

Invitation au calcul de Schubert

Arthur Garnier

17 octobre 2018

Table des matières

0.1	Introduction	3
0.2	Premier exemple : l'espace projectif \mathbb{P}^3	5
1	Le problème des quatre droites	6
1.1	Justification heuristique : introduction de la grassmannienne \mathcal{G} des droites projectives de \mathbb{P}^3	6
1.2	Justification cohomologique : cycles de Schubert et classes de Chern	8
1.3	Justification utilisant la transversalité et le "Prinzip der Erhaltung der Anzahl"	11
1.4	L'espace \mathcal{PS}	14
2	Formule de coïncidence et applications	16
2.1	La formule et sa justification cohomologique	16
2.2	Premier exemple : le nombre de bitangentes d'une courbe plane lisse	19
2.3	Second exemple : le nombre de quadritangentes d'une surface lisse	20
	References	23

0.1 Introduction

On se propose de donner ici une initiation à la géométrie énumérative et au calcul de Schubert. L'idée est de dénombrer les solutions à un problème géométrique donné sous forme de condition que doivent satisfaire certains objets géométriques. Le *calcul de Schubert*, introduit par le mathématicien Hermann Schubert, en 1869, dans son livre "Kalkül der abzählenden Geometrie". Sa méthode consiste à distinguer les éléments de base de l'espace dans lequel on travaille (par exemple, les points, droites et plans de l'espace projectif complexe), et en représentant les conditions qu'ils sont censés vérifier par des symboles et en effectuant des calculs sur ces symboles. Par exemple, si l'on prend deux conditions x et y , l'intersection de ces conditions est donnée par $x \cdot y$ et leur union par $x + y$. Les conditions sur les éléments de bases données par les autres éléments de bases (par exemple les droites passant par un point donné) donnent un certain nombre de formules sur ces conditions que l'on peut déterminer à l'aide de quelques raisonnements géométriques de base et c'est de ces formules dont on se sert pour résoudre des problèmes énumératifs énoncés sur les éléments de l'espace ambiant ; espace que l'on appelle *espace des configurations*.

Il s'agit d'exprimer les conditions géométriques en question à partir des conditions de base. Pour ce faire, on peut éventuellement avoir recours à des situations plus ou moins dégénérées qui peuvent fournir un traitement géométrique plus simple, quitte à prendre en compte des multiplicités. Par exemple, si l'on souhaite calculer combien il y a de tangentes à une conique plane passant par un point donné P et si l'on prend la conique dégénérée en deux droites sécantes en Q , on voit que la seule solution est la droite reliant P et Q et qu'elle doit être comptée comme solution double. Par contre, si l'on prend la conique dégénérée en une droite double, toutes les droites passant par P peuvent être considérées comme tangentes à la conique et on ne peut rien conclure.

Schubert justifie de procédé via le *Principe de conservation du nombre* (*Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, voir [9], §4, page 12). Celui-ci énonce que le nombre de solutions d'un problème énumératif est conservé lorsque l'on fait varier les paramètres du problème, pourvu que l'on tienne compte des multiplicités et que ce nombre de solutions reste fini. Pour appuyer son propos, Schubert se base sur l'analogie algébrique de ce principe : pourvu que l'on tienne compte des multiplicités et que l'équation polynomiale ne devienne pas triviale, le nombre de ces racines ne change pas lorsque l'on fait varier ses coefficients.

La force de l'approche de Schubert se trouve dans le calcul symbolique qu'il utilise. Il est sous-entendu que lorsque l'on calcul un produit $x \cdot y$, l'ensemble des objets satisfaisant ces conditions sont supposés être en position générale. Par exemple, dans l'espace projectif \mathbb{P}^3 , si p est la condition que les points doivent être contenus dans un plan et si p_g est la condition que ces points doivent être sur une droite g , alors on a $p \cdot p = p_g$. Ceci suppose que le plan doit être générique, autrement on aurait $p \cdot p = p$. On voit ici qu'il va être quelque peu difficile de rendre ceci rigoureux...

Le lecteur aura noté que tout ceci manque de rigueur mathématique. Le problème consistant à rendre rigoureux le calcul de Schubert est le sujet du quinzième problème de Hilbert ; partiellement résolu par exemple par la théorie de l'intersection (voir [4] par exemple) et la majorité des résultats obtenus par Schubert ont pu être confirmés. Le fait d'imposer aux objets d'être en position générale nous donne un indice : ceci fait penser aux intersections transverses en géométrie algébrique (ou différentielle, mais nous préférons la première ici) : si deux sous-variétés s'intersectent transversalement, alors le produit de leurs classes duales en cohomologie (singulière) est la classe duale de leur intersection. On peut donc utiliser ceci pour effectuer les calculs dont il est question ici. En fait, il s'agit d'exprimer les conditions de

base sous forme de classes duales de sous-variétés et de travailler dans l'anneau de cohomologie de l'espace des configurations. Pour identifier les classes duales de ces sous-variétés, on a recours aux fibrés vectoriels sur l'espace des configurations, puis au calcul de leurs classes de Chern par exemple. C'est la méthode que nous emploierons ici.

Nous nous sommes très largement inspirés de l'exposé de [8] et avons repris ses exemples et ses figures, tout ceci dans l'esprit du livre de Schubert. Nous avons cependant cherché à justifier rigoureusement quelques formules de base à l'aide de la cohomologie et des classes de Chern, mais la plupart des calculs ici effectués sont fait seulement à la manière de Schubert, sans plus de justification. Nous calculerons par exemple combien l'on peut trouver de bitangentes à une courbe plane lisse, ou de quadritangentes à une surface lisse, calculs que nous déduiront de la *formule de coïncidence* (ou *Coinzidenzformel* en allemand); formule dont nous donneront une idée de la preuve. Mais avant cela, nous allons nous pencher sur le *problème des quatre droites* que nous allons aborder de façon cohomologique, puis en utilisant le Principe de conservation du nombre de Schubert.

Les espaces dans lesquels nous travaillerons seront l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^3$, la grassmannienne \mathcal{G} des droites projectives de l'espace projectif et l'espace \mathcal{PS} des couples de points et droites projectives, le point étant supposé appartenir à la droite. Pour effectuer des calculs sur les cohomologies de ces espaces, nous supposerons le lecteur familier avec la géométrie algébrique projective de base, les fibrés vectoriels et leurs classes caractéristiques. Remarquons que l'on pourrait aussi bien faire tous ces calculs de façon purement algébrique et en termes de cycles modulo équivalence rationnelle, i.e. on pourrait travailler avec l'anneau de Chow des variétés projectives dont il est question.

Nous tenons enfin à remercier vivement Messieurs David Chataur et Daniel Juteau pour nous avoir fait découvrir cette belle et singulière branche de la géométrie algébrique.

