & \searrow \nabla & \\
 A & \xrightarrow{\varepsilon} & k & \xrightarrow{\eta} & A & & \\
 & \searrow \Delta & & & & \nearrow \nabla & \\
 & & A \otimes A & \xrightarrow{id \otimes \sigma} & A \otimes A & &
 \end{array}$$

Exemple 2.6.2. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et si $U(\mathfrak{g})$ désigne son algèbre enveloppante, alors en posant

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \Delta(X) := X \otimes 1 + 1 \otimes X, \varepsilon(X) := 0, \sigma(X) := -X$$

on définit sur $U(\mathfrak{g})$ une structure d'algèbre de Hopf.

De même, si G est un groupe quelconque et kG son algèbre de groupe (disons sur un anneau commutatif k), alors en posant

$$\forall g \in G, \Delta(g) := g \otimes g, \varepsilon(g) := 1, \sigma(g) := g^{-1},$$

on définit sur kG une structure d'algèbre de Hopf.

Dans la suite de cette section, nous ne considérerons qu'un type particulier d'algèbre de Hopf, dans lesquelles la comultiplication Δ a une forme particulière. Aussi travaillerons-nous avec la définition plus restreinte suivante :

Définition 2.6.3. ([31], Definition 3.1)

Ici, ce que nous appellerons *algèbre de Hopf* sur un corps \mathbb{k} sera une \mathbb{k} -algèbre graduée commutative $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}^n$, munie d'un morphisme d'algèbres graduées commutatives $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{A}$ telles que

1. $\mathcal{A}^0 = \mathbb{k}$
2. Pour $\alpha \in \mathcal{A}^n$, il existe $k \geq 0$ et $\alpha'_0, \dots, \alpha'_k, \alpha''_0, \dots, \alpha''_k \in \mathcal{A}$ avec $|\alpha'_i|, |\alpha''_i| < n$ pour tout i et

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_{i=0}^k \alpha'_i \otimes \alpha''_i.$$

De plus, si $\alpha \in \mathcal{A}^n$ vérifie $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$, on dira que α est *primitif*.

Exemple 2.6.4. Si G est un groupe de Lie compact connexe, alors $H^*(G, \mathbb{Q})$ est une algèbre graduée commutative et la multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ induit, via le théorème de Künneth

$$\Delta : H^*(G) \xrightarrow{\mu^*} H^*(G \times G) \rightarrow H^*(G) \otimes H^*(G)$$

qui fait de $H^*(G)$ une algèbre de Hopf.

Exemple 2.6.5. 1. Prenons $\mathcal{A} := \mathbb{k}[\alpha]$ avec α de degré pair. Alors il existe une unique structure d'algèbre de Hopf sur \mathcal{A} prolongeant celle d'algèbre. En effet, si Δ est une comultiplication sur \mathcal{A} , alors pour des raisons de degré, on a $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$, i.e. α est primitif. On a alors

$$\Delta(\alpha^n) = (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \otimes \alpha^{n-k}$$

ainsi, Δ est déterminée par sa valeur en α , la seule possible étant celle rendant α primitif et Δ ainsi définie convient. Remarquons que l'antipode est donnée par $\alpha \mapsto -\alpha$.

2. Prenons maintenant $\mathcal{A} := \bigwedge_{\mathbb{Q}}(\beta)$ l'algèbre extérieure sur un générateur β de degré impair. Là aussi, on doit avoir $\Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$ et

$$\begin{aligned} \Delta(\beta)^2 &= (\beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta)^2 = (\beta \otimes 1)^2 + (\beta \otimes 1)(1 \otimes \beta) + (1 \otimes \beta)(\beta \otimes 1) + (1 \otimes \beta)^2 \\ &= (\beta^2 \otimes 1) + \beta \otimes \beta + \beta \otimes \beta + (1 \otimes \beta^2) = \beta \otimes \beta - \beta \otimes \beta = 0 = \Delta(\beta^2) \end{aligned}$$

car $|\beta|$ est impair et \mathcal{A} est commutative graduée. Ainsi, Δ donnée par $\Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$ est bien définie et on a bien une algèbre de Hopf.

3. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux algèbres de Hopf, alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{B}$ est également une algèbre de Hopf, si on la munit de la comultiplication

$$\Delta_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} := \Delta_{\mathcal{A}} \otimes \Delta_{\mathcal{B}}.$$

En particulier, $\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, ($|\alpha_i|$ pair), $\bigwedge_{\mathbb{Q}}(\beta_1, \dots, \beta_m)$, ($|\beta_i|$ impair) et $\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge_{\mathbb{Q}}(\beta_1, \dots, \beta_m)$ sont des algèbres de Hopf.

Théorème 2.6.6. ([31], Theorem 3.5)

Soit $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}^n$ une \mathbb{Q} -algèbre de Hopf telle que \mathcal{A}^n soit de dimension finie pour tout n . Alors, \mathcal{A} est isomorphe au produit tensoriel d'une algèbre de polynômes sur des générateurs de degré pair et d'une algèbre extérieure sur des générateurs de degré impair.

Démonstration. Comme chaque composante homogène est \mathcal{A}^ℓ est de dimension finie sur \mathbb{Q} , on peut choisir des éléments x_1, \dots, x_k, \dots qui engendrent \mathcal{A} en tant qu'algèbre, avec $|x_j| < |x_i|$ si $j < i$. Soit \mathcal{A}_n la sous-algèbre de \mathcal{A} engendrée par x_1, \dots, x_n . On peut supposer que $x_n \notin \mathcal{A}_{n-1}$. Alors, \mathcal{A}_n est une sous-algèbre de Hopf de \mathcal{A} car $\Delta(x_i) \in \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_n$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Considérons la multiplication canonique

$$\begin{cases} f : \mathcal{A}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_n] \rightarrow \mathcal{A}_n, & \text{si } |x_n| \text{ est pair} \\ f : \mathcal{A}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge_{\mathbb{Q}}(x_n) \rightarrow \mathcal{A}_n, & \text{si } |x_n| \text{ est impair} \end{cases}$$

Par définition de \mathcal{A}_n , f est surjective. Il reste donc à montrer que f est injective et effectuer une récurrence pour conclure.

Nous traitons seulement le cas où x_n est de degré pair, l'autre cas étant analogue. Supposons f non injective, de telle sorte qu'il existe une relation

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_n^i = 0, \quad \alpha_i \in \mathcal{A}_{n-1},$$

et supposons que k soit le degré minimal de telles relations. Soit \mathcal{I} l'idéal de \mathcal{A}_n engendré par les éléments de degré > 0 de \mathcal{A}_{n-1} et x_n^2 et soit $q : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n / \mathcal{I}$ la projection canonique. Notons que $x_n \notin \mathcal{I}$. Considérons la composée

$$\mathcal{A}_n \xrightarrow{\Delta} \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_n \xrightarrow{id \otimes q} \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_n / \mathcal{I}.$$

On a $(id \otimes q) \circ \Delta(\alpha_i) = \alpha_i \otimes 1$ et $(id \otimes q) \circ \Delta(x_n) = 1 \otimes q(x_n) + x_n \otimes 1$. On calcule alors

$$\begin{aligned} 0 &= (id \otimes q) \circ \Delta \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i x_n^i \right) = \sum_{i=0}^k ((id \otimes q) \circ \Delta(\alpha_i)) ((id \otimes q) \circ \Delta(x_n)) \\ &= \sum_{i=0}^k (\alpha_i \otimes 1) (1 \otimes q(x_n) + x_n \otimes 1)^i = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha_i x_n^j \otimes q(x_n)^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^k (\alpha_i x_n^i \otimes 1 + i \alpha_i x_n^{i-1} \otimes q(x_n)) = \left(\sum_{i=1}^k i \alpha_i \otimes x_n^{i-1} \right) \otimes q(x_n), \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité provenant du fait que $q(x_n^i) = 0$ si $i > 1$. Puisque $q(x_n) \neq 0$, on doit alors avoir

$$\sum_{i=1}^k i \alpha_i x_n^{i-1} = 0$$

et, puisque $x_n \neq 0$ et $i \alpha_i \neq 0$ pour $i \neq 0$, ceci est une relation non triviale, de degré $\leq k-1$ et ceci contredit la minimalité de k . Ainsi, f est injective. \square

Théorème 2.6.7. ([31], Theorem 3.6)

Si G est un groupe de Lie compact connexe, alors sa cohomologie est une algèbre extérieure sur des générateurs de degré impair :

$$H^*(G, \mathbb{Q}) \simeq \bigwedge_{\mathbb{Q}} (x_1, \dots, x_\ell).$$

Démonstration. Comme G est compact connexe, $H^*(G, \mathbb{Q})$ est une algèbre de Hopf de dimension finie telle que $H^0(G, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et le Théorème 2.6.6 nous dit que $H^*(G, \mathbb{Q})$ est une algèbre de la forme

$$H^*(G, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k] \otimes \bigwedge (x_1, \dots, x_\ell),$$

avec $|z_j| = 2m_j$ pair et $|x_i|$ impair. Supposons que $H^*(G, \mathbb{Q})$ admette au-moins un générateur z_j de degré pair $2m_j > 0$. Comme l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k]$ est intègre, on aurait alors, pour tout $n \geq 0$, $0 \neq z_j^n \otimes 1 \in H^{2nm_j}(G, \mathbb{Q})$ et alors $H^{2nm_j}(G, \mathbb{Q}) \neq 0$ et donc G serait de dimension cohomologique (singulière, rationnelle) infinie. Par extension des scalaires, la même propriété serait vraie sur \mathbb{R} . Or, comme G est compact et localement contractile, le corollaire E.8 assure que la cohomologie singulière réelle $H^p(G, \mathbb{R})$ coïncide (en tant que groupe abélien) avec la cohomologie du faisceau constant $H^p(G, \underline{\mathbb{R}})$ et, G étant une variété \mathcal{C}^∞ , par le théorème de de Rham, cette cohomologie est la même (toujours au sens des groupes) que la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^p(G, \mathbb{R})$ de G . Le groupe G aurait donc des groupes de cohomologie de de Rham non nuls en dimension arbitrairement grande et ceci est une contradiction puisque, G étant compact, il admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie (cf [44], Corollary I.4.1). Ainsi, aucun générateur de degré pair n'apparaît et on a le résultat. \square

Remarque 2.6.8. On peut montrer (cf [31], Theorem 3.6) que l'on peut choisir $\ell = \text{rg}(G)$ dans le théorème ci-dessus, i.e. on a autant de générateurs que le rang de G . On peut aussi montrer (cf [30], Proposition 1.36), que si G est compact, on a un isomorphisme

$$H^1(G, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{z}(\mathfrak{g})^\vee \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathbb{R}),$$

où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G .

Enfin, avant de calculer la cohomologie du classifiant, rappelons un résultat important de comparaison de suites spectrales :

Théorème 2.6.9. (Zeeman-Moore, voir [30], Theorem B.15) *Si $(f_r) : (E_r, d_r) \rightarrow (E'_r, d'_r)$ est un morphisme de suites spectrales de premier quadrant tels que $E_2^{p,q} \simeq E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q}$, $E_2'^{p,q} \simeq E_2'^{p,0} \otimes E_2'^{0,q}$ et $f_2^{p,q} = f_2^{p,0} \otimes f_2^{0,q}$, alors deux des trois assertions suivantes entraîne la troisième :*

1. *Pour tout $p \geq 0$, $f_2^{p,0}$ est un isomorphisme,*
2. *Pour tout $q \geq 0$, $f_2^{0,q}$ est un isomorphisme,*
3. *Pour tous $p, q \geq 0$, $f_\infty^{p,q}$ est un isomorphisme.*

On en vient au résultat principal, dont on ne fera que donner une idée de preuve :

Théorème 2.6.10. ([30], Theorem 1.81)

Si G est un groupe de Lie compact connexe, d'algèbre de cohomologie

$$H^*(G, \mathbb{Q}) = \bigwedge_{\mathbb{Q}} (x_1, \dots, x_r), \quad x_i \in H^{2n_i-1}(G, \mathbb{Q}),$$

alors, l'algèbre de cohomologie de l'espace classifiant B_G est une algèbre polynômiale

$$H^*(B_G, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_r], \quad y_i \in H^{2n_i}(B_G, \mathbb{Q}).$$

Démonstration. On considère le G -fibré principal universel $\omega_G = (G \rightarrow E_G \rightarrow B_G)$ et la suite spectrale de Serre associée

$$E_2^{p,q} = H^p(B_G, H^q(G, \mathbb{Q})) \implies H^{p+q}(E_G, \mathbb{Q}).$$

Alors, la page E_∞ est réduite à \mathbb{Q} en degré zéro car E_G est contractile. De plus, on a un isomorphisme

$$E_2^{p,q} \simeq E_2^{p,0} \otimes E_2^{0,q} = H^p(B_G) \otimes H^q(G) = H^p(B_G) \otimes \left(\bigwedge (x_1, \dots, x_r) \right)^q.$$

On admet alors que les x_i sont *transgressifs*, i.e. qu'ils vérifient

$$d_j x_i = 0, \quad \forall j \leq 2n_i - 1 \text{ et } d_{2n_i} x_i =: y_i \neq 0,$$

avec d_j les différentielles de la suite spectrale. Concernant ceci, on pourra consulter [58], VII, Theorem 2.9 ou [6]. On définit maintenant une algèbre de cochaînes

$$\mathbb{Q}[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r] \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge_{\mathbb{Q}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r),$$

avec $d\bar{x}_i = \bar{y}_i$ et $|\bar{x}_i| = 2n_i - 1$, $|\bar{y}_i| = 2n_i$. Les sous-algèbres $(\mathbb{Q}[\bar{y}_i] \otimes \bigwedge_{\mathbb{Q}}(\bar{x}_i, d))$ sont acycliques, donc on a

$$H^n \left(\mathbb{Q}[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r] \otimes_{\mathbb{Q}} \bigwedge_{\mathbb{Q}}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \right) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, on filtre l'algèbre des cochaînes par les degrés des \bar{x}_i et on obtient une suite spectrale $(\bar{E}_r^{p,q})$ de deuxième page

$$\bar{E}_2^{p,q} = (\mathbb{Q}[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r])^p \otimes_{\mathbb{Q}} \left(\bigwedge_{\mathbb{Q}}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \right)^q.$$

L'application $\bar{x}_i \mapsto x_i$, $\bar{y}_i \mapsto y_i$ induit un morphisme de suites spectrales $(\bar{E}_r^{p,q}) \rightarrow (E_r^{p,q})$ qui satisfait les conditions 1. et 3. du théorème de Zeeman-Moore, donc il satisfait aussi la condition 2., i.e.

$$H^*(B_G) \simeq \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_r].$$

□

Troisième partie

Cohomologie T -équivariante des variétés de drapeaux

On va donner ici trois façons de décrire la cohomologie équivariante de la variété de drapeaux ; chacune ayant ses avantages et inconvénients. Nous regarderons ensuite comment l'on peut passer de l'une à l'autre de ces présentations, via des algorithmes de conversion, utilisant notamment des opérateurs de *différences divisées*. Ces algorithmes permettront également de calculer les *constantes de structures* liées à la multiplication de *classes de Schubert équivariantes*. Enfin, nous appliquerons les algorithmes aux systèmes de racines irréductibles de rang 2.

Si K est un groupe de Lie compact connexe, de tore maximal T , on a la variété de drapeaux K/T (voir Section 2.3) et l'action par multiplication de T sur K/T . Le but ici est d'étudier l'algèbre de cohomologie $H_T^*(K/T)$ (à coefficients entiers ou rationnels). En fait, on dispose de plusieurs descriptions de $H_T^*(K/T)$, dues à Chevalley, puis Borel, puis Goresky-Kotwitz-MacPherson, que l'on souhaite étudier et comparer. Pour ceci, notre support principal sera l'article de Kaji [51].

Nous allons voir réapparaître les variétés de Schubert, qui joueront un rôle crucial dans notre discussion. On va en fait définir des *classes de Schubert*, indexées par le groupe de Weyl W , qui nous donneront une base de la cohomologie. Dans un premier temps, on va se concentrer sur la cohomologie usuelle $H^*(K/T, \mathbb{Z})$. Nous allons plus précisément voir qu'à chaque variété de Schubert Ω_w , on peut associer une classe de Schubert $X_w \in H^{2l(w)}(G/T, \mathbb{Z})$ et que

$$H^*(K/T, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} \langle X_w \rangle,$$

(les notations seront expliquées plus bas). De plus, $H^*(K/T, \mathbb{Z})$ étant un anneau, pour $u, v \in W$ on peut trouver des entiers $c_{u,v}^w \in \mathbb{Z}$, appelés *constantes de structure* telles que

$$X_u \cdot X_v = \sum_{w \in W} c_{u,v}^w X_w.$$

La détermination de ces constantes est un problème central du calcul de Schubert. On verra qu'on a aussi une version équivariante de cela. Plus précisément, on a des classes de Schubert *équivariantes* $\mathcal{X}_w \in H_T^{2l(w)}(K/T, \mathbb{Q})$ telles que

$$H_T^*(K/T, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{w \in W} H^*(B_T, \mathbb{Q}) \langle \mathcal{X}_w \rangle$$

et on peut également poser le problème de détermination des constantes de structure $\gamma_{u,v}^w \in H^*(B_T, \mathbb{Q})$ telles que

$$\mathcal{X}_u \cdot \mathcal{X}_v = \sum_{w \in W} \gamma_{u,v}^w \mathcal{X}_w.$$

Nous verrons que $\gamma_{u,v}^w$ est un polynôme, dont le terme constant est $\gamma_{u,v}^w(0) = c_{u,v}^w$.

En première approximation, on serait tenté de considérer la classe de cohomologie de la cellule BwB/B dans le complexe cellulaire de K/T , plutôt que de considérer l'adhérence

$\overline{BwB/B}$. Cependant, ce choix n'est pas canonique (on a un signe qui apparaît). Les choix faits pour chaque cellule n'ont aucune raison d'être cohérents entre eux, et les constantes de structure sont alors mal définies. Nous devons donc trouver une manière naturelle de définir les classes de Schubert; et c'est là que le fait de prendre l'adhérence est important. Bien qu'en apparence simple, ce problème est délicat et fait l'objet de la première section de cette partie.

3.1 Construction de la classe fondamentale d'une sous-variété; cas des variété projectives lisses

Avant de définir l'objet annoncé, on va commencer par quelques rappels de géométrie différentielle, plus particulièrement en ce qui concerne les classes de Thom et l'homologie de Borel-Moore. Notre exposé sera largement inspiré de [34], Appendix B. Par convention, toutes les homologies et cohomologies que nous considérons ici sont à coefficients entiers. Pour un exposé complet sur l'homologie de Borel-Moore, on pourra consulter également [14], section 2.6.

Définition 3.1.1. un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} X$ de rang r sur un espace topologique X est dit *orienté* si chaque fibre est orientée et s'il existe un atlas trivialisant $\{\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r\}$ tel que les isomorphismes induits par changement de cartes $\pi^{-1}(y) \xrightarrow{\phi_V^{-1} \circ \phi_U} \pi^{-1}(y)$ préservent l'orientation pour tout $y \in U \cap V$ avec $U \cap V \neq \emptyset$.

On a alors le résultat important suivant :

Théorème 3.1.2. ([24], VIII, §11, Corollary 11.20)

Si $\pi : E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel orienté de rang r sur un espace topologique paracompact X , de section nulle $s_0 : X \rightarrow E$, alors il existe une classe $\tau_E \in H^r(E, E \setminus \{0\})$ (où $\{0\} := \text{im } s_0 \subset E$), appelée classe de Thom, telle que, pour tout fermé $A \subset X$, en identifiant A avec son image par s_0 , on a des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, X \setminus A) & \rightarrow & H^{i+r}(E, E \setminus A) \\ \alpha & \mapsto & \pi^*(\alpha) \cup \tau_E \end{array}$$

Ensuite, si $N^n \xrightarrow{\iota} M^m$ est une sous-variété fermée d'une variété différentielle M , on pose

$$E := TM|_N / TN = \{(x, v) ; x \in N, v \in T_x M / T_x N\},$$

où TL est le fibré tangent d'une variété L . Le fibré vectoriel E ainsi défini s'appelle le *fibré normal* de N dans M . Par définition, on a une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur N :

$$0 \longrightarrow TN \longrightarrow TM|_N \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

Soit $i_0 : N \rightarrow E$ la section nulle. Alors, on a l'existence d'un voisinage ouvert U de $\iota(N)$ dans M , un voisinage ouvert V de $i_0(N)$ dans E , convexe (i.e. $V \cap E_x$ est convexe dans E_x , pour

tout $x \in N$) et un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow V$ tels que le triangle suivant commute

$$\begin{array}{ccc} N & & \\ \downarrow \iota & \searrow i_0 & \\ & & V \\ & \nearrow \phi & \\ U & & \end{array}$$

Pour ceci, consulter [18], Theorem 6.5. U est alors appelé un *voisinage tubulaire* de N dans M . De plus, on peut choisir U tel que $V = E$ (voir [53], IV, §5 et VII, §4).

Maintenant, si M et N sont orientées, alors TM et TN le sont aussi et ceci détermine une orientation de E . Alors, pour tout fermé A de N , on a par 3.1.2

$$\begin{array}{ccc} H^i(N, N \setminus A) & \xrightarrow{\sim} & H^{i+m-n}(M, M \setminus A) \\ \sim \downarrow \text{Thom} & & \text{excision} \downarrow \sim \\ H^{i+m-n}(E, E \setminus A) & \xrightarrow[\varphi^*]{\sim} & H^{i+m-n}(U, U \setminus A) \end{array} \quad (7)$$

et on peut montrer que l'isomorphisme $H^i(N, N \setminus A) \rightarrow H^{i+m-n}(M, M \setminus A)$ est indépendant du choix de U .

Définition 3.1.3. Si un espace X admet un plongement fermé $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, on définit son *homologie de Borel-Moore* par

$$H_i^{BM}(X) := H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X).$$

Remarque 3.1.4. Ceci n'est pas la définition la plus générale de l'homologie de Borel-Moore, mais cela nous suffira. En général, il s'agit de l'homologie du complexe singulier formé des combinaisons linéaires *localement finies* de simplexes singuliers ; et se définit pour un espace localement compact. On pourra consulter [42], section 5 pour plus de détails.

Lemme 3.1.5. *L'homologie de Borel-Moore est bien définie. Plus précisément, elle ne dépend pas de n , ni du plongement fermé choisi.*

Démonstration. Soient donc $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ deux plongements fermés. Pour tout plongement fermé $u : X \rightarrow \mathbb{R}^k$, on note $X_u := u(X)$. La projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un fibré vectoriel (trivial) orienté, et l'isomorphisme de Thom donne un isomorphisme

$$H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X_\varphi) \simeq H^{n+m-i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus X_{(\varphi,0)}) \quad (8)$$

où $(\varphi, 0) : X \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est définie par $x \mapsto (\varphi(x), 0)$. Par le théorème de prolongement de Tietze, on peut choisir $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue telle que $\tilde{\psi} \circ \varphi = \psi$. Posons

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (v, w) &\mapsto (v, w - \tilde{\psi}(v)) \end{aligned}$$

Comme ν réalise un homéomorphisme $X_{(\varphi,\psi)} \rightarrow X_{(\varphi,0)}$, on a un isomorphisme

$$\nu^* : H^{n+m-i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus X_{(\varphi,0)}) \xrightarrow{\sim} H^{n+m-i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus X_{(\varphi,\psi)}) \quad (9)$$

De plus, ν^* est indépendant du prolongement de ψ choisi, car si $\tilde{\psi}'$ est un autre prolongement, alors on a une homotopie

$$\nu_t(v, w) = (v, w - t\tilde{\psi}(v) - (1-t)\tilde{\psi}'(v)).$$

La composée de (8) et (9) donne alors un isomorphisme

$$H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X_\varphi) \simeq H^{n+m-i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus X_{(\varphi, \psi)}) \quad (10)$$

et en échangeant les rôles de φ et ψ , on a de même

$$H^{m-i}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus X_\psi) \simeq H^{n+m-i}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \setminus X_{(\psi, \varphi)}) \quad (11)$$

Il reste donc à montrer que les deux membres de droite de (10) et (11) sont isomorphes. Soit

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

τ envoie $X_{(\psi, \varphi)}$ sur $X_{(\varphi, \psi)}$ et préserve (resp. renverse) l'orientation si mn est pair (resp. impair). Alors, $(-1)^{mn}\tau^*$ donne l'isomorphisme voulu :

$$(-1)^{mn}\tau^* : H^{n+m-i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus X_{(\varphi, \psi)}) \xrightarrow{\sim} H^{n+m-i}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \setminus X_{(\psi, \varphi)}),$$

d'où le résultat. \square

Remarque 3.1.6. Si $\psi = \varphi$, l'isomorphisme construit ci-dessus est l'identité. De plus, on peut montrer que H_i^{BM} est naturel par rapport aux applications continues propres.

Lemme 3.1.7. *Si un espace X est plongé comme sous-espace fermé d'une variété différentielle orientée M^m , alors on a un isomorphisme canonique*

$$H_i^{BM}(X) \simeq H^{m-i}(M, M \setminus X).$$

Démonstration. Toute variété M peut être plongée dans un espace euclidien \mathbb{R}^n avec n assez grand (théorème de Whitney). Alors, l'isomorphisme (7) donne

$$H^{m-i}(M, M \setminus X) \simeq H^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X) = H_i^{BM}(X).$$

\square

Remarque 3.1.8. Si M^m est une variété lisse orientée, alors on a par le Lemme 3.1.7

$$H_i^{BM}(M) = H^{m-i}(M, M \setminus M) = H^{m-i}(M). \quad (12)$$

En particulier, $H_i^{BM}(M) = 0$ si $i > m$ et $H_m^{BM}(M) = H^0(M)$ est un \mathbb{Z} -modules libre de base les composantes connexes de M . Si M est compacte et fermée, on a la dualité de Poincaré (cf [39], Theorem 3.30)

$$\begin{aligned} D_m : H^{m-i}(M) &\xrightarrow{\sim} H_i(M) \\ \alpha &\mapsto \alpha \cap [M] \end{aligned}$$

donc $H_i^{BM}(M) \simeq H^i(M)$ et cet isomorphisme est naturel.

Soit U un ouvert d'un espace X , X étant plongé comme fermé d'un espace euclidien (ou une variété). Alors, U admet aussi un tel plongement. En effet, si X est un fermé d'une variété différentielle M^m orientée, alors U est fermé dans la variété orientée $M^o := M \setminus Y$, où $Y := X \setminus U$. Il s'ensuit que l'on a une *restriction*

$$H_i^{BM}(X) \rightarrow H_i^{BM}(U).$$

En effet, ceci provient de la restriction en cohomologie relative usuelle

$$H_i^{BM}(X) = H^{m-i}(M, M \setminus X) \rightarrow H^{m-i}(M^o, M^o \setminus U) = H_i^{BM}(U).$$

On peut montrer que ceci est bien défini et donne un préfaisceau sur X .

Lemme 3.1.9. *Si $U \subset X$ est ouvert, et $Y := X \setminus U$, alors on a une suite exacte longue en homologie de Borel-Moore*

$$\dots \longrightarrow H_i^{BM}(Y) \longrightarrow H_i^{BM}(X) \longrightarrow H_i^{BM}(U) \longrightarrow H_{i-1}^{BM}(Y) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. En choisissant M comme ci-dessus, ceci est la suite exacte longue de cohomologie relative du triplet $M \setminus X \subset M \setminus Y \subset M$. \square

Remarque 3.1.10. Si $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ se décompose en union disjointe d'ouverts $X_\alpha \subset X$, alors on a un isomorphisme

$$H_i^{BM}(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} H_i^{BM}(X_\alpha).$$

3.1.1 Classe d'une sous-variété fermée

Lemme 3.1.11. *Soit V une sous-variété d'une variété algébrique irréductible lisse X , et soit $k := \dim V$. Alors, on a*

$$H_i^{BM}(V) = 0, \quad \forall i > 2k$$

et de plus, $H_{2k}^{BM}(V)$ est un groupe abélien libre, de base les composantes irréductibles de dimension k de V .

Démonstration. • Supposons dans un premier temps V lisse et équidimensionnelle. Dans ce cas, V est une $2k$ -variété différentielle lisse orientée et la conclusion provient de la remarque 3.1.10 et de (12). De plus, dans cette situation, les composantes connexes et les composantes irréductibles de V coïncident. Ceci provient du fait qu'une variété irréductible est connexe et du fait qu'un point appartenant à au-moins deux composantes irréductibles doit être singulier.

• Dans le cas général, on procède par récurrence sur $k = \dim V$. Le cas $k = 0$ est évident. Pour l'hérédité, on peut choisir une sous-variété fermée Z de V de dimension $< k$ et telle que $V \setminus Z$ soit équidimensionnelle et lisse. En effet, l'ensemble des points réguliers de V est ouvert, donc le lieu singulier de V est fermé dans V et on peut donc prendre pour Z l'union du lieu singulier de V et de toutes les composantes irréductibles de V de dimension $< k$. Alors, on a $H_i^{BM}(Z) = 0$ pour $i > 2(k-1)$ par hypothèse de récurrence et $H_i^{BM}(V \setminus Z) = 0$

pour $i > 2k$, par le cas non singulier décrit ci-dessus. La suite exacte longue du Lemme 3.1.9 entraîne alors que $H_i^{BM}(V) = 0$ pour $i > 2k$ et on obtient une suite exacte

$$0 = H_{2k}^{BM}(Z) \longrightarrow H_{2k}^{BM}(V) \longrightarrow H_{2k}^{BM}(V \setminus Z) \longrightarrow H_{2k-1}^{BM}(Z) = 0$$

Ainsi, $H_{2k}^{BM}(V) \simeq H_{2k}^{BM}(V \setminus Z)$ et c'est un groupe abélien libre engendré par les composantes irréductibles de $V \setminus Z$, qui sont exactement les traces des composantes irréductibles de dimension k de V . Ceci termine la preuve. \square

Soient maintenant X une variété projective lisse de dimension n et V une sous-variété fermée irréductible de X , de dimension k . Par le Lemme 3.1.11, on a

$$H_{2k}^{BM}(V) \simeq \mathbb{Z}$$

et on a un générateur canonique. Le plongement fermé $V \hookrightarrow X$ détermine un morphisme

$$H_{2k}^{BM}(V) \rightarrow H_{2k}^{BM}(X) = H^{2n-2k}(X) = H^{2c}(X),$$

où $c = \text{codim}_X(V) = n - k$.

Définition 3.1.12. L'image dans $H^{2c}(X)$ du générateur canonique de $H_{2k}^{BM}(V)$ est appelée la *classe fondamentale de V dans X* , notée $[V] \in H^{2c}(X)$.

Avant de revenir au cas de la variété de drapeaux, donnons un lemme utile :

Lemme 3.1.13. Si $X = X_s \supset \dots \supset X_0 = \emptyset$ est une filtration d'une variété algébrique irréductible X par des sous-variétés fermées, telle que les $X_{i+1} \setminus X_i = \bigsqcup_j U_{i,j}$ soient union disjointe de variétés $U_{i,j}$, chacune isomorphe à un espace affine $\mathbb{C}^{n(i,j)}$, alors les classes $[\overline{U_{i,j}}]$ donnent une base additive de $H_*^{BM}(X)$ sur \mathbb{Z} .

Démonstration. Pour tout $i \geq 0$, on a $H_i^{BM}(\mathbb{C}^m) \simeq H^{2m-i}(\mathbb{C}^m)$, d'où

$$H_i^{BM}(\mathbb{C}^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 2m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors par récurrence sur p que les $[\overline{U_{i,j}}]$, pour $i \leq p$ forment une base de $H_*^{BM}(X_p)$. Ceci est clair si $p = 0$. En supposant le résultat vrai pour $p - 1$, puisque les $H_\ell^{BM}(X_p)$ et $H_\ell^{BM}(U_{i,j}) = H_\ell^{BM}(\mathbb{C}^{n(i,j)})$ sont nuls pour ℓ impair, par le Lemme 3.1.9, on a $H_\ell^{BM}(X_p) = 0$ pour ℓ impair, et on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_{2i}^{BM}(X_{p-1}) \longrightarrow H_{2i}^{BM}(X_p) \longrightarrow \bigoplus_j H_{2i}^{BM}(U_{p,j}) \longrightarrow 0.$$

Les classes $[\overline{U_{p,j}}] \in H_*^{BM}(X_p)$ s'envoient sur une base de $\bigoplus_j H_*^{BM}(U_{p,j})$. Par hypothèse de récurrence, on en tire que $H_*^{BM}(X_p)$ est libre de base les $[\overline{U_{i,j}}]$, pour $i \leq p$. \square

3.2 Classes de Schubert

Fixons, une fois pour toutes, un groupe de Lie compact connexe K et T un tore maximal de K . Remarquons que comme le centre $Z(K)$ est inclus dans tout Borel, la variété de drapeaux est inchangée si l'on remplace K par $K/Z(K)$; ce dernier groupe étant semi-simple. Ainsi, on peut supposer que K est semi-simple. Notons $G := K^{\mathbb{C}}$ le complexifié de K , $H := T^{\mathbb{C}}$ le tore complexe correspondant, $\tilde{N} := N_G(H)$, $N := N_K(T)$, $B \leq G$ le sous-groupe de Borel standard de G associé à H , d'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$, où $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ et Φ est le système de racines associé, dont l'ensemble des racines simples est $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Notons encore $W := N/T \simeq \tilde{N}/H = W(\Phi)$ le groupe de Weyl, $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$, $\mathfrak{k} := \text{Lie}(K)$, de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Pour tout ceci, on pourra consulter la section 2.3. Observons que, puisque nous supposons K semi-simple, l'algèbre de Lie réductive \mathfrak{g} est en fait semi-simple, ce qui assure que Φ est un *système de racines* au sens de [45], §9.2 ou [10], V, Définition 3.3 : i.e. Φ engendre linéairement le dual \mathfrak{h}^* . Ceci justifie le fait que Π est une base de \mathfrak{h}^* , en particulier que $r = \text{rg } K \stackrel{\text{def}}{=} \dim T$ et justifie également l'introduction des *poids fondamentaux*, dont nous aurons besoin.

Rappelons que d'après la décomposition d'Iwasawa (voir le théorème 2.3.18), on a un difféomorphisme K -équivariant

$$K/T \simeq G/B$$

et on peut alors voir la variété de drapeaux K/T comme une variété différentielle compacte lisse, ou une variété complexe (holomorphe). De plus, comme G a une unique structure de groupe algébrique réductif (linéaire) (cf [60], Chapter V, §5), la variété de drapeaux peut aussi être vue comme une variété algébrique projective complexe lisse. En fait, cette structure algébrique complexe induit la structure holomorphe ainsi que la structure réelle lisse compacte de K/T .

T agit naturellement sur K/T par multiplication à gauche (c'est l'action par translation de K sur K/T restreinte à T). Une question naturelle est alors de déterminer la structure de $H_T^*(K/T, \mathbb{Q})$. Comme annoncé en introduction, nous allons voir qu'il y a (au-moins) trois réponses naturelles à cette question et que l'on peut passer des unes aux autres. L'intérêt serait d'avoir une description pratique calculable de $H_T^*(K/T)$.

On va commencer par étudier le cas de la cohomologie usuelle de K/T ; et utiliser la décomposition de Bruhat pour obtenir les *classes de Schubert* dans ce cas. On a une partition

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

Plus précisément, si on choisit un représentant $\dot{w} \in \tilde{N} = N_G(H)$ de $w \in W = \tilde{N}/H$, alors $B\dot{w}B$ est bien défini et on a

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B\dot{w}B.$$

Soit $w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur du groupe de Coxeter W , caractérisé par $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$, et posons

$$B_- := {}^{w_0}B = w_0Bw_0.$$

B_- est le *sous-groupe de Borel opposé* de B . On a $\text{Lie}(B_-) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_{\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} =: \mathfrak{b}_-$. En notant $\dot{w}_0 \in N_G(H)$ un représentant de $w_0 \in N_G(H)/H = W$, on a

$$G = \dot{w}_0G = \bigcup_{w \in W} \dot{w}_0BwB = \bigcup_{w \in W} w_0BwB = \bigcup_{w \in W} B_-w_0wB = \bigcup_{w_0w \in W} B_-w_0wB$$

et on obtient la *décomposition de Bruhat opposée*

$$G = \bigcup_{w \in W} B_- w B.$$

Ceci induit une décomposition *opposée* de la variété de drapeaux

$$G/B = \bigcup_{w \in W} B_- w B/B$$

et $B_- w B/B$ est appelée la *cellule de Schubert duale de w* . De plus, on a

$$B_- w B/B \simeq (w_0 B w_0 w B)/B \simeq w_0 (B_- w_0 w B/B) \simeq B w_0 w B/B \simeq \mathbb{C}^{l(w_0 w)} = \mathbb{C}^{l(w_0) - l(w)}$$

et, comme w_0 est de longueur maximale, on a (cf section 2.3)

$$\dim_{\mathbb{C}} G/B = l(w_0),$$

donc

$$\text{codim}_{G/B}(B_- w B/B) = l(w).$$

Ceci est la raison pour laquelle nous considérons les cellules duales plutôt que celles définies en 2.3 : on veut que la codimension (et non la dimension) de la cellule soit égale à $l(w)$ et ainsi obtenir une classe dans $H^{2l(w)}(G/B)$ plutôt que dans $H^{2l(w_0) - 2l(w)}(G/B)$.

On définit alors la *variété de Schubert duale de w* , Ω_w comme étant l'adhérence de Zariski de la cellule de Schubert associée :

$$\Omega_w := \overline{B_- w B/B}.$$

C'est une sous-variété fermée de la variété projective G/B et on a

$$\text{codim}_{G/B}(\Omega_w) = l(w).$$

Le travail fait dans la section précédente mène à la définition suivante :

Définition 3.2.1. La classe fondamentale de la sous-variété fermée Ω_w dans G/B est appelée la *classe de Schubert* de Ω_w (ou de w), notée

$$X_w := [\Omega_w] \in H^{2l(w)}(G/B, \mathbb{Z}).$$

Ces classes jouent un rôle particulier dans la cohomologie $H^*(K/T, \mathbb{Z}) \simeq H^*(G/B, \mathbb{Z})$. Plus précisément, l'*ordre de Bruhat* sur W permet d'écrire, en vertu du Théorème 2.3.33,

$$\forall w \in W, \Omega_w = \bigcup_{u \geq w} \Omega_w^o.$$

Considérons les sous-variétés fermées

$$Z_\ell := \bigcup_{l(w) - 1 \geq l(w_0) - \ell} \Omega_w, \quad 0 \leq \ell \leq l(w_0) + 1.$$

Celles-ci donnent une filtration fermée de G/B :

$$\emptyset = Z_0 \subset Z_1 = \Omega_{w_0} \subset Z_2 \subset \cdots \subset Z_{l(w_0)} \subset Z_{l(w_0)+1} = G/B.$$

De plus, pour tout $0 \leq \ell \leq l(w_0)$, on a

$$Z_{\ell+1} \setminus Z_\ell = \bigsqcup_{l(w) = l(w_0) - \ell} \Omega_w^o \quad \text{et} \quad \forall w \in W ; l(w) = l(w_0) - \ell, \Omega_w^o \simeq \mathbb{C}^\ell.$$

Ainsi, le Corollaire 3.1.13 est applicable et donne le résultat important suivant :

Théorème 3.2.2. *Les classes de Schubert forment une base additive de la cohomologie de la variété de drapeaux :*

$$H^*(K/T, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} \langle X_w \rangle.$$

Passons maintenant au cas équivariant, pour lequel on reproduit l'exposé de la section 2.1 de [62]; sans démonstrations. Signalons qu'une autre approche, plus élégante et géométrique, utilisant le *faisceau dualisant équivariant*, se trouve dans [48]. On travaille ici avec les coefficients rationnels et on s'intéresse donc à la cohomologie

$$H_T^*(K/T, \mathbb{Q}) = H^*(K/T \times_T E_T, \mathbb{Q}),$$

pour l'action de T donnée par multiplication à gauche. On ne peut plus définir les classes de Schubert directement, car $K/T \times_T E_T$ n'est plus une variété algébrique (c'est une ind-variété, notion que nous ne développerons pas). Cependant, on a (en notant $r := \dim T = \text{rg } K$)

$$E_T = (\mathbb{S}^\infty)^r = \varinjlim (\mathbb{S}^{2m+1})^r =: \varinjlim E_T^m$$

et $E_T^m = (\mathbb{S}^{2m+1})^r$ est bien une variété. On va donc travailler par approximations : on va trouver des classes de Schubert approchées dans $K/T \times_T E_T^m$ pour tout m , puis passer à la limite pour obtenir les *classes de Schubert équivariantes* dans $H^*(K/T \times_T E_T)$. D'après l'exemple 1.10.3, 2., l'action de T sur E_T^m est donnée par multiplication des coordonnées, donc on peut étendre ceci en une action de $H := T^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^\times)^r$ sur $E_H^m = E_{T^{\mathbb{C}}}^m := (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})^r$; ce dernier espace étant naturellement une variété algébrique lisse irréductible. Au passage, notons qu'on a $B_H = B_T$. On obtient donc une action *algébrique* du tore algébrique $H = T^{\mathbb{C}}$ sur la variété lisse irréductible $G/B \times E_H^m$. De plus, cette action est libre, donc le quotient $G/B \times_H E_H^m$ est une variété algébrique lisse et comme on travaille à homotopie près, on a un isomorphisme naturel

$$H^*(G/B \times_H E_H^m, \mathbb{Q}) \simeq H^*(K/T \times_T E_T^m, \mathbb{Q}).$$

Ensuite, on introduit l'*homologie de Borel-Moore équivariante*. Notons H_*^{BM} l'homologie de Borel-Moore classique (cf [14], section 2.6). Soit $\nu := \dim_{\mathbb{C}} G/B = l(w_0)$ et posons

$$H_{BM,q}^H(G/B, \mathbb{Q}) := H_{q+2mr}^{BM}(G/B \times_H E_H^m), \quad m \geq \nu - \frac{q}{2}.$$

Ceci est bien défini, car si $m \geq m' \geq \nu - \frac{q}{2}$, alors le morphisme de Gysin

$$H_{q+2mr}^{BM}(G/B \times_H E_H^m) \rightarrow H_{q+2m'r}^{BM}(G/B \times_H E_H^{m'})$$

est un isomorphisme (cf [9], section 1). Considérons la \mathbb{Q} -algèbre

$$R := H_T^*(\text{pt}) = H^*(B_T, \mathbb{Q}) = H^*(B_H, \mathbb{Q}).$$

D'après le lemme 2 et la proposition 1 de [9], comme $H^{\text{impair}}(G/B) = 0$, les R -modules gradués $H_H^*(G/B)$ et $H_{BM,-*}^H(G/B)$ sont libres et on a un isomorphisme de R -modules gradués

$$H_H^*(G/B) \simeq \text{Hom}_{H_T^*(\text{pt})}(H_{BM,-*}^H(G/B), H_T^*(\text{pt})).$$

Rappelons qu'on avait, dans le cas non-équivariant, des classes $[\Omega_w] \in H^{2l(w)}(G/B)$ qui, par dualité de Poincaré, provenaient de classes $[\Omega_w]' \in H_{2l(w_0w)}^{BM}(G/B)$. Ici, on prend, pour $m \gg 0$ assez grand

$$[\Omega_w]'_T := [\Omega_w \times_H E_H^m]' \in H_{2l(w_0w)+2mr}^{BM}(G/B \times_H E_H^m) \stackrel{\text{def}}{=} H_{BM, 2l(w_0w)}^H(G/B).$$

La restriction $H_{BM,*}^H(G/B) \rightarrow H_*^{BM}(G/B)$ envoie $[\Omega_w]'_T$ sur $[\Omega_w]'$ et induit un isomorphisme ([9], Proposition 1)

$$\mathbb{Q} \otimes_R H_{BM,*}^H(G/B) \xrightarrow{\sim} H_*^{BM}(G/B),$$

où R agit sur \mathbb{Q} via l'isomorphisme

$$R/R^+ \simeq \mathbb{Q}.$$

Donc, la famille $\{[\Omega_w]'_T\}_{w \in W}$ est une base de $H_{BM,-*}^H(G/B)$ et on peut prendre pour base de $H_T^*(K/T)$ la base duale de $\{[\Omega_w]'_T\}$. On obtient alors des classes de Schubert équivariantes

$$\mathcal{X}_w := [\Omega_w]_T := ([\Omega_w]'_T)' \in H_H^{2l(w)}(G/B) = H_T^{2l(w)}(K/T)$$

et celles-ci forment une R -base de la cohomologie équivariante :

Théorème 3.2.3. *On a*

$$H_T^*(K/T, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{w \in W} R \langle \mathcal{X}_w \rangle.$$

De plus, la restriction $H_T^(K/T, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(K/T, \mathbb{Q})$ envoie la classe \mathcal{X}_w sur X_w .*

3.3 Descriptions de Schubert, Borel et Goresky-Kottwitz-MacPherson

Nous pouvons à présent donner les trois descriptions annoncées de $H_T^*(K/T, \mathbb{Q})$. Sauf mention explicite du contraire, nous travaillerons avec les coefficients rationnels. Rappelons que si $T = (\mathbb{S}^1)^n$, avec $n = \text{rg } K$, alors on a une description polynômiale de l'algèbre de cohomologie T -équivariante rationnelle

$$R := H^*(B_T) = \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n], \quad \deg(t_i) = 2.$$

On notera aussi $R = \mathbb{Q}[t]$ pour alléger les notations. On rappelle également que $H_T^*(K/T)$ est naturellement muni d'une structure de R -module via l'application T -équivariante $K/T \rightarrow \text{pt}$.

3.3.1 Description de Schubert

Il s'agit d'exprimer un élément de $H_T^*(K/T)$ comme combinaison linéaire à coefficients dans $R = \mathbb{Q}[t]$ des classes de Schubert $\mathcal{X}_w \in H_T^{2l(w)}(K/T)$. Ceci est possible puisqu'on a vu que

$$H_T^*(K/T) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[t] \langle \mathcal{X}_w \rangle.$$

Cette description s'appelle aussi la *description de Chevalley*.

3.3.2 Description de Borel

On peut utiliser une deuxième approche pour décrire les éléments de $H_T^*(K/T)$ en termes de polynômes. En vertu de la Proposition 2.4.10, on a

$$H_K^*(\text{pt}) = H_T^*(\text{pt})^W = R^W = \mathbb{Q}[t]^W.$$

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 3.3.1. ([51], Theorem 2.3 et [50], Proposition 5.4)

On a un isomorphisme de R -algèbres

$$H_T^*(K/T) \simeq H^*(B_T) \otimes_{H^*(B_K)} H^*(B_T) = R \otimes_{R^W} R.$$

Démonstration. On a le diagramme commutatif de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} & & K/T & \xlongequal{\quad} & K/T \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ K/T & \longrightarrow & K/T \times_T E_T & \longrightarrow & K/T \times_K E_K \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ K/T & \longrightarrow & B_T & \longrightarrow & B_K \end{array}$$

ainsi qu'un homéomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (K/T \times E_K) / K & \rightarrow & E_K / T \\ kT *^K e & \mapsto & \overline{ke} \\ T *^K e' & \mapsto & \overline{e'} \end{array}$$

d'où $K/T \times_K E_K \simeq B_T$ et $H_K^*(K/T) \simeq R$. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du diagramme (voir théorème 2.4.21)

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B_K)}(R, H_K^*(K/T)) \implies H_T^{p+q}(K/T)$$

se réécrit

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H_K^*(\text{pt})}(R, R) \implies H_T^{p+q}(K/T).$$

De plus, par le Corollaire 2.4.15, on a que R est un $H_K^*(\text{pt})$ -module libre, donc la suite spectrale ne possède qu'une seule colonne non nulle et on obtient un isomorphisme d'algèbres

$$R \otimes_{R^W} R = R \otimes_{H_K^*(\text{pt})} R \simeq H_T^*(K/T),$$

d'où le résultat. □

Corollaire 3.3.2. On a un isomorphisme de $\mathbb{Q}[t]$ -modules

$$H_T^*(K/T) \simeq \frac{\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n]}{(g(x_1, \dots, x_n) - g(t_1, \dots, t_n), g \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]^W)} =: \mathbb{Q}[t, x] / I_W,$$

la structure de $\mathbb{Q}[t]$ -modules sur le membre de droite étant donné par la multiplication de $\mathbb{Q}[t]$.

On appelle ce quotient l'anneau des doubles invariants de W , noté $\mathbb{Q}_W[t, x]$.

Démonstration. Il s'agit donc de montrer que

$$H_T^*(K/T) \simeq \mathbb{Q}[t, x] / I_W.$$

De façon générale, si A est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[Z]$, alors on a un isomorphisme de $\mathbb{Q}[X]$ -algèbres

$$\mathbb{Q}[X] \otimes_A \mathbb{Q}[Y] \simeq \mathbb{Q}[X, Y] / (P(X) - P(Y), P \in A) \quad (13)$$

Pour le voir, on prend

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[Y] &\rightarrow \mathbb{Q}[X, Y] / (P(X) - P(Y), P \in A) \\ (f, g) &\mapsto \frac{f(X)g(Y)}{f(X)g(Y)} \end{aligned}$$

et si $\varphi : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[Y] \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathbb{Q}[X]$ -algèbres A -équilibré (i.e. $\varphi(fa, g) = \varphi(f, ag)$), alors on doit poser $\bar{\varphi}(\overline{X^i Y^j}) := \varphi(X^i, Y^j)$ pour avoir $\bar{\varphi} \circ \mu = \varphi$ et de plus, cette définition convient. Par propriété universelle, le membre de droite de (13) est bien le produit tensoriel voulu, donc est isomorphe au membre de gauche. On peut étendre ceci à un nombre arbitraire d'indéterminées par récurrence.

Dans notre cas, on a $R = H_T^*(\text{pt}) = \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]$ et on prend $A := H_K^*(\text{pt}) = R^W$. L'isomorphisme (13) donne le résultat voulu dans ce contexte. \square

Pour un élément $\bar{f} \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, on note $f(t, x) \in \mathbb{Q}[t, x]$ un représentant polynômial; et $g(t)$ (resp. $g(x)$) pour un représentant dans le facteur de gauche (resp. de droite). Le fait d'exprimer un élément de $H_T^*(K/T)$ (ou plutôt un représentant) comme un polynôme en t et x s'appelle la *présentation de Borel*. Dans cette présentation, on perd le rapport avec les classes de Schubert \mathcal{X}_w ; cependant, ceci rend la structure de R -module de $H_T^*(K/T)$ plus explicite et on peut de plus calculer effectivement le produit de deux classes de cohomologie. Ainsi, faire le lien entre ces deux premières présentations constitue un premier élément de réponse au problème de la détermination des constantes de structure équivariantes.

3.3.3 Description de GKM

Avant d'exposer cette approche, il nous faut introduire des opérateurs importants, de degré -2 , sur $H_T^*(K/T)$, appelés *différences divisées*. Ceux-ci nous permettront de faire le lien entre l'*anneau de GKM* et la cohomologie équivariante de K/T .

Définition 3.3.3. (*[51], Definition 3.1 et [50], Definition 7.1*)

Soit $\alpha_i \in \Pi$ une racine simple, de réflexion simple associée s_i . Soit aussi $P_i := \langle s_i, B \rangle \leq G$, où $\alpha_i : H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est vu comme caractère holomorphe de $H \leq G$. On obtient un espace fibré

$$P_i/B \hookrightarrow (G/B)_T \xrightarrow{\pi} (G/P_i)_T$$

et on a vu (cf 2.3.32)) que P_i/B est homéomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$. On a alors la suite exacte de Gysin (voir Annexe, proposition C.9) :

$$\dots \longrightarrow H_T^p(G/B) \xrightarrow{\phi} H_T^{p-2}(G/P_i) \longrightarrow H_T^{p+1}(G/P_i) \xrightarrow{\pi^*} H_T^{p+1}(G/B) \longrightarrow \dots$$

et, en identifiant G/B et K/T , on définit

$$\Delta_i := \pi^* \circ \phi : H_T^p(K/T) \rightarrow H_T^{p-2}(K/T).$$

Les Δ_i sont alors appelés *opérateurs de différences divisées simples*.

Le résultat suivant, très utile en pratique, justifie la terminologie :

Proposition 3.3.4. ([50], Proposition 7.2)

Si $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, alors on a

$$\Delta_i f(t, x) = \frac{f(t, x) - f(t, s_i(x))}{-\alpha_i(x)},$$

où la racine simple α_i est vue comme polynôme $\alpha_i(x) \in \mathbb{Q}[x] \simeq H^*(B_T)$, de degré 1 en les x_j .

Remarque 3.3.5. On aurait pu définir directement Δ_i comme le quotient ci-dessus. D'ailleurs, c'est ainsi que sont introduites les différences divisées dans [4], §1.

Démonstration. Notons $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ le $i^{\text{ème}}$ poids fondamental, caractérisé par $\omega_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{i,j}$. On peut voir cette forme linéaire comme un élément de $H^2_H(\text{pt}) = H^2_T(\text{pt})$, puis de $H^2_T(K/T)$ via $K/T \rightarrow \text{pt}$. Par le théorème de Leray-Hirsch 2.2.9, le $H^*(G/P_i)$ -module $H^*(G/B)$ est libre de base $\{1, \omega_i\}$. Soit $f = f(t, x) \in H^*(G/B)$ que l'on écrit $f = a + b\omega_i$, avec $a, b \in H^*(G/P_i)$. On a la suite de Gysin (C.9)

$$\cdots \longrightarrow H^p_T(G/B) \xrightarrow{\phi} H^{p-2}_T(G/P_i) \xrightarrow{d} H^{p+1}_T(G/P_i) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}_T(G/B) \longrightarrow \cdots$$

Comme $a \in \text{im } \pi^*$, on a $\phi(a) = 0$ et, par construction, $\phi(b\omega_i) = -b$ puisque ω_i est envoyé sur $-1 \in H^2(P_i/B) = H^2(\mathbb{S}^2)$, donc $\phi(f) = -b$ et $\Delta_i(f) = -b$. Ensuite, on a

$$\omega_i(h_{\alpha_i}) = 1 \Rightarrow s_i(\omega_i) = \omega_i - \alpha_i$$

donc ici, on a $s_i(f) = a + s_i(b\omega_i) = a + b(\omega_i - \alpha_i(x))$. Comme $\alpha_i(x) \in H^0(B_T) \otimes H^2(B_T) \subseteq H^2_T(K/T) \simeq H^2_T(G/B)$, il vient alors

$$f(t, x) - f(t, s_i(x)) = f(t, x) - s_i(f)(t, x) = -b\alpha_i(x) = -\alpha_i(x)\Delta_i(f)(t, x)$$

et on a le résultat. □

Ensuite, si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k} \in W$ est une écriture réduite de w , on pose

$$\Delta_w := \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k}.$$

Nous allons montrer que ceci ne dépend pas de la décomposition réduite de w choisie. Pour ceci, puisque les Δ_i sont $\mathbb{Q}[t]$ -linéaires, il suffit de montrer le résultat pour les opérateurs, encore notés provisoirement Δ_i :

$$\begin{aligned} \Delta_i &: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x] \\ f(x) &\mapsto \frac{f(x) - f(s_i(x))}{-\alpha_i(x)} \end{aligned}$$

Nous suivrons les §2 et 4 de [20]. On pourra aussi consulter [38], Chapter IV, §1.

Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}[x] = H^*(\text{pt})$ engendré par les éléments de $\mathbb{Q}[x]^W$ sans terme constant. un élément $u \in \mathbb{Q}[x]$ est dans I s'il s'écrit $u = \sum_i v_i p_i$ avec $v_i \in \mathbb{Q}[x]$ et $p_i \in \mathbb{Q}[x]^W$ tel que $p_i(0) = 0$. Définissons

$$d(x) := \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(x),$$

ainsi que l'opérateur

$$J := \sum_{w \in W} \det(w)w : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x],$$

où $\det(w) = (-1)^{l(w)}$. On a (cf [7], p.112) que $J(u)$ est divisible par d pour tout $u \in \mathbb{Q}[x]$ d'où, en posant $N := l(w_0) = |\Phi^+|$,

$$J(\mathbb{Q}^n[x]) = 0, \forall n < N, \quad J(\mathbb{Q}^n[x]) \subset I^n, \forall n \neq N, \quad (14)$$

ainsi que $J(d) = |W|d$. On a le résultat liminaire suivant :

Lemme 3.3.6. *Soit $u \in \mathbb{Q}^n[x]$ tel que $u\alpha \in I$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Si $n \neq N$, alors on a $u \in I^n$ et si $n = N$, alors $J(u) - |W|u \in I^N$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \Phi$; on écrit $u\alpha = \sum_i v_i p_i$ avec $v_i \in \mathbb{Q}[x]$ et $p_i \in \mathbb{Q}[x]^W$ sans terme constant. On a $\alpha(u + s_\alpha(u)) = \alpha u - s_\alpha(\alpha u) = \sum_i (v_i - s_\alpha(v_i))p_i$. Mais α divise $v_i - s_\alpha(v_i)$, donc $u + s_\alpha(u) \in I$. Ainsi, $s_\alpha(u) \equiv -u \pmod{I}$, donc $w(u) \equiv \det(w)u$, pour tout $w \in W$, d'où $J(u) \equiv |w|u$, d'où le lemme avec (14). \square

Proposition 3.3.7. *Si $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}[x]^W}(\mathbb{Q}[x])$ est nul en degrés $< N$, alors on a*

$$\forall u \in \mathbb{Q}[x], \quad |W|df(u) = f(d)J(u).$$

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $n > N$, on a $I^n = \mathbb{Q}^n[x]$. En effet, $\mathbb{Q}[x]$ est un $\mathbb{Q}[x]^W$ -module gradué de type fini, donc $\mathbb{Q}[x]/I$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie; donc l'égalité est vraie pour $n \gg 0$. Par le Lemme 3.3.6, l'assertion " $n > N$ et $I^{n+1} = \mathbb{Q}^{n+1}[x]$ " entraîne " $I^n = \mathbb{Q}^n[x]$ ". Ensuite, en appliquant le même Lemme à $u \in \mathbb{Q}[x]$, on obtient $\mathbb{Q}^N[x] = I^n + \mathbb{Q} \cdot d$. Il en résulte que $u \in \mathbb{Q}[x]$ s'écrit $u = \sum_i a_i p_i + dq$ où $p_i, q \in \mathbb{Q}[x]^W$ et a_i est homogène de degré $< N$. Alors, $f(u) = \sum_i f(a_i)p_i + qf(d) = f(d)q$ et de même, $J(u) = J(d)q = |W|dq$, d'où le résultat. \square

Lemme 3.3.8. *Si $w = s_{\alpha_{i_1}} \cdots s_{\alpha_{i_k}} \in W$ est une écriture réduite, alors on a*

$$\left(\prod_{\alpha \in \Phi^+ \cap w\Phi^-} \alpha(x) \right) \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k} = w + \sum_{w' < w} a(w')w',$$

avec $a(w') \in \mathbb{Q}(x) = \text{Frac}(\mathbb{Q}[x])$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k} &= (-1)^k \alpha_{i_1}^{-1}(1 - s_{i_1}) \alpha_{i_2}^{-1}(1 - s_{i_2}) \cdots \alpha_{i_k}^{-1}(1 - s_{i_k}) \\ &= \alpha_{i_1}^{-1} s_{i_1} \alpha_{i_2}^{-1} s_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}^{-1} s_{i_k} + \sum b(w')w', \end{aligned}$$

où $b(w') \in \mathbb{Q}(t)$ et où w' parcourt les sous-expressions de $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, i.e. les éléments $< w$ du groupe de Weyl. On a d'autre part, avec le corollaire 2 du §6 du chapitre VI de [7],

$$\alpha_{i_1}^{-1} s_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}^{-1} s_{i_k} = \alpha_{i_1}^{-1} s_{i_1} (\alpha_{i_2}) \cdots s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}} (\alpha_{i_k})^{-1} s_{i_1} \cdots s_{i_k} = \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+ \cap w\Phi^-} \alpha^{-1} \right) w.$$

\square

Lemme 3.3.9. Soit $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ un expression réduite de l'élément de plus grande longueur w_0 de W . Alors, on a

$$\forall u \in \mathbb{Q}[x], \quad \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_N}(u) = (-1)^N \frac{J(u)}{d}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.3.8, l'opérateur $d\Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_N}$ est de la forme $w_0 + \sum_{w \neq w_0} a(w)w$. Par la Proposition 3.3.7, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}(x)$ tel que

$$d\Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_N} = \lambda J = (-1)^N \lambda w_0 + \sum_{w \neq w_0} \det(w) \lambda w.$$

Mais, d'après le théorème de Dedekind, les éléments de W sont indépendants sur K , donc $\lambda = (-1)^N$, d'où le résultat. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème 3.3.10. Soit $w \in W$. Pour toutes les expressions réduites $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ de w , les opérateurs $\Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k}$ prennent la même valeur.

Démonstration. Il suffit (cf [7], Chapitre IV, §5, Proposition 5) de montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \Pi$, si m désigne l'ordre de $s_\alpha s_\beta$ dans W , alors on a

$$\Delta_\alpha \Delta_\beta \Delta_\alpha \cdots = \Delta_\beta \Delta_\alpha \Delta_\beta \cdots$$

où chaque membre possède m facteurs. Mais $s_\alpha s_\beta s_\alpha \cdots$ et $s_\beta s_\alpha s_\beta \cdots$ sont deux décompositions réduites de l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl du sous-système de rang ≤ 2 engendré par α et β ; donc l'assertion résulte du Lemme 3.3.9. \square

Définition 3.3.11. Si $w \in W$ s'écrit sous forme réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, alors l'expression

$$\Delta_w := \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k}$$

ne dépend pas de la décomposition réduite de w choisie et définit l'opérateur de différences divisées associé à w :

$$\Delta_w : H_T^*(K/T, \mathbb{Q}) \rightarrow H_T^{*-2}(K/T, \mathbb{Q}).$$

Remarque 3.3.12. Notons qu'au passage, on a montré que si $w_0 \in W$ est l'élément de plus grande longueur, alors on a

$$\Delta_{w_0} = \frac{\sum_{w \in W} \det(w)w}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(x)}.$$

Un point crucial dans notre discussion est le calcul de l'action des différences divisées sur les classes de Schubert. Nous allons donner une idée de preuve du résultat suivant, sans trop entrer dans les détails techniques :

Lemme 3.3.13. ([51], Theorem 3.2, (2))

Pour une classe de Schubert équivariante \mathcal{X}_w , on a

$$\Delta_i(\mathcal{X}_w) = \begin{cases} \mathcal{X}_{ws_i} & \text{si } l(ws_i) = l(w) - 1 \\ 0 & \text{si } l(ws_i) = l(w) + 1 \end{cases}$$

et on en tire

$$\Delta_u(\mathcal{X}_w) = \begin{cases} \mathcal{X}_{wu^{-1}} & \text{si } l(wu^{-1}) = l(w) - l(v) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour ceci, nous introduisons les *tours de Bott*. Nous allons voir réapparaître les variétés de Bott-Samelson vues en 2.3.4.

Définition 3.3.14. ([50], Definition 3.1)

Une *tour de Bott* est un $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibré itéré

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & & & & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ B_n & \xrightarrow{\pi_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\pi_2} & B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0 = \text{pt} \end{array}$$

où chaque structure de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibré est donnée par projectivisation d'un fibré en droites L_i sur B_i , i.e. $B_{i+1} = \mathbb{P}(L_i \oplus \underline{\mathbb{C}})$ où $\underline{\mathbb{C}}$ est le fibré vectoriel trivial sur B_i . La variété B_n est appelée *variété de Bott* de la tour; c'est une $2n$ -variété réelle lisse avec action canonique de $(\mathbb{S}^1)^n$.

Exemple 3.3.15. Nous avons en fait déjà rencontré une telle situation. Si $\alpha_i \in \Pi$ est une racine simple, on a le sous-groupe parabolique minimal

$$P_i := \langle \dot{s}_i, B \rangle \leq G.$$

Si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(w)}} \in W$ est une décomposition réduite de w , on définit

$$\forall 1 \leq k \leq l(w), B_k := \frac{P_{i_1} \times_B P_{i_2} \times_B \cdots \times_B P_{i_k}}{B} = \frac{p_{i_1} \times P_{i_2} \times \cdots \times P_{i_k}}{B^k}.$$

Alors, d'après le Lemme 2.3.32, $B_{l(w)} = Z_w$ est la variété de Bott de la tour de Bott

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & & & & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \sim \\ B_{l(w)} & \longrightarrow & B_{l(w)-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & B_1 = P_{i_1}/B \longrightarrow B_0 = \text{pt} \end{array}$$

Soit σ_i la section nulle de π dans une tour de Bott. Alors, une décomposition cellulaire de B_n indexée par les $I = (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n$ est donnée par

$$B_n = \bigcup_{I \in \{0, 1\}^n} b_n(i_n) \circ b_{n-1}(i_{n-1}) \circ \cdots \circ b_1(i_1)(\text{pt}),$$

où $b_i(0) = \sigma_i$ et $b_i(1) = \pi_i^{-1}$. Par le théorème des coefficients universels, le produit de Kronecker

$$\begin{array}{ccc} H^k(B_n, \mathbb{Z}) \otimes H_k(B_n, \mathbb{Z}) & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \varphi \otimes \bar{\alpha} & \mapsto & \varphi(\alpha) \end{array}$$

est une dualité parfaite. Prenons alors $\overline{b_n(i_n) \circ \cdots \circ b_1(i_1)}(\text{pt})$. On a alors

$$H^*(B_n, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{I \in \{0,1\}^n} \mathbb{Z} \langle \Gamma_I \rangle$$

et $\Gamma_I \in H^{2l(I)}(B_n, \mathbb{Z})$ où $l(I) = l((i_1, \dots, i_n)) := i_1 + \cdots + i_n$. On rencontre alors un problème similaire à celui du calcul de Schubert : trouver les constantes de structure C_{IJ}^K telles que

$$\Gamma_I \cup \Gamma_J = \sum_{K \in \{0,1\}^n} c_{IJ}^K \Gamma_K.$$

On le résout comme suit.

Rappelons que si l'on a un fibré vectoriel complexe E de rang r sur un espace X , alors c'est aussi un \mathbb{R} -fibré vectoriel de rang $2r$, orienté canoniquement (voir [57], Lemma 14.1). Une telle orientation donne une *classe de Thom* (que nous avons déjà rencontrée plus haut) $\gamma_E \in H^2(E, E \setminus \{0\}, \mathbb{Z})$. Les inclusions $(X, \emptyset) \hookrightarrow (E, \emptyset) \hookrightarrow (E, E \setminus \{0\})$ donnent

$$H^2(E, E \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(E, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}).$$

L'image $e(E) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ de γ_E par cette composée est par définition la *classe d'Euler* du fibré $E \rightarrow X$ (voir [57], §9).

Ici, soit $e_i := e(L_i) \in H^2(B_{i-1}, \mathbb{Z})$ la classe d'Euler du fibré en droites $L_i \rightarrow B_{i-1}$. Soit aussi x_i la classe correspondant à $I_i := (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \{0, 1\}^n$. Alors, on peut montrer (cf [1], §2.1) que

$$H^*(B_n, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]}{(x_k^2 + e_k x_k)}$$

et, sous cette identification,

$$\Gamma_I = x^I := x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}.$$

Dans le cas T -équivariant, on a

$$H_T^*(B_n, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]}{(x_k^2 - \alpha_{i_k} x_k - e_k x_k)},$$

avec $\Pi = \{\alpha_{i_k}\}$. On a alors

Lemme 3.3.16. *Dans le contexte de l'exemple 3.3.15, soit $w = s_{k_1} \cdots s_{k_l(w)} \in W$ une écriture réduite et, pour $I \in \{0, 1\}^{l(w)}$, soit $w^I := s_{k_1}^{i_1} \cdots s_{k_l(w)}^{i_l(w)} \in W$. Alors, on a*

$$\sum_{w^I=u} \Gamma_I \cup \sum_{w^J=v} \Gamma_J = c_{uv}^w \Gamma_{(1,1,\dots,1)},$$

où les c_{uv}^w sont les constantes de structure pour les classes de Schubert dans $H^*(G/B, \mathbb{Z})$. De même, dans le cas équivariant :

$$\sum_{w^I=u} \Gamma_I \cup \sum_{w^J=v} \Gamma_J = \gamma_{uv}^w \Gamma_{(1,1,\dots,1)}.$$

Idée de démonstration. Définissons

$$\begin{aligned} \tau_w : \quad B_{l(w)} &\rightarrow G/B \\ (p_{k_1, B} \cdots p_{k_{l(w)}}) &\mapsto (p_{k_1} \cdots p_{k_{l(w)}})B \end{aligned}$$

On a vu dans la section 2.3.4 que $\text{im } \tau_w = Y_w = \overline{BwB/B}$, donc on a une section $u_w : Y_w \rightarrow B_{l(w)}$. On montre alors que

$$\tau_w^*(X_u) = \sum_{w^I=u} \Gamma_I$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{w^I=u} \Gamma_I \cup \sum_{w^J=v} \Gamma_J &= \tau_w^*(X_u X_v) = \tau_w^* \left(\sum_{l(w')=l(u)+l(v)} c_{uw'}^{w'} X_{w'} \right) \\ &= \sum_{l(w')=l(u)+l(v)} c_{uw'}^{w'} \tau_w^*(X_{w'}) = c_{uw}^w \Gamma_{(1, \dots, 1)}. \end{aligned}$$

De même, dans le cas équivariant, on montre que

$$\tau_w^*(\mathcal{X}_u) = \sum_{w^I=u} \Gamma_I$$

et on obtient la même formule. □

Revenons-en au résultat qui nous intéresse :

Idée de démonstration. de 3.3.13

Il suffit de montrer que si $l(ws_i) = l(w) - 1$, alors on a

$$\Delta_i(\mathcal{X}_w) = X_{ws_i}.$$

Par hypothèse, il existe une expression réduite $w = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{l(w)-1}} s_i$. Reprenons la multiplication $\tau_w : B_{l(w)} \rightarrow G/B$. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_T \times_T B_{l(w)} & \xrightarrow{\tau_w} & E_T \times_T G/B \\ \downarrow \pi & & \downarrow p_2 \\ E_T \times_T B_{l(w)}/P_i & \xrightarrow{\overline{\tau_w}} & E_T \times_T G/P_i \end{array}$$

On a des fibrés

$$\mathbb{C}P^1 \longrightarrow E_T \times_T B_{l(w)} \xrightarrow{\pi} E_T \times_T B_{l(w)}/P_i$$

et

$$\mathbb{C}P^1 \longrightarrow E_T \times_T G/B \xrightarrow{p_2} E_T \times_T G/P_i$$

et notons $\tilde{\phi}$ et ϕ les morphismes de Gysin respectifs (cf C.9). On a un rectangle commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_T^*(B_{l(w)}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H_T^{*-2}(B_{l(w)}/P_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi^*} & H_T^{*-2}(B_{l(w)}, \mathbb{Z}) \\ \uparrow \tau_w^* & & \uparrow \overline{\tau_w^*} & & \uparrow \tau_w^* \\ H_T^*(G/B, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi} & H_T^{*-2}(G/P_i, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_2^*} & H_T^{*-2}(G/B, \mathbb{Z}) \end{array}$$

et, par définition, on a $p_2^* \circ \phi = \Delta_i$. On montre alors que

$$\pi^* \circ \tilde{\phi}(\Gamma_{(1,\dots,1)}) = \Gamma_{(1,\dots,1,0)} = \tau_w^*(\mathcal{X}_{ws_i}).$$

Ainsi, il vient

$$\tau_w^*(\mathcal{X}_{ws_i}) = \pi^* \circ \tilde{\phi}(\Gamma_{(1,\dots,1)}) = \pi^* \circ \tilde{\phi} \circ \tau_w^*(\mathcal{X}_w) = \pi^* \circ \overline{\tau}_w^* \circ \phi(\mathcal{X}_w) = \tau_w^* \circ p_2^* \circ \phi(\mathcal{X}_w) = \tau_w^*(\Delta_i(\mathcal{X}_w)).$$

Or, comme $\tau_w : B_{l(w)} \rightarrow Y_w$ admet une section $u_w : Y_w \rightarrow B_{l(w)}$, on a que τ_w^* est injective et on en tire donc que $\mathcal{X}_{ws_i} = \Delta_i(\mathcal{X}_w)$, d'où le résultat. \square

On peut maintenant commencer à étudier la description de GKM. Tout d'abord, remarquons que le fait de travailler dans le cadre équivariant permet d'avoir accès au théorème de localisation. Nous allons tirer profit de ce résultat. L'ensemble des points fixes de K/T pour l'action de T (par multiplication à gauche) est

$$(K/T)^T = \{\nu T/T, \nu \in W\}.$$

Comme $H^{impair}(K/T) = 0$, l'action de T sur K/T est équivariamment formelle et, d'après le Théorème 2.5.12 la restriction

$$\iota^* := \iota_{K/T}^* : H_T^*(K/T) \rightarrow H_T^*((K/T)^T)$$

est injective. De plus, on a

$$H_T^*((K/T)^T) = H_T^*\left(\bigcup_{w \in W} \{wT/T\}\right) = \bigoplus_{w \in W} H_T^*(\text{pt}) = \bigoplus_{w \in W} H^*(B_T) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[t] \simeq R^{|W|}$$

Donc, si l'on note

$$\iota_\nu^* : H_T^*(K/T) \rightarrow H^*(B_T)$$

la restriction induite par $\iota_\nu : \{\nu T/T\} \rightarrow K/T$, alors on a

$$\iota^* = \bigoplus_{w \in W} \iota_w^* : H_T^*(K/T) \hookrightarrow \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[t].$$

On va décrire l'image de ι^* (qui est isomorphe à $H_T^*(K/T)$ d'après 2.5.12) en termes purement combinatoires : c'est la *présentation de GKM*.

Rappelons qu'une racine $\beta \in \mathfrak{h}^*$ peut être vue comme un élément polynômial $\beta(z)$ de $H^2(B_T) = \mathbb{Q}^2[z] \subset \mathbb{Q}[z]$ et que le groupe de Weyl W agit sur $H_T^*(\text{pt})$ par

$$w \cdot f(z) = f(w^{-1}(z))$$

où l'action de W sur $(\mathbb{R}^n)^* = \mathfrak{t}^* \simeq \{f \in H^2(B_T) = \mathbb{Q}^2[z] ; f(0) = 0\}$ provient de celle de W sur \widehat{T} , elle-même provenant de l'action sur T par conjugaison : W agit donc en permutant les z_i . On définit, pour $v, w \in W$ et $\beta \in \Phi^+$, la relation binaire

$$w <_\beta v \stackrel{\text{def}}{\iff} w = s_\beta v \text{ et } l(w) < l(v).$$

La clôture réflexive transitive de ceci est alors l'ordre de Bruhat. On a alors le résultat élémentaire suivant

Lemme 3.3.17. (Lemme d'échange, [49], Lemma 2.2)

Pour une décomposition réduite $v = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(v)}}$, on a

$$w <_{\beta} v \Leftrightarrow \exists 1 \leq k \leq l(v) ; w = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{l(v)}} \text{ et } \beta = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}).$$

En particulier, on a

$$|\{\beta \in \Phi^+ ; \exists w \in W ; w <_{\beta} v\}| = l(v), \quad \forall v \in W.$$

Polynômes de Schubert équivariants

Avant d'aller plus loin dans cette analyse, nous allons construire des représentants polynômiaux des classes de Schubert X_w et \mathcal{X}_w . Nous retrouverons ces polynômes dans les algorithmes de conversion.

L'action de T sur K/T est équivariamment formelle, donc par le Corollaire 2.4.23, on a

$$H^*(K/T) \simeq H_T^*(K/T) / S_T^+ H_T^*(K/T) \simeq \mathbb{Q}[x] / \mathbb{Q}^+[x]^W$$

où $\mathbb{Q}^+[x]^W$ désigne l'idéal de $\mathbb{Q}[x]$ engendré par les éléments de degré strictement positif de $\mathbb{Q}[x]^W$ et on peut choisir $\sigma_w(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un représentant de $X_w \in H^*(K/T)$. D'après [51], theorem 3.7 et [4], Theorem 3.15, on peut prendre pour *polynômes de Schubert*,

$$\sigma_w(x) := \begin{cases} \frac{1}{|W|} \prod_{\beta \in \Phi^+} (-\beta(x)) & \text{si } w = w_0 \\ \Delta_{w^{-1}w_0} \sigma_{w_0}(x) & \text{si } w \neq w_0 \end{cases}$$

Remarque 3.3.18. D'après [4], Corollary 3.16, si on considère la demi-somme des racines positive $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ et si $\ell := l(w_0)$, alors on a

$$\sigma_{w_0} = \frac{(-\rho)^\ell}{\ell!}.$$

Cependant, nous n'utiliserons pas cette relation.

Considérons ensuite l'ensemble des *k-partitions de $w \in W$* : pour une écriture réduite $w = s_{j_1} \cdots s_{j_{l(w)}}$, on pose

$$P_k(w) := \{(w_1, \dots, w_k) ; w_1 = s_{j_1} \cdots s_{j_{l_1}}, \dots, w_k = s_{j_{l_{k-1}}} \cdots s_{j_{l(w)}}, 1 \leq j_{l_1} < j_{l_2} < \dots < j_{l_{k-1}} < l(w)\}$$

De façon équivalente, on peut définir par récurrence $P_k(e) = \emptyset$ et, pour $1 \leq k \leq l(w)$,

$$P_k(w) := \bigcup_{s_i ; l(ws_i)=l(w)-1} \{(w_1, \dots, w_{k-1}, w_k s_i) ; (w_1, \dots, w_k) \in P_k(ws_i)\} \cup \{(w_1, \dots, w_{k-1}, s_i) ; (w_1, \dots, w_{k-1}) \in P_{k-1}(ws_i)\}.$$

Ensuite, on pose

$$\mathfrak{S}_e(t, x) := 1$$

et, pour $w \in W$,

$$\mathfrak{S}_w(t, x) := \sum_{k=1}^{l(w)} \sum_{(w_1, \dots, w_k) \in P_k(w)} (-1)^k \sigma_{w_1}(t) \sigma_{w_2}(t) \cdots \sigma_{w_{k-1}}(t) (\sigma_{w_k}(t) - \sigma_{w_k}(x)).$$

Ce sont les *polynômes de Schubert équivariants*. Nous verrons des exemples.

Remarque 3.3.19. Par définition, on a la relation

$$\Delta_v \mathfrak{S}_w(t, t) = \delta_{v,w}.$$

On a un premier résultat :

Proposition 3.3.20. ([49], Proposition 4.2 et [50], Proposition 7.5)

1. On a

$$\iota_v^*(\mathcal{X}_w) = \begin{cases} 0 & \text{si } (l(v) < l(w) \text{ ou } (l(v) = l(w) \text{ et } v \neq w)) \\ \prod_{\beta \in \Phi^+ ; \exists u <_\beta w} \beta(t) & \text{si } v = w \end{cases}$$

2. Pour $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, on a $\iota_w^*(f(t, x)) = f(t, w^{-1}(t))$.

Démonstration. Le second point provient du fait que, puisque $\iota_x([\text{pt}]) = [e, wT]$ et $w([e, T]) = [e, wT]$, on a $\iota_w = w \circ \iota_1$ et donc $\iota_w^*(f(t, x)) = \iota_1^*(f(t, w^{-1}(x))) = f(t, w^{-1}(t))$.

Pour le premier point, comme $\Omega_w = \bigcup_{v \geq w} \Omega_v^o$, les points fixes présents dans Ω_w sont les $\{vT/T, v \geq w\}$, donc $\iota_v^*(\mathcal{X}_w) \neq 0$ seulement si $v \geq w$. Ensuite, si $l(ws_i) = l(w) + 1$, on a par le lemme 3.3.13,

$$w(\alpha_i) \iota_w^*(\mathcal{X}_w) = w(\alpha_i) \iota_w^* \Delta_i(\mathcal{X}_{ws_i}) = -\iota_w^*(\mathcal{X}_{ws_i}) + \iota_{ws_i}^*(\mathcal{X}_{ws_i})$$

et comme $\iota_w^*(\mathcal{X}_{ws_i}) = 0$, il vient $w(\alpha_i) \iota_w^*(\mathcal{X}_w) = \iota_{ws_i}^*(\mathcal{X}_{ws_i})$. Ainsi, pour une écriture réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(w)}}$, on obtient par récurrence et en utilisant le lemme d'échange 3.3.17,

$$\iota_w^*(\mathcal{X}_w) = \prod_{k=1}^{l(w)} s_{i_k} \cdots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) = \prod_{\beta \geq 0 ; \exists u ; u <_\beta w} \beta.$$

□

Proposition 3.3.21. ([49], Proposition 4.9)

On a

$$\iota_v^*(\mathfrak{S}_w(t, x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } (l(v) \leq l(w) \text{ et } v \neq w) \\ \prod_{\beta \in \Phi^+ ; \exists u <_\beta w} \beta(t) & \text{si } v = w \end{cases}$$

De plus, si $h_w(t, x) \in \mathbb{Q}_W^{2l(w)}[t, x]$ vérifie $h_w(t, x) = 0$ pour $l(v) \leq l(w)$ et $v \neq w$, alors $h_w = c \mathfrak{S}_w$ pour un $c \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \iota_w^*(\Delta_i f(t, x)) &= \iota_w^* \left(\frac{f(t, x) - f(t, s_i(x))}{-\alpha_i(x)} \right) = \frac{f(t, w^{-1}(t)) - f(t, s_i w^{-1}(t))}{-\alpha_i(w^{-1}(t))} \\ &= \frac{\iota_w^* f(t, x) - \iota_{ws_i}^* f(t, x)}{-\alpha_i(w^{-1}(t))}. \end{aligned}$$

On procède alors par récurrence sur $l(w)$. On a $\iota_e^* \mathfrak{S}_w = 0$ si $w \neq e$. Soit donc $u \in W$ tel que $l(u) < l(w)$ et supposons $\iota_u^* \mathfrak{S}_w = 0$. Pour toute réflexion simple s_i telle que $l(us_i) = l(u) + 1$, on a

$$\iota_{us_i}^* \mathfrak{S}_w = \alpha_i(u^{-1}(t)) \iota_u^*(\Delta_i \mathfrak{S}_w) - \iota_u^* \mathfrak{S}_w = \alpha_i(u^{-1}(t)) \iota_u^*(\mathfrak{S}_{ws_i})$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq ws_i \\ \alpha_i(u^{-1}(t)) \prod_{\beta; \exists v <_{\beta} u} \beta(t) & \text{si } u = ws_i \end{cases}$$

donc par récurrence sur $l(u)$ et par la condition d'échange 3.3.17, on obtient

$$\begin{aligned} \iota_v^*(\mathfrak{S}_w(t, x)) &= \begin{cases} 0 & \text{si } l(v) \leq l(w) \text{ et } v \neq w \\ \prod_{k=1}^{l(w)} \alpha_{i_k}((s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}})^{-1}(t)) & \text{si } v = w \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } l(v) \leq l(w) \text{ et } v \neq w \\ \prod_{\beta \geq 0; \exists u <_{\beta} w} \beta(t) & \text{si } v = w \end{cases} \end{aligned}$$

avec $w = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(w)}}$ une décomposition réduite.