0.2 Premier exemple : l'espace projectif \mathbb{P}^3

Notons $\mathbb{P}^3 := \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ l'espace projectif complexe, que l'on considère comme une variété projective complexe. Les conditions de bases qui peuvent être imposées aux points de \mathbb{P}^3 sont les suivants :

Notation	Condition	Dimension
p	le point est dans un plan donné	2
p_g	le point est dans une droite donné	1
P	le point lui-même est donné	0

On a aisément les formules suivantes

$$p^2 = p_g, \quad p^3 = pp_g, \quad pp_g = P, \quad p^3 = P.$$

À titre d'exemple, l'interprétation géométrique de la première formule est la suivante : soient $e_1, e_2 \subset \mathbb{P}^3$ deux plans et

$$\Omega_{e_i} := \{P \in \mathbb{P}^3 ; P \in e_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Alors, p^2 dénote les points dans $\Omega_{e_1} \cap \Omega_{e_2}$, pour e_1 et e_2 en "position générale", c'est-à-dire que quand ils s'intersectent en une droite g ; c'est l'ensemble des points qui se trouvent sur une droite donnée et cette condition a été dénotée par p_g .

Interprétons cette formule en termes cohomologiques. On a

$$H^*(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[x] / (x^4).$$

Notons $t \in H^2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ la classe duale du cycle constitué par les points d'un plan de \mathbb{P}^3 . Alors, $t^2 \in H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ est la classe duale du cycle constitué des points d'une droite et $t^3 \in H^6(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ est la classe duale du 0-cycle constitué d'un seul point. Enfin, si l'on choisit un drapeau $P \in g \subset e$, notons Ω_p , Ω_g et Ω_e les ensembles correspondants (en fait, ce sont des sous-variétés algébriques de \mathbb{P}^3) et alors, la suite d'inclusion

$$\Omega_p \hookrightarrow \Omega_g \hookrightarrow \Omega_e \hookrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Remarquons que si l'on note \mathbb{P}^3 le dual de \mathbb{P}^3 , i.e. l'espace des plans de \mathbb{P}^3 , on a

Notation	Condition	Dimension
e	le plan contient un point donné	2
e_g	le plan contient une droite donnée	1
E	le plan lui-même est donné	0

et on a les formules

$$e^2 = e_g, \quad e^3 = ee_g, \quad ee_g = E, \quad e^3 = E.$$

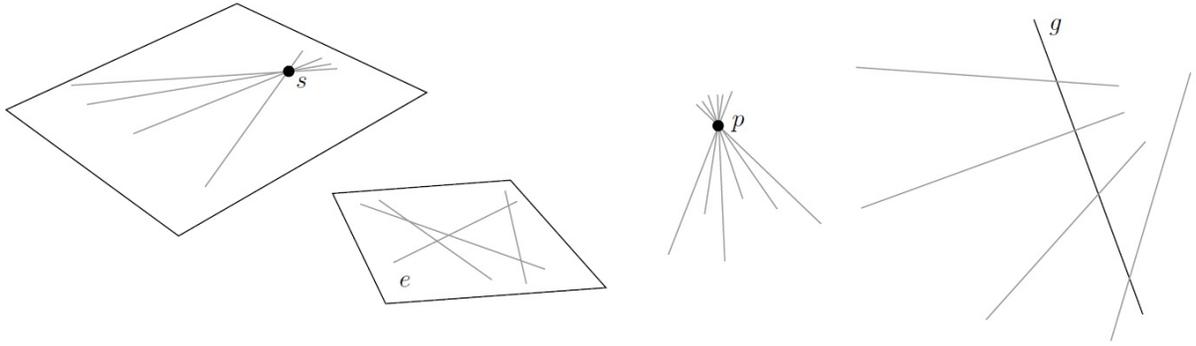


FIGURE 1 – Les cycles Ω_s , Ω_e , Ω_p et Ω_g .

Première partie

Le problème des quatre droites

Dans cette première partie, nous allons étudier le problème suivant :

Combien de droites intersectent quatre droites données ?

Nous allons voir qu'en général, la réponse est 2. Nous commencerons par justifier ceci à la manière du calcul symbolique de Schubert, puis nous emploierons des méthodes cohomologiques et enfin, nous utiliserons le "Principe de conservation du nombre", énoncé par Schubert. Seule la méthode cohomologique sera rigoureuse. Nous terminerons cette partie en introduisant l'espace \mathcal{PS} des points sur des droites de \mathbb{P}^3 (l'appellation \mathcal{PS} provient de l'allemand "Punkt und Strahl").

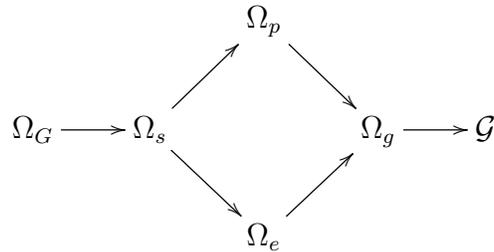
1.1 Justification heuristique : introduction de la grassmannienne \mathcal{G} des droites projectives de \mathbb{P}^3

Considérons la variété de Grassmann $G(2, 4)$ des plans de \mathbb{C}^4 , que l'on voit ici comme la grassmannienne $\mathcal{G} := G(1, 3)$ des droites projectives de l'espace projectif \mathbb{P}^3 . On a ici les conditions élémentaires suivantes :

Notation	Condition	Dimension
g	la droite coupe une droite donnée	3
g_e	la droite est contenue dans un plan donné	2
g_p	la droite contient un point donné	2
g_s	la droite appartient à un pinceau donné	1
G	la droite elle-même est donnée	0

Choisissons un drapeau $P \in g \subset e \subset \mathbb{P}^3$ et dénotons par $\Omega_g, \Omega_e, \Omega_p, \Omega_s, \Omega_G = \{G\}$ les ensembles des droites satisfaisant les conditions respectives g, g_e, g_p, g_s, G . Ce sont les *cellules*

de Schubert (nous verrons en section 1.2 une justification à cette terminologie) et on a le diagramme d'inclusions



En fait, ce sont des sous-variétés de \mathcal{G} . Nous verrons pourquoi \mathcal{G} est une variété projective lisse.

Nous allons maintenant calculer tous les produits possibles entre les éléments de base ci-dessus. Par exemple, pour déterminer g^2 en terme de conditions de base, on suppose que les deux droites données g et g' s'intersectent en un point P et en prenant e le plan engendré par g et g' , on a

$$\Omega_g \cap \Omega_{g'} = \Omega_p \cup \Omega_e.$$

Et de ceci, Schubert déduit via le *principe de conservation du nombre*, que puisque les droites g et g' ne sont pas en position générale,

$$g^2 = g_e + g_p. \quad (1)$$

Nous justifierons cette formule de deux manières. La premier consistera en un calcul de cohomologie utilisant les classes de Chern. La seconde en montrant que les sous-variétés Ω_g et $\Omega_{g'}$ s'intersectent de façon *transverse*, sauf en le lieu Ω_s des droites de e passant par P , qui est de dimension inférieure. Ceci justifie le procédé de Schubert : en dépis du fait que la situation est dégénérée en raison du fait que g et g' sont dans le même plan, l'intersection $\Omega_g \cap \Omega_{g'}$ a la bonne dimension (c'est 2) et il n'y a pas de multiplicité à prendre en compte. On vérifie immédiatement les formules suivantes

$$gg_p = g_s, \quad (2)$$

$$gg_e = g_s, \quad (3)$$

$$gg_s = G, \quad (4)$$

$$g_p g_e = 0. \quad (5)$$

En multipliant (1) par g et en utilisant (2) et (3) on obtient

$$g^3 = gg_p + gg_e, \quad (6)$$

$$g^3 = 2g_s. \quad (7)$$

En multipliant à nouveau par g , il vient finalement, en utilisant (7) et (4),

$$g^4 = 2gg_s = 2G. \quad (8)$$

Cette dernière équation $g^4 = 2G$ nous apprend qu'il existe deux droites coupant quatre droites données en position générale. C'est cette formule que nous allons justifier plus rigoureusement dans les deux section suivantes.