Ensuite, pour prouver la seconde assertion, prenons $h_w \in \mathbb{Q}_W^{2l(w)}[t, x]$ satisfaisant la condition de l'énoncé. Comme $\iota_w^*(h_w(t, x)) - \iota_{s_{\beta}w}^*(h_w(t, x))$ est divisible par $\beta(t)$ et comme deux racines positives distinctes sont linéairement indépendantes, on a que $\iota_w^*(h_w(t, x))$ est divisible par $\prod_{\beta \in \Phi^+; \exists u <_{\beta} w} \beta(t)$. Ceci provient du fait que les $\beta(t)$ apparaissant dans ce produit sont deux à deux premiers entre eux, puisqu'ils sont linéairement indépendants et homogènes de degré 1. Pour des raisons de degré, on a un $c \in \mathbb{Q}$ tel que $\iota_w^*(h_w(t, x)) = c \prod_{\beta \in \Phi^+; \exists u <_{\beta} w} \beta$. Posons $h'_w := h_w - c\mathfrak{S}_w$. Alors, $\iota_v^*(h'_w(t, x)) = 0$ si $l(v) \leq l(w)$. Soit $u \in W$ de longueur minimale tel que $\iota_u^*(h'_w(t, x)) \neq 0$. Alors, par le même argument que ci-dessus, on a que $\iota_u^*(h'_w(t, x))$ est divisible par $\prod_{\beta \in \Phi^+; \exists v_{\beta}u} \beta(t)$. Mais on doit avoir $2l(u) > 2l(w)$ et ceci est absurde pour des raisons de degré. Par injectivité de $\iota_{K/T}^*$, on a donc $h'_w(t, x) = 0$, donc $h_w = c\mathfrak{S}_w$ comme souhaité. \square

En combinant les Proposition 3.3.20 et 3.3.21, on obtient alors le résultat-clef suivant :

Théorème 3.3.22. *La classe de $\mathfrak{S}_w(t, x)$ dans $H_T^*(K/T)$ est \mathcal{X}_w .*

Proposition 3.3.23. (Formule d'interpolation de Newton, [49], Proposition 4.6)

Pour tout $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, on a

$$f(t, x) = \sum_{w \in W} \Delta_w(f)(t, t) \mathfrak{S}_w(t, x).$$

Démonstration. Par le théorème 3.3.22, on peut écrire $f(t, x) = \sum_v c_v(t) \mathfrak{S}_v(t, x)$ où $c_v(t) \in \mathbb{Q}[t] = H^*(B_T)$. On a alors, avec la remarque 3.3.19,

$$\Delta_w f(t, t) = \sum_{v \in W} c_v(t) \Delta_w \mathfrak{S}_v(t, t) = \sum_{v \in W} c_v(t) \delta_{v, w} = c_w(t),$$

d'où le résultat. \square

Nous sommes maintenant enfin en mesure de donner la description de GKM :

Définition 3.3.24. On définit l'anneau de Goresky-Kottwitz-MacPherson de W par

$$H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) := \left\{ h = (h_w(t))_{w \in W} \in \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Q}[t]; \forall \beta \in \Phi^+, w <_{\beta} v \Rightarrow h_w - h_v \in \langle \beta \rangle \right\},$$

la multiplication s'effectuant composante par composante.

D'après 3.3.4 et 3.3.20, on a

$$\iota_w^*(f(t, x)) - \iota_{s_\beta w}^*(f(t, x)) = f(t, w^{-1}(t)) - f(t, w^{-1}s_\beta(t)) \in \langle \beta(t) \rangle.$$

Ainsi, le morphisme

$$\begin{aligned} \iota^* = \bigoplus_{w \in W} \iota_w^* & : \mathbb{Q}_W[t, x] \rightarrow H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q}) \\ f(t, x) & \mapsto f(t, w^{-1}(t)) \end{aligned}$$

est bien défini. De plus, ι^* est injectif. On a déjà vu que ceci découle de l'équivariant formalité de l'action $T \curvearrowright K/T$, mais on peut aussi le prouver directement en utilisant la formule de Newton 3.3.23. En effet, si $\iota_w^*(f) = 0$ pour tout $w \in W$, alors $\iota_w^*(\Delta_v(f)) = 0$ pour tous $v, w \in W$, donc $0 = \iota_e^*(\Delta_v(f)) = \Delta_v(f)(t, t)$ et donc $f = 0$.

Théorème 3.3.25. ([49], Corollary 4.10 et [37], Theorem 1.2.2 et Theorem 7.2)

Le morphisme d'algèbres

$$\iota^* : H_T^*(K/T) \rightarrow H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer la surjectivité. Soit donc $(h_w(t, x))_w \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$. On peut supposer qu'il existe $v \in V$ tel que $h_v(t, x) \neq 0$ et $h_u(t, x) = 0$ dès que $l(u) < l(w)$. Alors, si $u <_\beta v$, on a $h_v(t, x) \in \langle \beta(t) \rangle$. Là encore, comme deux racines positives distinctes donnent des polynômes premiers entre eux, on a

$$h_v(t, x) \in \left\langle \prod_{\beta \in \Phi^+ ; \exists u <_\beta v} \beta(t) \right\rangle.$$

Posons

$$h'_w(t, x) := h_w(t, x) - \frac{h_v(t, x)}{\prod_{\beta \geq 0 ; \exists u <_\beta v} \beta(t)} \iota_w^*(\mathfrak{S}_v(t, x)).$$

Alors $(h'_w)_w \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ et on a $h'_v(t, x) = 0$. En itérant ce processus, on obtient bien que $(h_w)_w \in \text{im } \iota^*$. \square

L'isomorphisme $\iota^* : H_T^*(K/T) \rightarrow H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ s'appelle la *présentation de GKM*.

Définition 3.3.26. Au groupe de Weyl W , on peut associer le *graphe de GKM* $\mathcal{G} = (V, E)$, qui permet de visualiser la situation. L'ensemble des sommets V de \mathcal{G} est W et on met une arête entre u et v si $v <_\beta u$ pour un $\beta \in \Phi^+$, auquel cas on dénote par (β) l'arête en question.

Au passage, on peut calculer l'effet des différences divisées sur l'anneau $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$:

Lemme 3.3.27. ([50], Corollary 7.3)

Pour $h = (h_w)_w \in H^(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$, on a*

$$(\Delta_i(h))_w = \frac{h_w - h_{ws_i}}{-w(\alpha_i)}.$$

Démonstration. Par le Théorème 3.3.25, on peut choisir $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ tel que $f(t, w^{-1}(t)) = \iota_w^*(f(t, x)) = h_w(t)$. Alors, par 3.3.4, on a

$$\begin{aligned} (\Delta_i(h))_w &= \iota_w^*(\Delta_i f(t, x)) = \iota_w^* \left(\frac{f(t, x) - f(t, s_i(x))}{-\alpha_i(x)} \right) \\ &= \frac{f(t, w^{-1}(t)) - f(t, s_i w^{-1}(t))}{-\alpha_i(w^{-1}(t))} = \frac{h_w(t) - h_{ws_i}(t)}{-w(\alpha_i)(t)}. \end{aligned}$$

□

On obtient ainsi une description purement combinatoire de $H_T^*(K/T)$, en termes de graphe. Notons que, comme pour la présentation de Borel, la présentation de GKM présente l'avantage de décrire la multiplication dans $H_T^*(K/T)$: c'est la multiplication terme à terme dans $\bigoplus_w \mathbb{Q}[t]$. Cependant, on perd là encore le lien avec les classes de Schubert \mathcal{X}_w ; bien que l'on visualise mieux la situation qu'avec l'approche de Borel. Un algorithme permettant de passer de Schubert à GKM et réciproquement donnerait une deuxième solution au problème des constantes de structure. C'est ce que nous allons inspecter maintenant.

3.4 Algorithmes de conversion

Avant de présenter les algorithmes proprement dis, nous allons donner quelques résultats techniques concernant l'action du groupe de Weyl sur $H_T^*(K/T)$ et, plus particulièrement, sur les classes de Schubert. Tout d'abord, on a le lemme trivial suivant :

Lemme 3.4.1. (Formule de Leibniz, [49], Lemma 5.3)

Pour $f, g \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, on a

$$\Delta_i(f(t, x)g(t, x)) = \Delta_i(f(t, x))g(t, x) + f(t, s_i(x))\Delta_i(g(t, x)),$$

i.e.

$$\Delta_i(fg) = (\Delta_i f)g + s_i(f)\Delta_i(g).$$

Lemme 3.4.2. ([49], Lemma 5.1)

Si $\omega_i \in \mathbb{Q}^2[t]$ désigne le $i^{\text{ème}}$ poids fondamental, alors on a

$$\mathfrak{S}_{s_i}(t, x) = \omega_i(t) - \omega_i(x).$$

Démonstration. Par définition, puisque s_i est une réflexion simple, on a $\mathfrak{S}_{s_i}(t, x) = \sigma_{s_i}(x) - \sigma_{s_i}(t)$. Pour conclure, il reste donc à montrer que $\sigma_{s_i} = -\omega_i$. Rappelons que l'on a, pour $j \neq i$, $s_i(\omega_j) = \omega_j$ et $s_i(\omega_i) = \omega_i - \alpha_i$, d'où

$$\Delta_j(\omega_i) = -\delta_{i,j} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

De plus, comme $\mathfrak{S}_w(0, x) = \sigma_w(x)$, par 3.3.13 et 3.3.22, il vient

$$\Delta_j(\sigma_{s_i}) = \Delta_j(\mathfrak{S}_{s_i}(0, x)) = \Delta_j(\mathfrak{S}_{s_i})(0, x) = \Delta_j(\mathcal{X}_{s_i})(0, x) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ainsi, on a $\Delta_j(\sigma_{s_i} + \omega_i) = 0$ pour tout j , ce qui entraîne $s_j(\sigma_{s_i} + \omega_i) = \sigma_{s_i} + \omega_i$. Autrement dit, $\sigma_{s_i} + \omega_i$ est W -invariant. Or, comme $\sigma_{s_i}(t) + \omega_i(t) \in \mathbb{Q}^2[t] = H_T^2(\text{pt})$ est sans terme constant, c'est une forme linéaire sur \mathfrak{h} et comme les poids fondamentaux forment une base de \mathfrak{h}^* , on peut trouver des $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tels que $\sigma_{s_i} + \omega_i = \sum_j \lambda_j \omega_j$. Il vient finalement

$$\forall j, \sigma_{s_i} + \omega_i = s_j(\sigma_{s_i} + \omega_i) = \sum_k \lambda_k s_j(\omega_k) = \sum_{k \neq j} \lambda_k \omega_k + \lambda_j(\omega_j - \alpha_j) = (\sigma_{s_i} + \omega_i) - \lambda_j \alpha_j.$$

Donc, $\lambda_j = 0$ pour tout j et on obtient bien $\sigma_{s_i} + \omega_i = 0$. \square

Proposition 3.4.3. (Formule de Chevalley, [49], Proposition 5.2)

On a

$$\mathfrak{S}_{s_i} \mathfrak{S}_w = \sum_{\beta \in \Phi^+ ; l(ws_\beta) = l(w) + 1} 2 \frac{\langle \beta, \omega_i \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathfrak{S}_{ws_\beta} + (\omega_i(t) - \omega_i(w^{-1}(t))) \mathfrak{S}_w.$$

Démonstration. Pour un mot réduit $v = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(v)}}$ et $L \subset \{1, \dots, l(v)\}$, on définit un sous-mot v^L de v par

$$v^L = s_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} s_{i_2}^{\epsilon_{i_2}} \cdots s_{i_{l(v)}}^{\epsilon_{i_{l(v)}}} \quad \text{où } \epsilon_j = \mathbb{1}_L = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin L \\ 1 & \text{si } j \in L \end{cases}$$

Soit aussi

$$\Delta'_L := \phi_{i_1} \circ \phi_{i_2} \circ \cdots \circ \phi_{i_{l(v)}} \quad \text{où } \phi_{i_j} = \begin{cases} \Delta_{i_j} & \text{si } j \notin L \\ s_{i_j} & \text{si } j \in L \end{cases}$$

Soit encore

$$\Phi_v^W := \sum_{L \subset \{1, \dots, l(v)\} ; v^L = w} \Delta'_L.$$

En itérant la formule de Leibniz 3.4.1, on a

$$\Delta_v(\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_w)(t, t) = \Phi_v^w(\mathfrak{S}_u)(t, t) = \Phi_v^u(\mathfrak{S}_w)(t, t)$$

et, par la formule de Newton 3.3.23, il vient alors

$$\mathfrak{S}_u \mathfrak{S}_w = \sum_{v \geq w} \Phi_v^w(\mathfrak{S}_u)(t, t) \cdot \mathfrak{S}_v(t, x).$$

Donc ici,

$$\mathfrak{S}_{s_i} \mathfrak{S}_w = \sum_{v \geq w} \Phi_v^w(\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t) \cdot \mathfrak{S}_v(t, x).$$

Pour des raisons de degré, $\Phi_v^w(\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t)$ s'annule sauf si $v = w$ ou $l(v) = l(w) + 1$. En effet, Si $l(v) \geq l(w) + 2$, dans $v^L = s_{i_1}^{\epsilon_{i_1}} \cdots s_{i_{l(v)}}^{\epsilon_{i_{l(v)}}} = w$, on a $i \neq j \in \{1, \dots, l(v)\}$ tels que $i, j \notin L$; donc au-moins deux opérateurs Δ_{i_k} apparaissent dans Δ'_L et comme les

différences divisées simples diminuent le degré par 2 et comme $\deg(\omega_i) = 2$, on doit avoir $\Delta'_L((\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t) = 0$ et donc $\Phi_v^w(\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t) = 0$. Ensuite, pour $v = w$, on a

$$\Phi_w^w(\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t) = (\omega_i(t) - \omega_i(w^{-1}(x)))(t, t) = \omega_i(t) - \omega_i(w^{-1}(t))$$

et, pour $l(v) = l(w) + 1$, on peut écrire $v = ws_\beta$ pour un $\beta \in \Phi^+$. Par la condition d'échange 3.3.17, on a alors

$$\Phi_v^w(\omega_i(t) - \omega_i(x))(t, t) = \frac{\omega_i(t) - \omega_i(x) - (\omega_i(t) - \omega_i(s_\beta(x)))}{-\beta(x)} = 2 \frac{\langle \beta, \omega_i \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle},$$

d'où le résultat. \square

Proposition 3.4.4. ([51], Proposition 3.3)

1. On a

$$s_i \mathcal{X}_w = \begin{cases} \mathcal{X}_w - w(\alpha_i)(t) \mathcal{X}_{ws_i} - \sum_{\beta \in \Phi^+ ; l(ws_i s_\beta) = l(w)} 2 \frac{\langle \alpha_i, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathcal{X}_{ws_i s_\beta} & \text{si } l(ws_i) = l(w) - 1 \\ \mathcal{X}_w & \text{si } l(ws_i) = l(w) + 1 \end{cases}$$

2. Dans la présentation de Borel, W agit sur le facteur de droite de $R \otimes_{R^W} R$ par la représentation standard (i.e. W agit sur les variables du facteur de droite),

3. Pour $h \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$, on a

$$(w \circ h)_v = h_{vw}.$$

Démonstration. 1. Par 3.3.13, si $l(ws_i) = l(w) - 1$, alors on a

$$s_i \mathcal{X}_w = \mathcal{X}_w + \alpha_i(x) \mathcal{X}_{ws_i}. \quad (15)$$

Par la formule de Chevalley 3.4.3, il vient

$$(\omega_i(t) - \omega_i(x)) \mathfrak{S}_w = \mathfrak{S}_{s_i} \mathfrak{S}_w = \sum_{\beta ; l(ws_\beta) = l(w) + 1} 2 \frac{\langle \beta, \omega_i \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathfrak{S}_{ws_\beta} + (\omega_i(t) - \omega_i(w^{-1}(t))) \mathfrak{S}_w,$$

d'où

$$\omega_i(x) \mathfrak{S}_w(t, x) = w(\omega_i)(t) \mathfrak{S}_w - \sum_{\beta} 2 \frac{\langle \beta, \omega_i \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathfrak{S}_{ws_\beta},$$

donc

$$\alpha_i(x) \mathfrak{S}_w(t, x) = w(\alpha_i)(t) \mathfrak{S}_w - \sum_{\beta} 2 \frac{\langle \alpha_i, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathfrak{S}_{ws_\beta}$$

et donc

$$\alpha_i(x) \mathcal{X}_w = w(\alpha_i)(t) \mathcal{X}_w - \sum_{\beta} 2 \frac{\langle \alpha_i, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \mathcal{X}_{ws_\beta}$$

et, combiner ceci avec (15) donne le résultat.

2. C'est la définition.

3. C'est facile à voir : si $h = \iota^*(f(t, x))$, alors on calcule

$$\begin{aligned} h_{vw} &= \iota_{vw}^*(f(t, x)) = f(t, (vw)^{-1}(t)) = f(t, w^{-1}v^{-1}(t)) \\ &= \iota_v^*(f(t, w^{-1}(x))) = (\iota^*(f(t, w^{-1}(x))))_v = (w \circ \iota^*(f(t, x)))_v = (w \circ h)_v. \end{aligned}$$

\square

Passons maintenant à la conversion :

3.4.1 Borel \longrightarrow GKM

Le problème est le suivant :

Étant donné $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, trouver une famille $h = (h_v)_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ qui représente la classe de $f(t, x)$.

Définissons $\text{ev}(f(t, x)) = f(t, t)$, i.e.

$$\begin{aligned} \text{ev} &: \mathbb{Q}[t, x] \rightarrow \mathbb{Q}[t] \\ t_i, x_i &\mapsto t_i \end{aligned}$$

Alors, on a par 3.3.20

$$\iota_e^*(f(t, x)) = \text{ev}(f(t, x))$$

et

$$v \circ \iota_e^* = \iota_v^*.$$

On obtient alors, avec le point 3. de 3.4.4,

Théorème 3.4.5. ([51], Proposition 3.5)

La suite $(\text{ev} \circ v(f(t, x)))_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ représente la même classe que $f(t, x)$.

3.4.2 Schubert \longrightarrow Borel

On se pose la question suivante :

Trouver $\mathfrak{S}_w \in H^*(B_T) \otimes_{H^*(B_T)^W} H^*(B_T) = R \otimes_{R^W} R$ représentant la classe de Schubert équivariante \mathcal{X}_w .

Ce problème à déjà été résolu par le Théorème 3.3.22. C'est-à-dire que l'on prend

$$\mathfrak{S}_w(t, x) = \sum_{k=1}^{l(w)} \sum_{(w_1, \dots, w_k) \in P_k(w)} (-1)^k \sigma_{w_1}(t) \sigma_{w_2}(t) \cdots \sigma_{w_{k-1}}(t) (\sigma_{w_k}(t) - \sigma_{w_k}(x)).$$

où

$$P_k(w) = \{(w_1, \dots, w_k); w_1 = s_{j_1} \cdots s_{j_{l_1}}, \dots, w_k = s_{j_{l_{k-1}}} \cdots s_{j_{l(w)}}, 1 \leq j_{l_1} < j_{l_2} < \cdots < j_{l_{k-1}} < l(w)\}$$

et

$$\sigma_{w_0} = \frac{1}{|W|} \prod_{\beta \in \Phi^+} (-\beta), \quad \sigma_w = \Delta_{w^{-1}w_0} \sigma_{w_0}.$$

3.4.3 Schubert \longrightarrow GKM

Le but ici est :

Trouver $h = (h_v)_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ représentant \mathcal{X}_w .

Celui-ci est atteint avec le résultat suivant :

Théorème 3.4.6. (Formule de Billey, [51], Theorem 3.9 et [49], Corollary 4.11)

Soit $v = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(v)}}$ un mot réduit. Posons

$$Q_v(w) := \{(j_1, \dots, j_{l(w)}), 1 \leq j_1 < \cdots < j_{l(w)} \leq l(v) ; s_{i_{j_1}} \cdots s_{i_{j_{l(w)}}} = w\}.$$

Alors, l'image de \mathcal{X}_w par la localisation est déterminée par

$$h_v = \iota_v^*(\mathcal{X}_w) = \sum_{(j_1, \dots, j_{l(w)}) \in Q_v(w)} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_{l(w)}}, \quad \text{où } \beta_{j_k} = s_{i_1} \cdots s_{i_{j_k-1}}(\alpha_{j_k}).$$

Démonstration. Par la condition d'échange 3.3.17, on voit que le membre de droite est dans l'anneau de GKM $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$. Comme $\mathbb{Q}_W[t, x] \simeq H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$, il existe $g(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ tel que $\iota_v^*(g(t, x)) = \sum_{Q_v(w)} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_{l(w)}}$. Alors, $g(t, x)$ vérifie la condition de la seconde assertion de 3.3.21, d'où $g = c\mathfrak{S}_w$ et on a $c = 1$. \square

3.4.4 GKM \longrightarrow Schubert

Le problème est ici le suivant :

Étant donné un $h = (h_v)_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$, trouver des $d_w \in \mathbb{Q}[t] = H^*(B_T)$ tels que $\sum_{w \in W} d_w \mathcal{X}_w$ représente la même classe que h .

D'après 3.3.20 et 3.4.6, on a

$$\iota_e^*(\mathcal{X}_w) = \delta_{w,e}$$

et en combinant ceci avec 3.3.19, il vient

$$d_w = \sum_v d_v \iota_e^*(\Delta_w(\mathcal{X}_v)) = \iota_e^* \left(\Delta_w \left(\sum_v d_v \mathcal{X}_v \right) \right) = (\Delta_w(h))_e.$$

Ainsi, on obtient le

Théorème 3.4.7. ([51], Proposition 3.11)

Une suite de polynômes $h \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ représente la classe

$$\sum_{w \in W} (\Delta_w(h))_e \mathcal{X}_w.$$

3.4.5 Borel \longrightarrow Schubert

La question est :

Étant donné $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$, trouver des $d_w \in \mathbb{Q}[t] = H^*(B_T)$ tels que $\sum_{w \in W} d_w \mathcal{X}_w$ représente la même classe que $f(t, x)$.

On a encore

$$d_w = \iota_e^* \left(\Delta_w \left(\sum_v d_v \mathcal{X}_v \right) \right) = (\Delta_w(\iota_e^*(f(t, x))))_e = \iota_e^* \Delta_w(f(t, x)) = \text{ev}(\Delta_w(f)(t, x)),$$

d'où le

Théorème 3.4.8. ([51], Proposition 3.13)

Un double polynôme $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ représente la classe

$$\sum_{w \in W} \text{ev}(\Delta_w(f)) \mathcal{X}_w.$$

Mentionnons en passant le lemme calculatoire pratique suivant, que nous avons en somme déjà démontré plus haut :

Lemme 3.4.9. ([51], Lemma 3.14)

1. L'opérateur Δ_w est $\mathbb{Q}[t]$ -linéaire.
2. On a la formule de Leibniz

$$\Delta_i(fg) = \Delta_i(f)g + s_i(f)\Delta_i(g).$$

3. Si ω_j est un poids fondamental, alors

$$s_i(\omega_j) = \begin{cases} \omega_i - \alpha_i & \text{si } i = j \\ \omega_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

4. En particulier, en itérant la formule de Leibniz, on a

$$\Delta_i(g(t, x)\omega_i(x)^m) = g(t, x) \sum_{k=1}^m (\omega_i(x) - \alpha_i(x))^{k-1} \omega_i(x)^{m-k},$$

où $g(t, x)$ est un polynôme en les t_i et les $\omega_j(x)$, pour $j \neq i$.

3.4.6 GKM \longrightarrow Borel

Ce problème final peut se décrire ainsi :

Étant donné $h = (h_v)_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$, trouver $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ qui représente la même classe que h .

Par 3.4.5, ceci est équivalent au problème d'interpolation suivant :

Trouver $f(t, x) \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ tel que $\text{ev}(v \circ f(t, x)) = h_v$ pour tout $v \in W$.

Bien-sûr, une solution est de convertir h en une combinaison linéaire de classes de Schubert \mathcal{X}_w en utilisant 3.4.7, puis utiliser ensuite 3.3.22 pour transformer le résultat en un polynôme $f(t, x)$ dans la présentation de Borel. C'est le schéma que nous emploierons dans nos exemples. Cependant cette méthode devient vite longue et coûteuse ; et il n'existe en fait pas (à ce jour) d'algorithme direct plus efficace pour résoudre ce problème. Notons tout-de-même que, si \mathfrak{S}_{w_0} est trouvé, alors on calcule les \mathfrak{S}_w par $\mathfrak{S}_w = \Delta_{w^{-1}w_0} \mathfrak{S}_{w_0}$. Malgré cela, le problème de détermination de \mathfrak{S}_{w_0} est en général très difficile...

3.5 Pratique des algorithmes

Nous allons ici mettre en œuvre les algorithmes vus plus haut dans une série d'exemples précis. Comme nous le verrons, la connaissance du groupe et de son tore ne sont pas requises ; on a seulement besoin de leur système de racines. Pour les descriptions des systèmes de racines que nous utiliserons, on renvoie le lecteur à [70], Chapter 18 et [35], Lecture 21. Pour ce qui est des illustrations, on se réfère également à [35].

$$\underline{K = SU(2)}$$

On démarre avec un exemple quasiment trivial. Ici, on a

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{S}^1.$$

On peut ici décrire explicitement la variété de drapeaux : on a

$$K/T \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = e_0 \cup e_2.$$

L'algèbre de Lie de K est $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}_2$ et on a

$$\mathfrak{t} \simeq \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 ; z_1 + z_2 = 0\}, \mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Le système de racines de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2$ et de type A_1 est donné par

$$\Phi = \{\pm\alpha\}, \Phi^+ = \Pi = \{\alpha\},$$

où $\alpha = z_1 - z_2$ et on le représente par

$$-\alpha \longleftarrow \bullet \longrightarrow \alpha$$

Son diagramme de Dynkin est bien-entendu

$$\alpha \bullet$$

La réflexion simple $s := s_\alpha$ vérifie $s(z_1) = z_2$ et on a $W = \langle s \rangle = \{e, s\} \simeq \mathfrak{S}_2$. De plus, on a le poids fondamental $\omega(z) = z_1$, ainsi que

$$H_T^*(\text{pt}) = \frac{\mathbb{Q}[z_1, z_2]}{(z_1 + z_2)} \simeq \mathbb{Q}[\alpha],$$

et

$$\mathbb{Q}_W[t, x] = \frac{\mathbb{Q}[t_1, t_2, x_1, x_2]}{(t_1 + t_2, x_1 + x_2, t_1 t_2 - x_1 x_2)},$$

puisque $H_T^*(\text{pt})^W \simeq \mathbb{Q}[z_1 z_2]$. Le graphe GKM est

$$\begin{array}{c} s \\ | \\ \alpha \\ | \\ e \end{array}$$

On a alors

$$\mathfrak{S}_s(t, x) = \sigma_s(x) - \sigma_s(t) = t_1 - x_1, \text{ car } \sigma_s(z) = \frac{1}{2}(-\alpha(z)) = \frac{z_2 - z_1}{2} = -z_1.$$

Notons qu'au passage, on retrouve le fait que $\sigma_s + \omega = 0$. Donnons-nous $f(t, x) := t_1 t_2 x_1 \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ dans la présentation de Borel. Déterminons l'écriture h de f dans la présentation de GKM : par 3.4.5, on a $h_v = \text{ev} \circ v(f(t, x))$ pour $v \in W$. Ici, on a $h_e = t_1^2 t_2$ et $h_s = t_1 t_2^2$, donc h est donné par

$$\begin{array}{c} t_1 t_2^2 \\ | \\ \alpha \\ | \\ t_1^2 t_2 \end{array}$$

Exprimons ensuite h dans la base de Schubert. Par 3.4.7, il nous faut calculer les $(\Delta_v(h))_e$ pour $v \in W$. On a $(\Delta_e(h))_e = h_e = t_1^2 t_2$. Ensuite, par 3.3.27,

$$(\Delta_s(h))_e = \frac{h_e - h_s}{-\alpha} = t_1 t_2,$$

et donc dans la présentation de Schubert, f s'écrit $t_1^2 t_2 + t_1 t_2 \mathcal{X}_s$. Remarquons qu'ici, on a bien

$$t_1^2 t_2 + t_1 t_2 \mathfrak{S}_s = t_1^2 t_2 + t_1 t_2 \left(\frac{x_1 - x_2 + t_2 - t_1}{2} \right) = \frac{t_1 t_2}{2} (t_1 t_2 + x_1 - x_2) = t_1 t_2 x_1 = f(t, x),$$

où la dernière égalité est valable dans le quotient $\mathbb{Q}_W[t, x]$. On a une autre méthode pour décomposer f dans la base de Schubert. D'après 3.4.8, f représente la classe de $\text{ev}(\Delta_e(f)) + \text{ev}(\Delta_s(f)) \mathfrak{S}_s$ et ici, on retrouve bien l'expression $t_1^2 t_2 + t_1 t_2 \mathfrak{S}_s$. Cherchons ensuite $h \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ représentant \mathcal{X}_s . D'après 3.4.6, on doit prendre

$$h_e = \iota_e^*(\mathcal{X}_s) = 0 \text{ et } h_s = \iota_s^*(\mathcal{X}_s) = \alpha(t) = t_2 - t_1,$$

ce qui donne pour h

$$\begin{array}{c} t_2 - t_1 \\ | \\ \alpha \\ | \\ 0 \end{array}$$

et cela convient puisque dans l'autre sens, on a en appliquant 3.4.7,

$$(\Delta_e(h))_e + (\Delta_s(h))_e \mathfrak{S}_s = \frac{h_e - h_s}{-\alpha} \mathfrak{S}_s = \mathfrak{S}_s.$$

$K = SU(3)$

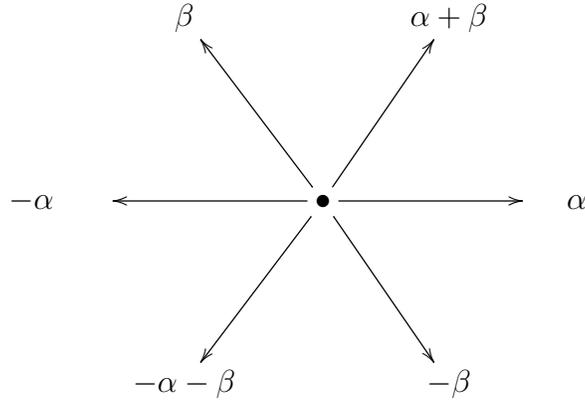
Passons maintenant à un exemple un peu plus intéressant. Ici, on a $T \simeq (\mathbb{S}^1)^2$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}_3$ et

$$\mathfrak{t} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 ; z_1 + z_2 + z_3 = 0\}.$$

Le système de racines de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et de type A_2 , donné par

$$\alpha := z_1 - z_2, \beta := z_2 - z_3, \Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta)\}, \Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}, \Pi = \{\alpha, \beta\},$$

et représenté par



et on a son diagramme de Dynkin



Ensuite, si $s_\alpha := (12)$ et $s_\beta := (23)$, alors on a

$$W = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = (s_\alpha s_\beta)^3 = 1 \rangle = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = 1, s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta \rangle \simeq \mathfrak{S}_3,$$

cette dernière présentation permettant de voir W comme un groupe de Coxeter. Celui-ci agit de façon naturelle sur \mathfrak{t}^* par

$$\begin{cases} s_\alpha(z_1) = z_2 \\ s_\alpha(z_2) = z_1 \\ s_\alpha(z_3) = z_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} s_\beta(z_1) = z_1 \\ s_\beta(z_2) = z_3 \\ s_\beta(z_3) = z_2 \end{cases}$$

et l'élément le plus long est $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha$. Ensuite, on a

$$R := H_T^*(\text{pt}) = \frac{\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]}{(z_1 + z_2 + z_3)} \simeq \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$$

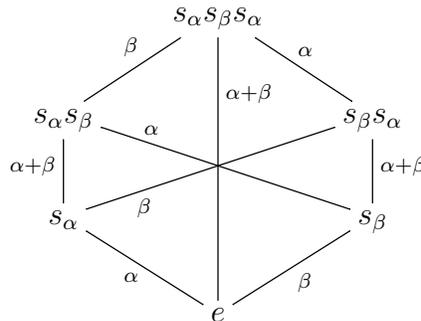
et

$$R^W = \mathbb{Q}[e_2, e_3], \quad \text{où } e_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3, \quad e_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H_T^*(K/T) &= \mathbb{Q}_W[t, x] \simeq R \otimes_{R^W} R \\ &\simeq \frac{\mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3]}{(t_1 + t_2 + t_3, x_1 + x_2 + x_3, t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_1 t_3 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_1 x_3, t_1 t_2 t_3 - x_1 x_2 x_3)} \end{aligned}$$

et le graphe GKM est donné par



Calculons ensuite les polynômes de Schubert σ_w . On a bien-sûr $\sigma_e(x) = 1$. Ensuite, on a la formule

$$\sigma_{w_0}(x) = \frac{1}{|W|} \prod_{\gamma \in \Phi^+} (-\gamma(x)) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)}{6}.$$

On peut alors calculer, en utilisant 3.3.4,

$$\sigma_{s_\alpha s_\beta}(x) = \Delta_{(s_\alpha s_\beta)^{-1} w_0} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\beta s_\alpha s_\alpha s_\beta s_\alpha} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\alpha} \sigma_{w_0} = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)}{3},$$

puis

$$\sigma_{s_\beta s_\alpha}(x) = \Delta_{s_\beta} \sigma_{w_0} = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}{3}.$$

On peut alors continuer en écrivant

$$\sigma_{s_\alpha}(x) = \Delta_{s_\alpha s_\alpha s_\beta s_\alpha} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\beta} \circ \Delta_{s_\alpha} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\beta} \sigma_{s_\alpha s_\beta} = \frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{3} = -x_1$$

et

$$\sigma_{s_\beta}(x) = \Delta_{s_\alpha} \circ \Delta_{s_\beta} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\alpha} \sigma_{s_\beta s_\alpha} = \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{3} = x_3.$$

Au passage, puisque les poids fondamentaux sont donnés par

$$\omega_\alpha(x) = x_1 \quad \text{et} \quad \omega_\beta(x) = -x_3,$$

on retrouve encore $\sigma_{s_\gamma} + \omega_\gamma = 0$ pour $\gamma \in \Pi$. Calculons ensuite quelques polynômes de Schubert équivariants. On a $\mathfrak{S}_e = 1$. Ensuite, par 3.4.2, on a

$$\mathfrak{S}_{s_\alpha}(t, x) = \omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x) = t_1 - x_1, \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_{s_\beta}(t, x) = \omega_\beta(t) - \omega_\beta(x) = x_3 - t_3.$$

Ensuite, pour appliquer 3.3.22, on calcule

$$P_1(s_\alpha s_\beta) = \{(s_\alpha s_\beta)\} \quad \text{et} \quad P_2(s_\alpha s_\beta) = \{(s_\alpha, s_\beta)\},$$

puis

$$\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}(t, x) = -(\sigma_{s_\alpha s_\beta}(t) - \sigma_{s_\alpha s_\beta}(x)) + \sigma_{s_\beta}(t)(\sigma_{s_\alpha}(t) - \sigma_{s_\alpha}(x)) = \frac{2}{3}(x_1 x_2 - t_1 t_2) + \frac{x_3 - t_3}{3}(3t_1 + t_3 + x_3).$$

De même, on a

$$\mathfrak{S}_{s_\beta s_\alpha}(t, x) = \frac{2}{3}(x_2 x_3 - t_2 t_3) + t_1(x_3 - t_3) + \frac{x_1^2 - t_1^2}{3}.$$

De la même manière, on a

$$\begin{cases} P_1(w_0) = \{(s_\alpha s_\beta s_\alpha)\} = \{(w_0)\} \\ P_2(w_0) = \{(s_\alpha s_\beta, s_\alpha), (s_\alpha, s_\beta s_\alpha), (s_\beta s_\alpha, s_\beta), (s_\beta, s_\alpha s_\beta)\} \\ P_3(w_0) = \{(s_\alpha, s_\beta, s_\alpha), (s_\beta, s_\alpha, s_\beta)\} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{w_0}(t, x) &= -(\sigma_{w_0}(t) - \sigma_{w_0}(x)) + \sigma_{s_\alpha s_\beta}(t)(\sigma_{s_\alpha}(t) - \sigma_{s_\alpha}(x)) + \sigma_{s_\alpha}(t)(\sigma_{s_\beta s_\alpha}(t) - \sigma_{s_\beta s_\alpha}(x)) \\ &\quad + \sigma_{s_\beta}(t)(\sigma_{s_\alpha s_\beta}(t) - \sigma_{s_\alpha s_\beta}(x)) + \sigma_{s_\beta s_\alpha}(t)(\sigma_{s_\beta}(t) - \sigma_{s_\beta}(x)) \\ &\quad - \sigma_{s_\alpha}(t)\sigma_{s_\beta}(t)(\sigma_{s_\alpha}(t) - \sigma_{s_\alpha}(x)) - \sigma_{s_\beta}(t)\sigma_{s_\alpha}(t)(\sigma_{s_\beta}(t) - \sigma_{s_\beta}(x)) \\ &= -t_1^3 - x_1^2 x_2 + t_1 t_2 x_1 + t_1 x_1^2 + t_1 t_2 t_3 - t_3 x_1 x_2 - t_1^2 x_3 + t_1 t_3 x_1 + t_1 t_3^2 - t_1 t_3 x_3. \end{aligned}$$

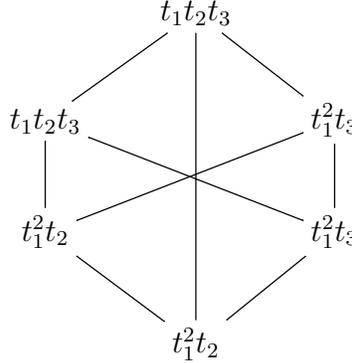
Donnons-nous maintenant un représentant polynômial d'une classe de cohomologie, dans la présentation de Borel :

$$f(t, x) := t_1 x_1 x_2 \in \mathbb{Q}_W[t, x],$$

puis convertissons-le dans les deux autres présentations. Commençons par celle de GKM. Par le Théorème 3.4.5, $h = h(h_v)_{v \in W} \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ est donné par $h_v = \text{ev} \circ v(f(t, x))$. Ici, on a immédiatement

$$\begin{aligned} h_e &= f(t, t) = t_1^2 t_2, \quad h_{s_\alpha} = f(t_1, t_2, t_3, t_2, t_1, t_3) = t_1^2 t_2, \quad h_{s_\beta} = t_1^2 t_3, \\ h_{s_\alpha s_\beta} &= t_1 t_2 t_3, \quad h_{s_\beta s_\alpha} = t_1^2 t_3, \quad h_{w_0} = h_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = t_1 t_2 t_3. \end{aligned}$$

La représentation graphique de $h = (h_v)_v$ est alors



On peut aussi déterminer la présentation de Schubert de $f(t, x)$. Nous allons le faire de deux façons.

Commençons par décomposer f en combinaison $\mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$ -linéaire de classes de Schubert en utilisant sa présentation de Borel. Par le Théorème 3.4.8, la classe de f est représentée par $\sum_w \text{ev}(\Delta_w(f)) \mathcal{X}_w$. Ici, on a

$$\begin{aligned} \Delta_e(f) &= f, \quad \Delta_{s_\alpha}(f) = \frac{t_1 x_1 x_2 - t_1 x_2 x_1}{x_2 - x_1} = 0, \quad \Delta_{s_\beta}(f) = \frac{t_1 x_1 x_2 - t_1 x_1 x_3}{x_3 - x_2} = -t_1 x_1, \\ \Delta_{s_\alpha s_\beta}(f) &= t_1, \quad \Delta_{s_\beta s_\alpha}(f) = 0, \quad \Delta_{w_0}(f) = 0 \end{aligned}$$

et on trouve alors

$$\bar{f}(t, x) = \text{ev}(\Delta_e(f)) + \text{ev}(\Delta_{s_\beta}(f)) \mathcal{X}_{s_\beta} + \text{ev}(\Delta_{s_\alpha s_\beta}(f)) \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} = t_1^2 t_2 - t_1^2 \mathcal{X}_{s_\beta} + t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}.$$

On peut retrouver cette formule en utilisant la présentation de GKM. D'après 3.4.7, $h \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ représente la classe $\sum_w (\Delta_w(h))_e \mathcal{X}_w$. On calcule alors

$$\begin{aligned} (\Delta_e(h))_e &= h_e = t_1^2 t_2, \quad (\Delta_{s_\alpha}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\alpha}}{-\alpha} = 0, \quad (\Delta_{s_\beta}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\beta}}{-\beta} = -t_1^2, \\ (\Delta_{s_\alpha s_\beta}(h))_e &= \frac{(\Delta_{s_\beta}(h))_e - (\Delta_{s_\beta}(h))_{s_\alpha}}{-\alpha} = t_1, \quad (\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_e = (\Delta_{w_0}(h))_e = 0 \end{aligned}$$

et on retrouve bien que $\bar{f} = t_1^2 t_2 - t_1^2 \mathcal{X}_{s_\beta} + t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}$.

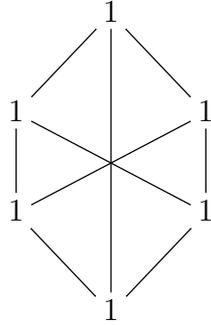
Reprenons le polynôme double de Schubert

$$\bar{f}(t, x) = t_1^2 t_2 - t_1^2 \mathcal{X}_{s_\beta} + t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}.$$

Convertissons-le dans la présentation GKM. D'après 3.4.6, pour une écriture réduite $v = s_{i_1} \cdots s_{i_{l(v)}}$, on doit calculer

$$h_v = \sum_{Q_v(w)} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_{l(w)}}, \quad \text{où } \beta_{j_k} = s_{i_1} \cdots s_{i_{j_k-1}}(\alpha_{i_k})$$

On a évidemment que $\mathcal{X}_e = 1$ est envoyé sur



Calculons $h(\mathcal{X}_{s_\beta})$ (on a pris ici des notations évidentes). On a

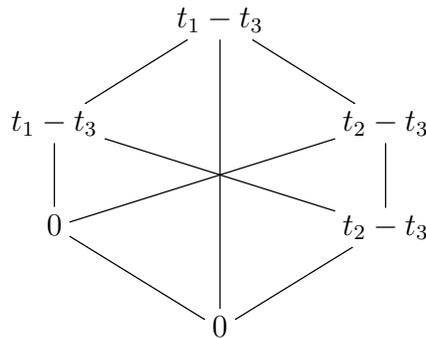
$$Q_e(s_\beta) = Q_{s_\alpha}(s_\beta) = \emptyset, \quad Q_{s_\beta}(s_\beta) = \{(1)\},$$

$$Q_{s_\alpha s_\beta}(s_\beta) = \{(2)\}, \quad Q_{s_\beta s_\alpha}(s_\beta) = \{(1)\}, \quad Q_{w_0}(s_\beta) = \{(1), (3)\},$$

donc

$$h_e = h_{s_\alpha} = 0, \quad h_{s_\beta} = t_2 - t_3, \quad h_{s_\alpha s_\beta} = t_1 - t_3, \quad h_{s_\beta s_\alpha} = t_2 - t_3, \quad h_{w_0} = \alpha(t) + s_\alpha s_\beta(\alpha)(t) = t_1 - t_3$$

et donc $h(\mathcal{X}_{s_\beta})$ est donné par

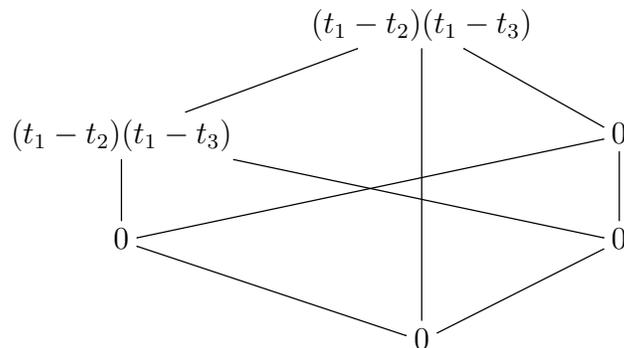


Ensuite, on a

$$Q_e(s_\alpha s_\beta) = Q_{s_\alpha}(s_\alpha s_\beta) = Q_{s_\beta}(s_\alpha s_\beta) = Q_{s_\beta s_\alpha}(s_\alpha s_\beta) = \emptyset,$$

$$Q_{s_\alpha s_\beta}(s_\alpha s_\beta) = \{(1, 2)\}, \quad Q_{w_0}(s_\alpha s_\beta) = \{(1, 2)\}$$

et donc $h(\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta})$ est donné par



On obtient alors une représentation de $\iota^*(t_1^2 t_2 + t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} - t_1^2 \mathcal{X}_{s_\beta})$:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}
t_1^2 t_2 \\
\diagup \quad \diagdown \\
t_1^2 t_2 \quad t_1^2 t_2 \\
| \quad | \\
t_1^2 t_2 \quad t_1^2 t_2 \\
\diagdown \quad \diagup \\
t_1^2 t_2
\end{array}
& - &
\begin{array}{c}
t_1^2 (t_1 - t_3) \\
\diagup \quad \diagdown \\
t_1^2 (t_1 - t_3) \quad t_1^2 (t_2 - t_3) \\
| \quad | \\
0 \quad t_1^2 (t_2 - t_3) \\
\diagdown \quad \diagup \\
0
\end{array}
& + &
\begin{array}{c}
t_1 (t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \\
\diagup \quad \diagdown \\
t_1 (t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \quad 0 \\
| \quad | \\
0 \quad 0 \\
\diagdown \quad \diagup \\
0
\end{array} \\
= & &
\begin{array}{c}
t_1 t_2 t_3 \\
\diagup \quad \diagdown \\
t_1 t_2 t_3 \quad t_1^2 t_3 \\
| \quad | \\
t_1^2 t_2 \quad t_1^2 t_3 \\
\diagdown \quad \diagup \\
t_1^2 t_2
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

et on retrouve bien la forme vue plus haut.

Convertissons maintenant notre combinaison linéaire de classes de Schubert en un polynôme dans la présentation de Borel. Par 3.3.22, la classe \mathcal{X}_w est représentée par le polynôme $\mathfrak{S}_w(t, x)$. Rappelons que l'on a

$$\mathfrak{S}_e(t, x) = 1, \quad \mathfrak{S}_{s_\beta}(t, x) = x_3 - t_3, \quad \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}(t, x) = \frac{2}{3}(x_1 x_2 - t_1 t_2) + \frac{x_3 - t_3}{3}(3t_1 + x_3 + t_3).$$

On obtient alors

$$t_1^2 \mathfrak{S}_e - t_1^2 \mathfrak{S}_{s_\beta} + t_1 \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = \frac{t_1^2 t_2}{3} + \frac{2}{3} t_1 x_1 x_2 + \frac{x_3 - t_3}{3} (x_3 t_1 + t_1 t_3) = \dots = t_1 x_1 x_2 = f(t, x),$$

qui est bien le polynôme duquel nous sommes partis.

Remarque 3.5.1. Dans [51], on renverse le signe des racines, i.e. $\alpha = z_2 - z_1$ et $\beta = z_3 - z_2$. Notons également que, dans le cas particulier du type A_n , on peut simplifier les polynômes de Schubert σ_w en utilisant les *polynômes de Lascoux-Schützenberger* (cf [49], Remark 4.4). Ici, ils sont donnés par (en prenant la convention de Kajii pour les racines)

$$\sigma_e = 1, \quad \sigma_{s_\alpha} = x_1 = -\omega_\alpha, \quad \sigma_{s_\beta} = -x_3 = -\omega_\beta, \quad \sigma_{s_\alpha s_\beta} = x_1 x_2, \quad \sigma_{s_\beta s_\alpha} = x_1^2, \quad \sigma_{w_0} = x_1^2 x_2$$

et on a alors

$$\mathfrak{S}_e = 1, \quad \mathfrak{S}_{s_\alpha} = x_1 - t_1, \quad \mathfrak{S}_{s_\beta} = t_3 - x_3,$$

$$\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = (x_1 - t_1)(x_2 - t_1), \quad \mathfrak{S}_{s_\beta s_\alpha} = (x_1 - t_1)(x_1 - t_2), \quad \mathfrak{S}_{w_0} = (x_1 - t_1)(x_1 - t_2)(x_2 - t_1).$$

On retrouve alors plus rapidement le fait que

$$t_1 x_1 x_2 = t_1^2 t_2 + t_1^2 \mathfrak{S}_{s_\beta} + t_1 \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}.$$

$$\underline{K = SO(5)}$$

Examinons un autre exemple, dans lequel le système de racines est de type B_2 . Prenons $K = SO(5)$ avec

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & & \\ & & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & \\ & & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\} \simeq (\mathbb{S}^1)^2$$

de telle sorte que

$$G = SO_5(\mathbb{C}) = \left\{ M \in GL_5(\mathbb{C}) ; M \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} {}^t M = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \right\}$$

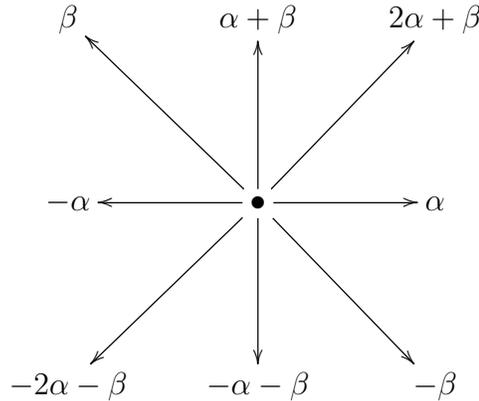
et que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5(\mathbb{C}).$$

Cette algèbre est de dimension 10, de rang 2 et on a le système de racines

$$\Phi = \{\pm x_1, \pm x_2, \pm x_1 \pm x_2\}, \Phi^+ = \{x_1, x_2, x_1 \pm x_2\} = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}, \Pi = \{x_1 - x_2, x_2\}$$

représenté par



où on a posé $\alpha := x_2$, et $\beta := x_1 - x_2$. Son diagramme de Dynkin est alors

$$\alpha \bullet \longleftrightarrow \bullet \beta$$

Le groupe de Weyl est donné par

$$W = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{S}_2,$$

où \mathfrak{S}_2 agit de façon évidente sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. \mathfrak{S}_2 agit sur Φ en échangeant x_1 et x_2 ; et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ agit en changeant le signe des variables. Ainsi, en notant $\mathfrak{S}_2 = \{e, s := (12)\}$, $s_\alpha := (0, 0) \cdot s$ et $s_\beta := (0, 1) \cdot e = (0, 1)$, on obtient

$$\begin{aligned} W &= \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)s, (1, 1)s, (1, 0)s, (0, 1)s\} \\ &= \{e, (s_\beta s_\alpha)^2 = (s_\alpha s_\beta)^2 =: w_0, s_\beta s_\alpha s_\beta, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta s_\alpha, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta\} \end{aligned}$$

et on a la présentation

$$W = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = (s_\alpha s_\beta)^4 = 1 \rangle = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = 1, (s_\alpha s_\beta)^2 = (s_\beta s_\alpha)^2 \rangle \simeq \mathcal{D}_4.$$

Ce groupe W agit sur les variables d'abord en les permutant, puis en changeant leur signe. Les poids fondamentaux sont donnés par

$$\omega_\alpha = x_1, \quad \omega_\beta = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

On a ensuite

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{k} \right\} \simeq \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; x_1 + x_4 = x_2 + x_3\},$$

d'où

$$R := H_T^*(\text{pt}) \simeq \frac{\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3, z_4]}{(z_1 + z_4, z_2 + z_3)} \simeq \mathbb{Q}[z_1, z_2] \simeq \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$$

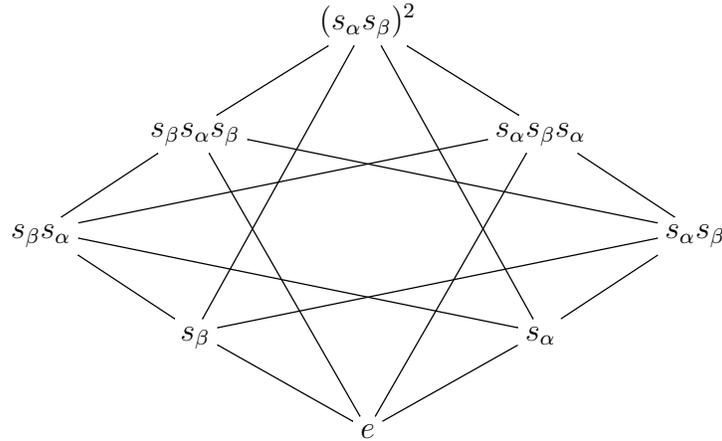
et

$$R^W = \mathbb{Q}[e_1, e_2], \quad \text{où } e_1 := z_1^2 + z_2^2, \quad e_2 := (z_1 z_2)^2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} H_T^*(K/T) &= \mathbb{Q}_W[t, x] \simeq R \otimes_{R^W} R \\ &\simeq \frac{\mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3, t_4, x_1, x_2, x_3, x_4]}{(t_1 + t_4, t_2 + t_3, x_1 + x_4, x_2 + x_3, t_1^2 + t_2^2 - x_1^2 - x_2^2, (t_1 t_2)^2 - (x_1 x_2)^2)} \\ &\simeq \frac{\mathbb{Q}[t_1, t_2, x_1, x_2]}{(t_1^2 + t_2^2 - x_1^2 - x_2^2, (t_1 t_2)^2 - (x_1 x_2)^2)}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_{s_\alpha(\beta)} = s_{\beta+2\alpha}$ et $s_\beta s_\alpha s_\beta = s_{s_\beta(\alpha)} = s_{\alpha+\beta}$, le graphe GKM est donné par



Le top polynôme de Schubert est donné par

$$\sigma_{w_0} = \frac{(-x_1)(-x_2)(-x_1 + x_2)(-x_1 - x_2)}{8} = \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{8}$$

et on a

$$\sigma_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = \Delta_{s_\beta} \sigma_{w_0} = \frac{-x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{4}, \quad \sigma_{s_\beta s_\alpha s_\beta} = \Delta_{s_\alpha} \sigma_{w_0} = \frac{x_1 (x_1 + x_2)(x_2 - x_1)}{4},$$

puis

$$\sigma_{s_\alpha s_\beta} = \Delta_{s_\alpha s_\beta} \sigma_{w_0} = \frac{x_1^2}{2}, \quad \sigma_{s_\beta s_\alpha} = \Delta_{s_\beta s_\alpha} \sigma_{w_0} = \frac{x_1 (x_1 + x_2)}{2}$$

puis

$$\sigma_{s_\beta} = \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} \sigma_{w_0} = -x_1 = -\omega_\beta, \quad \sigma_{s_\alpha} = \Delta_{s_\beta s_\alpha s_\beta} \sigma_{w_0} = -\frac{x_1 + x_2}{2} = -\omega_\alpha.$$

On a aussi

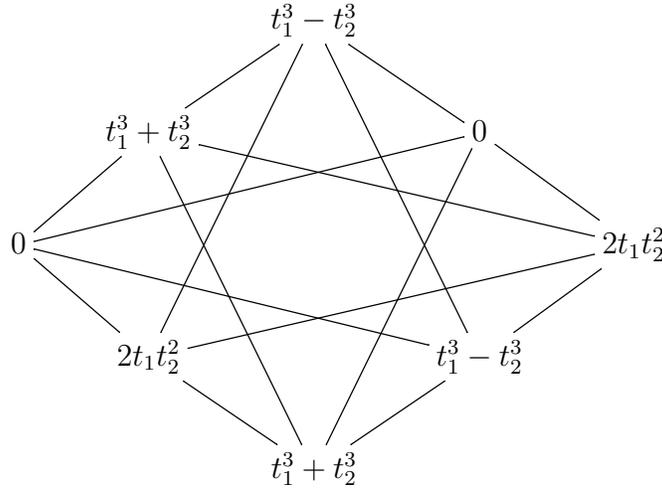
$$\mathfrak{S}_{s_\beta}(t, x) = \omega_\beta(t) - \omega_\beta(x) = t_1 - x_1, \quad \mathfrak{S}_{s_\alpha}(t, x) = \omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x) = \frac{t_1 + t_2 - x_1 - x_2}{2}.$$

Donnons-nous un polynôme $f(t, x) := t_1 x_1^2 + t_2^2 x_2 \in \mathbb{Q}[t, x]$ représentant la classe $\bar{f} \in \mathbb{Q}_W[t, x]$ dans la présentation de Borel. Calculons sa présentation de GKM. On a $h_v = \text{ev} \circ v(f(t, x))$, ce qui donne ici

$$h_e = t_1^3 + t_2^3, \quad h_{s_\alpha} = t_1^3 - t_2^3, \quad h_{s_\beta} = 2t_1 t_2^2, \quad h_{s_\alpha s_\beta} = 2t_1 t_2^2, \quad h_{s_\beta s_\alpha} = 0,$$

$$h_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} = 0, \quad h_{s_\beta s_\alpha s_\beta} = t_1^3 + t_2^3, \quad h_{w_0} = t_1^3 - t_2^3$$

et on obtient la représentation de $h = \iota^*(\bar{f})$:



Si l'on veut déterminer sa présentation de Schubert, il nous faut expliciter la somme $\sum_w \text{ev}(\Delta_w(f)) \mathcal{X}_w$. Ici, on calcule

$$\Delta_e(f) = f, \quad \Delta_{s_\alpha}(f) = \frac{t_1 x_1^2 + t_2^2 x_2 - t_1 x_1^2 + t_2^2 x_2}{-x_2} = -2t_2^2, \quad \Delta_{s_\beta}(f) = -t_1(x_1 + x_2) + t_2^2,$$

$$\Delta_{s_\alpha s_\beta}(f) = 2t_1, \quad \Delta_{s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{s_\beta}(-2t_2^2) = 0, \quad \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{s_\beta s_\alpha s_\beta}(f) = \Delta_{w_0}(f) = 0,$$

d'où

$$\bar{f}(t, x) = t_1^3 + t_2^3 - 2t_2^2 \mathcal{X}_{s_\alpha} + (t_2^2 - t_1^2 - t_1 t_2) \mathcal{X}_{s_\beta} + 2t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}.$$

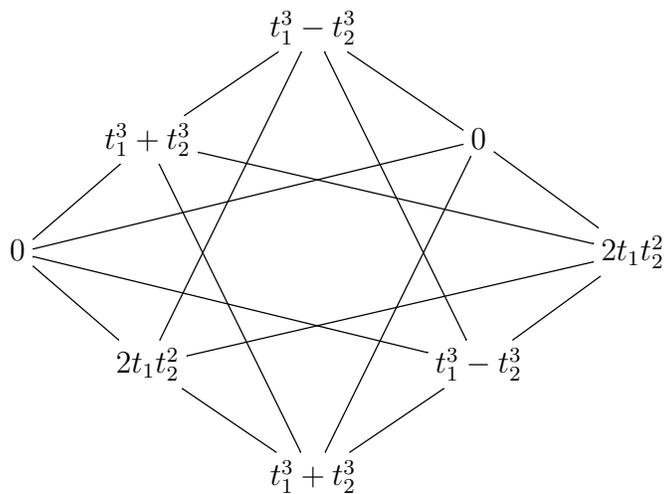
De plus, si l'on calcule

$$\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}(t, x) = -(\sigma_{s_\alpha s_\beta}(t) - \sigma_{s_\alpha s_\beta}(x)) + \sigma_{s_\alpha}(t)(\sigma_{s_\beta}(t) - \sigma_{s_\beta}(x)) = \frac{(x_1 - t_1)(x_1 - t_2)}{2},$$

alors on retrouve bien

$$t_1^3 + t_2^3 - 2t_2^2 \mathfrak{S}_{s_\alpha} + (t_2^2 - t_1^2 - t_1 t_2) \mathfrak{S}_{s_\beta} + 2t_1 \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = t_1^3 + t_2^3 - 2t_2^2 \frac{t_1 + t_2 - x_1 - x_2}{2} + (t_2^2 - t_1^2 - t_1 t_2)(t_1 - x_1) + t_1(x_1 - t_1)(x_1 - t_2) = t_2^2 x_2 + t_1 x_1^2 = f(t, x).$$

Enfin, si l'on se donne la classe de cohomologie équivariante donnée par la présentation de GKM ci-dessus, i.e.



et qu'on veut retrouver la présentation de Schubert, on doit calculer $\sum_w (\Delta_w(h))_e \mathcal{X}_w$. Ici, on a

$$(\Delta_e(h))_e = h_e = t_1^3 + t_2^3, (\Delta_{s_\alpha}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\alpha}}{-\alpha} = -2t_2^2, (\Delta_{s_\beta}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\beta}}{-\beta} = t_2^2 - t_1^2 - t_1t_2,$$

$$(\Delta_{s_\alpha s_\beta}(h))_e = \frac{(\Delta_{s_\beta}(h))_e - (\Delta_{s_\beta}(h))_{s_\alpha}}{-\alpha} = 2t_1, (\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_e = \frac{(\Delta_{s_\alpha}(h))_e - (\Delta_{s_\alpha}(h))_{s_\beta}}{-\beta} = 0,$$

$$(\Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}(h))_e = (\Delta_{s_\beta s_\alpha s_\beta}(h))_e = (\Delta_{w_0}(h))_e = 0,$$

donc

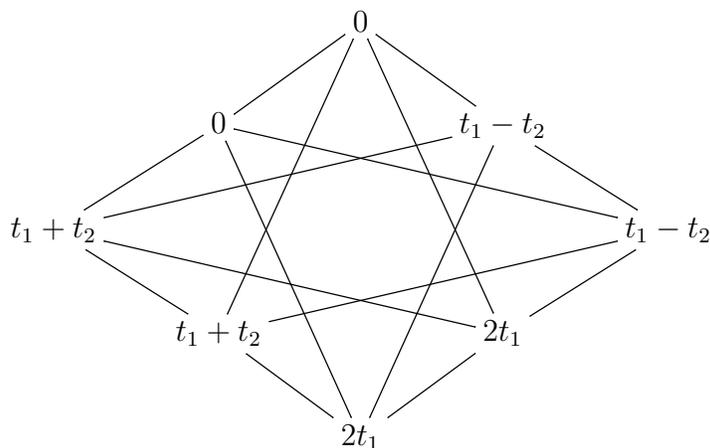
$$\bar{h}(t, x) = t_1^3 + t_2^3 - 2t_2^2 \mathcal{X}_{s_\alpha} + (t_2^2 - t_1^2 - t_1t_2) \mathcal{X}_{s_\beta} + 2t_1 \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta},$$

qui est bien l'expression que l'on attendait, vus les calculs menés plus haut.

On peut aussi prendre pour exemple supplémentaire $g(t, x) := t_1 + x_1$ dans la présentation de Borel et montrer que ses présentations de Schubert et GKM sont respectivement données par

$$g(t, x) = t_1 + x_1 = 2t_1 - \mathfrak{S}_{s_\beta}$$

et



Notons ici que l'on peut établir à la main directement que $\bar{g} = 2t_1 - \mathcal{X}_{s_\beta}$ puisque $\mathfrak{S}_{s_\beta} = t_1 - x_1$.

$$\underline{K = G_2}$$

À présent, penchons-nous sur un cas spécial : celui du type exceptionnel G_2 . Le but de cet exemple est d'illustrer un fait présenté par Howard Hiller (voir [38]) dans le cas classique, ainsi que par Kaji (voir [49]) dans le cas équivariant ; à savoir que la structure de la cohomologie $H_T^*(K/T, \mathbb{Q})$ ne dépend que du système de racines Φ de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, et non du groupe de Lie lui-même. Nous allons ici déterminer la cohomologie $H_T^*(G_2/T)$ et y effectuer des calculs sans avoir besoin de décrire G_2 ni son algèbre de Lie \mathfrak{g}_2 . Signalons seulement que l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_2 existe (on peut la construire explicitement comme dans [35], Lecture 22, ou abstraitement en utilisant le théorème de Serre, comme dans [45], Sections 18.3 et 18.4). De plus, il existe un groupe de Lie simple compact, connexe et simplement connexe, de dimension 14 et de rang 2, d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_2 , résultat difficile que nous admettrons. Mentionnons cependant qu'il existe une construction un peu *ad hoc* mais très jolie de ce groupe dans [11], §3, Theorem 1. L'idée est de considérer un \mathbb{R} -espace vectoriel V de dimension 7, dont on fixe une base (e_1, \dots, e_7) , on prend $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^7)$ sa base duale. Pour $0 \leq i, j, k \leq 7$, on note $\varepsilon^{ijk} := \varepsilon^i \wedge \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k \in \bigwedge^3 V^*$ et on pose

$$\phi := \varepsilon^{123} + \varepsilon^{145} + \varepsilon^{167} + \varepsilon^{246} - \varepsilon^{257} - \varepsilon^{347} - \varepsilon^{356}.$$

Dans ce contexte, on définit

$$G_2 := \{g \in GL(V) ; g^*(\phi) = \phi\},$$

puis on montre que ce groupe matriciel remplit les conditions annoncées.

Revenons à notre exemple et notons $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2$. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ est son algèbre de Cartan, on a (cf [70], Chapter 18)

$$\mathfrak{t} \simeq \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 ; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}.$$

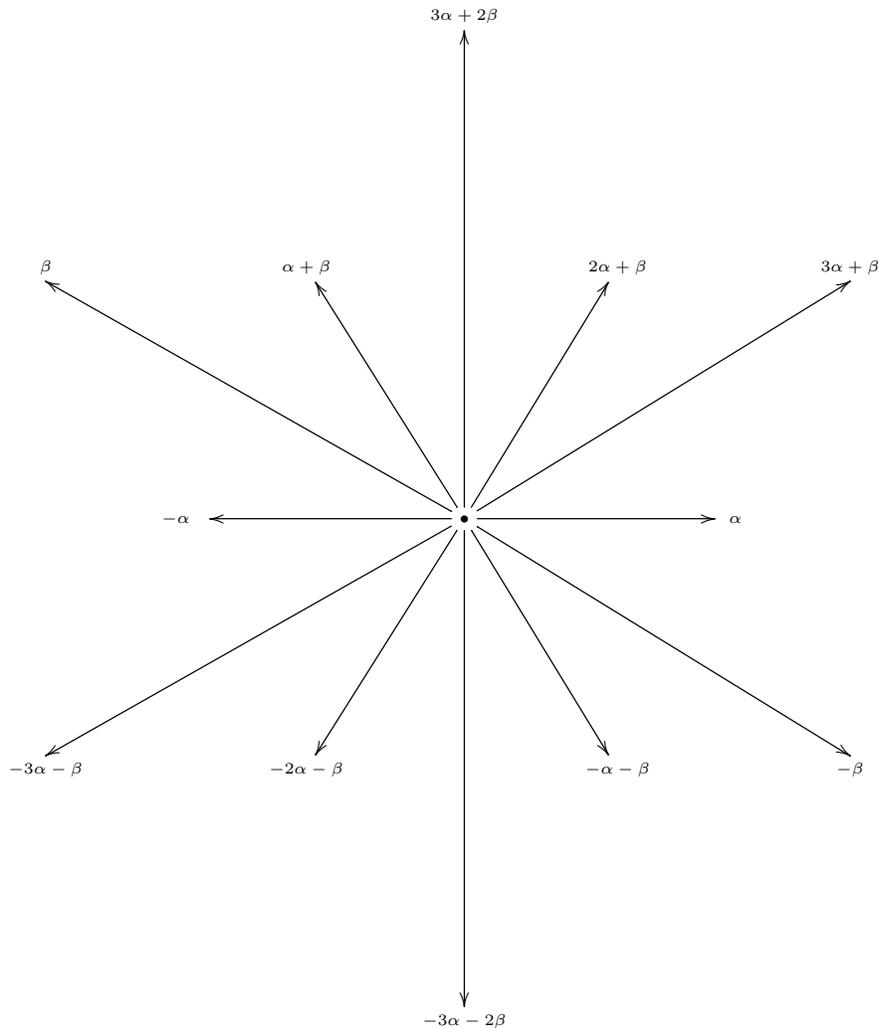
Le système de racines de \mathfrak{g}_2 est donné par

$$\Phi = \{\pm(\epsilon_1 - \epsilon_2), \pm(\epsilon_1 - \epsilon_3), \pm(\epsilon_2 - \epsilon_3), \pm(2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3), \pm(2\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon_3), \pm(2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)\}$$

et, en posant $\alpha := \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $\beta := -2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = -3\epsilon_1$, on a

$$\Phi^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta\}, \quad \Pi = \{\alpha, \beta\}.$$

Ce système peut se représenter dans le plan par



et son diagramme de Dynkin est le suivant :

$$\alpha \bullet \left\leftleftarrow \right\rightleftarrow \bullet \beta$$

Les poids fondamentaux sont donnés par

$$\omega_\alpha = \epsilon_3 - \epsilon_2 = 2\alpha + \beta, \quad \omega_\beta = 2\epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1 = 3\epsilon_3 = 3\alpha + 2\beta.$$

Si $\mathcal{D}_6 = \langle \sigma, \omega \mid \sigma^2 = \omega^6 = (\sigma\omega)^6 = 1 \rangle$ est le groupe diédral d'ordre 12 (σ désigne la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées et ω est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{6}$), alors on peut poser $s_\alpha := \sigma$ et $s_\beta := \sigma^\omega = \omega\sigma\omega^{-1}$ et obtenir une présentation du groupe de Weyl

$$\begin{aligned} W &= \langle \sigma, \sigma^\omega \rangle = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = (s_\alpha s_\beta)^6 = 1 \rangle \\ &= \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = 1, (s_\alpha s_\beta)^3 = (s_\beta s_\alpha)^3 \rangle \simeq \mathcal{D}_6, \end{aligned}$$

l'élément le plus long étant $w_0 = (s_\alpha s_\beta)^3 = (s_\beta s_\alpha)^3$. L'action de W sur Φ est donnée par les relations

$$\begin{cases} s_\alpha(\alpha) = -\alpha \\ s_\alpha(\beta) = 3\alpha + \beta \end{cases} \quad \begin{cases} s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta \\ s_\beta(\beta) = -\beta \end{cases}$$

et de celles-ci, on tire les formules donnant l'action de W sur $H_T^*(\text{pt})$

$$\begin{cases} s_\alpha(\epsilon_1) = \epsilon_2 \\ s_\alpha(\epsilon_2) = \epsilon_1 \\ s_\alpha(\epsilon_3) = \epsilon_3 \end{cases} \quad \begin{cases} s_\beta(\epsilon_1) = -\epsilon_1 \\ s_\beta(\epsilon_2) = -\epsilon_3 \\ s_\beta(\epsilon_3) = -\epsilon_2 \end{cases}$$

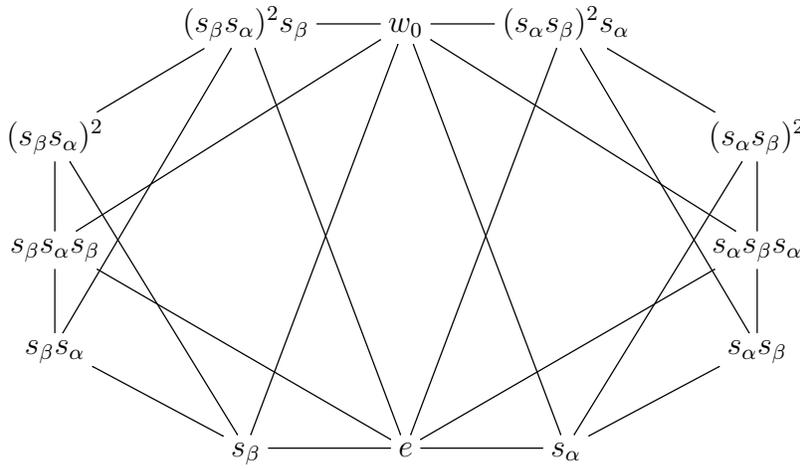
Ensuite, on a

$$R := H^*(B_T, \mathbb{Q}) \simeq \frac{\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]}{(z_1 + z_2 + z_3)}$$

et

$$H_T^*(G_2/T, \mathbb{Q}) \simeq R \otimes_{R^W} R \simeq \frac{\mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3]}{(t_1 + t_2 + t_3, x_1 + x_2 + x_3, P(t) - P(x), P \in R^W)}.$$

On peut maintenant construire le graphe GKM de Φ



On peut ensuite calculer les polynômes de Schubert. On a

$$\begin{aligned} \sigma_{w_0}(x) &= \frac{-(3x_1)(x_1 - x_2)(2x_1 + x_2)(3x_2)(x_1 + 2x_2)(3x_1 + 3x_2)}{12} \\ &= \frac{9}{4}x_1x_2(x_1 + x_2)^2(x_2 - x_1)(x_1 + 2x_2) = \frac{9}{4}x_1x_2x_3(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \Delta_{s_\alpha}\sigma_{w_0} &= -\frac{9}{2}x_1x_2x_3(x_3 - x_2)(x_3 - x_1), \quad \Delta_{s_\beta s_\alpha}\sigma_{w_0} = \frac{9}{2}x_1x_2x_3(x_3 - x_2), \\ \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}\sigma_{w_0} &= -\frac{9}{2}x_1x_2x_3, \quad \Delta_{(s_\beta s_\alpha)^2}\sigma_{w_0} = -3x_2x_3, \quad \Delta_{s_\alpha(s_\beta s_\alpha)^2}\sigma_{w_0} = -3x_3 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\sigma_{s_\beta}(x) = \Delta_{s_\beta w_0}\sigma_{w_0} = \Delta_{s_\beta(s_\beta s_\alpha)^3}\sigma_{w_0} = \Delta_{s_\alpha(s_\beta s_\alpha)^2}\sigma_{w_0} = -3x_3 = -\omega_\beta(x).$$

On voit de même que $\sigma_{s_\alpha} = -\omega_\alpha$. On en tire un expression des polynômes de Schubert équivariants

$$\mathfrak{S}_{s_\alpha}(t, x) = \omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x) = x_2 - x_3 - t_2 + t_3, \quad \mathfrak{S}_{s_\beta}(t, x) = \omega_\beta(t) - \omega_\beta(x) = 3(t_3 - x_3).$$

Donnons-nous maintenant $f(t, x) := t_1 + x_1 \in \mathbb{Q}[t, x]$ dans la présentation de Borel. Si l'on veut la présentation de Schubert, on calcule

$$\Delta_{s_\alpha}(f) = \frac{t_1 + x_1 - t_1 - x_2}{x_2 - x_1} = -1, \quad \Delta_{s_\beta}(f) = \frac{t_1 + x_1 - t_1 + x_1}{3x_1} = \frac{2}{3}$$

et on a

$$\forall w \in W ; l(w) \geq 2, \quad \Delta_w(f) = 0.$$

On en déduit, en utilisant 3.4.8, que $f(t, x)$ représente la classe

$$\bar{f} = 2t_1 + \frac{2}{3}\mathcal{X}_{s_\beta} - \mathcal{X}_{s_\alpha}.$$

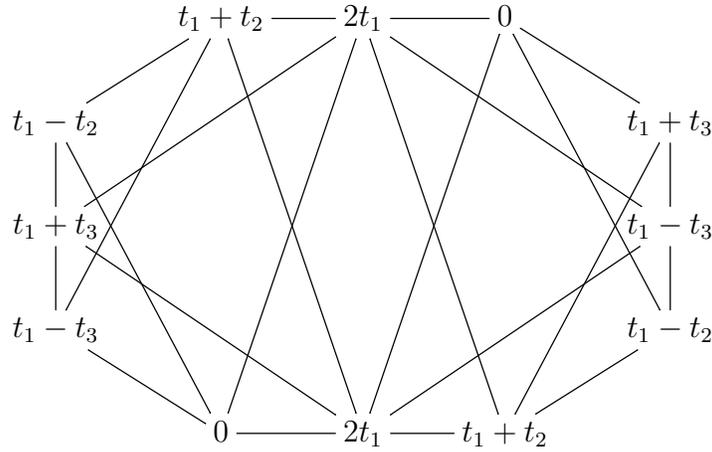
Notons que l'on a bien

$$2t_1 + \frac{2}{3}\mathfrak{S}_{s_\beta} - \mathfrak{S}_{s_\alpha} = 2t_1 + 2(t_3 - x_3) - x_2 + x_3 + t_2 - t_3 = t_1 + x_1 = f(t, x).$$

Enfin, si l'on souhaite déterminer la présentation de GKM de \bar{f} , on calcule $h_v = \text{ev} \circ v(f(t, x)) :$

$$\begin{aligned} h_e = f(t, t) &= 2t_1, \quad h_{s_\alpha} = t_1 + t_2, \quad h_{s_\beta} = 0, \quad h_{s_\alpha s_\beta} = t_1 - t_2, \quad h_{s_\beta s_\alpha} = t_1 - t_3, \\ h_{s_\alpha s_\beta s_\alpha} &= t_1 - t_3, \quad h_{s_\beta s_\alpha s_\beta} = t_1 + t_3, \quad h_{(s_\alpha s_\beta)^2} = t_1 + t_3, \quad h_{(s_\beta s_\alpha)^2} = t_1 - t_2, \\ h_{s_\alpha(s_\beta s_\alpha)^2} &= 0, \quad h_{s_\beta(s_\alpha s_\beta)^2} = t_1 + t_2, \quad h_{w_0} = 2t_1 \end{aligned}$$

d'où la représentation $h = (h_w)_w \in H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ de $\iota^*(\bar{f}) :$



De plus, on a

$$(\Delta_e(h))_e = h_e = 2t_1, \quad (\Delta_{s_\alpha}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\alpha}}{-\alpha} = -1, \quad (\Delta_{s_\beta}(h))_e = \frac{h_e - h_{s_\beta}}{-\beta} = \frac{2}{3}$$

et

$$\forall w \in W ; l(w) \geq 2, \quad (\Delta_w(h))_e = 0$$

et on retrouve bien que

$$\bar{f}(t, x) = 2t_1 - \mathcal{X}_{s_\alpha} + \frac{2}{3}\mathcal{X}_{s_\beta}.$$

3.6 Constantes de structures

Rappelons le problème : étant données deux classes de Schubert équivariantes \mathcal{X}_u et \mathcal{X}_v , il s'agit de trouver des polynômes $c_{u,v}^w(t) \in \mathbb{Q}[t]$ tels que

$$\mathcal{X}_u \mathcal{X}_v = \sum_{w \in W} c_{u,v}^w(t) \mathcal{X}_w. \quad (16)$$

Remarquons qu'évaluer cette équation en $t = 0$ donne

$$X_u X_v = \sum_{w \in W} c_{u,v}^w X_w$$

et ceci donne les constantes de structures dans le cas classique. Ainsi, résoudre le problème dans le cas équivariant résout également le cas non-équivariant.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre ce problème. En effet, si l'on veut calculer un tel produit, on peut utiliser la méthode suivante : on convertit le membre de gauche de (16) dans la présentation de GKM ou de Borel, dans laquelle on calcule aisément le produit ; puis on convertit le résultat dans la présentation de Schubert pour obtenir une combinaison $\mathbb{Q}[t]$ -linéaire de classes de Schubert, donnant les constantes de structure $c_{u,v}^w(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

Illustrons cette méthode en reprenant les cas étudiés ci-dessus.

$$\underline{K = SU(2)}$$

Calculons par exemple le produit \mathcal{X}_s^2 . On a $\mathfrak{S}_s(t, x) = t_1 - x_1 = x_2 - t_2$. Utilisons tout d'abord la présentation de Borel. Posons $f(t, x) := \mathfrak{S}_s^2 = (x_2 - t_2)^2$ et calculons

$$\text{ev}(\Delta_e(f)) = 0, \quad \text{ev}(\Delta_s(f)) = \text{ev}\left(\frac{(x_2 - t_2)^2 - (x_1 - t_2)^2}{x_2 - x_1}\right) = \text{ev}(x_1 + x_2 - 2t_2) = t_1 - t_2.$$

On obtient alors $\mathfrak{S}_s^2 = (t_1 - t_2)\mathfrak{S}_s$. Ceci est vrai puisque

$$\begin{aligned} (t_1 - t_2)\mathfrak{S}_s(t, x) &= (t_1 - t_2)(x_2 - t_2) = t_1x_2 - t_1t_2 - t_2x_2 + t_2^2 \\ &= t_1x_2 - x_1x_2 - t_2x_2 + t_2^2 = x_2(t_1 - x_1) + t_2(t_2 - x_2) = (x_2 - t_2)\mathfrak{S}_s = \mathfrak{S}_s^2. \end{aligned}$$

Utilisons ensuite la présentation de GKM. On a vu que $h(\mathcal{X}_s)$ est donné par

$$\begin{array}{c} t_1 - t_2 \\ | \\ \alpha \\ | \\ 0 \end{array}$$

donc la représentation de $h(\mathcal{X}_s^2) = h(\mathcal{X}_s)^2$ est

$$\begin{array}{c} (t_1 - t_2)^2 \\ | \\ \alpha \\ | \\ 0 \end{array}$$

On calcule

$$(\Delta_e(h))_e = h_e = 0, \quad (\Delta_s(h))_e = \frac{h_e - h_s}{-\alpha} = t_1 - t_2$$

et on retrouve bien

$$\mathcal{X}_s^2 = (t_1 - t_2)\mathcal{X}_s.$$

Remarquons que l'on retrouve ici la formule de Chevalley 3.4.3.

$$\underline{K = SU(3)}$$

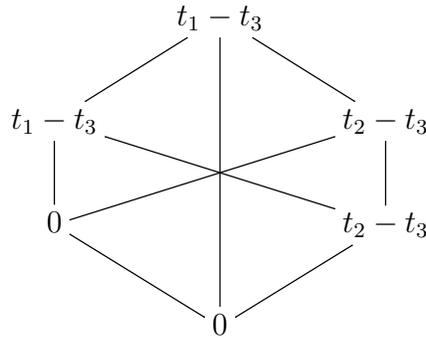
Calculons ici $\mathcal{X}_{s_\alpha}\mathcal{X}_{s_\beta}$. Utilisons Borel et posons $f(t, x) := \mathfrak{S}_{s_\alpha}\mathfrak{S}_{s_\beta} = (t_1 - x_1)(x_3 - t_3)$. On écrit

$$\Delta_{s_\alpha}(f) = x_3 - t_3, \Delta_{s_\beta s_\alpha}(f) = 1, \Delta_{s_\beta}(f) = (t_1 - x_1), \Delta_{s_\alpha s_\beta}(f) = 1, \Delta_{w_0}(f) = 0,$$

donc $f(t, x) = \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} + \mathfrak{S}_{s_\beta s_\alpha}$ et donc

$$\mathcal{X}_{s_\alpha}\mathcal{X}_{s_\beta} = \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} + \mathcal{X}_{s_\beta s_\alpha}.$$

On peut aussi utiliser GKM. On a vu que $h(\mathcal{X}_{s_\beta})$ est donné par



Ensuite, pour avoir $h(\mathcal{X}_{s_\alpha})$, on calcule

$$Q_e(s_\alpha) = Q_{s_\beta}(s_\alpha) = \emptyset, Q_{s_\alpha}(s_\alpha) = \{(1)\},$$

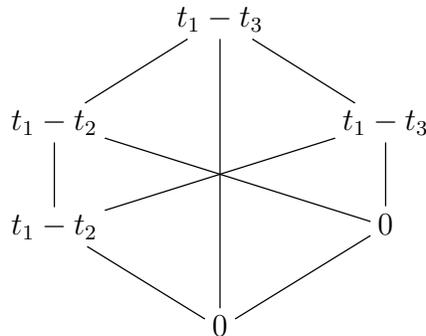
$$Q_{s_\alpha s_\beta}(s_\alpha) = \{(1)\}, Q_{s_\beta s_\alpha}(s_\alpha) = \{(2)\}, Q_{w_0}(s_\alpha) = \{(1), (3)\},$$

d'où l'on tire

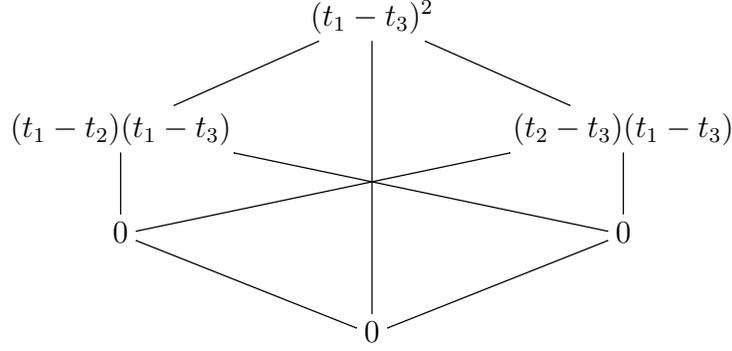
$$h_e = h_{s_\beta} = 0, h_{s_\alpha} = \alpha = t_1 - t_2, h_{s_\alpha s_\beta} = t_1 - t_2, h_{s_\beta s_\alpha} = s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = t_1 - t_3,$$

$$h_{w_0} = \alpha + s_\alpha s_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = t_1 - t_3$$

et on obtient alors l'expression de $h(\mathcal{X}_{s_\alpha})$:



On effectue la multiplication dans $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ et on obtient $h := h(\mathcal{X}_{s_\alpha} \mathcal{X}_{s_\beta})$:



Calculons

$$\begin{aligned} (\Delta_e(h))_e &= h_e = 0, \quad (\Delta_{s_\alpha}(h))_e = (\Delta_{s_\beta}(h))_e = 0 \\ (\Delta_{s_\alpha s_\beta}(h))_e &= \frac{(\Delta_{s_\beta}(h))_{s_\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{h_{s_\alpha} - h_{s_\alpha s_\beta}}{-\alpha - \beta} \right) = 1, \\ (\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_e &= \frac{(\Delta_{s_\alpha}(h))_{s_\beta}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{h_{s_\beta} - h_{s_\beta s_\alpha}}{-\alpha - \beta} \right) = 1. \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$(\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_{s_\alpha} = \frac{(\Delta_{s_\alpha}(h))_{s_\alpha} - (\Delta_{s_\alpha}(h))_{s_\alpha s_\beta}}{-\alpha - \beta} = 1$$

d'où

$$(\Delta_{w_0}(h))_e = \frac{(\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_e - (\Delta_{s_\beta s_\alpha}(h))_{s_\alpha}}{-\alpha} = 0$$

et donc, on retrouve bien

$$\mathcal{X}_{s_\alpha} \mathcal{X}_{s_\beta} = \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} + \mathcal{X}_{s_\beta s_\alpha}.$$

$K = SO(5)$

Calculons ici $\mathcal{X}_{s_\beta}^2$ et posons $f(t, x) := \mathfrak{S}_{s_\beta}^2 = (t_1 - x_1)^2$. On utilise la présentation de Borel et on écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{s_\alpha}(f) &= \Delta_{s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{w_0}(f) = 0 \\ \Delta_{s_\beta}(f) &= 2t_1 - x_1 - x_2, \quad \Delta_{s_\alpha s_\beta}(f) = 2, \quad \Delta_{s_\beta s_\alpha s_\beta}(f) = 0 \end{aligned}$$

et on obtient donc $f = (t_1 - t_2)\mathfrak{S}_{s_\beta} + 2\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}$ et donc

$$\mathcal{X}_{s_\beta}^2 = (t_1 - t_2)\mathcal{X}_{s_\beta} + 2\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}.$$

Pour le vérifier, rappelons que l'on a $\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = \frac{(x_1 - t_1)(x_1 - t_2)}{2}$, donc

$$(t_1 - t_2)\mathfrak{S}_{s_\beta} + 2\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = (t_1 - t_2)(t_1 - x_1) + (t_1 - x_1)(t_2 - x_1) = (t_1 - x_1)^2 = \mathfrak{S}_{s_\beta}^2.$$

$K = G_2$

Calculons enfin $\mathcal{X}_{s_\beta}^2$ en utilisant Borel. On a $\mathfrak{S}_{s_\beta} = 3(t_3 - x_3)$, et soit $f(t, x) := \mathfrak{S}_{s_\beta}^2 = 9(t_3 - x_3)^2$. On a ici

$$\begin{aligned}\Delta_{s_\alpha}(f) &= \Delta_{s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}(f) = \Delta_{(s_\beta s_\alpha)^2}(f) = \Delta_{s_\alpha(s_\beta s_\alpha)^2}(f) = \Delta_{w_0}(f) = 0, \\ \Delta_{s_\beta}(f) &= 9 \frac{(t_3 - x_3)^2 - (t_3 + x_2)^2}{3x_1} = 3(2t_3 + x_2 - x_3), \quad \Delta_{s_\alpha s_\beta}(f) = 3, \\ \Delta_{s_\beta s_\alpha s_\beta}(f) &= \Delta_{(s_\alpha s_\beta)^2}(f) = \Delta_{s_\beta(s_\alpha s_\beta)^2}(f) = 0.\end{aligned}$$

On obtient donc ici

$$\mathcal{X}_{s_\beta}^2 = 2(t_2 + t_3)\mathcal{X}_{s_\beta} + 3\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}.$$

Bien que les algorithmes de conversion utilisés ici permettent de résoudre le problème des constantes de structure, cette méthode est loin d'être optimale : le temps de calcul peut exploser rapidement. Par exemple, si l'on veut étudier le cas du type exceptionnel $K = E_8$, alors on a $\dim(E_8/T) = 2l(w_0) = 240$ et avec nos définitions, le top polynôme de Schubert σ_{w_0} est de degré 120 et il faut donc composer deux-cents fois des différences divisées sur σ_{w_0} pour obtenir les polynômes de Schubert simples σ_{s_i} . Nous allons voir ici, en guise de conclusion, une méthode plus rapide et efficace que l'utilisation des différences divisées pour calculer les σ_w . On reprend les idées du §5 de [51].