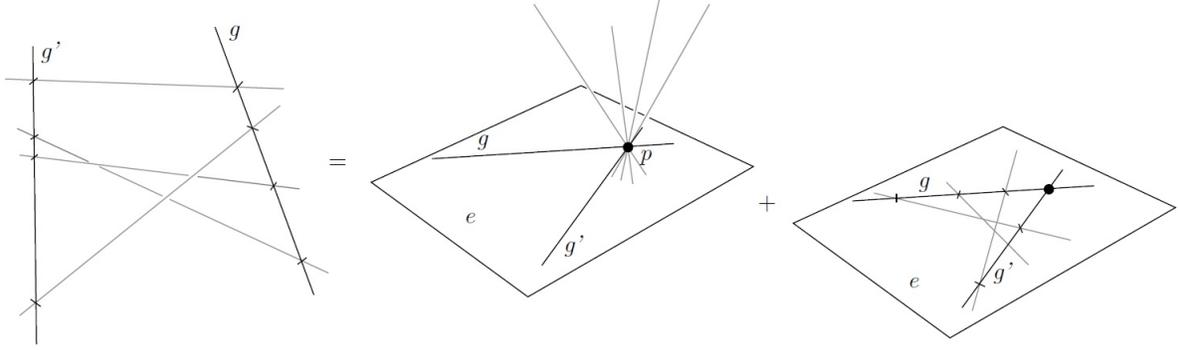


FIGURE 2 – Visualisation de la formule $g^2 = g_e + g_p$

1.2 Justification cohomologique : cycles de Schubert et classes de Chern

Considérons $\mathcal{G} = G(1,3)$ comme l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de \mathbb{C}^4 . On pose

$$E := \{(\ell, x) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^4 ; x \in \ell\}$$

ainsi que la projection $\pi := \text{pr}_1 : E \rightarrow \mathcal{G}$. Le fibré associé $\eta = (E \xrightarrow{\pi} \mathcal{G})$ est le *fibré tautologique*. On note également $\varepsilon^n := (\mathcal{G} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{G})$ le fibré trivial de rang n sur \mathcal{G} . On regarde ici les *classes de Chern* (voir [7]) $c_i := c_i(\eta) \in H^{2i}(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ de η , pour $i = 1, 2$. La classe de Chern totale $c(\eta) = 1 + c_1(\eta) + c_2(\eta)$ admet un inverse formel $s(\eta)$, appelé *classe de Segre totale* ; ses composantes $s_i := s_i(\eta)$ sont les *classes de Segre*. Ici, la variété complexe \mathcal{G} est de dimension 4, donc c'est une variété différentielle réelle de dimension 8 et la cohomologie de De Rham de \mathcal{G} vérifie $H_{\text{dR}}^j(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = 0$ pour $j > 8$. Par le théorème de De Rham formel, la cohomologie de De Rham de \mathcal{G} est isomorphe à la cohomologie du faisceau constant \mathbb{R} , elle-même isomorphe à la cohomologie singulière de \mathcal{G} à coefficients réels, et donc on a

$$\forall j > 8, H^j(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) = 0,$$

d'où $s_i = 0$ si $i > 4$. Dans $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$, on a donc la relation

$$(1 + c_1 + c_2)(1 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4) = 1$$

ce qui donne

$$s_1 = -c_1, \quad s_2 = c_1^2 - c_2, \quad s_3 = 2c_1c_2 - c_1^3, \quad s_4 = c_1^4 - 3c_1^2c_2 + c_2^2.$$

Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$, on pose

$$y_1 = -x_1, \quad y_2 = x_1^2 - x_2, \quad y_3 = 2x_1x_2 - x_1^3, \quad y_4 = x_1^4 - 3x_1^2x_2 + x_2^2$$

et on considère l'idéal (y_3, y_4) l'idéal engendré par y_3 et y_4 . D'après la proposition page 69 de [10], on a que le morphisme $x_i \mapsto c_i$ de $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ dans $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ donne un isomorphisme d'anneaux

$$H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[x_1, x_2] / (y_3, y_4) = \frac{\mathbb{Z}[c_1, c_2]}{(2c_1c_2 - c_1^3, c_1^4 - 3c_1^2c_2 + c_2^2)}.$$

De plus, comme les relations sont équivalentes aux relations $c_1^3 = 2c_1c_2$ et $c_2^2 = c_1^2c_2$ et donc

$$H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, c_2] / (c_1^3 - 2c_1c_2, c_2^2 - c_1^2c_2).$$

Fixons une base v_1, \dots, v_4 de \mathbb{C}^4 (par exemple la base canonique) et intéressons-nous au drapeau

$$0 \subset P = \langle v_1 \rangle \subset g = \langle v_1, v_2 \rangle \subset e = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{C}^4$$

et considérons les *cycles de Schubert*

$$\Omega_g := \{\ell \in \mathcal{G} ; \ell \cap g \neq 0\}, \quad \Omega_e := \{\ell \in \mathcal{G} ; \ell \subset e\}, \quad \Omega_p := \{\ell \in \mathcal{G} ; P \in \ell\}$$

$$\Omega_s := \{\ell \in \mathcal{G} ; P \in \ell \subset e\}, \quad \Omega_G := \{P\}.$$

de dimensions (complexes) respectives 3, 2, 2, 1, 0 et on a le diagramme d'inclusions

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega_p & & \\ & & \nearrow & & \searrow \\ \Omega_G & \longrightarrow & \Omega_s & & \Omega_g \longrightarrow \mathcal{G} \\ & & \searrow & & \nearrow \\ & & \Omega_e & & \end{array}$$

et, d'après le théorème 6.4 de [7], ceci constitue une décomposition cellulaire de \mathcal{G} . Ces cellules s'appellent les *cellules de Schubert*.

Nous allons maintenant représenter les cycles de Schubert par des classes de cohomologie, et plus précisément par des classes caractéristiques provenant de morphismes de fibrés vectoriels.