Signalons tout d'abord que l'on peut utiliser la présentation de GKM. Plus précisément, on utilise la *triangularité supérieure* suivante :

$$\iota_p^*(\mathcal{X}_w) = 0, \quad \forall p \geq w.$$

Ainsi, pour avoir $c_{u,v}^w$, on doit seulement calculer les

$$\iota_p^*(\mathcal{X}_u), \quad \iota_p^*(\mathcal{X}_v), \quad \iota_p^*(\mathcal{X}_q), \quad \iota_w^*(\mathcal{X}_u), \quad \iota_w^*(\mathcal{X}_v), \quad \iota_w^*(\mathcal{X}_w), \quad \forall p, q \in W ; p, q < w.$$

En fait, en appliquant ι_w^* à la formule (16) et en utilisant la triangularité supérieure, on a

$$\iota_w^*(\mathcal{X}_u)\iota_w^*(\mathcal{X}_v) = \sum_{q \in W} c_{u,v}^q(t)\iota_w^*(\mathcal{X}_q) = c_{u,v}^w \iota_w^*(\mathcal{X}_w) + \sum_{q < w} c_{u,v}^q \iota_w^*(\mathcal{X}_q).$$

Puis, on trouve les $c_{u,v}^q$ par induction sur q :

$$c_{u,v}^w = \frac{1}{\iota_w^*(\mathcal{X}_w)} \left(\iota_w^*(\mathcal{X}_u)\iota_w^*(\mathcal{X}_v) - \sum_{q < w} c_{u,v}^q \iota_w^*(\mathcal{X}_q) \right).$$

Par exemple, pour $K = SU(3)$, si l'on veut calculer $\mathcal{X}_{s_\alpha}\mathcal{X}_{s_\beta}$, il nous faut les $c^w := c_{s_\alpha, s_\beta}^w(t)$. On a

$$\begin{aligned}c^e \iota_e^*(\mathcal{X}_e) &= \iota_e^*(\mathcal{X}_{s_\alpha})\iota_e^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) = 0, \quad \Rightarrow \quad c^e = 0, \\ c^{s_\alpha} \iota_{s_\alpha}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha}) &= \iota_{s_\alpha}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha})\iota_{s_\alpha}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^e \iota_{s_\alpha}^*(\mathcal{X}_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^{s_\alpha} = 0, \\ c^{s_\beta} \iota_{s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) &= \iota_{s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha})\iota_{s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^e \iota_{s_\beta}^*(\mathcal{X}_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^{s_\beta} = 0, \\ c^{s_\alpha s_\beta} \iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}) &= \iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha})\iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^{s_\beta} \iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha}) - c^{s_\beta} \iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^e \iota_{s_\alpha s_\beta}^*(\mathcal{X}_e)\end{aligned}$$

De même, on a

$$c^{s_\beta s_\alpha} = 1.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} c^{w_0} \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{w_0}) &= \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha}) \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - \sum_{w \leq w_0} c^w \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_w) \\ &= \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha}) \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^{s_\alpha s_\beta} \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta}) - c^{s_\beta s_\alpha} \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\beta s_\alpha}) - c^{s_\alpha} \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\alpha}) - c^{s_\beta} \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_{s_\beta}) - c^e \iota_{w_0}^*(\mathcal{X}_e) = 0. \end{aligned}$$

On retrouve alors la formule vue plus haut

$$\mathcal{X}_{s_\alpha} \mathcal{X}_{s_\beta} = \mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} + \mathcal{X}_{s_\beta s_\alpha}.$$

Nous n'irons pas plus loin dans cette direction. On va plutôt décrire une méthode encore plus rapide, utilisant la présentation de Borel.

Le Théorème 3.4.8 permet des calculs rapides, le problème provient du Théorème 3.3.22. Dans ce résultat, pour déterminer \mathfrak{S}_w , on doit calculer tous les σ_v pour $v \in W$, à partir de σ_{w_0} en itérant des différences divisées. Cependant, on ne devrait avoir besoin que des σ_v pour $v \leq w$. L'idée est la suivante : puisque les monômes de $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ engendrent $H^*(K/T) = \frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}+[x]^W}$, si on fixe un entier k , pour trouver les σ_v tels que $l(v) = k$, il suffit de résoudre le système linéaire

$$\left\{ x_J = \sum_{l(v)=k} \Delta_v(x_J) \sigma_v, \quad x_J \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \text{ est un monôme de degré } 2k \right\} \quad (17)$$

Une fois qu'on a obtenu σ_w , on peut utiliser les relations

$$\sigma_v = \Delta_{v^{-1}w} \sigma_w, \quad \forall v \leq w$$

et appliquer la formule de 3.3.22 pour déterminer \mathfrak{S}_w . Exploitions ceci sur nos exemples.

Pour $K = SU(3)$, si l'on veut déterminer σ_{s_α} et σ_{s_β} , on résout le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 = \Delta_{s_\alpha}(x_1) \sigma_{s_\alpha} + \Delta_{s_\beta}(x_1) \sigma_{s_\beta} \\ x_2 = \Delta_{s_\alpha}(x_2) \sigma_{s_\alpha} + \Delta_{s_\beta}(x_2) \sigma_{s_\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sigma_{s_\alpha} \\ x_2 = \sigma_{s_\alpha} - \sigma_{s_\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{s_\alpha} = -x_1 \\ \sigma_{s_\beta} = x_3 \end{cases}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 x_2 = \Delta_{s_\alpha s_\beta}(x_1 x_2) \sigma_{s_\alpha s_\beta} + \Delta_{s_\beta s_\alpha}(x_1 x_2) \sigma_{s_\beta s_\alpha} \\ x_1 x_3 = \Delta_{s_\alpha s_\beta}(x_1 x_3) \sigma_{s_\alpha s_\beta} + \Delta_{s_\beta s_\alpha}(x_1 x_3) \sigma_{s_\beta s_\alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = \sigma_{s_\alpha s_\beta} \\ x_1 x_3 = -\sigma_{s_\alpha s_\beta} - \sigma_{s_\beta s_\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{s_\alpha s_\beta} = x_1 x_2 \\ \sigma_{s_\beta s_\alpha} = x_1^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 &= \Delta_{w_0}(x_1^2 x_2) \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\alpha s_\beta s_\alpha}(x_1^2 x_2) = \Delta_{s_\alpha s_\beta}(-x_1 x_2) \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\alpha}(x_1) \sigma_{w_0} = -\sigma_{w_0} \\ &\Rightarrow \sigma_{w_0} = -x_1^2 x_2. \end{aligned}$$

Pour $K = G_2$, on procède de même :

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \Delta_{s_\alpha s_\beta}(x_1 x_2) \sigma_{s_\alpha s_\beta} + \Delta_{s_\beta s_\alpha}(x_1 x_2) \sigma_{s_\beta s_\alpha} \\ x_2 x_3 = \Delta_{s_\alpha s_\beta}(x_2 x_3) \sigma_{s_\alpha s_\beta} + \Delta_{s_\beta s_\alpha}(x_2 x_3) \sigma_{s_\beta s_\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{s_\alpha s_\beta} = 3x_1 x_2 \\ \sigma_{s_\beta s_\alpha} = -3x_2 x_3 \end{cases}$$

On peut ensuite écrire

$$\sigma_{s_\alpha} = \Delta_{s_\alpha(s_\alpha s_\beta)^2} \sigma_{w_0} = \Delta_{s_\beta} \sigma_{s_\alpha s_\beta} = x_2 - x_3,$$

ce qui est bien l'expression de σ_{s_α} trouvée plus haut avec les différences divisées. On peut ensuite calculer

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta}(t, x) = 3(x_1 x_2 - t_1 t_2) + 3(x_2 - x_3)(x_3 - t_3) \\ \mathfrak{S}_{s_\beta s_\alpha}(t, x) = 3(t_2 t_3 - x_2 x_3) - 3t_3(t_2 - t_3 - x_2 + x_3) \end{cases}$$

et on retrouve alors le fait que

$$2(t_2 + t_3)\mathfrak{S}_{s_\beta} + 3\mathfrak{S}_{s_\alpha s_\beta} = 9(t_3 - x_3)^2 = \mathfrak{S}_{s_\beta}^2$$

et donc que

$$2(t_2 + t_3)\mathcal{X}_{s_\beta} + 3\mathcal{X}_{s_\alpha s_\beta} = \mathcal{X}_{s_\beta}^2.$$

On remarque alors immédiatement que cette méthode est bien plus rapide et efficace que celle consistant à passer en Borel, effectuer la multiplication, puis revenir en Schubert. Du fait de sa facilité de mise en œuvre, cette méthode peut être utilisée pour des systèmes de racines beaucoup plus grand que ceux étudiés jusqu'ici. Pour rendre compte de ceci, reprenons l'exemple 5.1 de [51], concernant le cas du type exceptionnel E_8 .

On admet l'existence d'un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe K dont l'algèbre de Lie complexifiée \mathfrak{k}_8 est simple, de dimension 248 et de rang 8. Son diagramme de Dynkin est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & \text{---} & \alpha_3 & \text{---} & \alpha_4 & \text{---} & \alpha_5 & \text{---} & \alpha_6 & \text{---} & \alpha_7 & \text{---} & \alpha_8 \\ & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & \alpha_2 & & & & & & & & \end{array}$$

Calculons $\mathcal{X}_{s_4 s_2}^2 \in H_T^*(E_8/T, \mathbb{Q})$. D'abord, on calcule des représentants polynômiaux de σ_w pour les sous-mots de $s_4 s_2$, i.e. $\{s_4, s_2, s_4 s_2\}$. On a, via (17) :

$$\begin{aligned} \sigma_{s_2} &= -5\alpha_1 - 8\alpha_2 - 10\alpha_3 - 15\alpha_4 - 12\alpha_5 - 9\alpha_6 - 6\alpha_7 - 3\alpha_8 \\ \sigma_{s_4} &= -10\alpha_1 - 15\alpha_2 - 20\alpha_3 - 30\alpha_4 - 24\alpha_5 - 18\alpha_6 - 12\alpha_7 - 6\alpha_8 \\ \sigma_{s_4 s_2} &= \sigma_{s_2}^2, \end{aligned}$$

d'où, par 3.3.22,

$$\mathfrak{S}_{s_4 s_2}(t, x) = -(\sigma_{s_4 s_2}(t) - \sigma_{s_4 s_2}(x)) + \sigma_{s_4}(t)(\sigma_{s_2}(t) - \sigma_{s_2}(x))$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{s_4 s_2}^2 &= \sum_{v \leq s_4 s_2} \Delta_v(\mathfrak{S}_{s_4 s_2}^2)(t, t)\mathcal{X}_v \\ &= \alpha_4(\alpha_2 + \alpha_4)\mathcal{X}_{s_4 s_2} + (\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)\mathcal{X}_{s_3 s_4 s_2} + (\alpha_2 + 2\alpha_4 + \alpha_5)\mathcal{X}_{s_5 s_4 s_2} + \mathcal{X}_{s_1 s_3 s_4 s_2} + 2\mathcal{X}_{s_3 s_5 s_4 s_2} + \mathcal{X}_{s_6 s_5 s_4 s_2}. \end{aligned}$$

Annexes

A Fibrations de Serre et suite exacte longue d'homotopie

Nous allons donner ici, sans démonstrations, quelques résultats importants concernant les fibrations de Serre; notamment la suite exacte longue d'homotopie ainsi que les suites spectrales de Leray-Serre. Étant donné que la construction de Borel, qui nous permet de définir la cohomologie équivariante, utilise des techniques relatives aux espaces fibrés, ces suites spectrales nous permettent d'obtenir des informations sur la (co)homologie de ces fibrés. En particulier, nous en avons eu besoin pour montrer que la définition de la cohomologie équivariante est consistante. Pour les preuves, nous renvoyons le lecteur à [29], ainsi qu'à [68].

Définition A.1. On dit qu'une application continue $p : E \rightarrow B$ a la propriété HLP_Y^X (homotopy lifting property), pour des espaces $Y \xrightarrow{i} X$ si, dès qu'on a une application $f_0 : Y \rightarrow E$ et $f : X \rightarrow B$ telles que $pf_0 = fi$, alors il existe $\tilde{f} : X \rightarrow E$ telle que $\tilde{f}i = f_0$ et $p\tilde{f} = f$:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f_0} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

De plus, si $p : E \rightarrow B$ possède la HLP_Y^X pour toute paire d'espaces (X, Y) , on dit que c'est une *fibration de Hurewicz*.

Notation A.2. Si $Y \hookrightarrow X$, on pose $I := [0, 1]$ et

$$J(X, Y) := (X \times \{0\}) \cup_{Y \times \{0\}} (Y \times I),$$

ainsi que

$$J^n := J(I^n, \partial I^n) \quad \text{et} \quad J^m := J(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}).$$

Proposition A.3. ([29], 7.7)

On a des homéomorphismes de paires topologiques

$$(I^n \times I, I^n \times 0) \simeq (I^n \times I, J^n) \simeq (\mathbb{B}^n \times I, J^m) \simeq (\mathbb{B}^n \times I, \mathbb{B}^n \times 0).$$

Corollaire A.4. ([29], 7.8 et 7.9)

On a

$$HLP_{I^n \times 0}^{I^n \times I} \Leftrightarrow HLP_{J^n}^{I^n \times I} \Leftrightarrow HLP_{J^m}^{\mathbb{B}^n \times I} \Leftrightarrow HLP_{\mathbb{B}^n \times 0}^{\mathbb{B}^n \times I}.$$

On a aussi un cadre adapté aux CW-complexes :

Corollaire A.5. ([29], 7.10)

Si X est obtenu à partir de Y par l'ajout d'un nombre fini de cellules, alors on a

$$HLP_{I^n \times 0}^{I^n \times I} \Rightarrow HLP_{J(X,Y)}^{X \times I}.$$

On en vient maintenant à la notion de fibration de Serre, qui est moins rigide que les fibrations de Hurewicz mais qui conserve quelques bonnes propriétés de stabilité et de comportement homologique :

Définition A.6. On dit que $p : E \rightarrow B$ est une *fibration de Serre* si p possède l'une des HLP équivalentes du corollaire A.4. En particulier, une fibration de Serre vérifie la $HLP_{J(X,Y)}^{X \times I}$ si X est obtenu à partir de Y par l'ajout d'un nombre fini de cellules.

Remarque A.7. • Si p est une fibration de Serre, en prenant $n = 0$ et en considérant la $HLP_{I^n \times 0}^{I^n \times I}$, on voit que $p(E)$ est réunion de composantes connexes par arcs, donc p est surjective dès que B est 0-connexe.

- La fibration triviale $B \times F \xrightarrow{p_F} B$ est une fibration de Serre ; le relèvement étant donné par

$$\tilde{f}(x, t) = (f(x, t), p_F(f_0(x, 0))).$$

- Le produit fibré d'une fibration de Serre est encore une fibration de Serre, c'est-à-dire que la notion de fibration de Serre est stable par changement de base.

Nous en arrivons au point pratique (mais non trivial) suivant :

Théorème A.8. ([29], 7.13)

Tout espace fibré est une fibration de Serre.

Un des principaux intérêts des fibrations de Serre est de se comporter un peu comme une "suite exacte courte" d'espaces topologiques ; induisant une suite exacte longue en homotopie. Nous allons donner rapidement la construction du connectant et énoncer le résultat principal. Soient $p : E \rightarrow B$ une fibration de Serre, $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$ et $e_0 \in F$. Construisons

$$\delta : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e_0).$$

Rappelons que le groupe d'homotopie $\pi_n(X, x)$ d'un espace pointé (X, x) est donné par l'ensemble

$$\pi_n(X, x) := [(\mathbb{S}^n, 1), (X, x)] \approx [(I^n, \partial I^n), (X, x)],$$

muni de la loi

$$f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x) \Rightarrow (f+g)(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

Soit donc $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ représenté par $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. On a $J^{n-1} = (I^{n-1} \times 0) \cup (\partial I^{n-1} \times I) \subset \partial I^n$. Par relèvement des homotopies, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} J^{n-1} & \xrightarrow{e_0} & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \exists \ell_f$$

On a $\ell_{f|_{I^{n-1} \times 1}} : I^{n-1} \rightarrow E$ et $\ell_{f|_{I^{n-1} \times 1}}(\partial I^{n-1}) = \{e_0\}$ et soit $\tilde{f} := \ell_{f|_{I^{n-1} \times 1}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, e_0)$, ainsi que $\delta[f] := [\tilde{f}] \in \pi_{n-1}(F, e_0)$.

Ceci est bien défini car si on a une homotopie $H : (I \times I^n, I \times \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ avec $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$ et $H|_{I \times \partial I^n} = b_0$, en partant de $G(0, x) := \ell_{f(x)}$, $G(1, x) := \ell_{g(x)}$ et $G = e_0$ sur les autres faces, on obtient $G : J^n \rightarrow E$ et

$$\begin{array}{ccc} J^n & \xrightarrow{G} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \ell_H & \downarrow p \\ I \times I^n & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

et $\ell_{H|_{I \times I^n}}$ est alors une homotopie entre \tilde{f} et \tilde{g} . Enfin, si $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ se relèvent en ℓ_f et ℓ_g , alors $f + g$ se relève en $\ell_f + \ell_g$, donc $\delta([f + g]) = \delta([f]) + \delta([g])$ et on obtient le morphisme de groupes δ voulu.

Remarque A.9. Si $n = 1$, on a simplement une application $\delta : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, e_0)$. Rappelons qu'une suite d'ensembles pointés

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

est dite exacte si $g^{-1}(c) = f(B)$.

On en arrive au résultat fondamental suivant :

Théorème A.10. ([29], 7.14)

Si $p : E \rightarrow B$ est une fibration de Serre et si l'on note $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$, $e_0 \in F$ et $\iota : F \hookrightarrow E$, alors on a une suite exacte longue d'homotopie

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(\iota)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_0(F, e_0) \longrightarrow \pi_0(E, e_0) \longrightarrow \pi_0(B, b_0). \end{aligned}$$

Exemple A.11. Si B_G est l'espace classifiant d'un groupe topologique G , alors on a

$$\forall n \geq 2, \pi_n(B_G) \simeq \pi_{n-1}(G).$$

En outre, si G est connexe, alors B_G est simplement connexe.

Notons au passage le corollaire immédiat suivant :

Corollaire A.12. Si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement, alors $\pi_n(p) : \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ est un isomorphisme, pour $n \geq 2$.

B La suite spectrale homologique de Serre

B.1 Préliminaire : la topologie compacte-ouverte

On va commencer par un peu de topologie générale. On va construire une topologie "canonique" sur l'espace des fonctions continues définies sur un espace séparé localement compact, à valeurs quelconques. Cette topologie nous permettra de trouver des homéomorphismes entre espaces de fonctions, qui nous rendront possible le calcul de la limite de la suite de Serre. Comme première référence sur le sujet, nous conseillons [29], Annexe, Exercice A.7.

Définition B.1. Soient X un espace topologique localement compact et Y un espace quelconque. Pour un compact K de X et un ouvert U de Y , on pose

$$\langle K, U \rangle := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) ; f(K) \subseteq U\}.$$

Les ensembles $\langle K, U \rangle$ forment une prébase de topologie sur $\mathcal{C}(X, Y)$. Cette topologie est appelée *topologie compacte-ouverte*.

Un des intérêts de cette topologie est le résultat suivant :

Proposition B.2. Soient X, Y des espaces localement compacts séparés et Z un espace topologique quelconque. On muni les espaces de fonctions de la topologie compacte-ouverte et on définit

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{array} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

où

$$\varphi(u) := (t \mapsto u(t, -)), \text{ et } \psi(v) := ((t, s) \mapsto v(t)(s)).$$

Alors, φ et ψ sont bien définies et sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Démonstration. Il suffit de montrer que φ et ψ sont bien définies et continues, puisque dans ce cas on a clairement $\varphi \circ \psi = id$ et $\psi \circ \varphi = id$. Soit $v : X \times Y \rightarrow Z$ et montrons que $\varphi(u)$ est continue. Pour $t \in X$, soit $\tilde{U} := \langle K, U \rangle$ un voisinage ouvert de $\varphi(u)(t)$ dans $\mathcal{C}(Y, Z)$. Pour tout $s \in K$, on a $u(t, s) \in U$ et il existe un produit d'ouverts $V_s \times W_s \subseteq X \times Y$ tels que $u(V_s \times W_s) \subset U$. On a $K = \bigcup_{s \in K} W_s = \bigcup_{1 \leq i \leq n} W_{s_i}$ et soit $V := \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{s_i}$. Alors, V est un voisinage ouvert de t dans X et on a $u(V \times K) \subset U$ et donc $\varphi(u)(V) \subset \tilde{U}$ et donc $\varphi(u)$ est bien continue. Maintenant, $\psi(v)$ est aussi continue. En effet, l'évaluation

$$ev : \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z \\ (f, x) \mapsto f(x)$$

est continue. Pour le voir, si l'on prend un voisinage ouvert U de $f(x)$ dans Z , par locale compacité de Y , il existe un voisinage compact de X dans Y tel que $f(K) \subset U$. Alors, $\langle K, U \rangle \times U$ est un ouvert du produit ci-dessus et on a $ev(\langle K, U \rangle \times U) \subset U$, d'où la continuité de ev . Mais $\psi(v)$ est alors la composée

$$X \times Y \xrightarrow{v \times id} \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev} Z$$

donc est continue. Ainsi, φ et ψ sont bien-définies et de plus, φ est continue car l'application d'évaluation $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \times Y \rightarrow Z$ est continue, donc aussi l'application $\mathcal{C}(X \times Y, Z) \times X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ (car on peut la voir comme une application $\varphi(u)$ en changeant les espaces) et en répétant l'argument, on obtient la continuité de φ . Enfin, les applications d'évaluation $ev_1 : \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$ et $ev_2 : \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ sont continues, donc aussi la composée

$$\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \times X \times Y \xrightarrow{ev_1 \times id} \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev_2} Z,$$

et on en déduit que ψ est continue, d'où le résultat. \square

Remarque B.3. Un autre intérêt de cette topologie est que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) &\rightarrow \mathcal{C}(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

est continue. En effet, en procédant comme dans la preuve précédente, la continuité de Φ découle de celle de la composée

$$\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \times X \xrightarrow{id \times ev_1} \mathcal{C}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{ev_2} Z.$$

B.2 Homologie singulière à coefficients dans un système local

On va commencer par définir ce que l'on entend par "système local" sur un espace topologique, donner sans démonstration quelques propriétés des systèmes locaux et construire l'homologie d'un espace à coefficients dans un tel système. Pour les preuves, nous renvoyons le lecteur à [43], section 2.2, dont l'exposé est excellent. Nous définirons enfin un système local associé à une fibration de Serre. Cette notion permet de définir une homologie sur la base d'une fibration de Serre, en tenant compte des fibres et du fait que la base n'est pas forcément simplement connexe. On fixe pour l'instant un espace topologique X . Rappelons que l'on a des applications "faces" sur les simplexes standards, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^n : \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \rightarrow & \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) & \mapsto & (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \end{array}$$

et que ces applications vérifient les relations

$$\forall j < i, \varepsilon_i^{n+1} \varepsilon_j^n = \varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_{i-1}^n.$$

Définition B.4. On appelle *système local* sur X (en groupes abéliens), la donnée, pour tout $x \in X$ d'un groupe abélien A_x et pour tout 1-simplexe singulier $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$, d'un morphisme de groupes $\tau_\gamma : A_{\gamma\varepsilon_0} \rightarrow A_{\gamma\varepsilon_1}$ tels que, si γ est constant, alors τ_γ est l'identité et, si $h : \Delta^2 \rightarrow X$ est un 2-simplexe singulier, alors on a $\tau_{h\varepsilon_0} \tau_{h\varepsilon_2} = \tau_{h\varepsilon_1}$. Un tel système sera noté $\underline{A} = \{A_x, \tau_\gamma\}$.

$$\begin{array}{ccc} & e_2 & \\ \varepsilon_1 \swarrow & & \searrow \varepsilon_0 \\ e_0 & \xleftarrow{\varepsilon_2} & e_1 \end{array}$$

Lemme B.5. ([43], Lemma 2.2.2)

Si γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes, alors $\tau_\gamma = \tau_{\gamma'}$.

Proposition B.6. ([43], Proposition 2.2.3)

Pour tout $\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$, τ_γ est un isomorphisme et on a $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_{\bar{\gamma}}$ où $\bar{\gamma}$ est l'inverse de γ .

Remarque B.7. Rappelons que le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ de X est la (petite) catégorie dont les objets sont les points de X et dont les morphismes sont les classes d'homotopie des chemins (à extrémités fixes). Du lemme et de la proposition précédents, on déduit que la donnée d'un système local sur X est équivalente à la donnée d'un foncteur $\Pi(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$.

Proposition B.8. ([43], Proposition 2.2.4)

Si X est simplement connexe, alors tout système local sur X est isomorphe au système constant.

Notation B.9. Pour un simplexe singulier $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ et pour $1 \leq i \leq j \leq n$, on pose $\sigma_i := \sigma(e_i) =: \sigma(i)$ ainsi que $\sigma_{i,j} : \Delta^1 \rightarrow \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$ où $\Delta^1 \rightarrow \Delta^n$ est l'unique application affine envoyant 0 et 1 sur e_i et e_j respectivement.

On peut maintenant définir l'homologie à coefficients dans un système local. Fixons donc un système local $\underline{A} = \{A_x, \tau_\gamma\} : \Pi(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ sur X . Posons $C_{-1}(X, \underline{A}) := 0$ ainsi que

$$\forall n \geq 0, C_n(X, \underline{A}) := \bigoplus_{\sigma : \Delta^n \rightarrow X} A_{\sigma_0}.$$

On va définir une différentielle $\partial_n : C_n(X, \underline{A}) \rightarrow C_{n-1}(X, \underline{A})$. On a

$$(\sigma \varepsilon_i)_0 = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si } i > 0 \\ \varepsilon_1 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Si $i > 0$, posons

$$u_i : A_{\sigma_0} = A_{(\sigma \varepsilon_i)_0} \hookrightarrow C_{n-1}(X, \underline{A})$$

et utilisons la propriété universelle du coproduit pour obtenir un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\sigma_0} & & \\ \downarrow & \searrow^{u_i} & \\ C_n(X, \underline{A}) & \xrightarrow{\partial_n^i} & C_{n-1}(X, \underline{A}) \end{array}$$

Si $i = 0$, on considère $\sigma_{01} : \Delta^1 \rightarrow X$ et $\tau_{\sigma_{01}} : A_{\sigma_0} \rightarrow A_{\sigma_1}$ et on pose $u_0 : A_{\sigma_0} \xrightarrow{\tau_{\sigma_{01}}} A_{(\sigma \varepsilon_0)_0} = A_{\sigma_1} \hookrightarrow C_{n-1}(X, \underline{A})$ et on obtient le triangle

$$\begin{array}{ccc} A_{\sigma_0} & & \\ \downarrow & \searrow^{u_0} & \\ C_n(X, \underline{A}) & \xrightarrow{\partial_n^0} & C_{n-1}(X, \underline{A}) \end{array}$$

Enfin, on pose

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i.$$

Un calcul facile mais un peu fastidieux donne alors

$$\partial_{n-1} \partial_n = 0,$$

donc $(C_*(X, \underline{A}), \partial)$ est un complexe de chaînes.

Définition B.10. Soit \underline{A} un système local sur X . On définit l'*homologie de X à coefficients dans \underline{A}* par

$$H_*(X, \underline{A}) := H_*(C_*(X, \underline{A}), \partial).$$

Exemple B.11. Si $\underline{A} = \mathbb{Z}$ est le système local constant égal à \mathbb{Z} , alors on a $H_*(X, \underline{A}) = H_*(X)$ est l'homologie singulière usuelle de X .

On va maintenant examiner le cas d'une fibration de Serre. Plus précisément, on va associer à toute fibration un système local qui nous donnera un système de coefficients adéquat pour étudier les propriétés homologiques de la fibration. Rappelons tout d'abord les deux résultats techniques suivants :

Lemme B.12. *Le produit fibré d'une fibration de Serre est encore une fibration de Serre.*

Lemme B.13. ([43], Lemma 2.2.10)

Si $p : E \rightarrow B$ est une fibration de Serre, si on a un pullback

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

et si g est une équivalence d'homotopie faible, alors f est aussi une équivalence faible.

Considérons donc $p : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Pour tout $x \in B$, on note $F_x := p^{-1}(x)$. Fixons $q \in \mathbb{N}$. On définit un système local $\underline{A} = \underline{H}_q(F) := \{A_x, \tau_x\}$ sur B associé à la fibration p est à l'entier q .

Soit $A_x := H_q(F_x) = H_q(p^{-1}(x), \mathbb{Z})$. Si $\gamma : \Delta^1 \rightarrow B$ est un 1-simplexe singulier, considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} E_\gamma & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \Delta^1 & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

de telle sorte que $E_\gamma \rightarrow \Delta^1$ soit une fibration de Serre. Aussi, on a deux produits fibrés

$$\begin{array}{ccccc} F_{\gamma(0)} & \longrightarrow & E_\gamma & \longleftarrow & F_{\gamma(1)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & \Delta^1 & \longleftarrow & \{1\} \end{array}$$

Comme l'inclusion $\text{pt} \hookrightarrow \Delta^1$ est une équivalence (faible) d'homotopie, les applications $F_{\gamma(0)} \rightarrow E_\gamma$ et $F_{\gamma(1)} \rightarrow E_\gamma$ sont des équivalences faibles. D'après [39], Proposition 4.21, une équivalence faible induit des isomorphismes en homologie (et en cohomologie), donc on a des isomorphismes $H_q(F_{\gamma(i)}) \rightarrow H_q(E_\gamma)$ pour $i = 0, 1$. On définit alors τ_γ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_{\gamma(0)}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(E_\gamma) & \xleftarrow{\sim} & H_q(F_{\gamma(1)}) \\ \parallel & & & & \parallel \\ A_{\gamma_0} & \xrightarrow{\tau_\gamma} & & & A_{\gamma_1} \end{array}$$

Clairement, si γ est constant, on a $\tau_\gamma = \text{id}_{A_{\gamma_0}}$. Soit donc $h : \Delta^2 \rightarrow B$ et montrons que $\tau_{h\varepsilon_0}\tau_{h\varepsilon_2} = \tau_{h\varepsilon_1}$. Considérons encore

$$\begin{array}{ccc} E_h & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \Delta^2 & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

On a des produits fibrés

$$\begin{array}{ccc} F_{h(0)} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \{h(0)\} & \longrightarrow & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_{h\varepsilon_2} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \Delta^1 & \xrightarrow{h\varepsilon_2} & B \end{array}$$

et par la propriété universelle du produit fibré (qui débouche directement sur la proposition 2.1.7 de [43]), ils sont équivalents au produit fibré itéré

$$\begin{array}{ccccccc} F_{h(0)} & \xrightarrow{u} & E_{h\varepsilon_2} & \xrightarrow{v} & E_h & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ \{0\} & \longrightarrow & \Delta^1 & \xrightarrow{\varepsilon_2} & \Delta^2 & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

et on a le triangle tautologique

$$\begin{array}{ccc} & & E_h \\ & \nearrow vu & \uparrow v \\ F_{h(0)} & \xrightarrow{u} & E_{h\varepsilon_2} \end{array}$$

De même, on considère

$$\begin{array}{ccc} E_{h\varepsilon_1} & \longrightarrow & E_h \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta^1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \Delta^2 \end{array}$$

et par la propriété universelle du produit fibré, on en tire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} F_{h(0)} & & & & & & \\ \downarrow & \searrow \text{---} & & & & & \\ \{0\} & \hookrightarrow & \Delta^1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \Delta^2 & \xrightarrow{h} & B \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ & & E_{h\varepsilon_1} & \xrightarrow{t} & E_h & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ & & \Delta^1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \Delta^2 & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

et on a ainsi un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 E_{h\varepsilon_1} & \xrightarrow{t} & E_h \\
 w \uparrow & \nearrow vu & \uparrow v \\
 F_{h(0)} & \xrightarrow{u} & E_{h\varepsilon_2}
 \end{array}$$

En reproduisant ce procédé, on obtient un grand diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_{h(2)} & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & E_{h\varepsilon_1} & & & E_{h\varepsilon_0} \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 & E_h & & & E_h \\
 & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
 F_{h(0)} & \xrightarrow{\quad} & E_{h\varepsilon_2} & \xleftarrow{\quad} & F_{h(1)}
 \end{array}$$

et par le lemme 3, les applications $F_{h(i)} \rightarrow E_h$ et $E_{h\varepsilon_i} \rightarrow E_h$ sont des équivalences faibles, pour $i = 0, 1, 2$. Donc toutes les applications en jeu dans le diagramme sont des équivalences faibles et par définition de τ_γ , on a bien

$$\tau_{h\varepsilon_0} \tau_{h\varepsilon_2} = \tau_{h\varepsilon_1}.$$

Ainsi, $\underline{A} = \underline{H}_q(F)$ est bien un système local sur B . On a alors obtenu l'homologie de B à coefficients dans $\underline{H}_q(F)$, notée

$$H_*(B, \underline{H}_q(F)),$$

qui nous donnera exactement la seconde page de la suite spectrale de Serre.

Avant d'attaquer la construction, on a besoin d'un lemme technique :

Lemme B.14. ([43], Proposition 2.1.5)

Si X est un espace topologique, alors les applications suivantes

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}(\Delta^n, X) \\
 x & \mapsto & c_x := (t \mapsto x)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(\Delta^n, X) & \xrightarrow{j} & X \\
 \sigma & \mapsto & \sigma(e_0)
 \end{array}$$

sont des équivalences d'homotopie, réciproques l'une de l'autre.

Démonstration. On a $ji = id_X$ et notons $I := [0, 1]$. Pour montrer que $ji \sim id_{\Delta^n \rightarrow X}$, il nous faut trouver

$$H : \mathcal{C}(\Delta^n, X) \times I \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^n, X)$$

telle que $H(\sigma, 0) = c_{\sigma(e_0)}$ et $H(\sigma, 1) = \sigma$ pour tout $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Comme Δ^n est compact, cela revient à trouver

$$\widehat{H} : \mathcal{C}(\Delta^n, X) \times \Delta^n \times I \rightarrow X$$

telle que $\widehat{H}(\sigma, s, 0) = \sigma(e_0)$ et $\widehat{H}(\sigma, s, 1) = \sigma(s)$. Comme Δ^n est contractile, il existe $H' : \Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ telle que $H'(s, 0) = e_0$ et $H'(s, 1) = s$ et soit $\widehat{H}(\sigma, s, t) := \sigma(H'(s, t))$. \widehat{H} vérifie ce que l'on veut et est continue car on a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\Delta^n, X) \times \Delta^n \times I & \xrightarrow{\widehat{H}} & X \\ & \searrow^{id \times H'} & \nearrow^{ev} \\ & & \mathcal{C}(\Delta^n, X) \times \Delta^n \end{array}$$

□

B.3 Suite de Serre : la construction de Dress

Nous en arrivons à la construction de la suite spectrale de Serre, qui permet d'approcher l'homologie de l'espace total d'une fibration de Serre, à partir de celle de la base et des fibres. Comme nous étudions le cas général (i.e. on ne suppose pas que la base est simplement connexe), il nous faut considérer l'homologie à coefficients dans les systèmes locaux associés aux fibres. Plutôt que la construction originale de Serre (voir [68]), nous avons choisi d'exposer la construction donnée par Andreas Dress (voir [27]), qui consiste à associer à la fibration considérée un bicomplexe, auquel sont attachées deux suites spectrales ; l'une étant celle de Serre et l'autre nous permettant de calculer la limite de la première. Comme nous le verrons, cette approche rend aussi plus transparente la naturalité de la suite de Serre, par rapport à la fibration. Une formulation plus précise du résultat de Serre serait donc d'affirmer l'existence d'un foncteur spectral. Nous l'énoncerons sous cette forme plus tard.

Théorème B.15. *Soit $f : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Alors, il existe une suite spectrale homologique de premier quadrant convergente*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, \underline{H}_q(F)) \implies H_{p+q}(E).$$

Démonstration. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, posons $pr_1 : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow \Delta^p$, ainsi que

$$\mathcal{S}_{p,q} := \{(\sigma_{p,q}, \tau_p), \sigma_{p,q} : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow E, \tau_p : \Delta^p \rightarrow B ; f\sigma_{p,q} = \tau_p pr_1\},$$

i.e., $\mathcal{S}_{p,q}$ est constitué des couples $(\sigma_{p,q}, \tau_p)$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p \times \Delta^q & \xrightarrow{\sigma_{p,q}} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^p & \xrightarrow{\tau_p} & B \end{array}$$

Définissons encore

$$K_{p,q} := \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle,$$

le groupe libre de base $\mathcal{S}_{p,q}$. On obtient alors un objet bigradué de premier quadrant $K_{\bullet, \bullet}$, sur lequel on définit les différentielles

$$\begin{array}{ccc} \partial_{p,q}^h : & K_{p,q} & \rightarrow & K_{p-1,q} \\ & (\sigma_{p,q}, \tau_p) & \mapsto & \sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma_{p,q}(\varepsilon_i^p \times id_{\Delta^q}), \tau_p \varepsilon_i^p) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{p,q}^v : K_{p,q} &\rightarrow K_{p,q-1} \\ (\sigma_{p,q}, \tau_p) &\mapsto \sum_{j=0}^q (-1)^{p+j} (\sigma_{p,q} (id_{\Delta^p} \times \varepsilon_i^q), \tau_p) \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que l'on a

$$(\partial^h)^2 = (\partial^v)^2 = \partial^h \partial^v + \partial^v \partial^h = 0,$$

donc $(K_{\bullet,\bullet}, \partial^h, \partial^v)$ est un bicomplexe de premier quadrant. D'après le théorème fondamental sur les suites spectrales de bicomplexes (voir [73], section 5.6), on obtient deux suites spectrales de premier quadrant convergentes $({}^I E^r, {}^I d^r)$ et $({}^{II} E^r, {}^{II} d^r)$ qui convergent vers l'homologie du complexe total $\text{Tot}(K) = \text{Tot}^\oplus(K)$:

$${}^I E_{p,q}^r, {}^{II} E_{p,q}^r \Longrightarrow H_{p+q}(\text{Tot}(K_{\bullet,\bullet})).$$

La suite de Serre est en fait la suite $({}^I E^r)$ associée à la filtration par colonnes. La suite $({}^{II} E^r)$ associée à la filtration par lignes nous servira juste à calculer $H_\bullet(\text{Tot}(K))$.

Cas de la suite $({}^{II} E^r)$:

Par soucis de lisibilité, notons $(E^r) := ({}^{II} E^r)$. Nous allons montrer que

$$\forall n \geq 0, H_n(\text{Tot}_\bullet(K)) = H_n(E).$$

Fixons q et faisons varier p . Δ^p et Δ^q sont (localement) compacts et d'après la Proposition B.2, on a un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\Delta^p \times \Delta^q, E) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\Delta^p, \mathcal{C}(\Delta^q, E)) \\ \sigma_{p,q} &\mapsto \widehat{\sigma_{p,q}} \end{aligned}$$

où $\widehat{\sigma_{p,q}}(t) = (s \mapsto \sigma_{p,q}(t, s))$. Donc, dans le carré

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p \times \Delta^q & \xrightarrow{\sigma_{p,q}} & E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta^p & \xrightarrow{\tau_p} & B \end{array}$$

on peut remplacer $\sigma_{p,q}$ par $\widehat{\sigma_{p,q}}$. Plus précisément, considérons $c_q : B \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, B)$ l'application telle que $c_q(b) = (x \mapsto b)$ et formons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} E'_q & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{C}(\Delta^q, E) \\ p_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \widehat{f} \\ B & \xrightarrow{c_q} & \mathcal{C}(\Delta^q, B) \end{array}$$

Soit $\mathcal{P}_{p,q} := \mathcal{C}(\Delta^p, E'_q)$ et montrons que $\mathcal{S}_{p,q} \approx \mathcal{P}_{p,q}$. Si $(\sigma_{p,q}, \tau_p) \in \mathcal{S}_{p,q}$, par propriété universelle du produit fibré, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p & & \mathcal{C}(\Delta^q, E) \\ \tau_p \searrow & \xrightarrow{\widehat{\sigma_{p,q}}} & \downarrow \widehat{f} \\ E'_q & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Delta^q, B) \\ \downarrow & & \downarrow c_q \\ B & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Delta^q, B) \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image, showing the relationships between Δ^p , E'_q , B , $\mathcal{C}(\Delta^q, E)$, and $\mathcal{C}(\Delta^q, B)$ with arrows τ_p , $\widehat{\sigma_{p,q}}$, \widehat{f} , c_q , and a dashed arrow $\exists! \ell$ from Δ^p to E'_q .)

et considérons les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{p,q} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_{p,q} \\ (\sigma_{p,q}, \tau_p) & \mapsto & \ell \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{p,q} & \xrightarrow{\psi} & \widetilde{\mathcal{S}}_{p,q} \\ \ell & \mapsto & (\widetilde{p_1\ell}, \widetilde{p_2\ell}) \end{array}$$

où $\widetilde{p_1\ell} : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow E$ est induit par $p_1\ell : \Delta^p \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, E)$ (i.e. $p_1\ell = \widetilde{p_1\ell}$). On a $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{P}_{p,q}}$ et $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{S}_{p,q}}$, donc φ est une bijection. En appliquant l'isomorphisme $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle : K_{p,q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}_{p,q}\rangle$ à la différentielle $\partial_{p,q}^h$ on obtient, puisque $\varphi(p_1\ell(\varepsilon_i^p \times id), p_2\ell\varepsilon_i^p) = \ell\varepsilon_i^p$, un carré

$$\begin{array}{ccc} K_{p,q} & \xrightarrow{\partial_{p,q}^h} & K_{p-1,q} \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}_{p,q}\rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}_{p-1,q}\rangle \end{array}$$

où la flèche du bas est donnée par $\ell \mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i \ell \varepsilon_i^p$. Donc, on peut identifier chaque q -ligne de $K_{\bullet,\bullet}$ avec le complexe singulier de E'_q . Maintenant, comme $B \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, B)$ est une équivalence d'homotopie (Lemme B.14), c'est une équivalence faible, donc $E'_q \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, E)$ aussi (lemme B.13). Mais, l'application $E \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, E)$ ($e \mapsto c_e$) est aussi une équivalence faible, d'où des isomorphismes

$$H_p(E'_q) \xrightarrow{\sim} H_p(\mathcal{C}(\Delta^q, E)) \xleftarrow{\sim} H_p(E)$$

et donc

$$\forall p \geq 0, H_p(E'_q) \simeq H_p(E).$$

On a donc prouvé que

$$E_{p,q}^1 = H_p^h(K_{\bullet,q}) \simeq H_p(E),$$

ou encore, avec les notations de [73],

$$E_{p,q}^1 = H_q^h(K_{\bullet,p}) \simeq H_q(E).$$

Ensuite, on a $E_{p,q}^2 = H_p^v H_q^h(K_{\bullet,\bullet})$. En appliquant à nouveau l'isomorphisme $\mathbb{Z}\langle\varphi\rangle$ à ∂^v , on obtient le carré

$$\begin{array}{ccc} K_{p,q} & \xrightarrow{\partial_{p,q}^v} & K_{p,q-1} \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}_{p,q}\rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}\langle\mathcal{P}_{p,q-1}\rangle \end{array}$$

où la flèche du bas est donnée par $\ell \mapsto \sum_{j=0}^q (-1)^{j+p} \ell$ car si $\varphi(\sigma_{p,q}, \tau_p) = \ell$, alors $\varphi(\sigma_{p,q}(id \times \varepsilon_i^p), \tau_p) = \ell$, donc $\partial_{p,q}^v$ alterne entre 0 et id . Ainsi, pour chaque colonne p , on a un complexe de chaînes

$$\dots \longleftarrow H_p(E) \xrightarrow{0} H_p(E) \longleftarrow H_p(E) \xrightarrow{0} H_p(E) \longrightarrow 0$$

d'où

$$E_{p,q}^2 = H_p(H_q^h(K)) = \begin{cases} H_q(E) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Donc, la suite $(E_{p,q}^r)$ s'effondre en deuxième page, donc dégénère et $E_{p,q}^r = E_{p,q}^2$ pour tout $r \geq 2$ et $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^2$. Par convergence, on a une filtration

$$0 = F_{-1}H_{p+q}(\text{Tot}(K)) \subseteq \dots \subseteq F_{p+q-1}H_{p+q}(\text{Tot}(K)) \subseteq F_{p+q}H_{p+q}(\text{Tot}(K)) = H_{p+q}(\text{Tot}(K)),$$

avec

$$E_{p,q}^2 \simeq E_{p,q}^\infty \simeq F_p H_{p+q}(\text{Tot}(K)) / F_{p-1} H_{p+q}(\text{Tot}(K)).$$

Soit $n := p + q$ et notons $F_p := F_p H_n(\text{Tot}(K))$. On a

$$H_n(E) = E_{0,n}^2 = E_{0,n}^\infty = F_0 / F_{-1} = F_0 \Rightarrow F_0 = H_n(E),$$

$$0 = E_{1,n-1}^2 = E_{1,n-1}^\infty = F_1 / F_0 \Rightarrow F_1 = H_n(E),$$

⋮

$$0 = E_{n,0}^2 = E_{n,0}^\infty = F_n / F_{n-1} = H_n(\text{Tot}(K)) / H_n(E) \Rightarrow H_n(\text{Tot}(K)) = H_n(E).$$

Donc, les suites $({}^I E_{p,q}^r)$ et $({}^{II} E_{p,q}^r)$ convergent vers

$$H_\bullet(\text{Tot}(K)) \simeq H_\bullet(E).$$

Cas de la suite $({}^I E^r)$:

Là encore, notons $(E^r, d^r) := ({}^I E^r, {}^I d^r)$. Il s'agit de la suite de Serre de l'énoncé. On sait qu'elle converge vers $H_\bullet(E)$. On a

$$E_{p,q}^1 = H_q^v(K_{p,\bullet})$$

et, comme $E_{p,q}^2 = H_p^h H_q^v(K)$, il reste à montrer que

$$H_p^h H_q^v(K) \simeq H_p(B, \underline{H}_q(F)).$$

Réinterprétons encore le bicomplexe K . Pour tout simplexe singulier $\tau_p : \Delta^p \rightarrow B$, posons

$$\mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) := \{\sigma_{p,q} : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow E ; (\sigma_{p,q}, \tau_p) \in \mathcal{S}_{p,q}\}.$$

On a

$$\mathcal{S}_{p,q} = \coprod_{\tau_p : \Delta^p \rightarrow B} \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) = \varinjlim_{\tau_p : \Delta^p \rightarrow B} \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p).$$

Fixons p et $\tau_p : \Delta^p \rightarrow B$. On a une fibration de Serre $\widehat{f} : \mathcal{C}(\Delta^p, E) \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^p, B)$ et soit

$$\begin{array}{ccc} F_{\tau_p} & \xrightarrow{q_1} & \mathcal{C}(\Delta^p, E) \\ q_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \widehat{f} \\ \text{pt} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}(\Delta^p, B) \end{array}$$

où $j(\text{pt}) = \tau_p$. On considère $\mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) := \mathcal{C}(\Delta^q, F_{\tau_p})$. Par la propriété universelle du produit fibré, on a $\mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \approx \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p)$ via l'application $\sigma_{p,q} \mapsto \pi$ donnée par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta^q & & \\ \downarrow & \searrow \widehat{\sigma}_{p,q} & \\ & \exists! \pi & \\ & \downarrow & \\ & F_{\tau_p} & \longrightarrow \mathcal{C}(\Delta^p, E) \\ & \downarrow & \downarrow \widehat{f} \\ & \text{pt} & \xrightarrow{j} \mathcal{C}(\Delta^p, B) \end{array}$$

Montrons qu'on a un isomorphisme naturel

$$H_\bullet(F_{\tau_p}) \simeq H_\bullet(F_{\tau_p(0)}) := H_\bullet(f^{-1}(\tau_p(0))).$$

Pour cela, considérons

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{\tau_p} & & \xrightarrow{\varepsilon_0 \circ q_1} & & E \\
 & \searrow \text{---} & & \searrow & \downarrow f \\
 & & F_{\tau_p(0)} & \hookrightarrow & E \\
 & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 & & \{\tau_p(0)\} & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{ccccc}
 F_{\tau_p} & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\Delta^p, E) & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathcal{C}(\Delta^p, B) \\
 \downarrow & & \downarrow \sigma \mapsto \sigma(0) & & \downarrow \tau \mapsto \tau(0) \\
 F_{\tau_p(0)} & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Par le Lemme B.14, les applications verticales de droite sont des équivalences d'homotopie et, par un argument semblable à la preuve du lemme 2.2.10 de [43] (qui repose essentiellement sur l'utilisation de la suite exacte longue d'homotopie de la fibration et du lemme des cinq, en faisant attention au cas du π_0 où des ensembles apparaissent), on obtient que $F_{\tau_p} \rightarrow F_{\tau_p(0)}$ est une équivalence faible d'homotopie, d'où

$$H_q(F_{\tau_p}) \simeq H_q(F_{\tau_p(0)}), \quad \forall q \geq 0.$$

On a de plus,

$$K_{p,q} = \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle = \mathbb{Z} \left\langle \varinjlim_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) \right\rangle \simeq \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) \rangle \simeq \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle$$

et en utilisant la bijection et cet isomorphisme, on a

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_{\tau_p}^v & : & \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle \rightarrow \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p,q-1}(\tau_p) \rangle \\
 (\ell : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_p}) & \mapsto & \sum_{j=0}^q (-1)^{j+p} \ell \varepsilon_j^q
 \end{array}$$

et

$$\partial_{p,q}^v \simeq \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} \partial_{\tau_p}^v,$$

qui est, au signe près, la différentielle du complexe singulier de F_{τ_p} . Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
 E_{p,q}^1 &= H_q^v(K_{p,\bullet}) = \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H_q \left(\mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p,\bullet}(\tau_p) \rangle, \partial_{\tau_p}^v \right) \\
 &\simeq \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H_q(F_{\tau_p}) \simeq \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H_q(F_{\tau_p(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} C_p(B, \underline{H_q(F)}).
 \end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$E_{p,q}^2 = H_p^h H_q^v(K) = H_p(C_\bullet(B, \underline{H_q(F)}), \overline{\partial^h})$$

et il reste à comprendre l'action de $\overline{\partial^h}$ sur $C_\bullet(B, \underline{H}_q(F))$. Si $\ell : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_p}$, on a $q_1 \ell : \Delta^q \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^p, E)$ et $\widetilde{q_1 \ell} : \Delta^q \times \Delta^p \rightarrow E$, avec $\widetilde{q_1 \ell}(t, s) = q_1 \ell(t)(s)$. Soit

$$\begin{aligned} \overline{\ell}_i &: \Delta^q \rightarrow \mathcal{C}(\Delta^{p-1}, E) \\ t &\mapsto \widetilde{q_1 \ell}(t, \varepsilon_i^p(-)) = \ell(t) \circ \varepsilon_i^p \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{array}{ccc} \Delta^q & \xrightarrow{\overline{\ell}_i} & \mathcal{C}(\Delta^{p-1}, E) \\ & \searrow \exists! \ell_i & \downarrow \widehat{f} \\ & F_{\tau_p \varepsilon_i^p} & \mathcal{C}(\Delta^{p-1}, E) \\ & \downarrow & \downarrow \widehat{f} \\ \text{pt} & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Delta^{p-1}, B) \end{array}$$

On a $\ell_i(x) = \ell(x) \circ \varepsilon_i^p$ et $\partial_{p,q}^h \simeq \bigoplus_{\tau_p} \partial_{\tau_p}^h$, où

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_p}^h &: \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle \rightarrow \bigoplus_{i=0}^p \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p-1,q}(\tau_p \varepsilon_i^p) \rangle \hookrightarrow \bigoplus_{\tau_{p-1}': \Delta^{p-1} \rightarrow B} \mathbb{Z} \langle \mathcal{L}_{p-1,q}(\tau_{p-1}') \rangle \\ (\ell : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_p}) &\mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i \ell_i \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H_q(F_{\tau_p}) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H_q(F_{\tau_p(0)}) = C_p(B, \underline{H}_q(F)) \\ \downarrow \overline{\partial^h} & & \downarrow \delta \\ \bigoplus_{\tau_{p-1}: \Delta^{p-1} \rightarrow B} H_q(F_{\tau_{p-1}}) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\tau_{p-1}: \Delta^{p-1} \rightarrow B} H_q(F_{\tau_{p-1}(0)}) = C_{p-1}(B, \underline{H}_q(F)) \end{array} \quad (18)$$

où δ est la différentielle associée au complexe $C_\bullet(B, \underline{H}_q(F))$ à coefficients dans le système local $\underline{H}_q(F)$.

Fixons $\tau_p : \Delta^p \rightarrow B$. Pour montrer que le diagramme (18) commute, il suffit de considérer une classe $[\ell] \in H_q(F_{\tau_p})$, où $\ell : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_p}$ est tel que $\partial_{\tau_p}^v(\ell) = 0$. La ligne du haut est l'isomorphisme envoyant $[\ell]$ sur $[\widehat{\ell}]$ avec $\widehat{\ell} : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_p(0)}$ donné par $\widehat{\ell}(x) = \ell(x)(0) = \ell(x)(e_0)$ pour tout $x \in \Delta^q$. L'isomorphisme de la ligne du bas est défini de manière analogue. Soit donc $[\ell] \in H_q(F_{\tau_p})$. $\overline{\partial^h}$ envoie $[\ell]$ sur $[\partial^h(\ell)] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [\ell_i]$. Notons que $\widehat{\ell}_i = \widehat{\ell}$ pour $i \geq 1$ et $\widehat{\ell}_0(x) = \ell(x)(1)$ pour tout $x \in \Delta^q$. Ainsi, la composée

$$H_q(F_{\tau_p}) \xrightarrow{\overline{\partial^h}} \bigoplus_{\tau_{p-1}} H_q(F_{\tau_{p-1}}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\tau_{p-1}} H_q(F_{\tau_{p-1}(0)})$$

envoie $[\ell]$ sur $[\widehat{\ell}_0] + \sum_{i=1}^p (-1)^i [\widehat{\ell}]$. Il reste à voir l'autre composée. Soit donc $[\ell] \in H_q(F_{\tau_p})$. L'isomorphisme de la ligne du haut envoie $[\ell]$ sur $[\widehat{\ell}]$. Appliquons δ à $[\widehat{\ell}]$. Rappelons que $\delta_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \delta_p^i$, où $\delta_p^i([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}]$ pour $i \geq 1$ et $\delta_p^0([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$. Pour montrer cette dernière relation, soit γ le chemin $\tau_p(0) \rightarrow \tau_p(1)$ donné par

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \xrightarrow{\gamma} & B \\ & \searrow & \uparrow \tau_p \\ & \Delta^p & \end{array}$$

Notons τ_γ l'isomorphisme défini par γ dans le système local $\underline{H_q(F)}$. Rappelons comment l'on construit τ_γ : on a

$$\begin{array}{ccc} E_\gamma & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ \Delta^1 & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

qui induit

$$\begin{array}{ccccc} F_{\tau_p(0)} & \longrightarrow & E_\gamma & \longleftarrow & F_{\tau_p(1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & \Delta^1 & \longleftarrow & \{1\} \end{array}$$

avec φ et ψ des équivalences d'homotopie faibles et on a

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_{\tau_p(0)}) & \xrightarrow{\tau_\gamma = \tau_{\tau_p(0,1)}} & H_q(F_{\tau_p(1)}) \\ \searrow \sim & & \swarrow \sim \\ & H_q(E_\gamma) & \end{array}$$

et δ_p^0 est donnée par $\tau_\gamma = \tau_{\tau_p(0,1)}$, suivi par l'inclusion dans $C_{p-1}(B, \underline{H_q(F)})$. Ainsi, pour montrer que $\delta_p^0([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$, il reste à montrer que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H_q(F_{\tau_p}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(F_{\tau_p(0)}) & \xrightarrow{H_q(\varphi)} & H_q(E_\gamma) \\ \downarrow (\overline{\partial_{\tau_p}^h})_0 & & \downarrow \tau_p & \searrow \sim & \\ H_q(F_{\tau_p \varepsilon_0^p}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(F_{\tau_p(1)}) & \xrightarrow{H_q(\psi)} & H_q(E_\gamma) \end{array} \quad (19)$$

Comme des applications homotopes induisent des isomorphismes en homologie, il suffit de montrer que les applications

$$\begin{array}{ccc} F_{\tau_p} & \xrightarrow{G} & E_\gamma \\ & \searrow & \nearrow \\ & F_{\tau_p(0)} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} F_{\tau_p} & \xrightarrow{G'} & E_\gamma \\ \downarrow & & \uparrow \\ F_{\tau_p \varepsilon_0^p} & \longrightarrow & F_{\tau_p(1)} \end{array}$$

sont homotopes. Pour $g \in F_{\tau_p}$, on a $G(g) = (0, g(0))$ et $G'(g) = (1, g(1))$. Notons $g_{0,1}$ la composée $g_{0,1} : \Delta^1 \xrightarrow{\iota_{0,1}} \Delta^p \xrightarrow{g} E$. On définit

$$H : F_{\tau_p} \times I \rightarrow E_\gamma \\ (g, t) \mapsto (t, g_{0,1}(t))$$

Par définition de $F_{\tau_p} = \mathcal{C}(\Delta^p, E) \times_{\mathcal{C}(\Delta^p, B)}$ pt pour tout $t \in I \simeq \Delta^1$, on a $f g_{0,1}(t) = f \circ g \circ \iota_{0,1}(t) = \tau_p \circ \iota_{0,1}(t) = \gamma(t)$, ainsi, $H(g, t) = (t, g_{0,1}(t)) \in E_\gamma$ et H est bien définie. De plus, H est une évaluation sur I , donc est continue. Enfin, on a $H(g, 0) = (0, g(0)) = G(g)$ et $H(g, 1) = (1, g(1)) = G'(g)$, donc H est une homotopie entre G et G' . Ainsi, on en tire la

commutativité de (19), ce qui implique finalement $\tau_\gamma([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$ et donc $\delta_p^0([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$. On en déduit que la composée

$$H_q(F_{\tau_p}) \xrightarrow{\sim} H_q(F_{\tau_p(0)}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\tau_{p-1}} H_q(F_{\tau_{p-1}(0)})$$

envoie $[\ell]$ sur $[\widehat{\ell}_0] + \sum_{i=1}^p (-1)^i [\widehat{\ell}]$, ce qui prouve finalement la commutativité de (18). Ainsi, l'application induite par ∂^h est la différentielle δ de $C_\bullet(B, \underline{H}_q(F))$ et donc

$$E_{p,q}^2 = H_q(B, \underline{H}_q(F)),$$

ce qui achève la démonstration. \square

Remarque B.16. Dans sa thèse ([68]), J-P. Serre définit autrement sa suite spectrale. On donne ici un court résumé de la construction et de la comparaison avec celle de Dress. Cette présentation se trouve dans [3], chapitre XII, section 5) :

Soit $\pi : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Notons $I := [0, 1]$ et soit $C'_n(E)$ le groupe abélien libre engendré par les " n -cubes singuliers" $f : I^n \rightarrow E$ et soit $D_n(E)$ le sous-groupe engendré par les $f : I^n \rightarrow E$ tels que $f(x_1, \dots, x_n)$ est indépendant de x_n . Posons $C_n := C'_n / D_n$. Alors, C_n est naturellement un complexe de chaînes. On filtre C_* en définissant $F_p C'_n$ comme étant le sous-module engendré par les $f : I^n \rightarrow E$ pour lesquels $\pi f(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend que des p premières variables x_1, \dots, x_p et en posant $F_p C_n := (F_p C'_n + D_n) / D_n$. La suite de Serre est alors la suite spectrale associée à ce complexe filtré. Si $n = p + q$, alors $I^n = I^p \times I^q$ (et c'est précisément à cause de cette formule que Serre considère l'homologie cubique) et une application $f : I^n \rightarrow E$ telle que $\pi f(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend que de x_1, \dots, x_p peut être vue comme une paire (g, f) d'applications telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I^p \times I^q & \xrightarrow{f} & E \\ p_{r1} \downarrow & & \downarrow \pi \\ I^p & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

commute, où g est définie par $g(x_1, \dots, x_p) := \pi f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$. La relation entre la suite de Serre et la suite de Dress et donc essentiellement la même que celle entre l'homologie cubique et l'homologie singulière (simpliciale). Or, les complexes singuliers et cubiques sont homotopiquement équivalents (voir [41], theorem 8.4.10), donc le complexe filtré $F_\bullet C_*$ est homotopiquement équivalent au complexe $\text{Tot}(K_{\bullet, \bullet})$ de Dress, filtré par colonnes, et par naturalité de la suite spectrale d'un complexe filtré, les deux suites sont isomorphes, et l'isomorphisme commence en deuxième page. Ces deux suites sont donc équivalentes.

Remarque B.17. Vue la construction et en inspectant de près la démonstration précédente, la suite de Serre est naturelle en la fibration. En effet, si on a un morphisme de fibrations

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\bar{f}} & B \end{array}$$

alors, on a une application naturelle

$$\mathcal{S}'_{p,q} \xrightarrow{f_{\mathcal{S}}} \mathcal{S}_{p,q}$$

d'où un morphisme

$$K'_{p,q} = \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}'_{p,q} \rangle \xrightarrow{f_K} \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle = K_{p,q}$$

tel que $\partial^h f_K = f_K \partial^h$ et $\partial^v f_K = f_K \partial^v$, i.e. f_K est un morphisme de bicomplexes et la naturalité de la suite spectrale (${}^I E_{p,q}^r$) d'un bicomplexe permet de conclure. IL reste à voir que les identifications menées dans la preuve sont naturelles, ce qui se vérifie aisément.

De la précédente remarque, on tire un énoncé plus précis du théorème de Serre :

Théorème B.18. *Sur la catégorie des fibrations de Serre, il existe un foncteur spectral homologique, à valeurs dans les suite spectrales de groupes abéliens, aboutissant à l'homologie de l'espace total et dont la deuxième page est donnée par*

$$E_{p,q}^2(E \rightarrow B) = H_p(B, \underline{H}_q(F)) \implies H_{p+q}(E).$$

Corollaire B.19. *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ une fibration de Serre avec B simplement connexe. Alors, la suite de Serre s'écrit*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) \implies H_{p+q}(E).$$

Démonstration. Ceci provient de la proposition B.8. □

Corollaire B.20. *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ une fibration de Serre avec B simplement connexe et E connexe par arcs. Alors, F est connexe par arcs.*

Démonstration. On a $E_{0,0}^2 = E_{0,0}^\infty = H_0(E) = \mathbb{Z}$. Mais, $E_{0,0}^2 = H_0(B, H_0(F)) = H_0(F)$, donc $H_0(F) = \mathbb{Z}$. □

Corollaire B.21. *Si $f : E \rightarrow B$ est une fibration de Serre, avec E contractile, alors on a*

$$\begin{cases} E_{p,q}^\infty = 0 & \text{si } (p,q) \neq (0,0) \\ E_{0,0}^\infty = \mathbb{Z} \end{cases}$$

Démonstration. Comme E est contractile, on a $H_n(E) = \delta_{n,0}\mathbb{Z}$ et le résultat découle de la convergence de la suite de Serre. □

Pour une suite spectrale de premier quadrant $E_{p,q}^a \implies H_{p+q}$, on a une filtration

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \dots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n$$

avec

$$F_0H_n \simeq E_{0,n}^\infty \quad \text{et} \quad E_{n,0}^\infty \simeq H_n / F_{n-1}H_n.$$

Comme la suite est de premier quadrant, on a

$$E_{n,0}^\infty \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_{n,0}^{a+1} \hookrightarrow E_{n,0}^a,$$

et

$$E_{0,n}^0 \rightarrow E_{0,n}^{a+1} \rightarrow \dots \rightarrow E_{0,n}^\infty,$$

d'où des "morphismes de bord"

$$\begin{array}{ccc} E_{0,n}^a & \xrightarrow{h_{0,n}} & H_n \\ & \searrow & \nearrow \\ & E_{0,n}^\infty & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_n & \xrightarrow{h_{n,0}} & E_{n,0}^a \\ & \searrow & \nearrow \\ & E_{n,0}^\infty & \end{array}$$

Théorème B.22. (voir [74])

Soit une fibration de Serre $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$ avec B simplement connexe. Alors, on a la suite de Serre

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) \implies H_{p+q}(E),$$

et les morphismes de bord sont donnés par (on suppose que F est 0-connexe pour le second)

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{i_*} & H_n(E) \\ \parallel & & \uparrow \\ E_{0,n}^2 & \longrightarrow & E_{0,n}^\infty \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H_n(E) & \xrightarrow{f_*} & H_n(B) \\ \downarrow & & \parallel \\ E_{n,0}^\infty & \longrightarrow & E_{n,0}^2 \end{array}$$

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, il s'agit de montrer que $i_* = h_{0,n}$ et $f_* = h_{n,0}$. Pour le premier, on a un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ \text{pt} & \longrightarrow & B \end{array}$$

avec $F \rightarrow \text{pt}$ une fibration de Serre, qui donne un morphisme de fibrations, donc un morphisme de suites spectrales $(\tilde{E}_{p,q}^r) \rightarrow (E_{p,q}^r)$, où $(\tilde{E}_{p,q}^r)$ est la suite de $F \rightarrow \text{pt}$. On a

$$\tilde{E}_{p,q}^2 = H_p(\text{pt}, H_q(F)) = \delta_{p,0} H_q(F),$$

donc cette suite s'effondre en deuxième page. Le morphisme de suites

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & F \\ \parallel & & \downarrow i \\ F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{pt} & \longrightarrow & B \end{array}$$

donne un carré

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{j_*} & H_n(F) \\ \tilde{h}_{0,n} \downarrow & & \downarrow h_{0,n} \\ H_n(F) & \xrightarrow{i_*} & H_n(E) \end{array}$$

et $j_* = id$. De plus, l'effondrement de $(\tilde{E}_{p,q}^r)$ montre que $\tilde{E}_{p,q}^2 = \tilde{E}_{p,q}^\infty$ et $\tilde{E}_{0,n}^2 = H_n(F)$, donc $\tilde{h}_{0,n} = id$ et donc $i_* = h_{0,n}$.

Supposons F connexe par arcs, de telle sorte que l'on ait $E_{p,0}^2 = H_p(B)$. On considère le morphisme de fibrations de Serre

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \parallel \\ B & \xrightarrow{1} & B \end{array}$$

qui induit un morphisme $(E_{p,q}^r) \rightarrow (\tilde{E}_{p,q}^r)$ et on a un carré

$$\begin{array}{ccc} H_n(E) & \xrightarrow{f_*} & H_n(B) \\ h_{n,0} \downarrow & & \downarrow \tilde{h}_{n,0} \\ H_n(B) & \xrightarrow{1_*=1} & H_n(B) \end{array}$$

et comme $\tilde{E}_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(\text{pt})) = \delta_{q,0} H_p(B)$, la suite $(\tilde{E}_{p,q}^r)$ s'effondre, d'où $\tilde{E}_{n,0}^2 = H_n(B) = E_{n,0}^\infty$ et $\tilde{h}_{n,0} = id$, d'où $h_{n,0} = f_*$ et le résultat suit. \square

Remarque B.23. Enfin, comme la suite de Serre est de premier quadrant, on a, pour $r > \max(p, q + 1)$,

$$d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r = 0,$$

donc $d_{p,q}^r = 0$ et $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r$ et donc $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^r$. Ainsi, on a

$$\forall r > \max(p, q + 1), E_{p,q}^r = E_{p,q}^\infty.$$

C La suite spectrale cohomologique de Serre

C.1 Cohomologie à coefficients dans un système local et système local cohomologique d'une fibration de Serre

On va ici "dualiser" le résultat homologique de Serre. Pour ceci, il nous faut définir la cohomologie d'un espace à coefficients dans un système local et construire un système local cohomologique associé à une fibration. Nous allons passer un peu plus vite sur les définitions, étant donné qu'elles sont assez analogues au cas homologique. Pour ce qui suit, voir [19], 5.3.

À partir de maintenant, M sera un groupe abélien fixé et on considère $H^\bullet(-) = H^\bullet(-, M)$ la cohomologie à coefficients dans M . Soient X un espace et $\underline{A} = \{A_x, \tau_\gamma\}$ un système local de coefficients sur X . Posons

$$C^n(X, \underline{A}) := \left\{ C_n(X) \xrightarrow{c} \bigoplus_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} A_{\sigma_0} ; c(\sigma) \in A_{\sigma_0}, \forall \sigma : \Delta^n \rightarrow X \right\} \simeq \prod_{\sigma: \Delta^n \rightarrow X} A_{\sigma_0},$$

C'est un groupe abélien et on définit

$$\partial^n : C^n(X, \underline{A}) \rightarrow C^{n+1}(X, \underline{A})$$

par

$$\partial^n c(\sigma) := \tau_{\sigma_0 1}^{-1}(c(\delta_0 \sigma)) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\delta_i \sigma),$$

avec $\tau_{\sigma_0 1} : A_{\sigma_0} \xrightarrow{\sim} A_{\sigma_1}$; ou encore, avec la notation produit, $\varphi = (\varphi_\sigma)_\sigma \in \prod_\sigma A_{\sigma_0}$,

$$(\partial^n \varphi)_\sigma = \tau_{\sigma_0 1}^{-1} \varphi_{\sigma \varepsilon_0^{n+1}} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \varphi_{\sigma \varepsilon_i^{n+1}}.$$

Alors, $\partial^2 = 0$ et on pose

$$H^\bullet(X, \underline{A}) := H^\bullet(C^\bullet(X, \underline{A}), \partial).$$

Ensuite, soit $f : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. De manière analogue au cas homologique, on définit un système local $\underline{H^q(F)} := \{A_x, \tau_\gamma\}$ associé. Pour $x \in B$, prenons $A_x := H^q(F_x) = H^q(p^{-1}(x))$ et pour $\gamma : \Delta^1 \rightarrow B$, on obtient $\tau_\gamma : A_{\gamma_0} \xrightarrow{\sim} A_{\gamma_1}$ car on a des équivalences faibles

$$F_{\gamma(0)} \longrightarrow E_\gamma \longleftarrow F_{\gamma(1)}$$

qui induisent un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^q(F_{\gamma(0)}) & \xrightarrow{\tau_\gamma} & H^q(F_{\gamma(1)}) \\ & \swarrow \sim & \searrow \sim \\ & H^q(E_\gamma) & \end{array}$$

Et, en utilisant le même triangle que dans le cas homologique, qui est formé d'équivalences faibles, on obtient que si $h : \Delta^2 \rightarrow B$ est un 2-simplexe, alors on a $\tau_{h\varepsilon_0} \tau_{h\varepsilon_2} = \tau_{h\varepsilon_1}$, donc $\underline{H^q(F)}$ est bien un système local. On définit alors

$$H^\bullet(B, \underline{H^q(F)}) = H^\bullet(C^\bullet(B, \underline{H^q(F)}), \partial).$$

C.2 La suite de Serre : dualisation de la construction de Dress

On peut maintenant énoncer et démontrer la version cohomologique du théorème de Serre :

Théorème C.1. *Soit $f : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Alors, il existe une suite spectrale cohomologique de premier quadrant convergente*

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \underline{H^q(F)}) \implies H^{p+q}(E).$$

Démonstration. On va donner la version duale de la preuve du cas homologique, en vérifiant que les flèches se retournent correctement. On reprend les notations de la preuve ci-dessus, et on se permet d'utiliser librement les résultats intermédiaires qui y sont démontrés. Rappelons que l'on a

$$\mathcal{S}_{p,q} := \{(\sigma_{p,q}, \tau_p), \sigma_{p,q} : \Delta^p \times \Delta^q \rightarrow E, \tau_p \Delta^p \rightarrow B ; f\sigma_{p,q} = \tau_p p r_1\}$$

et posons

$$K^{p,q} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_{p,q}, M).$$

Reprenons les différentielles $\partial_{p,q}^h$ et $\partial_{p,q}^v$ de $K_{p,q}$ et définissons

$$\begin{array}{ccc} \partial_h^{p,q} : K^{p,q} & \rightarrow & K^{p+1,q} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ \partial_{p+1,q}^h \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \partial_v^{p,q} : K^{p,q} & \rightarrow & K^{p,q+1} \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ \partial_{p,q+1}^v \end{array}$$

Alors, $(K^{\bullet,\bullet}, \partial_h, \partial_v)$ est un bicomplexe de premier quadrant, auquel on peut attacher deux suites spectrales $({}^I E_r^{p,q})$ et $({}^{II} E_r^{p,q})$ qui convergent vers $H^\bullet(\text{Tot}(K^{\bullet,\bullet}))$. On a

$$\begin{cases} {}^{II} E_0^{p,q} = K^{q,p}, & {}^{II} E_1^{p,q} = H_h^q(K^{\bullet,p}), & {}^{II} E_2^{p,q} = H_v^p H_h^q(K^{\bullet,\bullet}) \\ {}^I E_0^{p,q} = K^{p,q}, & {}^I E_1^{p,q} = H_v^q(K^{p,\bullet}), & {}^I E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(K^{\bullet,\bullet}) \end{cases}$$

la suite de Serre étant $({}^I E_r^{p,q})$. On va refaire essentiellement le même travail que plus haut, mais un peu plus vite...

Cas de la suite $({}^{II} E_r)$:

Par soucis de lisibilité, notons $(E_r) := ({}^{II} E_r)$. Montrons que

$$H^\bullet(\text{Tot}(K)) = H^\bullet(E) \stackrel{\text{def}}{=} H^\bullet(E, M).$$

Fixons q et faisons varier p . Du diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_{p+1,q} & \xrightarrow{\partial_{p+1,q}^h} & K_{p,q} \\ \wr \downarrow & & \uparrow \wr \\ \mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p+1,q} \rangle & \xrightarrow{\partial_{p+1,q}^{\text{sing}}} & \mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p,q} \rangle \end{array}$$

on tire

$$\begin{array}{ccc} K^{p,q} & \xrightarrow{\partial_h^{p,q}} & K^{p+1,q} \\ \wr \uparrow & & \downarrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p,q} \rangle, M) & \xrightarrow{\partial_{\text{sing}}^{p,q}} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p+1,q} \rangle, M) \end{array}$$

donc on peut identifier chaque q -ligne de $K^{\bullet,\bullet}$ avec le complexe singulier de $E'_q = B \times_{\mathcal{C}(\Delta^q, B)} \mathcal{C}(\Delta^q, E)$ (rappel : $\mathcal{P}_{p,q} = \mathcal{C}(\Delta^p, E'_q) \approx \mathcal{S}_{p,q}$). Ensuite, on a des équivalences faibles

$$E'_q \longrightarrow \mathcal{C}(\Delta^q, E) \longleftarrow E$$

qui donnent en cohomologie

$$H^p(E'_q) \xrightarrow{\sim} H^p(\mathcal{C}(\Delta^q, E)) \xleftarrow{\sim} H^p(E)$$

d'où $H^p(E'_q) \simeq H^p(E)$ pour tout $p \geq 0$ et donc

$$E_1^{p,q} = {}^{II} E_1^{p,q} = H^q(E).$$

Ensuite, on a encore un diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{p,q} & \xrightarrow{\partial_v^{p,q}} & K^{p,q+1} \\ \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p,q} \rangle, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{P}_{p,q+1} \rangle, M) \end{array}$$

où la flèche du bas est donnée par

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \widetilde{\partial_{p,q+1}^v} = \left(\ell \mapsto \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{j+p} \varphi(\ell) \right)$$

et donc $\partial_v^{p,q}$ alterne entre id et 0 et pour chaque colonne p , on a un complexe

$$0 \longrightarrow H^p(E) \xrightarrow{0} H^p(E) = H^p(E) \xrightarrow{0} H^p(E) = \dots$$

d'où

$${}^{II} E_r^{p,q} = H_v^p H_h^q(K) = \begin{cases} H^q(E) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Donc la suite s'effondre en deuxième page et, comme dans le cas homologique, en raisonnant sur la filtration de $H^\bullet(\text{Tot}(K))$, on obtient

$$H^n(\text{Tot}(K)) = E_2^{0,n} = H^n(E), \quad \forall n \geq 0,$$

et donc les deux suites convergent vers $H^\bullet(E)$.

Cas de la suite $({}^I E_r)$:

Là encore, notons $(E_r) := ({}^I E_r)$. On a

$$E_1^{p,q} = H_v^q(K^{p,\bullet})$$

et, comme $E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(K)$, il reste à prouver que

$$H_h^p H_v^q(K^{\bullet,\bullet}) \simeq H^p(B, \underline{H^q(F)}).$$

On reprend $\mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) = \{\sigma_{p,q} ; (\sigma_{p,q}, \tau_p) \in \mathcal{S}_{p,q}\}$ et $\mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) = \varinjlim_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p)$. On fixe p et $\tau_p: \Delta^p \rightarrow B$. On a une fibration de Serre $\mathcal{C}(\Delta^p, E) \xrightarrow{\hat{f}} \mathcal{C}(\Delta^p, B)$ et formons le produit

$$\begin{array}{ccc} F_{\tau_p} & \hookrightarrow & \mathcal{C}(\Delta^p, E) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \hat{f} \\ \text{pt} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C}(\Delta^p, B) \end{array}$$

avec $j(\text{pt}) = \tau_p$. Considérons à nouveau $\mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) := \mathcal{C}(\Delta^q, F_{\tau_p}) \approx \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p)$ et avec le même argument que dans le cas homologique, on a une équivalence faible $F_{\tau_p} \rightarrow F_{\tau_p(0)}$, d'où

$$H^q(F_{\tau_p(0)}) \xrightarrow{\sim} H^q(F_{\tau_p}), \quad \forall q \geq 0.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} K^{p,q} &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}\left\langle \varinjlim_{\tau_p} \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) \right\rangle, M\right) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{\tau_p} \mathbb{Z}\langle \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) \rangle, M\right) = \prod_{\tau_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{S}_{p,q}(\tau_p) \rangle, M) = \prod_{\tau_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle, M). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_p}^v &: \mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q+1}(\tau_p) \rangle &\rightarrow & \mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle \\ (\ell : \Delta^{q+1} \rightarrow F_{\tau_p}) &\mapsto & \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{j+p} \ell \varepsilon_j^{q+1} \end{aligned}$$

et $\partial_{p,q}^v \simeq \bigoplus_{\tau_p} \partial_{\tau_p}^v$ qui est (au signe près) la différentielle du complexe singulier de F_{τ_p} . On prend donc

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial}_{\tau_p} &: \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle, M) &\rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q+1}(\tau_p) \rangle, M) \\ &\varphi &\mapsto & \varphi \circ \partial_{\tau_p}^v \end{aligned}$$

et on a $\partial_v^{p,q} = \prod_{\tau_p} \widetilde{\partial}_{\tau_p}$, d'où

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= H_v^q(K^{p,\bullet}) = \prod_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H^q(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,\bullet}(\tau_p) \rangle, M), \widetilde{\partial}_{\tau_p}) \\ &\simeq \prod_{\tau_p} H^q(F_{\tau_p}) \simeq \prod_{\tau_p} H^q(F_{\tau_p(0)}) = C^p(B, \underline{H^q(F)}). \end{aligned}$$

Maintenant, il vient

$$E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(K) = H^p(C^\bullet(B, \underline{H^q(F)}), \overline{\partial}_h).$$

Rappelons que l'on a

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_{p+1}}^h &: \mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p+1,q}(\tau_{p+1}) \rangle &\rightarrow & \bigoplus_{i=0}^{p+1} \mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_{p+1} \varepsilon_i^{p+1}) \rangle \hookrightarrow \bigoplus_{\tau_p} \mathbb{Z}\langle \mathcal{L}_{p,q}(\tau_p) \rangle = K_{p,q} \\ (\ell : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_{p+1}}) &\mapsto & \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \ell_i \end{aligned}$$

où $\ell_i : \Delta^q \rightarrow F_{\tau_{p+1} \varepsilon_i^{p+1}}$, et qu'on a $\partial_h^{p,q} = \text{Hom}(\partial_{p+1,q}^h, M) : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ où $\partial_{p+1,q}^h = \bigoplus_{\tau_{p+1}} \partial_{\tau_{p+1}}^h$. Donc, en désignant la différentielle de $C^\bullet(B, \underline{H^q(F)})$ par δ , il s'agit de montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H^q(F_{\tau_p}) & \xleftarrow{\sim \alpha} & \prod_{\tau_p: \Delta^p \rightarrow B} H^q(F_{\tau_p(0)}) \xlongequal{\quad} C^p(B, \underline{H^q(F)}) & (20) \\ \overline{\partial}_h \downarrow & & \downarrow \delta \\ \prod_{\tau_{p+1}: \Delta^{p+1} \rightarrow B} H^q(F_{\tau_{p+1}}) & \xleftarrow{\sim \beta} & \prod_{\tau_{p+1}: \Delta^{p+1} \rightarrow B} H^q(F_{\tau_{p+1}(0)}) \xlongequal{\quad} C^{p+1}(B, \underline{H^q(F)}) \end{array}$$

Rappelons encore que l'on a montré que $\delta_p^0([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$. On va devoir tout calculer "à la main", en gardant à l'esprit que l'on ne fait quasiment que dualiser ce qu'on a fait pour l'homologie...