Pour Ω_g . Soit l'inclusion naturelle $\eta \hookrightarrow \varepsilon^4$ et considérons le morphisme composé

$$\varphi_g : \eta \hookrightarrow \varepsilon^4 \rightarrow \varepsilon^4 / \bar{g}$$

où $\bar{g} = \langle v_1, v_2 \rangle$ désigne ici le fibré trivial de fibre $\langle v_1, v_2 \rangle$. On considère également le *lieu singulier* $\Sigma(\varphi_g)$ de φ_g défini comme étant l'ensemble des éléments de \mathcal{G} pour lesquels l'application linéaire induite par φ_g entre les fibres n'est pas injective, i.e.

$$\Sigma(\varphi_g) := \left\{ \ell \in \mathcal{G} ; \ker \left((\varphi_g)_{\eta^{-1}(\ell)} : \ell \rightarrow \varepsilon^4 / \bar{g} \right) \neq 0 \right\}$$

et on remarque alors que

$$\Sigma(\varphi_g) = \Omega_g.$$

On va interpréter $\Sigma(\varphi_g)$ comme lieu d'annulation d'une section transverse à la section nulle d'un fibré vectoriel, puis on invoquera la proposition 12.8 de [1] qui nous affirme que la classe duale de Poincaré d'un tel lieu de zéro est donnée par la classe d'Euler du fibré réel orienté sous-jacent (qui dans notre cas sera la top-classe de Chern). On regarde la deuxième puissance extérieure de φ_g :

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\varphi_g) &\in \text{Hom} \left(\Lambda^2(\eta), \Lambda^2 \left(\varepsilon^4 / \bar{g} \right) \right) \simeq \Gamma \left(\mathcal{G}, \Lambda^2(\eta)^* \otimes \Lambda^2 \left(\varepsilon^4 / \bar{g} \right) \right) \\ &\simeq \Gamma(\mathcal{G}, \Lambda^2(\eta)^* \otimes \varepsilon^1) \simeq \Gamma(\mathcal{G}, \Lambda^2(\eta)^*). \end{aligned}$$

Soit donc $s_g \in \Gamma(\mathcal{G}, \Lambda^2(\eta)^*)$ représentant $\Lambda^2(\varphi_g)$. En notant $\mathcal{A}(s_g) := s_g^{-1}(0)$ le lieu des zéros de s_g ; on a

$$\mathcal{A}(s_g) = \{\ell \in \mathcal{G} ; s_g(\ell) = 0_{(\Lambda^2\eta)^*}\} = \{\ell \in \mathcal{G} ; \ell \cap g \neq 0\} = \Omega_g = \Sigma(\varphi_g).$$

Ainsi, en notant $[\Omega_g] \in H_6(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sa classe fondamentale et X_g sa duale de Poincaré on a, en vertu de la proposition 12.8 de [1], on obtient

$$X_g \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{PD}[\Omega_g] = \mathcal{PD}[\mathcal{A}(s_g)] = e(\Lambda^2(\eta)^*) = c_1(\Lambda^2(\eta)^*) = -c_1(\Lambda^2(\eta)) = -c_1(\eta) = s_1(\eta) = s_1.$$

Pour Ω_e , on procède de même. Soit $\bar{e} := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ le fibré trivial de fibre e et considérons le morphisme

$$\varphi_e : \eta \hookrightarrow \varepsilon^4 \rightarrow \varepsilon^4 / \bar{e}.$$

On a $\Sigma(\varphi_e) = \Omega_e$ et

$$\varphi_e \in \text{Hom} \left(\eta, \varepsilon^4 / \bar{e} \right) \simeq \Gamma \left(\mathcal{G}, \eta^* \otimes \varepsilon^4 / \bar{e} \right) \simeq \Gamma(\mathcal{G}, \eta^* \otimes \langle v_4 \rangle) \simeq \Gamma(\mathcal{G}, \eta^*)$$

et si $s_e \in \Gamma(\mathcal{G}, \eta^*)$, alors on a

$$X_e \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{PD}[\Omega_e] = \mathcal{PD}[\mathcal{A}(s_e)] = e(\eta^*) = c_2(\eta^*) = c_2(\eta) = c_2.$$

Pour Ω_p , c'est toujours la même méthode. On prend

$$\varphi_p : \langle v_1 \rangle \hookrightarrow \varepsilon^4 \rightarrow \varepsilon^4 / \eta.$$

On a

$$\varphi_p \in \text{Hom} \left(\langle v_1 \rangle, \varepsilon^4 / \eta \right) \simeq \Gamma \left(\mathcal{G}, \langle v_1 \rangle^* \otimes \varepsilon^4 / \eta \right) \simeq \Gamma \left(\mathcal{G}, \varepsilon^4 / \eta \right)$$

et si φ_p correspond à $s_p \in \Gamma \left(\mathcal{G}, \varepsilon^4 / \eta \right)$, alors on a

$$X_p \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{PD}[\Omega_p] = \mathcal{PD}[\mathcal{A}(s_p)] = e \left(\varepsilon^4 / \eta \right) = c_2 \left(\varepsilon^4 / \eta \right) = s_2(\eta) = s_2$$

Enfin, pour Ω_s et Ω_G , on utilise les autres classes et on raisonne par transversalité des intersections. Notons $e' = \mathbb{P}(\langle v_1, v_2, v_4 \rangle)$ et $g' = \mathbb{P}(\langle v_1, v_4 \rangle)$. Alors, on a les intersections transversales

$$\begin{cases} \Omega_s = \Omega_e \cap \Omega_{g'} \\ \Omega_G = \Omega_e \cap \Omega_{e'} \end{cases}$$

On en tire que

$$X_s := \mathcal{PD}[\Omega_p] = \mathcal{PD}[\Omega_e \cap \Omega_{g'}] = \mathcal{PD}[\Omega_e] \cup \mathcal{PD}[\Omega_{g'}] = X_e \cdot X_g = s_1(\eta)c_2(\eta) = s_1c_2$$

et de même

$$X_G := \mathcal{PD}[\Omega_G] = \mathcal{PD}[\Omega_e \cap \Omega_{e'}] = \mathcal{PD}[\Omega_e] \cup \mathcal{PD}[\Omega_{e'}] = X_e^2 = c_2(\eta)^2 = c_2^2 = s_2^2.$$

On a ainsi obtenu le

Théorème 1. *Les classes fondamentales de cohomologie des cycles de Schubert de $\mathcal{G} = G_{\mathbb{C}}(2, 4)$ sont données par*

Notation symbolique	–	g	g_p	g_e	g_s	G
Cycle de Schubert	\mathcal{G}	Ω_g	Ω_p	Ω_e	Ω_s	Ω_G
Classe duale	1	s_1	s_2	c_2	$s_1 c_2$	c_2^2

Maintenant, on peut effectuer le simple calcul suivant

$$X_g^4 = s_1^4 = s_1(-c_1^3) = s_1(-2c_1c_2) = 2c_1^2c_2 = 2c_2^2 = 2 \cdot X_G$$

et obtenir, de façon plus rigoureuse, le résultat obtenu dans la première section

Corollaire 2. *Dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$, il existe deux droites et deux seules qui intersectent quatre droites données en position générale.*

1.3 Justification utilisant la transversalité et le "Prinzip der Erhaltung der Anzahl"

On va ici utiliser le principe de Schubert (ou "Principe de conservation du nombre" tel que décrit dans [9], aussi appelé "Prinzip der Erhaltung der Anzahl" dans la langue de Goethe). On va s'intéresser à la transversalité d'intersection de cycles de Schubert dans une configuration particulière, puis on invoquera ce principe pour en déduire le cas général. Commençons par étudier localement de qu'il se passe (via des coordonnées locales) autour d'une droite $\ell \in \mathcal{G}$, ou plutôt d'un sous-espace de dimension deux α_0 de \mathbb{C}^4 . Choisissons un supplémentaire $\alpha' \subset \mathbb{C}^4$ de α_0 . On notera comme d'habitude $\text{Hom}(\alpha_0, \alpha') = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\alpha_0, \alpha')$ l'espace des applications linéaires $\alpha_0 \rightarrow \alpha'$. Définissons l'application φ qui envoie une application linéaire $\alpha_0 \rightarrow \alpha'$ sur son graphe :

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_0} : \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') &\rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \\ A &\mapsto \{(x, A(x)), x \in \alpha_0\} \end{aligned}$$

Si $A \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$, alors $\varphi_{\alpha_0}(A) \subset \alpha_0 \times \alpha' \simeq \mathbb{C}^4$ et si, dans ce produit on identifie α' avec $0 \times \alpha'$, on obtient que $\varphi_{\alpha_0}(A) \cap \alpha' = 0$. En notant

$$U_{\alpha_0, \alpha'} := \{\beta \in \mathcal{G} ; \beta \cap \alpha' = 0\},$$

on voit que φ_{α_0} réalise une bijection $\varphi_{\alpha_0} : \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \rightarrow U_{\alpha_0, \alpha'}$. Ceci définit un atlas sur \mathcal{G} , qui en fait une variété algébrique complexe. Plus précisément, pour tout plan $\alpha_0 \subset \mathbb{C}^4$, on choisit une base de α_0 que l'on complète en une base de \mathbb{C}^4 et le sous-espace engendré par les deux derniers vecteurs sera noté α' comme ci-dessus. Ces choix faits, on obtient pour tout $\alpha_0 \subset \mathbb{C}^4$ un isomorphisme $\text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \simeq \mathbb{C}^4$; donc chaque ouvert $U_{\alpha_0, \alpha'}$ est une variété affine et les applications de changement de cartes sont données par changement de base, donc par conjugaison par une matrice inversible et ceci est bien algébrique. De plus, \mathcal{G} est une variété projective car on a un plongement fermé $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ (c'est le plongement de Plücker). Bien-sûr, ces considérations se généralisent à toutes les grassmanniennes. On notera ℓ_A la droite projective correspondant à $A \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$.

Lemme 3. ([8], Lemma 2.2.2, p. 7)

Soient $A, B \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ et supposons $\ell_A \in \Omega_{\ell_B}$ de telle sorte qu'il existe une droite vectorielle $\ell_0 \subset \alpha_0$ telle que $A|_{\ell_0} = B|_{\ell_0}$. Alors ℓ_A est un point régulier de Ω_{ℓ_B} si et seulement si $A \neq B$, et dans ce cas on a

$$T_{\ell_A}(\Omega_{\ell_B}) = \left\{ \bar{A} \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') ; \bar{A}|_{\ell_0} : \ell_0 \rightarrow \alpha' \Big/ \text{im}(A - B) \text{ est nulle} \right\}$$

Démonstration. On va utiliser les coordonnées locales et travailler dans les espaces d'applications linéaires. Choisissons ℓ' une droite supplémentaire à ℓ_0 dans α_0 . Cherchons à décrire $\Omega_{\ell_B} \cap U_{\alpha_0, \alpha'}$. Dire que $\ell := \ell_{A'}$ est dans cette dernière intersection signifie que $\ell_{A'} \cap \ell_B \neq \emptyset$ soit qu'il existe une droite vectorielle $\tilde{\ell} \subset \alpha_0$ telle que $A'|_{\tilde{\ell}} = B|_{\tilde{\ell}}$ et en notant $\iota_0 : \ell_0 \hookrightarrow \alpha_0$ l'inclusion, ceci revient à dire qu'il existe $\lambda \in \text{Hom}(\ell_0, \ell')$ tel que $(A' - B) \circ (\iota_0 + \lambda) = 0$. Ainsi, si $p : \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \times \text{Hom}(\ell_0, \ell') \rightarrow \text{Hom}(\alpha_0, \alpha')$ dénote la projection et si on pose $\tilde{\Omega} := \{(A', \lambda) \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \times \text{Hom}(\ell_0, \ell') ; (A' - B) \circ (\iota_0 + \lambda) = 0\}$, alors la composée $\varphi_{\alpha_0} \circ p$ réalise un isomorphisme entre $\Omega_{\ell_B} \cap U_{\alpha_0, \alpha'}$ et $\tilde{\Omega}$, sauf au-dessus de $A' = B$. Donc on obtient

$$(\Omega_{\ell_B} \cap U_{\alpha_0, \alpha'}) \setminus \{\ell_B\} \simeq \{(A', \lambda) \in (\text{Hom}(\alpha_0, \alpha') \setminus \{B\}) \times \text{Hom}(\ell_0, \ell') ; (A' - B) \circ (\iota_0 + \lambda) = 0\}.$$

Si l'on dérive cette équation en $A' = A$ on obtient

$$\bar{A} \circ \iota_0 + (A - B) \circ \bar{\lambda} = 0,$$

où les symboles munis d'une barre désignent des vecteurs tangents. Pour des raisons de dimensions, si $A \neq B$, alors $\ker(A - B) = \ell_0$ et ainsi

$$\bar{A} \in T_{\ell_A}(\Omega_{\ell_B}) \Leftrightarrow \exists \bar{\lambda} ; \bar{A} \circ \iota_0 + (A - B) \circ \bar{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \text{im}(\bar{A} \circ \iota_0) \subset \text{im}(A - B).$$

□

Proposition 4. ([8], Proposition 2.2.2, page 7)

Soient ℓ_A et ℓ_B deux droites distinctes s'intersectant en un point P . Alors l'intersection $\Omega_{\ell_A} \cap \Omega_{\ell_B}$ est transverse, excepté peut-être sur l'ensemble des droites contenues dans le plan engendré par ℓ_A et ℓ_B et passant par P .

Démonstration. Soit donc $\ell_C \in \Omega_{\ell_A} \cap \Omega_{\ell_B}$ et supposons d'abord que ℓ_C contienne P , de telle sorte que par hypothèse, ℓ_C ne soit pas contenue dans le plan engendré par ℓ_A et ℓ_B . Soit $\ell_{A,B} \subset \alpha_0$ la droite vectorielle correspondant à P , i.e. telle que $A|_{\ell_{A,B}} = B|_{\ell_{A,B}} = C|_{\ell_{A,B}}$. D'après le Lemme précédent, on obtient

$$T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) \cap T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B}) = \left\{ \bar{A} \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') ; \text{im}(\bar{A}|_{\ell_{A,B}}) \subset \text{im}(C - A) \cap \text{im}(C - B) \right\}$$

et en notant $\iota : \ell_{A,B} \hookrightarrow \alpha_0$ l'inclusion et $p_A : \alpha' \rightarrow \alpha' / \text{im}(C - A)$ et $p_B : \alpha' \rightarrow \alpha' / \text{im}(C - B)$ les projections canoniques, alors

$$T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) \cap T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B}) = \left\{ \bar{A} \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') ; p_A \circ \bar{A} \circ \iota = p_B \circ \bar{A} \circ \iota = 0 \right\}$$

Comme $\ker(C - A) = \ker(C - B) = \ell_{A,B}$, si les images étaient aussi les mêmes, alors on trouverait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $C - A = \lambda(C - B)$ et $\lambda \neq 1$ car $A \neq B$. Il s'ensuivrait que

$$C = \frac{1}{1 - \lambda}A - \frac{\lambda}{1 - \lambda}B$$

et alors ℓ_C serait dans le plan contenant ℓ_A et ℓ_B , ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, les deux conditions $p_A \circ \bar{A} \circ \iota = 0$ et $p_B \circ \bar{A} \circ \iota = 0$ sont indépendantes.