Dans ce qui suit, afin de faciliter la lecture, on prend comme convention d'écrire $\sigma : \Delta^p \rightarrow B$ et $\tau : \Delta^{p+1} \rightarrow B$. Soit donc $\varphi \in \prod_{\sigma: \Delta^p \rightarrow B} H^q(F_{\sigma(0)})$ et écrivons $\varphi = ([\varphi_\sigma])_{\sigma: \Delta^p \rightarrow B}$ où $[\varphi_\sigma] \in H^q(F_{\sigma(0)})$, avec $\varphi_\sigma : C_q(F_{\sigma(0)}) \rightarrow M$.

On a $\alpha(\varphi) = ([\varphi_\sigma^\alpha])_\sigma$ où

$$[\varphi_\sigma^\alpha] = H^q(F_\sigma \xrightarrow{u_\sigma} F_{\sigma(0)})([\varphi_\sigma]) = [\ell \mapsto \varphi_\sigma(u_\sigma \circ \ell)] = [\ell \mapsto \varphi_\sigma(\widehat{\ell})].$$

Ensuite, si $\psi = ([\psi_\sigma])_\sigma \in \prod_\sigma H^q(F_\sigma)$, alors $\overline{\partial}_h(\psi) = ([\psi_\tau^h])_\tau$ avec

$$[\psi_\tau^h] = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i v_\tau^i([\psi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}])$$

où $v_\tau^i : H^q(F_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}) \rightarrow H^q(F_\tau)$ provient du morphisme construit plus haut

$$\begin{aligned} C^q(F_\tau) &\rightarrow C^q(F_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}) \\ (\ell : \Delta^q \rightarrow F_\tau) &\mapsto (\ell_i : \Delta^q \rightarrow F_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}) \end{aligned}$$

i.e.

$$[\psi_\tau^h] = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [\ell \mapsto \psi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}(\ell_i)] \in H^q(F_\tau).$$

Ensuite, on a $\delta\varphi = ([\varphi_\tau^\delta])_\tau$ où

$$[\varphi_\tau^\delta] = \tau_{\tau 01}^{-1}[\varphi_{\tau\varepsilon_0^{p+1}}] + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i [\varphi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}] \in H^q(F_{\tau(0)})$$

et si $\psi = ([\psi_\tau])_\tau \in \prod_\tau H^q(F_{\tau(0)})$, alors $\beta(\psi) = ([\psi_\tau^\beta])_\tau$ où

$$[\psi_\tau^\beta] = H^q(F_\tau \xrightarrow{u_\tau} F_{\tau(0)})([\psi_\tau]) = [\ell \mapsto \psi_\tau(u_\tau \circ \ell)] = [\ell \mapsto \psi_\tau(\widehat{\ell})].$$

Enfin, notons $A := \overline{\partial}_h \circ \alpha$ et $B := \beta \circ \delta$ et soit $\varphi = ([\varphi_\sigma])_\sigma \in \prod_\sigma H^q(F_{\sigma(0)})$, alors $A\varphi = ([\varphi_\tau^A])_\tau$ où

$$[\varphi_\tau^A] = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i [\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}(\ell_i)] = [\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_0^{p+1}}(\widehat{\ell}_0)] + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i [\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}(\widehat{\ell}_i)].$$

D'autre part, $B\varphi = ([\varphi_\tau^B])_\tau$, avec

$$[\varphi_\tau^B] = [\ell \mapsto \varphi_\tau^\delta(\widehat{\ell})] = \tau_{\tau 01}^{-1}[\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_0^{p+1}}(\widehat{\ell})] + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i [\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_i^{p+1}}(\widehat{\ell}_i)].$$

Les deux sommes sont égales car $\widehat{\ell}_i = \widehat{\ell}$ pour tout $i > 0$. Ensuite, comme $\delta_p^0([\widehat{\ell}]) = [\widehat{\ell}_0]$ et comme δ_p^0 est donnée par $\tau_{\tau 01} : H^q(F_{\tau(0)}) \xrightarrow{\sim} H^q(F_{\tau(1)})$, suivie de l'inclusion, obtient

$$[\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_0^{p+1}}(\widehat{\ell}_0)] = \tau_{\tau 01}^{-1}[\ell \mapsto \varphi_{\tau\varepsilon_0^{p+1}}(\widehat{\ell})].$$

Ceci montre que $[\varphi_\tau^A] = [\varphi_\tau^B]$, pour tout $\tau : \Delta^{p+1} \rightarrow B$, d'où $A\varphi = B\varphi$ pour tout $\varphi \in C^p(B, \underline{H^q(F)})$ et donc $A = B$, ce qui termine de montrer la commutativité de (20). On en déduit finalement que

$${}^1 E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(K) = H^p(C^\bullet(B, \underline{H^q(F)}), \overline{\partial}_h) = H^p(C^\bullet(B, \underline{H^q(F)}), \delta) = H^p(B, \underline{H^q(F)}),$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque C.2. En reprenant ce genre de raisonnement, on a une suite de Serre en homologie à coefficients

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, \underline{H}_q(F, M)) \implies H_{p+q}(E, M)$$

en arrangeant correctement le système local (on rajoute les coefficients) et en posant

$$K_{p,q} := \mathbb{Z} \langle \mathcal{S}_{p,q} \rangle \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

et avec $\partial_{p,q}^h(M) = \partial_{p,q}^h \otimes 1$ et $\partial_{p,q}^v(M) = \partial_{p,q}^v \otimes 1$. Il suffit de rajouter des $- \otimes M$ partout et ce qui marche pour $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, M)$ marche aussi pour $- \otimes_{\mathbb{Z}} M$, en prenant garde à la covariance.

Là encore, on voit que cette construction est fonctorielle...

Corollaire C.3. *Si $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$ est une fibration de Serre et si B est simplement connexe, alors la suite spectrale de Serre s'écrit*

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F, M)) \implies H^{p+q}(E, M).$$

Dans le cas cohomologique, les morphismes de bord sont

$$\begin{array}{ccc} E_2^{n,0} & \xrightarrow{h^{n,0}} & H^n(E) \\ & \searrow & \nearrow \\ & E_{\infty}^{n,0} & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^n(E) & \xrightarrow{h^{0,n}} & E_2^{0,n} \\ & \searrow & \nearrow \\ & E_{\infty}^{0,n} & \end{array}$$

Théorème C.4. *Si $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$ est une fibration de Serre, avec B simplement connexe, alors on a la suite de Serre*

$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F)) \implies H^{p+q}(E),$$

et les morphismes de bord sont donnés par (on suppose que F est 0-connexe pour le premier)

$$\begin{array}{ccc} H^n(B) & \xrightarrow{f^*} & H^n(E) \\ \parallel & & \uparrow \\ E_2^{n,0} & \longrightarrow & E_{\infty}^{n,0} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} H^n(E) & \xrightarrow{i^*} & H^n(F) \\ \downarrow & & \parallel \\ E_{\infty}^{0,n} & \longleftarrow & E_2^{0,n} \end{array}$$

Démonstration. Montrons que $h^{n,0} = f^*$ et $h^{0,n} = i^*$. Là aussi, la naturalité de la suite, couplée avec le morphisme

$$\begin{array}{ccc} F & \xlongequal{\quad} & F \\ \parallel & & \downarrow i \\ F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{pt} & \longrightarrow & B \end{array}$$

produit un morphisme $(E_r^{p,q}) \rightarrow (\tilde{E}_r^{p,q})$ où la deuxième suite est celle de $F \rightarrow \text{pt}$. On a

$$\tilde{E}_r^{p,q} = H^p(\text{pt}, H^q(F)) = \delta_{p,0} H^q(F),$$

donc cette suite s'effondre en deuxième page et on a un carré entre morphismes de bord

$$\begin{array}{ccc} H^n(F) & \xleftarrow{i^*} & H^n(E) \\ \tilde{h}^{0,n} \downarrow & & \downarrow h^{0,n} \\ H^n(F) & \xleftarrow{id} & H^n(F) \end{array}$$

et par effondrement, on a $h^n(F) = \tilde{E}_\infty^{0,n} = \tilde{E}_2^{0,n} = H^n(F)$ et $\tilde{h}^{0,n} = id$ et donc $h^{0,n} = i^*$. De même, le morphisme

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \text{pt} \\ i \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & B \\ f \downarrow & & \parallel \\ B & \xrightarrow{1} & B \end{array}$$

donne un morphisme $(\tilde{E}_r^{p,q}) \rightarrow (E_r^{p,q})$ et un carré

$$\begin{array}{ccc} H^n(B) & \xleftarrow{id} & H^n(B) \\ h^{n,0} \downarrow & & \downarrow \tilde{h}^{n,0} \\ H^n(E) & \xleftarrow{f^*} & H^n(B) \end{array}$$

et on a $\tilde{E}_2^{p,q} = H^p(B, H^q(\text{pt})) = \delta_{q,0} H^p(B)$, ce qui garantit l'effondrement de la suite $(\tilde{E}_r^{p,q})$ et donc $H^n(B) = \tilde{E}_2^{n,0} = \tilde{E}_\infty^{n,0} = H^n(B)$, d'où $\tilde{h}^{n,0} = id$ et $h^{n,0} = f^*$. \square

Remarque C.5. Ici aussi, on a

$$\forall r > \max(p, q + 1), \quad E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

C.3 Récapitulatif

On résume maintenant les résultats obtenus jusqu'à présent, sous la forme la plus concise et complète possible.

Fixons un groupe abélien M .

Théorème C.6. (*Suite homologique*)

Sur la catégorie des fibrations de Serre, il existe un foncteur spectral homologique de premier quadrant, à valeurs dans les groupes abéliens, aboutissant à l'homologie de l'espace total $H_\bullet(E, M)$ et dont le terme initial est

$$E_{p,q}^2(E \rightarrow B) = H_p(B, \underline{H}_q(F, M)).$$

De plus, si B est 1-connexe et F est 0-connexe, alors les morphismes induits en homologie i_ et f_* sont les morphismes de bord de la suite spectrale associée à la fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$.*

Théorème C.7. (*Suite cohomologique*)

Sur la catégorie des fibrations de Serre, il existe un foncteur spectral cohomologique de premier quadrant, à valeurs dans les groupes abéliens, aboutissant à la cohomologie de l'espace total $H^\bullet(E, M)$ et dont le terme initial est

$$E_2^{p,q}(E \rightarrow B) = H^p(B, \underline{H^q(F, M)}).$$

De plus, si B est 1-connexe et F est 0-connexe, alors les morphismes induits en cohomologie f^* et i^* sont les morphismes de bord de la suite spectrale associée à la fibration $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$.

C.4 Aperçu de la structure multiplicative sur la suite cohomologique

L'avantage de considérer la suite spectrale de cohomologie et le même que celui de considérer la cohomologie singulière : on dispose d'une structure multiplicative supplémentaire, donnée par le cup produit. Nous allons donner brièvement le cup produit sur un système local en nous inspirant de l'exposé de [36], section 9.4.

Si $\underline{A} = \{A_x, \tau_\gamma^A\} : \Pi(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ et $\underline{B} = \{B_x, \tau_\gamma^B\} : \Pi(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}$ sont deux systèmes locaux sur un espace X , on forme le système local $\underline{A} \otimes \underline{B}$ où $(\underline{A} \otimes \underline{B})_x := A_x \otimes_{\mathbb{Z}} B_x$ et $(x \xrightarrow{\gamma} y) \mapsto \tau_\gamma^A \otimes \tau_\gamma^B$. Alors, on peut définir un "cup produit" local

$$\begin{array}{ccc} C^p(X, \underline{A}) \otimes C^{p'}(X, \underline{B}) & \xrightarrow{\cup_l} & C^{p+p'}(X, \underline{A} \otimes \underline{B}) \\ \parallel & & \parallel \\ (\prod_{\sigma: \Delta^p \rightarrow X} A_{\sigma_0}) \otimes (\prod_{\tau: \Delta^{p'} \rightarrow X} B_{\tau_0}) & \longrightarrow & \prod_{\mu: \Delta^{p+p'} \rightarrow X} A_{\mu_0} \otimes B_{\mu_0} \end{array}$$

où, pour tout $\mu : \Delta^{p+p'} \rightarrow X$, on pose

$$(a_\sigma)_\sigma \times (b_\tau)_\tau \mapsto a_{\mu_{[e_0, \dots, e_p]}} \otimes (\tau_{\mu_{0,p}}^B)^{-1} b_{\mu_{[e_p, \dots, e_{p+p'}]}}.$$

Pour $f : E \rightarrow B$ une fibration de Serre et R un anneau commutatif, on a le cup produit usuel sur $H^\bullet(F_x) := H^\bullet(F_x, R)$ pour tout $x \in B$ et on peut définir

$$\begin{array}{ccc} E_1^{p,q} \otimes E_1^{p',q'} & \xlongequal{\quad} & C^p(B, \underline{H^q(F)}) \otimes C^{p'}(B, \underline{H^{q'}(F)}) \xrightarrow{\cup_l} \prod_{\mu} H^q(F_{\mu(0)}) \otimes H^{q'}(F_{\mu(0)}) \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow (-1)^{p'q} \times \cup_{\text{usuel}} \\ E_1^{p+p',q+q'} & \xlongequal{\quad} & C^{p+p'}(B, \underline{H^{q+q'}(F)}) \xlongequal{\quad} \prod_{\mu} H^{q+q'}(F_{\mu(0)}) \end{array}$$

De longs (et pénibles) calculs permettent de montrer que, sous cette construction, la différentielle d_1 est une "dérivation", au sens du théorème suivant. De plus, ce cup produit passe à la cohomologie et donne à la suite de Serre une structure multiplicative. Remarquons que d'après [73], 5.2.13, une fois le produit construit en deuxième page, le fait que d_1 soit une dérivation assure que ce produit se propage dans la suite de façon canonique. Il resterait à montrer que ce produit se comporte bien avec la limite et on obtient

Théorème C.8. (voir [19], Lemma 9.23 and Theorem 9.24)

La suite spectrale cohomologique d'une fibration de Serre $f : E \rightarrow B$, à coefficients dans un anneau commutatif R , admet une application naturelle de cup produit

$$E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \xrightarrow{\cup} E_r^{p+p',q+q'}$$

telle que

1. Pour tout $r \geq 2$, $E_r^{\bullet,\bullet}$ est un anneau bigradué,
2. $d_r : E_r \rightarrow E_r$ est une dérivation, i.e.

$$\forall (x, y) \in E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'}, \quad d_r(x \cup y) = d_r(x) \cup y + (-1)^{p+q} x \cup d_r(y),$$

3. $E_{r+1}^{p,q} \simeq H^\bullet(E_r, d_r)$ est un isomorphisme d'anneaux bigradués,
4. $E_2^{p,q} \simeq H^p(B, \underline{H^q(F)})$ est un isomorphisme d'anneaux bigradués,
5. La filtration de $H^\bullet(E, R)$ est multiplicative,
6. $E_\infty^{p,q} \simeq F^p H^{p+q}(E, R) / F^{p+1} H^{p+q}(E, R)$ est un isomorphisme d'anneaux bigradués.

C.5 Suites exactes de Gysin et de Wang

Terminons cette section en donnant le cas cohomologique de deux suites exactes longues particulières découlant de la suite de Serre. Ces suites apparaissent dans le cas où l'espace fibré est à fibre ou à base sphérique. Dans le premier cas, on parle de la *suite de Gysin* et dans le second, de la suite de Wang.

Proposition C.9. (Suite de Gysin)

Soit $\mathbb{S}^n \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ un espace fibré, avec $n > 0$. Alors, il existe un morphisme $\phi : H^*(E) \rightarrow H^{*-n}(B)$, dit de Gysin, s'insérant dans une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^p(E) \xrightarrow{\phi} H^{p-n}(B) \xrightarrow{d_{n+1}} H^{p+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(E) \xrightarrow{\phi} H^{p+1-n}(B) \longrightarrow \dots$$

En particulier, on a

$$H^p(E) = H^p(B), \quad \forall p < n.$$

Démonstration. Dans la suite de Serre, on a

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \underline{H^q(\mathbb{S}^n)}) = \begin{cases} H^p(B) & \text{si } q = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La seule différentielle non nulle est donc d_{n+1} et on a

$$E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \dots = E_n^{p,q} = E_{n+1}^{p,q} \quad \text{et} \quad E_{n+2}^{p,q} = E_{n+3}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \ker(d_{n+1} : E_{n+1}^{p,n} \rightarrow E_{n+1}^{p+n+1,0}) &= E_{n+2}^{p,n} \\ \text{coker}(d_{n+1} : E_{n+1}^{p-n-1,n} \rightarrow E_{n+1}^{p,0}) &= E_{n+2}^{p,0}, \end{aligned}$$

d'où une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E_{n+2}^{p,n} & \longrightarrow & E_{n+1}^{p,n} & \xrightarrow{d_{n+1}} & E_{n+1}^{p+n+1,0} & \longrightarrow & E_{n+2}^{p+n+1,0} & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{p,n} & \longrightarrow & E_2^{p,n} & \xrightarrow{d_{n+1}} & E_2^{p+n+1,0} & \longrightarrow & E_{\infty}^{p+n+1,0} & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{21}$$

Ensuite, on a par convergence

$$E_{\infty}^{p,q} \simeq F^p H^{p+q}(E) / F^{p+1} H^{p+q}(E)$$

et les seuls termes non nuls de E_{∞} sont $E_{\infty}^{p,0}$ et $E_{\infty}^{p,n}$, pour $p \geq 0$. On a alors

$$\begin{cases} E_{\infty}^{p,0} = F^p H^p(E) / F^{p+1} H^p(E) \\ E_{\infty}^{p-n,n} = F^{p-n} H^p(E) / F^{p-n+1} H^p(E) \end{cases}$$

donc la filtration de $H^p(E)$ est de la forme

$$H^p(E) = \dots = F^{p-n} H^p(E) \supseteq F^{p-n+1} H^p(E) = \dots = F^p H^p(E) \supseteq F^{p+1} H^p(E) = \dots = 0$$

et donc,

$$\begin{cases} E_{\infty}^{p,0} = F^p H^p(E) \\ E_{\infty}^{p-n,n} = H^p(E) / F^{p-n+1} H^p(E) \end{cases}$$

d'où une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E_{\infty}^{p,0} \longrightarrow H^p(E) \longrightarrow E_{\infty}^{p-n,n} \longrightarrow 0 \tag{22}$$

Donc, en recollant (21) et (22) et en tenant compte du fait que $E_2^{p,0} = E_2^{p,n} = H^p(B)$, on a le résultat. \square

En procédant de manière analogue, on obtient

Proposition C.10. (Suite de Wang) *Soit $F \xrightarrow{\iota} E \rightarrow \mathbb{S}^n$ un espace fibré, avec $n > 1$. Alors, il existe un morphisme $\psi : H^*(F) \rightarrow H^{*-n+1}(F)$, dit de Wang, s'insérant dans une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow H^q(F) \xrightarrow{\psi} H^{q-n+1}(F) \xrightarrow{d_n} H^{q+1}(E) \xrightarrow{\iota^*} H^{q+1}(F) \xrightarrow{\psi} H^{q-n+2}(F) \longrightarrow \dots$$

En particulier, on a

$$H^q(F) = H^q(E), \quad \forall q < n - 1.$$

Bien-sûr, on a des versions homologiques, pour lesquelles on pourra consulter [73], §5.3, Application 5.3.5 et Application 5.3.7 ou encore [43].

D La suite spectrale d'Eilenberg-Moore

D.1 Préliminaires : couples exacts, diagrammes en escalier et suites spectrales

Avant d'attaquer la construction de la suite d'Eilenberg-Moore, nous allons passer en revue la construction de couples exacts à partir de "diagrammes en escalier" et en dériver une suite spectrale et ce sera de cette façon qu'apparaîtra la suite d'Eilenberg-Moore. Notre exposé s'inspire très largement de celui concis de [40], section 1. Pour un exposé plus détaillé et général sur les couples exacts et les suites spectrales qui en découlent, on pourra consulter [73], section 5.9.

Bien qu'intéressé par la cohomologie, nous allons inspecter le cas homologique, qui se dualise parfaitement. Commençons avec un "diagramme en escalier" dans lequel les suites du type de celle surlignée en rouge (qui forment un escalier) sont supposées exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & (23) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p,q+1}^1 & \longrightarrow & E_{p,q+1}^1 & \longrightarrow & A_{p-1,q+1}^1 & \longrightarrow & E_{p-1,q+1}^1 & \longrightarrow & A_{p-2,q+1}^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+1,q}^1 & \longrightarrow & E_{p+1,q}^1 & \longrightarrow & A_{p,q}^1 & \longrightarrow & E_{p,q}^1 & \longrightarrow & A_{p-1,q}^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & A_{p+2,q-1}^1 & \longrightarrow & E_{p+2,q-1}^1 & \longrightarrow & A_{p+1,q-1}^1 & \longrightarrow & E_{p+1,q-1}^1 & \longrightarrow & A_{p,q-1}^1 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & &
 \end{array}$$

Posons $A = A^1 := \bigoplus_{p,q} A_{p,q}^1$ et $E = E^1 := \bigoplus_{p,q} E_{p,q}^1$. En regroupant les flèches, on obtient un triangle

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & A \\
 & \swarrow k & \searrow j \\
 & & E
 \end{array}$$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \ker i = \operatorname{im} k \\ \ker k = \operatorname{im} j \\ \ker j = \operatorname{im} i \end{array} \right.$$

Un tel triangle est appelé un *couple exact*. Définissons $d := jk$, de telle sorte que $d^2 = jkjk = 0$. On peut donc définir

$$E' := \ker d / \operatorname{im} d, \quad A' := i(A), \quad i' := i|_{A'}, \quad j'(ia) := [ja] \in E', \quad k'[e] := ke \in A'$$

où j' est bien définie car $dja = jkja = 0$ et si $ia = ib$, alors $a - b \in \ker i \operatorname{im} k \Rightarrow j(a - b) \in \operatorname{im} jk = \operatorname{im} d$. De plus, comme $jke = de = 0$, on a $ke \in A' = \ker j$ et si $e = de'$, alors

$ke = kde = kjke = 0$, donc k' est également bien définie. De plus, par calculs directs, on voit que le couple ainsi obtenu (appelé *couple dérivé*)

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{i'} & A' \\ & \swarrow k' & \searrow j' \\ & E' & \end{array}$$

est exact.

En itérant ce procédé, on obtient une suite spectrale (cf [73], section 5.9). Plus précisément, dans le cas d'un diagramme en escalier comme (1) ci-dessus, dans le couple dérivé, chaque $A_{p,q}^1$ est remplacé par un sous-groupe $A_{p,q}^2$: l'image de $A_{p-1,q+1}^1$ par i_1 . Les différentielles $d_1 = j_1 k_1$ avancent de deux unités vers la droite et on remplace $E_{p,q}^1$ par

$$E_{p,q}^2 := \ker d_1 / \operatorname{im} d_1 = \ker(E_{p,q}^1 \xrightarrow{d_1} E_{p-1,q}^1) / \operatorname{im}(E_{p+1,q}^1 \xrightarrow{d_1} E_{p,q}^1)$$

Les termes du couple dérivé s'organisent ainsi (les directions se voient en regardant la définition du couple dérivé) :

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots \longrightarrow & A_{p,q+1}^2 & \xrightarrow{E_{p,q+1}^2} & A_{p-1,q+1}^2 & \xrightarrow{E_{p-1,q+1}^2} & A_{p-2,q+1}^2 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & A_{p+1,q}^2 & \xrightarrow{E_{p+1,q}^2} & A_{p,q}^2 & \xrightarrow{E_{p,q}^2} & A_{p-1,q}^2 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & A_{p+2,q-1}^2 & \xrightarrow{E_{p+2,q-1}^2} & A_{p+1,q-1}^2 & \xrightarrow{E_{p+1,q-1}^2} & A_{p,q-1}^2 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

On répète ceci pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots \longrightarrow & A_{p,q+1}^3 & \xrightarrow{E_{p,q+1}^3} & A_{p-1,q+1}^3 & \xrightarrow{E_{p-1,q+1}^3} & A_{p-2,q+1}^3 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & A_{p+1,q}^3 & \xrightarrow{E_{p+1,q}^3} & A_{p,q}^3 & \xrightarrow{E_{p,q}^3} & A_{p-1,q}^3 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & A_{p+2,q-1}^3 & \xrightarrow{E_{p+2,q-1}^3} & A_{p+1,q-1}^3 & \xrightarrow{E_{p+1,q-1}^3} & A_{p,q-1}^3 & \cdots \\ & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

On fera une première supposition

(i) Presque toutes les applications verticales sur chaque A-colonne de (1) sont des isomorphismes.

Par exactitude, c'est équivalent à dire que presque tous les termes d'une E-colonne sont nuls.

Ainsi, sur chaque A-colonne, les groupes $A_{p,q}$ ont une valeur supérieure commune, notée $A_{-\infty,n}^1$ (où $n = p + q$ est le numéro de la colonne concernée) et une valeur inférieure commune $A_{\infty,n}^1$. D'après (i), comme chaque d_r monte de $(r - 1)$ lignes, toutes les d_r partant de et arrivant sur une E-colonne donnée sont nulles pour r assez grand. On notes $E_{p,q}^\infty$ ces valeurs stables. On fera l'une des deux hypothèses supplémentaires suivantes

$$(ii) \quad \forall n, A_{-\infty,n}^1 = 0.$$

$$(iii) \quad \forall n, A_{\infty,n}^1 = 0.$$

En regardant le $r^{\text{ème}}$ couple dérivé, $E_{p,q}^r$ se place dans une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} A_{p+r-2,q-r+2}^r & \xrightarrow{i} & A_{p+r-1,q-r+1}^r & \xrightarrow{j_r} & E_{p,q}^r & \xrightarrow{k_r} & A_{p-1,q}^r & \xrightarrow{i} & A_{p,q-1}^r & (24) \\ & & \uparrow k_r & & & & & & \downarrow j_r & \\ E_{p+r-1,q-r+2}^r & & & & & & & & E_{p-r+1,q+r-2}^r & \end{array}$$

En fixant p et q et en faisant $r \rightarrow +\infty$, par (i), les termes extrêmes sont nuls et en supposant (ii), les deux derniers termes en A sont nuls également et donc

$$\forall r \gg 0, E_{p,q}^r \simeq A_{p+r-1,q-r+1}^r / i(A_{p+r-2,q-r+2}^r) \simeq i^{r-1}(A_{p,q}^1) / i^r(A_{p-1,q+1}^1),$$

quotient de sous-groupes de $A_{p+r-1,q-r+1}^1 = A_{\infty,n}^1$. Ainsi, si on note $F_n^p := \text{im}(A_{p,q}^1 \rightarrow A_{\infty,n}^1)$, alors on a $E_{p,q}^\infty \simeq F_{p+q}^p / F_{p+q}^{p-1}$.

Par ailleurs, en supposant (iii), les deux premiers termes en A de la suite (2) sont nuls, donc $E_{p,q}^r = \ker(A_{p-1,q}^r \xrightarrow{i} A_{p,q-1}^r)$. Pour $r \gg 0$, les éléments de ces groupes proviennent de $A_{-\infty,n}^1$ par des itérées des applications verticales i , donc si on pose $F_p^{n-1} = \ker(A_{-\infty,n-1}^1 \rightarrow A_{p,n-1}^1)$, alors $E_{p,q}^\infty \simeq F_p^{p+q-1} / F_{p-1}^{p+q-1}$. On a donc prouvé le

Théorème D.1. *Posons*

$$\begin{cases} F_n^p := \text{im}(A_{p,q}^1 \rightarrow A_{\infty,n}^1), & n = p + q \\ F_p^{n-1}, p := \ker(A_{-\infty,n}^1 \rightarrow A_{p,q-1}^1), & n = p + q \end{cases}$$

Alors F_n^\bullet (resp. F_\bullet^{n-1}) est une filtration (croissante) de $A_{\infty,n}^1$ (resp. de $A_{-\infty,n-1}^1$). Via ces filtrations, on a les assertions suivantes :

1. Sous les hypothèses (i) et (ii), la suite spectrale $(E_{p,q}^r)$ converge vers $A_{\infty,\bullet}^1$.
2. Sous les hypothèses (i) et (iii), la suite spectrale $(E_{p,q}^r)$ converge vers $A_{-\infty,\bullet}^1$.

On peut dualiser ceci et regarder le cas de la cohomologie :
On commence avec un diagramme en escalier

$$\begin{array}{ccccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
\cdots & \longrightarrow & A_1^{p,q-1} & \longrightarrow & E_1^{p+1,q-1} & \longrightarrow & A_1^{p+1,q-1} & \longrightarrow & E_1^{p+2,q-1} & \longrightarrow & A_1^{p+2,q-1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & A_1^{p-1,q} & \longrightarrow & E_1^{p,q} & \longrightarrow & A_1^{p,q} & \longrightarrow & E_1^{p+1,q} & \longrightarrow & A_1^{p+1,q} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & A_1^{p-2,q+1} & \longrightarrow & E_1^{p-1,q+1} & \longrightarrow & A_1^{p-1,q+1} & \longrightarrow & E_1^{p,q+1} & \longrightarrow & A_1^{p,q+1} & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \\
& & \vdots & &
\end{array}$$

Si on suppose (i) et (iii) (cette dernière condition s'écrit ici $A_1^{-\infty,n} = 0$ pour tout n) et si l'on note $F_p^n := \ker(A_1^{\infty,n} \rightarrow A_1^{p,q})$ (avec $n = p + q$), alors F_\bullet^n est une filtration décroissante de $A_1^{\infty,n}$ et on a $E_\infty^{p,q} \simeq F_p^{p+q} / F_{p+1}^{p+q}$, d'où le résultat qui nous servira

Théorème D.2. *Sous les conditions (i) et (iii), on a*

$$E_r^{p,q} \implies A_1^{\infty,p+q}.$$

D.2 Construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore

On fixe \mathbb{k} un corps commutatif, sur lequel on calcule la cohomologie singulière, que l'on notera $H^*(-) := H^*(-, \mathbb{k})$. On se propose de prouver le résultat suivant :

Théorème D.3. (Eilenberg-Moore, voir [40], Theorem 3.2 ou [69], Theorem 3.5)
Soient $Y \rightarrow B$ une fibration de Serre et $f : X \rightarrow B$ une application continue. On suppose que B est 1-connexe et que les cohomologies de X , de Y et de B sont de dimension finie sur \mathbb{k} en tout degré. Alors, il existe une suite spectrale cohomologique convergente

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}_{p,q}^{H^*(B)}(H^*(X), H^*(Y)) \implies H^{p+q}(X \times_B Y).$$

Remarque D.4. 1. La graduation $\mathrm{Tor}_p = \bigoplus_q \mathrm{Tor}_{p,q}$ est un fait général : Si R est un anneau gradué et si A et B sont deux R -modules gradués, alors on peut choisir une résolution libre de A en R -modules gradués, avec différentielle préservant la graduation. La tensorisation par B nous donne un complexe gradué et son homologie $\mathrm{Tor}_n^R(A, B)$ est également graduée et les termes de cette graduation sont notés $\mathrm{Tor}_{n,p}^R(A, B)$.

2. Ce résultat n'est pas optimal. En effet, on peut montrer (cf [55], Theorem 7.1 et [69], Theorem 3.5) que l'hypothèse de dimension finie sur les cohomologies de X , Y et B est superflue.

Démonstration.

- Premièrement, au-lieu de considérer toutes les fonctions $f : X \rightarrow B$, on ne prend que les rétractions $r : X \rightarrow B$ où $B \subset X$. On peut le supposer car si $f : X \rightarrow B$ est quelconque, on pose $X_B := X \sqcup B$ et on définit $r : X_B \rightarrow B$ par $r(x) = f(x)$ et $r(b) = b$.
- Soit donc \mathcal{C}_B la catégorie dont les objets sont les rétractions $r : X \rightarrow B$ et dont les morphismes $(X \xrightarrow{r} B) \rightarrow (Y \xrightarrow{s} B)$ sont les $f : X \rightarrow Y$ telles que $sf = r$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow r & \swarrow s \\ & & B \end{array}$$

Autrement dit, \mathcal{C}_B est la sous-catégorie pleine de \mathfrak{Top}/B formée des rétraction. La catégorie \mathcal{C}_B possède des *quotients*. En effet, si (X, A) est une pair dans \mathcal{C}_B , on définit sur X la relation d'équivalence \sim engendrée par $r(a) \sim a$ pour tout $a \in A$ et on pose $X/A := X/\sim$. La rétraction de X induit une rétraction sur X/A , donc ceci est un quotient dans \mathcal{C}_B . Ensuite, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme dans \mathcal{C}_B , on a un cône. On prend le cylindre

$$M_f := (X \times I) \sqcup Y \Big/ (x, 1) \sim f(x),$$

puis,

$$\widetilde{M}_f := M_f \Big/ (b, t) \sim b,$$

et enfin

$$C_f^B := \widetilde{M}_f \Big/ (x, 0) \sim r(x).$$

Autrement dit,

$$C_f^B := (X \times I) \sqcup Y \Big/ ((x, 1) \sim f(x), (x, 0) \sim r(x), (b, t) \sim b),$$

et les rétractions de X et Y induisent une rétraction de C_f^B de telle sorte que $C_f^B \in \mathcal{C}_B$ et on l'appelle le *cône* de f . Ensuite, \mathcal{C}_B possède des *produits finis* : si on a $r_X : X \rightarrow B$ et $r_Y : Y \rightarrow B$ dans \mathcal{C}_B , on prend pour produit $r : X \times_B Y \rightarrow B$ défini par $r(x, y) := r_X(x) (= r_Y(y))$. Enfin, \mathcal{C}_B a des *smash produits*, définis par

$$X \wedge_B Y := X \times_B Y \Big/ ((x, b) \sim r_X(x), (b, y) \sim r_Y(y)).$$

Par définition, on a

$$X_B \wedge_B Y_B = (X \times_B Y)_B.$$

- Comme on a

$$H^*(X_B, B) \sim H^*(X),$$

on peut travailler avec la cohomologie relative à un espace base. On peut voir ceci comme une cohomologie réduite dans la catégorie \mathcal{C}_B . Si on a une pair (X, A) dans \mathcal{C}_B , avec $X/A \in \mathcal{C}_B$ et si A est un rétract par déformation d'un ouvert de X , on peut appliquer l'excision et comme on travaille sur un corps, la version duale du théorème 2.13 de [39] et les considérations qui y figurent en page 200 montrent que l'on a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(A, B) \longrightarrow H^n(X/A, B) \longrightarrow H^n(X, B) \longrightarrow H^n(A, B) \longrightarrow H^{n-1}(X/A, B) \longrightarrow \dots$$

De plus, si $Y \in \mathcal{C}_B$, on a par définition

$$X \wedge_B Y / A \wedge_B Y \simeq (X / A) \wedge Y$$

et donc, si A est un rétract par déformation d'un ouvert de X , alors on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(A \wedge_B Y, B) \longrightarrow H^n(X / A \wedge_B Y, B) \longrightarrow H^n(X \wedge_B Y, B) \longrightarrow H^n(A \wedge_B Y, B) \longrightarrow \cdots$$

• On va construire un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & x_1 & & X_2 & & \cdots \end{array} \quad (25)$$

tel que l'application de $H^*(-, B)$ donne une résolution de $H^*(X, B)$ par des $H^*(B)$ -modules libres. On appliquera ensuite $- \wedge_B Y$ au diagramme (3) puis $H^*(-, B)$ pour obtenir un diagramme en escalier, qui nous donnera notre suite spectrale.

Soit $K_0 := (X / B) \times B$, vu dans \mathcal{C}_B avec $B \simeq (B / B) \times B \subset (X / B) \times B$, muni de la rétraction $pr_2 : X / B \times B \rightarrow B$. Par le théorème de Künneth (les cohomologies sont de dimension finies, ce qui rend la formule de Künneth licite), on a

$$H^*(K_0) \simeq H^*(X / B) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(B) \simeq H^*(X, B) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(B)$$

et comme on a $K_0 \xrightarrow{pr} B$, l'action de $H^*(B)$ est donnée par $(x \otimes y)b = x \otimes yb$, donc $H^*(K_0)$ est un $H^*(B)$ -module à droite, libre. Soit $f : X \rightarrow K_0$ défini par $x \mapsto (x, r(x))$. C'est un morphisme dans \mathcal{C}_B . Comme on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} X / B & \xrightarrow{id} & X / B \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow pr_2 \\ & & K_0 / B \end{array}$$

on obtient que $f^* : H^*(K_0, B) \rightarrow H^*(X, B)$ est surjective. Posons $X_1 := C_f^B \in \mathcal{C}_B$. On a la propriété suivante, que l'on utilisera plus tard :

$$(H^i(X, B) = 0, \forall i < n) \Rightarrow (H^i(K_0, B) = 0, \forall i < n) \text{ et } H^i(X_1, B) = 0, \forall i < n + 1. \quad (26)$$

La première moitié est claire car $H^*(K_1, B) \simeq H^*(X, B) \otimes H^*(B)$. Pour la seconde moitié, on a $H^0(B) = \mathbb{k}$, donc $H^n(f)$ est un isomorphisme et comme on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H^n(X_1, B) \longrightarrow H^n(K_0, B) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(X, B) \longrightarrow 0$$

on obtient bien l'assertion (4).

On peut itérer cette construction et on obtient le diagramme voulu, qui répond à la question puisqu'on a une résolution libre (c'est une résolution car les suites exactes courtes se recollent) :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^*(K_2, B) & \longrightarrow & H^*(K_1, B) & \longrightarrow & H^*(K_0, B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & \cdots & & H^*(X_2, B) & & H^*(X_1, B) & & H^*(X, B) \\ & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Maintenant, on applique $-\wedge_B Y$ au diagramme (3). Si $f : X_p \rightarrow K_p$, alors $X_{p+1} = C_f^B$, d'où une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^n(X_{p+1} \wedge_B Y, B) \longrightarrow H^n(K_p \wedge_B Y, B) \longrightarrow H^n(X_p \wedge_B Y, B) \longrightarrow \cdots$$

et ce pour tout $p \geq 0$. Ces suites se regroupent dans un diagramme en escalier

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^n(K_p \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^n(X_p \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^n(K_{p-1} \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^n(X_{p-1} \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^{n+1}(K_{p+1} \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^{n+1}(X_{p+1} \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^{n+1}(K_p \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & H^{n+1}(X_p \wedge_B Y, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array} \quad (27)$$

et ceci nous donne une suite spectrale. Reste à calculer sa limite et sa deuxième page.

• Calculons la deuxième page. Si $X = Z \times B$ s'écrit comme un produit, alors on a $X \times_B Y = Z \times Y$, avec la seconde projection pour rétraction. Dans ce cas, on a donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} H^*(X \times_B Y) &\simeq H^*(Z \times Y) \simeq H^*(Z) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(Y) \simeq H^*(Z) \otimes_{\mathbb{k}} (H^*(B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y)) \\ &\simeq (H^*(Z) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(B)) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y) \simeq H^*(Z \times B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y) \simeq H^*(X) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y) \\ &\simeq (H^*(X, B) \oplus H^*(B)) \otimes_{H^*(B)} (H^*(Y, B) \oplus H^*(B)) \\ &\simeq (H^*(X, B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y, B)) \oplus H^*(X, B) \oplus H^*(Y, B) \oplus H^*(B). \end{aligned}$$

On en tire

$$H^*(X \wedge_B Y, B) \simeq H^*(X, B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y, B).$$

En particulier, avec $K_p = X_p / B \times B$, on obtient

$$H^*(K_p \wedge_B Y, B) \simeq H^*(K_p, B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y, B),$$

donc avec la construction de la section 0.1, on obtient la première page de la suite spectrale : $E_1^{p,\bullet} = H^*(K_p \wedge_B Y, B) = H^*(K_p, B) \otimes_{H^*(B)} H^*(Y, B)$, qui est donc de premier quadrant. Plus précisément, on a

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(K_p \wedge_B Y, B)$$

et la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q}$ est donnée en tensorisant par $id_{H^*(B)}$ la différentielle de la résolution $H^*(B)$ -libre de $H^*(X, B)$. On obtient donc bien, par définition de la graduation des $\text{Tor}_p^{H^*(B)}$,

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B)}(H^*(X, B), H^*(Y, B)),$$

et

$$E_2^{p,\bullet} = \bigoplus_{q \geq 0} E_2^{p,q} = \text{Tor}_p^{H^*(B)}(H^*(X, B), H^*(Y, B)).$$

• On va maintenant montrer que les hypothèses du Théorème D.2 sont satisfaites. On verra en cours d'investigation pourquoi les termes $E_r^{p,q}$, pour p et q fixés, se stabilisent pour r assez grand. En haut de la $q^{\text{ème}}$ A -colonne de (5), on a le groupe $H^q(X \wedge_B Y, B)$, qui est filtré par les

$$F_p^{p+q} := \ker(H^q(X \wedge_B Y, B) \rightarrow H^{p+q}(X_p \wedge_B Y, B)).$$

Pour appliquer le Théorème D.2, il nous faut d'abord montrer que la $q^{\text{ème}}$ A -colonne s'annule si on descend assez ; i.e.

$$\forall q, \exists p \gg 0 ; H^{p+q}(X_p \wedge_B Y, B) = 0.$$

C'est le fait que $\pi_1(B) = 1$ qui va nous sauver.

Rappelons d'abord que

$$H^*(K_p, B) \simeq H^*(X_p, B) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(B)$$

et que

$$H^*(X_{p+1}, B) = \ker(H^*(X_p, B) \otimes_{\mathbb{k}} H^*(B) \xrightarrow{\mu} H^*(X_p, B)) = \ker(H^*(K_p, B) \xrightarrow{\mu} H^*(X_p, B)).$$

Donc, si $\tilde{H}^i(B) = 0$ pour $i = 0, 1$, alors on a

$$(\forall i < n, H^i(X_p, B) = 0) \Rightarrow (\forall i < n + 2, H^i(X_{p+1}, B) = 0).$$

En effet, on a $\ker \mu = \bigoplus_n \ker \mu_n$ où $\mu_n : \bigoplus_{p+q=n} H^p(X_p, B) \otimes H^q(B) \rightarrow H^n(X_p, B)$ et si $i < n$, alors $(H^*(X_p, B) \otimes H^*(B))^i = 0$ donc $H^i(X_{p+1}, B) = 0$; et si $i = n + 1, n + 2$, alors $(H^*(X_p, B) \otimes H^*(B))^i = H^i(X_p, B)$ et $\mu_i = id$ donc $H^i(X_{p+1}, B) = \ker id = 0$.