Maintenant, si ℓ_C est dans le plan formé par ℓ_A et ℓ_B mais ne contient pas P , soient $P_1 := \ell_C \cap \ell_A$ et $P_2 := \ell_C \cap \ell_B$. Soient également $\ell_1, \ell_2 \subset \alpha_0$ des droites vectorielles telles que

$$(C - A)|_{\ell_1} = 0, \quad (C - B)|_{\ell_2} = 0.$$

Alors

$$T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) \cap T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B}) = \{\bar{A} \in \text{Hom}(\alpha_0, \alpha') ; \text{im}(\bar{A}|_{\ell_1}) \subset \text{im}(C - A), \text{im}(\bar{A}|_{\ell_2}) \subset \text{im}(C - B)\}$$

et comme $\ell_1 \neq \ell_2$, ces deux conditions sont indépendantes.

Dans les deux cas, on a

$$\dim(T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) \cap T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B})) = 2$$

et, comme ℓ_C est un point lisse de Ω_{ℓ_A} et de Ω_{ℓ_B} , on a également

$$\dim(T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A})) = \dim(T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B})) = \dim(\Omega_{\ell_A}) = \dim(\Omega_{\ell_B}) = 3$$

et donc

$$\dim(T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) + T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B})) = 4 = \dim(\mathcal{G}) = \dim(T_{\ell_C}(\mathcal{G}))$$

puisque \mathcal{G} est lisse. On en tire que

$$T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_A}) + T_{\ell_C}(\Omega_{\ell_B}) = T_{\ell_C}(\mathcal{G}),$$

ce qui est la définition de la transversalité. □

Soient $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^3$ quatre points non coplanaires et tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Si $\ell_{P,Q}$ (resp. $\ell_{Q,R}, \ell_{R,S}, \ell_{S,P}$) est la droite projective passant par P et Q (resp. par Q et R , par R et S , par S et P), alors les cycles de Schubert correspondants $\Omega_{\ell_{\bullet,\bullet}}$ s'intersectent transversalement en les deux droites $\ell_{P,R}$ et $\ell_{Q,S}$. En effet, deux d'entre eux s'intersectent transversalement d'après la Proposition précédente et les autres intersections sont clairement transversales (par exemple, l'intersection de l'ensemble des droites contenues dans le plan P, R, S et de celui des droites contenues dans le plan P, Q, R). D'après le Principe de conservation du nombre, quitte à prendre en compte des multiplicités, le nombre de droites intersectant quatre droites donnée reste le même si l'on change la configuration des droites, d'où l'on tire notre résultat.

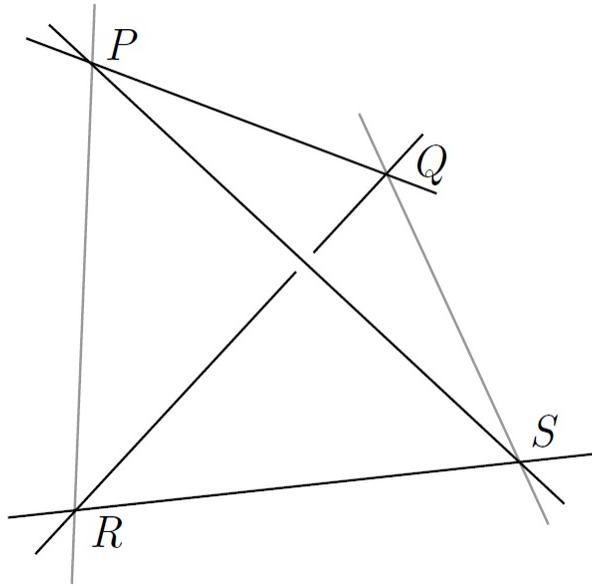


FIGURE 3 – Les deux droites grises intersectent les quatre droites noires

1.4 L'espace \mathcal{PS}

Par définition, l'espace \mathcal{PS} est

$$\mathcal{PS} := \{(\ell, x) \in \mathcal{G} \times \mathbb{P}^3 ; x \in \ell\}$$

donc il s'identifie naturellement au projectivisé du fibré tautologique η sur \mathcal{G} ; c'est donc une variété projective. Pour exprimer des conditions sur les éléments de cet espace, on utilise des symboles de la forme xy où x désigne une condition sur les points et y une condition sur les droites. Par exemple, le symbole pg désigne l'ensemble des couples formés d'une droite et d'un point sur cette droite, tels que le point soit dans un plan donné et la droite coupe une droite donnée. Si l'on note Ω_{pg} l'ensemble de tels couples, g une droite et e un plan, alors on a

$$\Omega_{pg} = \{(\ell, P) \in \mathcal{PS} ; \ell \cap g \neq \emptyset, P \in e\}$$

Par le Principe de conservation du nombre, on peut supposer que la droite g est dans le plan e , auquel cas

$$\Omega_{pg} = \{(\ell, P) \in \mathcal{PS} ; P \in g\} \cup \{(\ell, P) \in \mathcal{PS} ; \ell \subset e\}$$

et donc, on obtient l'importante formule suivante :

$$pg = p_g + g_e = p^2 + g_e. \quad (9)$$

Cette formule est fondamentale en ce sens que toutes les autres formules de \mathcal{PS} dérivent de celle-ci et de celle que nous connaissons dans \mathbb{P}^3 et \mathcal{G} . Nous allons justifier ceci juste après avoir étudié deux autres exemples de formules ; en utilisant la cohomologie.

Par exemple, en multipliant (9) par p , puis par g , on obtient $p^2g = pp_g + pg_e = p^3 + pg_e$ et $pg_e + pg_p = pg^2 = p_gg + g_e g = p_gg + g_s = p^2g + g_s$ et en combinant ces formules on obtient alors

$$pg_p = p^3 + g_s \quad (10)$$

et de façon analogue, on obtient

$$pg_s = p^2g_p = G + p^3g = G + p^2g_e. \quad (11)$$

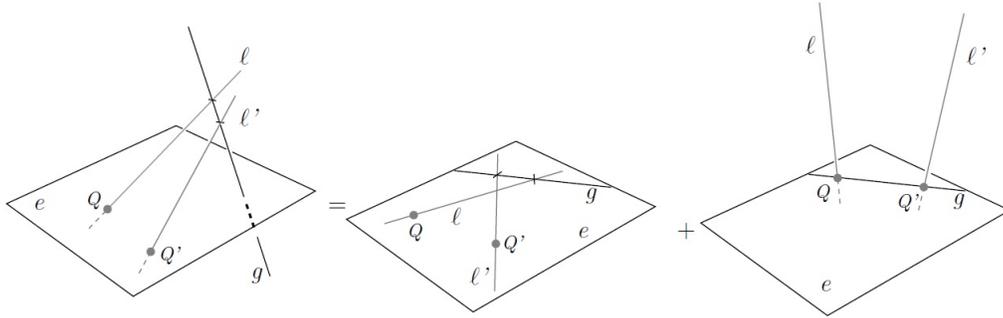


FIGURE 4 – Justification graphique de (9)

Justifions maintenant (9) avec la cohomologie. Si l'on voit \mathcal{G} comme l'ensemble des sous-espaces de dimension 2 de \mathbb{C}^4 , alors \mathcal{PS} est le fibré projectif associé au fibré tautologique η de rang 2 sur \mathcal{G} . Le fibré tautologique $\gamma = (F \xrightarrow{\pi} \mathcal{PS})$ sur \mathcal{PS} peut être défini par

$$F := \{(\alpha, \ell, v) \in \mathcal{G} \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^4 ; v \in \ell \subset \alpha\}, \quad \pi(\alpha, \ell, v) = (\alpha, \ell).$$

Considérons la première classe de Chern $c_1(\gamma) \in H^2(\mathcal{PS}, \mathbb{Z})$. D'après le théorème page 62 de [10], $H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z})$ est un $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ -module libre via la projection naturelle $p : \mathcal{PS} \rightarrow \mathcal{G}$ et le morphisme

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})[s] & \rightarrow & H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z}) \\ s & \mapsto & c_1(\gamma) \end{array}$$

induit un isomorphisme

$$H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})[s] / (s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta)) \xrightarrow{\sim} H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z}).$$

Si l'on remplace s par $c_1(\gamma)$ dans $H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z})$, alors on a $s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta) = c_2(p^*(\eta)/\gamma) = 0$ car $p^*(\eta)/\gamma$ est un fibré en droites. Tout comme dans la section 1.2, nous faisons la confusion entre les symboles définissant des conditions sur les objets de \mathcal{PS} et les duaux de Poincaré des classes fondamentales des cycles correspondants. Par exemple, on a $g = s_1(\eta) = -c_1(\eta)$ ainsi que, en posant $s = c_1(\gamma)$, la relation $p = -s$. Cette dernière relation peut se montrer de la même façon que dans la section 1.2. Donnons les idées de sa preuve. Reprenons le drapeau canonique $0 \subset \langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle =: g \subset \langle v_1, v_2, v_3 \rangle =: e \subset \mathbb{C}^4$ et soit

$$\Omega_p := \{(\ell, x) \in \mathcal{PS} ; x \in e\}.$$

Notons $p := X_p := \mathcal{PD}[\Omega_p]$. Notons encore $q : \mathcal{PS} \xrightarrow{\text{pr}_2} \mathbb{P}^3$ la projection, $\tau := (E' \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{P}^3)$ le fibré tautologique sur \mathbb{P}^3 , où $E' := \{(\ell, v) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{C}^4 ; v \in \ell\}$ et enfin, $\Omega_p^e := \{x \in \mathbb{P}^3 ; x \in e\}$ et $X_p^e = \mathcal{PD}[\Omega_p^e]$. On constate alors qu'on a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E' \\ \pi \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{pr}_1 \\ \mathcal{PS} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

d'où $\gamma = q^*(\tau)$. On a aussi $\Omega_p = q^{-1}(\Omega_p^e)$ et on a

$$X_p = \mathcal{PD}[q^{-1}(\Omega_p^e)] = q^*(\mathcal{PD}[\Omega_p^e]) = q^*X_p^e.$$

Ceci est un cas particulier de propriétés des *homomorphismes de transfère*, exposées dans [3], Chapitre VIII, Section 10, Proposition 10.9 et Corollaire 10.13. Ensuite, comme on a une inclusion de fibrés $\tau \hookrightarrow \varepsilon^4$ sur \mathbb{P}^3 , on peut considérer le morphisme

$$\psi : \tau \rightarrow \varepsilon^4 / \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

avec $\Omega_p^e = \Sigma(\psi)$. A ce morphisme correspond une section $s_\psi \in \Gamma\left(\mathbb{P}^3, \tau^* \otimes \varepsilon^4 / \langle v_1, v_2, v_3 \rangle\right) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^3, \tau^*)$ et on obtient $X_p^e = \mathcal{PD}[\Sigma(\psi)] = \mathcal{PD}[s_\psi^{-1}(0)] = e(\tau^*)$ et donc, par naturalité des classes de Chern,

$$X_p = q^*X_p^e = q^*(e(\tau^*)) = q^*(c_1(\tau^*)) = -q^*(c_1(\tau)) = -c_1(q^*\tau) = -c_1(\gamma) = s.$$

Par définition, puisqu'on a $g_e = c_2(\eta)$, il vient $pg = (-s)(-c_1(\eta))$ et comme dans $H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z})$, on a la relation $s^2 - sc_1(\eta) + c_2(\eta) = 0$, d'où

$$pg = sc_1(\eta) = s^2 + c_2(\eta) = p^2 + g_e,$$

qui est bien la formule (9). Ainsi, cette formule est la seule formule par laquelle on doit quotienter $H^*(\mathcal{G}, \mathbb{Z})[s]$ pour obtenir $H^*(\mathcal{PS}, \mathbb{Z})$.

Deuxième partie

Formule de coïncidence et applications

2.1 La formule et sa justification cohomologique

Si $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est une courbe de bidegré (p, q) (i.e. définie par un polynôme bi-homogène de bi-degré (p, q)), alors la restriction de X à la diagonale de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est de degré $p + q$. Par le théorème de Bézout, la courbe X intersecte donc la diagonale en $p + q$ points, comptés avec multiplicités. On peut reformuler ceci de la façon suivante : X est un système à un paramètre de couples de points (P, Q) sur la droite projective ; s'il y a q paires dans ce système ayant un premier point donné P et p paires ayant un second point donné Q , alors il y a $p + q$ paires de la forme (P, P) . C'est le *principe de correspondance de Chasles*, tel qu'énoncé et démontré dans [2], Lemme I, page 1175. On va généraliser cette relation, en utilisant les procédés et les notations volontairement ambiguës de [9]. Considérons des paires de points dans l'espace projectif et imaginons que lorsque deux points tendent à coïncider, la droite qui les joint a une "limite" bien définie. Notons p et q les deux points du couple, g la droite les joignant et ε la condition que p et q sont infiniment proches, mais déterminent toujours la droite les joignant.

Supposons donné X un système à un paramètres de tels couples de points. Si l'on note p (respectivement q) le nombre de paires $(P, Q) \in X$ avec P (respectivement Q) appartenant à un plan donné (conditions également notées p , respectivement q), alors X est de bidegré (p, q) .