Comme $H^i(X_0, B) = H^i(X, B) = 0$ pour $i < 0$, par récurrence, on obtient

$$\forall i < 2p, H^i(X_p, B) = 0 = H^i(K_p, B).$$

En particulier, on a $E_1^{p,q} = 0$ si $p > q$, donc les termes $E_r^{p,q}$ se stabilisent pour p, q fixés, quand $r \rightarrow +\infty$. De plus, la seconde égalité ci-dessus montre que la condition (i) du Théorème D.2 est remplie.

Avant de prouver l'assertion concernant les A -colonnes, rappelons l'énoncé du cas relatif de la suite spectrale de Serre (voir [40], Chapter I, p.17 ou [19], Theorem 9.33) :

Théorème D.5. (*Serre relative en cohomologie*)

Si $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ et une fibration de Serre, si $B' \subset B$ et si $E' = \pi^{-1}(B')$, on a une fibration de Serre $F \hookrightarrow E' \rightarrow B'$. On suppose que B est 1-connexe. Alors il existe une suite spectrale convergente

$${}^S E_2^{p,q} = H^p(B, B', H^q(F)) \implies H^{p+q}(E, E').$$

Dans notre situation, on a un produit fibré

$$\begin{array}{ccc} X_p \wedge_B Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_p & \xrightarrow{r} & B \end{array}$$

avec r une rétraction ; et on considère alors le produit fibré (restriction)

$$\begin{array}{ccc} B \times_B Y & \longrightarrow & X_p \times_B Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\text{incl.}} & X_p \end{array}$$

auquel on peut appliquer, puisque B est 1-connexe, la suite spectrale relative de Serre pour obtenir

$${}^S E_2^{i,0} = H^i(X_p, B) = 0, \forall i < 2p$$

et ceci entraîne que

$$H^i(X_p \times_B Y, B \times_B Y) = 0, \quad \forall i < 2p.$$

Dans la situation du théorème, on prend Y de la forme $Y_B = Y \sqcup B$ pour une fibration de Serre $Y \rightarrow B$. Alors, $X_p \wedge_B Y_B$ est $X_p \times_B Y$ muni du sous-espace $B \times_B Y$ écrasé sur B , donc

$$\forall i < 2p, \quad H^i(X_p \wedge_B Y, B) = H^i(X_p \times_B Y, B \times_B Y) = 0,$$

donc la condition (iii) du Théorème D.2 est remplie également. On peut donc l'appliquer et la suite spectrale converge vers $H^*(X \wedge_B Y, B)$.

• Enfin, dans la situation de l'énoncé du théorème, on considère X_B et Y_B et, par les considérations précédentes, on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B)}(H^*(X_B, B), H^*(Y_B, B)) \implies H^{p+q}(X_B \wedge_B Y_B, B).$$

Or, on a $H^*(X_B, B) \simeq H^*(X)$ et de même pour Y , donc la deuxième page se réécrit

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B)}(H^*(X), H^*(Y)).$$

Finalement, on a $H^*(X_B \wedge_B Y_B, B) = H^*((X \times_B Y)_B, B) \simeq H^*(X \times_B Y)$ et la limite est bien celle annoncée, ce qui termine la démonstration. \square

En appliquant ce résultat au cas où $X = \text{pt}$, on obtient le

Corollaire D.6. *Soit $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ une fibration de Serre à base simplement connexe et telle que les cohomologies de E et F soient de dimension finie sur \mathbb{k} en tout degré. Alors, il existe une suite spectrale convergente*

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{p,q}^{H^*(B)}(\mathbb{k}, H^*(E)) \implies H^{p+q}(F).$$

Remarque D.7. On note que l'association du couple exact ci-dessus au contexte du théorème est naturelle et contravariante (on travaille avec de la cohomologie) et, la suite spectrale d'un couple exact est naturelle ; en somme, la suite d'Eilenberg-Moore est naturelle : il s'agit donc d'un foncteur spectral cohomologique. Ceci nous servira dans le résultat suivant.

Corollaire D.8. *Soit $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration de Serre. On note $\rho := H^*(\iota) : H^*(E) \rightarrow H^*(F)$ la restriction et $\gamma : H^*(E) \rightarrow \mathbb{k} \otimes_{H^*(B)} H^*(E)$ l'épimorphisme canonique. Dans la suite d'Eilenberg-Moore $(E_r^{p,q})_{r \geq 2}$ associée à la fibration, on définit*

$$\epsilon : H^*(F) \rightarrow E_\infty^{0,*} \hookrightarrow E_2^{0,*}$$

le morphisme d'arête ("edge homomorphism"). Alors, il existe un automorphisme linéaire σ de $H^*(E)$ tel que l'on ait

$$\epsilon \circ \rho = \gamma \circ \sigma.$$

En particulier, si la suite d'Eilenberg-Moore de la fibration s'effondre en page 2, alors ϵ est un isomorphisme et donc la restriction $\rho : H^*(E) \rightarrow H^*(F)$ est surjective.

Démonstration. On considère le morphisme de fibrations de Serre

$$\begin{array}{ccc} E & \xlongequal{\quad} & E \\ p \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & \text{pt} \end{array}$$

En notant $(\tilde{E}_r^{p,q})$ la suite d'Eilenberg-Moore de la seconde fibration, on obtient par naturalité un morphisme $(\tilde{E}_r^{p,q}) \rightarrow (E_r^{p,q})$. Ce morphisme induit un carré commutatif au niveau des morphismes d'arêtes

$$\begin{array}{ccc} E_2^{0,n} & \xleftarrow{\epsilon} & H^n(F) \\ \uparrow & & \uparrow \rho \\ \tilde{E}_2^{0,n} & \xleftarrow{\text{edge}} & H^n(E) \end{array}$$

Maintenant, on a

$$\tilde{E}_2^{0,n} = \text{Tor}_{0,n}^{H^*(\text{pt})}(\mathbb{k}, H^*(E)) = \text{Tor}_{0,n}^{\mathbb{k}}(\mathbb{k}, H^*(E)) = (\mathbb{k} \otimes_{\mathbb{k}} H^*(E))^n = H^n(E)$$

et $(\tilde{E}_r^{p,q})$ converge vers $H^*(E)$. Ensuite, on a

$$E_2^{0,n} = \text{Tor}_{0,n}^{H^*(B)}(\mathbb{k}, H^*(E)) = (\mathbb{k} \otimes_{H^*(B)} H^*(E))^n$$

et $(E_r^{p,q})$ converge vers $H^*(F)$. De plus, par définition de notre morphisme de fibrations, le morphisme induit $\tilde{E}_2^{0,n} \rightarrow E_2^{0,n}$ est γ et, puisque la suite $(\tilde{E}_r^{p,q})$ s'effondre en seconde page (seule la 0^{ème} ligne de la deuxième page est non nulle), le morphisme "edge" de cette suite est un automorphisme de $H^*(E)$, que l'on note σ et le carré ci-dessus peut alors se réécrire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k} \otimes_{H^*(B)} H^*(E) & \xleftarrow{\epsilon} & H^*(F) \\ \gamma \uparrow & & \uparrow \rho \\ H^*(E) & \xleftarrow{\sigma} & H^*(E) \end{array}$$

d'où le résultat. □

E Cohomologie du faisceau constant et cohomologie singulière

E.1 Préliminaires : résultats techniques sur l'héréditaire paracompacité

Nous allons donner ici quelques résultats liminaires de topologie générale, concernant la paracompacité ; pour lesquels on pourra consulter [65], chapitre 1, section 1.4. Rappelons tout d'abord qu'un *préfaisceau abélien* \mathcal{F} sur un espace topologique X est par définition un foncteur contravariant défini sur la catégorie des ouverts de X et à valeurs dans celle des groupes abéliens. De plus, un préfaisceau \mathcal{F} est un *faisceau* s'il vérifie l'axiome de recollement avec unicité, écrit succinctement :

$$\forall U = \bigcup_{i \in I} U_i, \forall s_i \in \mathcal{F}(U_i) ; s_{i|U_i \cap U_j} = s_{j|U_i \cap U_j}, \exists! s \in \mathcal{F}(U) ; s|_{U_i} = s_i, \forall i \in I.$$

On peut néanmoins considérer un préfaisceau \mathcal{F} vérifiant l'axiome de recollement sans exiger l'unicité de la section $s \in \mathcal{F}(U)$ prolongeant les s_i . La terminologie n'est pas standard, mais dans ce papier, on définit :

Définition E.1. Soit X un espace topologique et soit $\mathcal{F} \in \mathfrak{PAb}_X$ un préfaisceau abélien sur X . On dira que \mathcal{F} est un *préfaisceau épique* s'il vérifie l'axiome de recollement sans exiger l'unicité. S'il ne vérifie que l'unicité (i.e. s'il existe une section prolongeant les s_i , alors elle est unique), on dira que c'est un *préfaisceau monique*. Ainsi, un faisceau est un préfaisceau qui est à la fois monique et épique.

Passons maintenant à quelques définitions de topologie sur la paracompacité. Nous énoncerons et démontrerons deux lemmes ensuite, qui nous seront utiles dans la section suivante. Nous fixons, une fois pour toutes, un espace topologique X .

Définition E.2. (voir [65], Appendix, 2.1 et [66], pp. 1)

1. Un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ est dit *localement fini* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x n'intersectant qu'un nombre fini des U_i .
2. Un *raffinement* d'un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de X est un recouvrement ouvert $(V_j)_j$ tel que

$$\forall j, \exists i ; V_j \subset U_i.$$

3. Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , un *rétrécissement* de (U_i) est un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ tel que

$$\forall i \in I, \overline{V_i} \subset U_i.$$

4. X est dit *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un raffinement localement fini.
5. X est dit *héréditairement paracompact* si chacun de ses ouverts est paracompact.

Remarque E.3. • Un espace héréditairement paracompact doit donc être séparé. Ceci est une obstruction majeure à l'application du résultat principal de ce papier au cas des variétés algébriques. Cependant, Sella ([66]) à trouvé une extension de ce résultat, dans le cadre duquel les variétés algébriques rentrent. Nous verrons ceci plus tard.

- Par des arguments standards de topologie générale, tout espace paracompact est normal; et tout recouvrement ouvert d'un espace normal admet un rétrécissement.

Lemme E.4. (voir [65], Lemma 1.13)

Soient $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini d'un espace U et (V_i) un rétrécissement de (U_i) . Alors, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert M_x de x tel que l'ensemble $I_x := \{i \in I ; M_x \cap V_i \neq \emptyset\}$ soit fini et, pour tout $i \in I_x$, on ait $x \in \overline{V}_i$ et $M_x \subset U_i$.

Démonstration. Comme (U_i) est localement fini, (V_i) l'est aussi et l'existence de M_x tel que I_x soit fini est claire. On remplace alors M_x par

$$M_x \cap \bigcap_{i \in I_x; x \notin \overline{V}_i} U \setminus \overline{V}_i \neq \emptyset$$

pour avoir $|I_x| < \infty$ et, par construction, $x \in \overline{V}_i$ pour tout $i \in I_x$. Comme (V_i) est un rétrécissement, on a $\overline{V}_i \subset U_i$ et, pour tout $i \in I_x$, on a $x \in \overline{V}_i \subset U_i$, donc $x \in \bigcap_{i \in I_x} U_i$ et on peut encore remplacer M_x par

$$M_x \cap \bigcap_{i \in I_x} U_i \neq \emptyset,$$

pour obtenir le résultat. □

Lemme E.5. (voir [65], Proposition 1.14)

Soient X un espace héréditairement paracompact et \mathcal{F} un préfaisceau épique abélien sur X . Si on note $\mathcal{F}^+ \in \mathfrak{Ab}_X$ le faisceau associé à \mathcal{F} , alors, pour tout ouvert U de X , le morphisme canonique $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ est surjectif.

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathcal{F}^+(U)$. Par définition, $\sigma : U \rightarrow \text{Et}(\mathcal{F})$ est une section continue de l'espace étalé $\text{Et}(\mathcal{F})$ sur \mathcal{F} . Donc, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert N_x de x dans U et une section $s^x \in \mathcal{F}(N_x)$ tels que s^x soit envoyée sur $\sigma(x)$ dans $(\mathcal{F}^+)_x = \mathcal{F}_x$. La section $(s^x)^+ \in \mathcal{F}^+(N_x)$ et σ coïncident en x et par définition de la fibre, il existe un voisinage ouvert $N'_x \subset N_x$ tel que $(s^x)^+_{|N'_x} = \sigma_{|N'_x}$. Ainsi, $(N'_x)_x$ est un recouvrement ouvert de U tel qu'il existe $s^x \in \mathcal{F}(N'_x)$ vérifiant

$$\forall a \in N'_x, (s^x)_a = \sigma(a).$$

U étant paracompact, on peut trouver un raffinement localement fini $(U_i)_{i \in I}$ de (N'_x) et des $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que, pour tout $x \in U_i$, on ait $(s_i)_x = \sigma(x)$ dans \mathcal{F}_x . Toujours par paracompacité de U , on peut choisir un rétrécissement (V_i) de (U_i) .

Pour $x \in U$ fixé, on choisit un voisinage ouvert M_x donné par le Lemme E.4. On peut alors supposer que l'on a

$$\forall i, j \in I_x, s_i|_{M_x} = s_j|_{M_x}.$$

En effet, on peut effectuer une récurrence descendante sur $|I_x| < \infty$. S'il existe $i, j \in I_x$ tels que $s_i|_{M_x} \neq s_j|_{M_x}$, comme on a $M_x \subset U_i$ et $M_x \subset U_j$, on a $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et

$(s_i)_x = \sigma(x) = (s_j)_x$, donc il existe un ouvert $W \subset U_i \cap U_j$ contenant x et tel que $s_i|_W = s_j|_W$. On remplace alors M_x par $M_x \cap W \neq \emptyset$ et I_x par $I_x \setminus \{j\}$. En itérant le processus, on en tire que les restrictions des s_i à M_x sont toutes égales ; et notons $s^{(x)} \in \mathcal{F}(M_x)$ cette valeur commune.

Alors, $(M_x)_x$ est un recouvrement ouvert de U et, si $z \in M_x \cap M_y \neq \emptyset$, il existe $i \in I$ tel que $z \in V_i$ et alors $i \in I_x \cap I_y$. Du coup, on a

$$s_{|M_x \cap M_y}^{(x)} = (s_{i|M_x})_{|M_x \cap M_y} = s_{i|M_x \cap M_y} = (s_{i|M_y})_{|M_x \cap M_y} = s_{|M_x \cap M_y}^{(y)},$$

donc, par l'axiome de recollement (sans unicité), on peut trouver $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{M_x} = s^{(x)}$, pour tout $x \in U$. Ainsi, pour $x \in U$, on a $(s^+)_x = ((s|_{M_x})^+)_x = \sigma(x)$ et, comme $\sigma, s^+ \in \mathcal{F}^+(U)$, ceci entraîne $\sigma = s^+$ et la surjectivité annoncée. \square

Remarque E.6. • Insistons sur le fait que, pour pouvoir utiliser le Lemme 1 (et donc pour avoir la conclusion du Lemme 2), l'existence de rétrécissements et de raffinement localement finis est nécessaire. Ainsi, on a besoin de l'héréditaire paracompacité, et donc de la séparation. Cette difficulté réapparaîtra plus tard.

- On peut montrer (cf. [65], Proposition 1.11 et 1.12), que dans le cas général, \mathcal{F} est un préfaisceau monique (resp. un faisceau) si et seulement si, pour tout ouvert U de X , l'application canonique $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{+} \mathcal{F}^+(U)$ est injective (resp. un isomorphisme).

E.2 Comparaison des cohomologies : cas des espaces héréditairement paracompacts

Pour ce qui va suivre, on se réfère à [16], section 2.

Fixons les notations. On se donne un espace topologique X , un groupe abélien A et on note $H_{\text{sing}}^\bullet(X, A)$ la cohomologie singulière de X à coefficients dans A et $\underline{A} \in \mathfrak{Ab}_X$ le faisceau constant sur X , associé au préfaisceau $U \mapsto A$. On note également $H^\bullet(X, \underline{A}) = R^\bullet \Gamma(X, -)(\underline{A})$ la cohomologie de X à coefficients dans \underline{A} . On a le

Théorème E.7. *Soit X un espace topologique héréditairement paracompact et localement contractile. Alors, on a des isomorphismes fonctoriels de groupes abéliens*

$$\forall n \geq 0, H_{\text{sing}}^n(X, \mathbb{Z}) \simeq H^n(X, \underline{\mathbb{Z}}).$$

Démonstration. Pour un ouvert U de X et $q \geq 0$, soit

$$C^q(U) = C^q(U, \mathbb{Z}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_q(U), \mathbb{Z}),$$

où $C_q(U) := \mathbb{Z} \langle \sigma : \Delta^q \rightarrow U \rangle$ est le complexe des chaînes singulière à valeurs dans U . Notons aussi C^q le préfaisceau abélien $U \mapsto C^q(U)$, ainsi que \mathcal{C}^q le faisceau associé.

- 1) On a une résolution flasque dans \mathfrak{Ab}_X :

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{C}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}^n \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{C}^{n+1} \longrightarrow \dots \quad (28)$$

En effet, les différentielles singulières $\partial_U^n : C^n(U) \rightarrow C^{n+1}(U)$ sont compatibles aux restrictions

$$\begin{array}{ccc} C^n(U) & \xrightarrow{\text{res.}} & C^{n+1}(U) \\ \varphi & \mapsto & (\sigma \mapsto \varphi(\iota \circ \sigma)) \end{array} \quad \text{où } V \xrightarrow{\iota} U \text{ sont des ouverts de } X,$$

et donnent des morphismes $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$; et on a de plus un morphisme canonique $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow C^0$. Le complexe (1) est une résolution. En effet, si $U \subset X$ est contractile, on a une suite exacte

$$C^{n-1}(U) \xrightarrow{\partial_U^{n-1}} C^n(U) \xrightarrow{\partial_U^n} C^{n+1}(U)$$

et, comme X est localement contractile, pour tout $x \in X$, on peut utiliser une base de voisinages contractiles de x pour calculer la suite des fibres en x , donc la suite

$$C_x^{n-1} \xrightarrow{\delta_x^{n-1}} C_x^n \xrightarrow{\delta_x^n} C_x^{n+1}$$

est exacte, donc aussi

$$C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}.$$

Ensuite, on a $\ker(C^0 \rightarrow C^1) = \mathbb{Z}$. En effet, si $\varphi \in C^0(U, \mathbb{Z})$ est un 0-cocycle sur U contractile, on a, pour $x, y \in U$ et $\alpha : \Delta^1 \rightarrow U$ un chemin de x à y , on a

$$0 = \partial_u^0 \varphi(\alpha) = \varphi(d_1 \alpha) = \varphi(y) - \varphi(x),$$

donc φ est constante sur U . Ainsi, si $\varphi \in C^0(U)$ est un 0-cocycle sur un ouvert U quelconque de X , alors φ est localement constante sur U et provient donc d'un élément de $\mathbb{Z}(U)$. Ainsi, par locale contractibilité, pour tout $x \in X$, on a $\ker \delta_x^0 = \text{im } \varepsilon_x$, donc $\ker \delta^0 = \text{im } \varepsilon$ et donc (1) est bien exacte et $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} C^\bullet$ est une résolution de \mathbb{Z} . Maintenant, pour tout $q \geq 0$, le préfaisceau C^q est épique. Expliquons rapidement l'argument. Si on a un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_i$ d'un ouvert U et si on a des $\varphi_i \in C^q(U_i)$ qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$, on doit trouver $\varphi \in C^q(U)$ prolongeant les φ_i . Il suffit donc de définir φ sur les simplexes singuliers $\sigma : \Delta^q \rightarrow U$. Soit donc $\sigma : \Delta^q \rightarrow U$ et notons $C_q^{\mathcal{U}}(U)$ le groupe abélien libre de base les simplexes singuliers à valeurs dans un des U_i . Par le théorème des \mathcal{U} -chaînes (cf. [39], Proposition 2.21), il existe un morphisme de complexes $\rho : C_*(U) \rightarrow C_*^{\mathcal{U}}(U)$ tel que, si $\iota : C_*^{\mathcal{U}}(U) \rightarrow C_*(U)$ est l'injection canonique, alors on a $\rho \iota = \text{id}$ et $\iota \rho$ est homotope à l'identité. Si $\rho(\sigma) = \sum_j a_j \tau_j \in C_q^{\mathcal{U}}(U)$ avec τ_j à valeurs dans U_{i_j} , alors on pose $\varphi(\sigma) := \sum_j a_j \varphi_{i_j}(\tau_j)$. Ceci est bien défini car si τ_j est à valeurs dans $U_{i_j} \cap U_{k_j}$, alors on a $\varphi_{i_j}(\tau_j) = \varphi_{k_j}(\tau_j)$ et, si $\sigma \in C_q(U_i)$, alors $\rho(\sigma) = \sigma$ et on a $\varphi(\sigma) = \varphi_i(\sigma)$.

Ainsi, on peut appliquer le Lemme E.5, puisque X est héréditairement paracompact, est obtenir, pour tout ouvert U , que le morphisme canonique

$$C^q(U) \xrightarrow{\pm} C^q(U)$$

est surjectif. Ensuite, si $q \geq 0$ et si on a des ouverts $V \xrightarrow{\iota} U$, alors la restriction $C^q(U) \rightarrow C^q(V)$ est surjective. En effet, si $\psi \in C^q(V)$ et si $\sigma : \Delta^q \rightarrow U$, on pose

$$\varphi(\sigma) := \begin{cases} \psi(\tilde{\sigma}) & \text{si } \exists \tilde{\sigma} : \Delta^q \rightarrow V ; \iota \circ \tilde{\sigma} = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\varphi \in C^q(U)$ et $\varphi|_V = \psi$. Ainsi, C^q est flasque et le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^q(U) & \longrightarrow & C^q(U) \\ \text{res.} \downarrow & & \downarrow \text{res.} \\ C^q(V) & \longrightarrow & C^q(V) \end{array}$$

montre que C^q est flasque. Finalement, $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} C^\bullet$ est une résolution flasque du faisceau constant et, par le théorème de De Rham formel, on peut l'utiliser pour calculer les foncteurs dérivés $H^\bullet(X, \mathbb{Z}) = R^\bullet\Gamma(X, \mathbb{Z})$.

2) Il existe des isomorphismes de préfaisceaux

$$C^q / C_0^q \xrightarrow{\simeq} C^q,$$

où, pour tout ouvert V de X , on définit

$$C^q(V)_0 = \{\varphi \in C^q(V); \exists \mathcal{V} = (V_i)_{i \in I} \text{ recouvrement ouvert de } V \text{ tel que } \varphi|_{C^q(V_i)} = 0, \forall i \in I\}.$$

En effet, on prend le morphisme canonique

$$C^q(V) \xrightarrow{+} C^q(V)$$

qui est compatibles aux restrictions et surjectif, en vertu du Lemme E.5. Pour $\varphi \in C^q(V)$, on a

$$\varphi^+ = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \varphi_x = (\varphi^+)_x = 0 \Leftrightarrow \exists V = \bigcup_i V_i; \varphi|_{C^q(V_i)} = 0, \forall i \Leftrightarrow \varphi \in C^q(V)_0.$$

Ainsi, $\ker(+)$ est C_0^q et on obtient bien les isomorphismes voulus.

3) Les complexes $C^\bullet(X)$ et $C^\bullet(X) / C^\bullet(X)_0$ sont quasi-isomorphes.

En effet, si $\mathcal{U} = (U_i)$ est un recouvrement ouvert de X , l'injection canonique $j_{\mathcal{U}} : C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_{\bullet}(X)$ possède un inverse homotopique $h_{\mathcal{U}} : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathcal{U}}(X)$ tel que $h_{\mathcal{U}}j_{\mathcal{U}} = id$. Donc, en notant $\pi_{\mathcal{U}} := j_{\mathcal{U}}^* : C^\bullet(X) \rightarrow C_{\mathcal{U}}^\bullet(X)$ le dual de $j_{\mathcal{U}}$ alors on a que $\pi_{\mathcal{U}}$ est une équivalence d'homotopie vérifiant $\pi_{\mathcal{U}}h_{\mathcal{U}}^* = id$, donc $\pi_{\mathcal{U}}$ est surjective. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \ker \pi_{\mathcal{U}} \longrightarrow C^\bullet(X) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{U}}} C_{\mathcal{U}}^\bullet(X) \longrightarrow 0$$

montre que $\ker \pi_{\mathcal{U}}$ est acyclique; et ce quel que soit le recouvrement ouvert \mathcal{U} de X . Maintenant, on a

$$C^\bullet(X)_0 = \bigcup_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)} \ker \pi_{\mathcal{U}} = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)} \ker \pi_{\mathcal{U}}$$

et comme le foncteur \varinjlim est exact, on a

$$H^\bullet(C^\bullet(X)_0) = \varinjlim H^\bullet(\ker \pi_{\mathcal{U}}) = 0$$

et, par la suite exacte longue associée à

$$0 \longrightarrow C^\bullet(X)_0 \longrightarrow C^\bullet(X) \longrightarrow C^\bullet(X) / C^\bullet(X)_0 \longrightarrow 0$$

donne le résultat voulu. On pourra consulter [72], chapitre V, section 5.32 pour cet argument.

- 4) On recolle les morceaux, en utilisant le théorème de De Rham formel : pour tout $q \geq 0$, on a

$$H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} H^q(C^\bullet(X)) \stackrel{3)}{\simeq} H^q\left(C^\bullet(X) / C^\bullet(X)_0\right) \stackrel{2)}{\simeq} H^q(C^\bullet(X)) \stackrel{1)}{\underset{\text{dR}}{\simeq}} H^q(X, \mathbb{Z}).$$

□

On remarque qu'en remplaçant \mathbb{Z} par un groupe abélien quelconque A et en gardant la même démonstration, on obtient la généralisation légère suivante :

Corollaire E.8. *Soient X un espace localement contractile et héréditairement paracompact et A un groupe abélien. Alors on a un isomorphisme naturel de groupes abéliens gradués*

$$H_{\text{sing}}^\bullet(X, A) \simeq H^\bullet(X, A).$$

E.3 Généralisation : théorème de Ramanan-Sella

L'hypothèse de locale contractibilité semble raisonnable, puisque le rang de $H^0(X, \mathbb{Z})$ est le nombre de composantes connexes par arcs de X , alors que celui de $H^0(X, \mathbb{Z}) = \Gamma(X, \mathbb{Z})$ est le nombre de composantes connexes de X . Les composantes 0-connexes et les composantes connexes doivent donc coïncider, ce qui est (non trivialement) le cas dans les espaces localement connexes par arcs, en particulier dans les espaces localement contractiles.

Par contre, l'héréditaire paracompacité peut sembler superflue... et c'est le cas ! Pour notre preuve cependant, cette hypothèse est cruciale car autrement, le Lemme E.5 tombe en défaut. Dans son article [66], Sella donne le contre-exemple suivant :

Exemple E.9. (voir [66], Exemple 0.3)

Posons $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de topologie donnée par la base d'ouverts

$$U_1 := \{1, 2, 3, 4\}, U_2 := \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3\}.$$

X est localement contractile car 3 est dans tous les ouverts de X , mais X n'est pas séparé. Maintenant, soient

$$f_1 \in C^1(U_1) ; f_1(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\Delta^1) \subset \{2, 3\} \text{ ou } \sigma(\Delta^1) \subset \{3, 4\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_2 \in C^1(U_2) ; f_2(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\Delta^1) \subset \{2, 3\} \text{ ou } \{3, 4\} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, f_1 et f_2 ont les mêmes germes en tout point de $U_1 \cap U_2 = \{2, 3, 4\}$, donc f_1 et f_2 donnent un élément de $C^1(X)$, mais ne se recollent pas en un $f \in C^1(X)$.

Cependant, les cohomologies singulière et du faisceau constant coïncident encore sur un espace dit "semi-localement contractile" :

Définition E.10. (cf. [66])

Un espace X est *semi-localement contractile* si tout ouvert U de X admet un recouvrement ouvert $U = \bigcup_i W_i$ tel que pour tout i , $W_i \subset U$ soit contractile dans U (i.e. l'injection $W_i \hookrightarrow U$ est homotope à une application constante).

On a alors le résultat de Sella suivant, qui généralise (grandement) le Théorème démontré ci-dessus :

Théorème E.11. (Ramanan-Sella, [66], pp. 2)

Si X est un espace topologique semi-localement contractile et si A est un groupe abélien, alors on a des isomorphismes naturels en X :

$$\forall n \geq 0, H^n(X, A) \simeq H^n(X, \underline{A}).$$

La preuve fait treize pages... Expliquons-en rapidement le principe. Il s'agit d'utiliser un argument du type de celui de Ramanan, mais en choisissant une autre résolution flasque, plus subtile que celle utilisée ici.

On prouve tout d'abord le lemme suivant :

Lemme E.12. (cf. [66], Lemma 0.1)

Soient X un espace semi-localement contractile et \mathcal{F}^* un complexe de faisceaux abéliens sur X tel que, pour tout ouvert U de X , le complexe $\mathcal{F}^*(U)$ est limite inductive de surjections $\mathcal{F}_\alpha^*(U) \rightarrow \mathcal{F}_\beta^*(U)$, pour $\alpha \leq \beta$ dans un certain ensemble filtrant D , muni de quasi-isomorphismes surjectifs $\pi_{U,\alpha} : C^*(U, A) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha^*(U)$ pour tout $\alpha \in D$ qui commute à la limite inductive. Alors, \mathcal{F}^* constitue une résolution flasque de \underline{A} et le morphisme limite $C^*(X, A) \rightarrow \mathcal{F}^*(X)$ est un quasi-isomorphisme, induisant l'isomorphisme désiré $H^*(X, A) \simeq H^*(X, \underline{A})$.

Il s'agit donc d'appliquer ce lemme. On introduit la notion de "nidification" :

Définition E.13. Une *nidification* η sur X est la donnée, pour toute suite finie (éventuellement vide) de X , d'un ouvert de X , vérifiant

- i) $\eta(\emptyset) = X$,
- ii) Pour tout $n \geq 1$ et toute suite x_1, \dots, x_n telle que $x_1 \in \eta(x_2, \dots, x_n)$, l'ouvert $\eta(x_1, \dots, x_n)$ est un voisinage ouvert de s_1 dans X ,
- iii) Pour toute application croissante $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, on a $\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) \subset \eta(x_{f(1)}, x_{f(2)}, \dots, x_{f(m)})$.

Remarquons qu'une conséquence de la condition *iii*) et que

$$\eta(x_1, \dots, x_n) \subset \eta(x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \eta(x_1, \dots, x_n) \subset \eta(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ensuite, étant donné un simplexe $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$, soit $b(\sigma)$ l'image du barycentre de Δ^n dans X .

Si l'on se donne $n \geq 0$ et une nidification η sur X , soit $C_n^\eta(X)$ le groupe abélien libre de base les simplexes $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ tels que, pour tout chaîne de faces $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_m \subset \sigma$, la face σ_1 est contenue dans $\eta(b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_m))$. Posons aussi $C_n^\eta(X, A) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n^\eta(X), A)$, ainsi que

$$C^n(X, A) := \varinjlim_{\eta} C_n^\eta(X, A),$$

où on ordonne les nidifications par raffinement.

On vérifie que si $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ est dans $C_n^\eta(X)$, alors $d\sigma \in C_{n-1}^\eta(X)$, donc $C_*^\eta(X)$ est un complexe, de telle sorte que $C_\eta^*(X)$ soit aussi un complexe. En passant à la limite, on obtient que $C^*(X)$ est également un complexe.

Soit donc X semi-localement contractile. On cherche à appliquer le lemme 3 au complexe de préfaisceaux $\mathcal{C}^*(-, A)$ sur X . Pour tout ouvert U , le complexe $\mathcal{C}^*(U, A)$ est par définition une limite inductive des complexes $C_\eta^*(U, A)$, qui sont munis de surjections canoniques $\pi_U : C^*(U, A) \rightarrow C_\eta^*(U, A)$.

La suite de la preuve consiste à justifier que les préfaisceaux $\mathcal{C}^*(-, A)$ sont en fait des faisceaux. Ensuite, Sella utilise un argument de type chaînes \mathcal{U} -petites (mais encore plus technique et évolué) pour montrer que, pour tout espace U et toute nidification η sur U , l'inclusion $C_*^\eta(U) \hookrightarrow C_*(U)$ est une équivalence d'homotopie, de telle sorte que le dual $\pi_U : C^*(U, A) \twoheadrightarrow C_\eta^*(U, A)$ est aussi une équivalence d'homotopie; et les conditions du lemme 3 sont alors remplies et le résultat est acquis.

Références

- [1] Anna Abczynski, *On the classification of cohomology Bott manifolds*, PhD Thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2013.
- [2] Alejandro Adem, *Lectures on the cohomology of finite groups*, Contemporary Mathematics, No. 436, pp. 371-334, 2007.
- [3] Donald Barnes, *Spectral sequences constructors in algebra and topology*, Memoirs of the AMS, Vol. 53, No. 317, 1985.
- [4] J. H. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, *Schubert cells and cohomology of the spaces G/P* , Russian Math. Surveys, 28 :3, 1-26, 1973.
- [5] Armand Borel, *LINEAR ALGEBRAIC GROUPS*, Second Edition, Springer-Verlag, 1991.
- [6] Armand Borel, *SEMINAR ON TRANSFORMATION GROUPS*, Annals of Mathematical Studies, No. 46, Princeton University Press, 1960.
- [7] Nicolas Bourbaki, *GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE*, Chapitres 4, 5 et 6, Paris : Hermann, 1968.
- [8] Michel Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*, Lecture Notes, Institut Fourier de Grenoble, 2008.
- [9] Michel Brion, *Poincaré duality and equivariant (co)homology*, Michigan Math. Journal, Vol. 48, 2000.
- [10] Theodor Bröckner & Tammo tom Dieck, *REPRESENTATIONS OF COMPACT LIE GROUPS*, Springer-Verlag, 1985.
- [11] Robert L. Bryant, *Metrics with exceptional holonomy*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 126, No. 3, pp.525-576, November 1987.
- [12] Daniel Bump, *LIE GROUPS*, Second Edition, Springer-Verlag, 2013.
- [13] Henri Cartan & Samuel Eilenberg, *HOMOLOGICAL ALGEBRA*, Princeton University Press, 1956.
- [14] Neil Chriss & Viktor Ginzburg, *REPRESENTATION THEORY AND COMPLEX GEOMETRY*, Birkhäuser, 1997.
- [15] J. Daniel Christensen, Enxin Wu, *Smooth classifying spaces*, Lecture Notes, 2017.
- [16] Daniel Cibotaru, *Sheaf cohomology*, Department of Mathematics, University of Notre-Dame, 2005.
- [17] Ralph L. Cohen, *The topology of fiber bundles*, Lecture Notes, Stanford University, 1998.
- [18] Ana Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Springer lecture notes in Mathematics, 1964, revised edition 2006.
- [19] James F. Davis & Paul Kirk, *LECTURE NOTES IN ALGEBRAIC TOPOLOGY*, AMS, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 35.
- [20] Michel Demazure, *Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl*, Inventiones Math., Vol. 21, pp. 287-301, 1973.

- [21] Satya Deo, Tej Bahadur Singh & Ram Anugrah Shukla, *On an extension of localization theorem and generalized Conner conjecture*, Translations of the AMS, Vol. 269, No. 2, 1982.
- [22] Tammo tom Dieck, ALGEBRAIC TOPOLOGY, EMS, 2008.
- [23] Tammo tom Dieck, TRANSFORMATION GROUPS, Walter de Gruyter, 1987.
- [24] Albrecht Dold, LECTURES IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, Springer-Verlag, Reprint of the 1972 edition, 1995.
- [25] Albrecht Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Annals of Math., pp. 223-255, Vol. 78, No. 2, sept. 1963.
- [26] Régine & Adrien Douady, ALGÈBRE ET THÉORIES GALOISIENNES, Cassini, 2005.
- [27] Andreas Dress, *Zur Spectralsequenz von Faserungen*, Inventiones math. 3, 172-178 (1967).
- [28] Johannes Jisse Duistermaat & Johan A. C. Kolk, LIE GROUPS, Universitext, Springer-Verlag, 2000.
- [29] Yves Félix & Daniel Tanré, TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE, Dunod, 2010.
- [30] Yves Félix, John Oprea & Daniel Tanré, ALGEBRAIC MODELS IN GEOMETRY, Oxford University Press, 2008.
- [31] Chi-Kwong Fok, *Cohomology and K-theory of compact Lie groups*, National Taiwan University, 2010.
- [32] Matthias Franz, *Symmetric products of equivariantly formal spaces*, Dept. of Math., Western University, 2017.
- [33] Matthias Franz & Volker Puppe, *Exact cohomology sequences with integral coefficients for torus actions*, Dept. of Math., Western University, 2006.
- [34] William Fulton, YOUNG TABLEAUX. WITH APPLICATIONS TO REPRESENTATION THEORY AND GEOMETRY, Cambridge University Press, 1997.
- [35] William Fulton & Joe Harris, REPRESENTATION THEORY : A FIRST COURSE, Springer-Verlag, 1991.
- [36] Doreen Galatius, *Notes on Spectral Sequences*, manuscript in "Homotopy Theory", 2015.
- [37] Mark Goresky, Robert Kottwitz & Robert MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem*, Invent. Math., Vol. 131, pp. 25-83, Springer-Verlag, 1998.
- [38] Howard Hiller, GEOMETRY OF COXETER GROUPS, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [39] Allen Hatcher, ALGEBRAIC TOPOLOGY, Cambridge University Press, 2002.
- [40] Allen Hatcher, *Spectral sequences in algebraic topology*, Chapter V of "Algebraic Topology", Cornell University, 2004. Available at <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>
- [41] P. J. Hilton & S. Wylie, HOMOLOGY THEORY : AN INTRODUCTION TO ALGEBRAIC TOPOLOGY, Cambridge University Press, 1965.

- [42] Per Holm & Jon Reed, *Structure theory of manifolds*, Seminar Notes, Part 1, 1971.
- [43] Maximilien Holmberg-Péroux, *The Serre Spectral Sequence*, Bachelor Semester Project, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2012-2013.
- [44] Wu Yi Hsiang, COHOMOLOGY THEORY OF TOPOLOGICAL TRANSFORMATION GROUPS, Springer-Verlag, 1975.
- [45] James E. Humphreys, INTRODUCTION TO LIE ALGEBRAS AND REPRESENTATION THEORY, Springer-Verlag, Third printing, 1972.
- [46] Dale Husemoller, FIBER BUNDLES, third edition, Springer-Verlag, 1994.
- [47] Jens Carsten Jantzen, *Moment graphs and representations*, Notes, Institut Fourier de Grenoble.
- [48] Daniel Juteau & Geordie Williamson, *Kumar's criterion modulo p* , Duke Math. J. 163, no. 14 (2014), 2617-2638, 2012, arXiv : 1201.5341v1.
- [49] Shizuo Kaji, *Equivariant Schubert calculus of Coxeter Groups*, Proceedings of The International Conference "Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications" dedicated to the 120th anniversary of Boris Delone, Proc. Stekelov. Inst. Math, vol 275, 239–250, 2011.
- [50] Shizuo Kaji, *Schubert calculus, seen from torus equivariant topology*, Proceedings of KAIST Toric Topology Workshop 2010, Trends in Mathematics - New Series, Volume 12, no.1, 71–89, 2010.
- [51] Shizuo Kaji, *Three presentations of torus equivariant cohomology of flag manifolds*, Proceedings of International Mathematics Conference in honour of the 70th Birthday of Professor S. A. Ileri, 2015, arXiv : 1504.01091v2.
- [52] Shintarô Kuroki, *Introduction to GKM theory*, Trends in Mathematics, New series, Vol. 11 No. 2, pp. 113-129, 2009.
- [53] Serge Lang, INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS, Springer-Verlag, 2002.
- [54] Martina Lanini & Tina Kanstrup, *Equivariant cohomology*, Summer school of european network in representation theory, Institut d'études scientifiques de Cargèse, 2014.
- [55] John McCleary, A USER'S GUIDE TO SPECTRAL SEQUENCES, Cambridge University Press, Second edition, 2001.
- [56] John Milnor, *Construction of universal bundles I & II*, Annals of Math, Vol. 63, No. 2 & 3, pp. 272-284 & 430-436, 1956.
- [57] John W. Milnor & James D. Stasheff, CHARACTERISTIC CLASSES, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.
- [58] Mamoru Mimura & Hirosi Toda, TOPOLOGY OF LIE GROUPS, I & II, AMS, Translations of mathematical monographs, Vol. 91, 1991.
- [59] Stephen A. Mitchell, *Notes on principal bundles and classifying spaces*, Lecture Notes, University of Notre-Dame, 2001.
- [60] Arkadij L. Onishchik & Ernest B. Vinberg, LIE GROUPS AND ALGEBRAIC GROUPS, Springer-Verlag, 1990.

- [61] Ali Arslan Özkurt & Mehmet Onat, *The localization theorem for finite-dimensional compact group actions*, Turkish Journal of Mathematics, 2017.
- [62] Leonardo Patimo, *Hodge theoretic aspects of Soergel bimodules and representation theory*, PhD Thesis, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2017.
- [63] Daniel Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring I*, Annals of Mathematics, Vol. 94, No. 3, pp. 546-572, 1971.
- [64] Sébastien Racanière, *Lecture on equivariant cohomology*, Lecture Notes, London Imperial College, 2004.
- [65] Sundararaman Ramanan, GLOBAL CALCULUS, Graduate studies in Mathematics, Vol. 65, AMS, 2005.
- [66] Yehonathan Sella, *Comparison of sheaf cohomology and singular cohomology*, UCLA College, Dept. of Math., preprint (arXiv :1602.06674v3), 2016.
- [67] Jean-Pierre Serre, COMPLEX SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS, Springer, Reprint of the 1987 edition, 2001.
- [68] Jean-Pierre Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Thèse de Doctorat, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 54, No. 3, (Nov. 1951), pp. 425-505.
- [69] Larry Smith, *Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence*, AMS Journal, 1966.
- [70] Patrice Tauvel & Rupert W. T. Yu, LIE ALGEBRAS AND ALGEBRAIC GROUPS, Springer, 2005.
- [71] Loring W. Tu, *What is equivariant cohomology ?*, Notices of the AMS, 2011.
- [72] Frank Warner, FOUNDATIONS OF DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND LIE GROUPS, GTM No. 94, Springer-Verlag, 1983.
- [73] Charles A. Weibel, AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Cambridge University Press, 1994.
- [74] Unknown, *Spectral Sequences*
Semantics Scholar,
<https://pdfs.semanticscholar.org/31f8/3e110736aac7ad1e73436449fcf5435adef7.pdf>.