Prenons une droite ℓ et considérons les paires de plans contenant ℓ , tels que le premier plan contient P et le second contient Q . Ces paires forment une courbe Y dans l'espace des paires de plans contenant ℓ , qui peut être identifié à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La courbe Y est alors de bidegré (p, q) . Par le principe de correspondance de Chasles, il y a $p + q$ plans (simples) qui contiennent un paire de points dans X . Parmi eux, il y a ε plans qui apparaissent car ils contiennent une paire de points coïncidants de X , puis il y a ceux contenant une droite g joignant les deux points d'une paire de points distincts de X ; cette dernière condition étant équivalente à dire que g coupe la droite ℓ (ce genre de condition sur les droites a été notée g dans ce qui précède, ce qui n'est pas un hasard!). Ainsi, on a la formule

$$\varepsilon = p + q - g. \quad (12)$$

Nous allons maintenant donner une justification cohomologique de cette formule, avant de

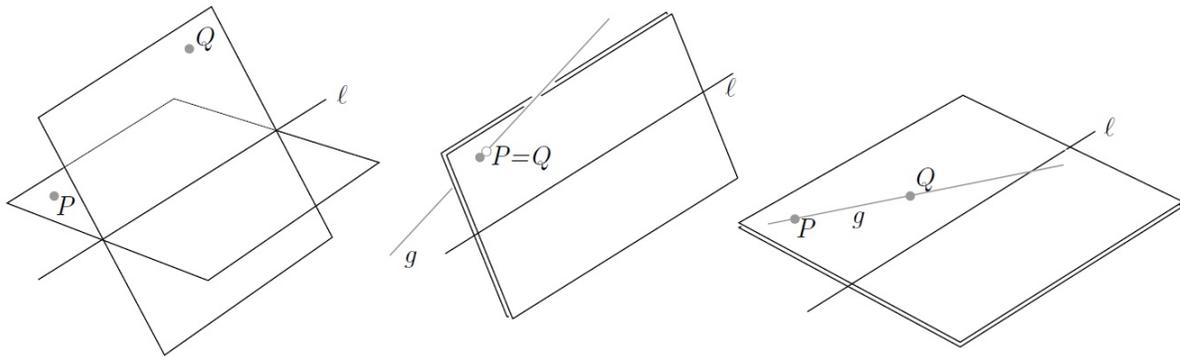


FIGURE 5 – La courbe Y et les conditions ε et g

l'employer sur des exemples justifiés "à la Schubert", sans démonstration rigoureuse.

On va travailler dans l'espace $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3$, obtenu à partir de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ en éclatant la diagonale Δ . Moralement, il s'agit de "retirer la diagonale" Δ du produit, mais en gardant la possibilité de regarder la droite engendrée par deux points infiniment proches; on va donc naturellement considérer une adhérence. Signalons qu'il existe une construction générale de l'éclatement le long d'une sous-variété fermée (voire d'un sous-schéma fermée...). À ce sujet, on pourra consulter [5], II, 7, pages 160-166. Dans notre cas, on peut donner une construction explicite, telle que l'on la trouve dans [6], section 2.2. L'application qui à deux points distincts x et y de \mathbb{P}^3 associe la droite projective $\ell_{x,y}$ contenant x et y définit un morphisme de variétés algébriques

$$L : (\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \setminus \Delta \rightarrow \mathcal{G} \\ (x, y) \mapsto \ell_{x,y}$$

dont on peut considérer le graphe $\text{Gr}(L) := \{(x, y, \ell) \in ((\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \setminus \Delta) \times \mathcal{G} ; \ell = \ell_{x,y}\}$ et on pose alors

$$\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3 := \text{Bl}_{\Delta}(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) := \overline{\text{Gr}(L)} = \text{Adh}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathcal{G}}(\text{Gr}(L)),$$

l'adhérence dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathcal{G}$ étant bien-sûr entendue au sens de Zariski; $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3$ est donc une variété projective lisse. On dispose d'un morphisme propre surjectif $\pi : \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$

et, si $U := (\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \setminus \Delta$, alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert partout dense de $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3$ et on a un isomorphisme $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ (ceci reste vrai en général, voir [5], Propositions 7.13 et 7.16). Ceci étant, considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \Lambda^2(\mathbb{C}^4) \\ (x, y) &\mapsto x \wedge y \end{aligned}$$

Celle-ci induit une application

$$\Psi_{\Delta} : (\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)) \simeq \mathbb{P}^5.$$

D'autre part, le morphisme L induit aussi un morphisme $\varphi : \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathcal{G}$ et si l'on note $\sigma : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ le plongement de Plücker, alors on obtient le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \pi \downarrow \simeq & & \downarrow \sigma \\ U & \xrightarrow{\Psi_{\Delta}} & \mathbb{P}^5 \end{array}$$

Ensuite, on note $p_i : \mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\text{Pr}_i} \mathbb{P}^3$ la projection ($i = 1, 2$), on pose $\mathcal{O}_i(1) := p_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ le faisceau tordu de Serre. Remarquons que la sous-variété fermée $\pi^{-1}(\Delta)$ de $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3$ donne un diviseur de Weil (appelé *diviseur exceptionnel*) sur l'éclatement et on peut donc considérer le faisceau inversible associé $\gamma := \mathcal{O}([\pi^{-1}(\Delta)])$. Ensuite, on peut se convaincre que l'on a la relation

$$\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)) \simeq \Lambda^2(\eta^*),$$

avec η le fibré tautologique sur \mathcal{G} . D'après l'exercice 5.11 de [5], on a également

$$\Psi_{\Delta}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1))|_U \simeq (\mathcal{O}_1(1) \otimes \mathcal{O}_2(1))|_U$$

où le produit tensoriel est bien-sûr pris sur le faisceau structural de l'éclatement. Enfin, l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ étant dense dans $\mathbb{P}^3 \widetilde{\times} \mathbb{P}^3$, on peut écrire directement (pour que ce soit correct, on devrait écrire l'équation qui va suivre en restriction à $\pi^{-1}(U)$ et conclure alors que les faisceaux coïncident partout, mais nous préférons alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned} \varphi^*(\Lambda^2(\eta^*)) &= \varphi^* \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)) = (\sigma \varphi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) = (\Psi_{\Delta} \pi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1) \\ &= \pi^* \Psi_{\Delta}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)) = \gamma^* \otimes \Psi_{\Delta}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)) \simeq \gamma^* \otimes (\mathcal{O}_1(1) \otimes \mathcal{O}_2(1)) \end{aligned}$$

et on obtient alors l'équation

$$\varphi^*(\Lambda^2(\eta^*)) \simeq \gamma^* \otimes \mathcal{O}_1(1) \otimes \mathcal{O}_2(1). \quad (13)$$

Maintenant, on voit qu'on peut représenter les classes duales des conditions p, q, g, ε décrites au début de cette section par les classes de Chern suivantes : $\varepsilon := c_1(\gamma)$ et $p := c_1(\mathcal{O}_1(1))$, $q := c_1(\mathcal{O}_2(1))$, on fait ici la confusion entre un faisceau localement libre inversible (i.e. de rang 1) et le fibré en droites correspondant. On se rappelle également que la condition g avait pour classe duale $\varphi^*(s_1(\eta)) = -\varphi^*(c_1(\eta))$. L'équation (13) donne alors

$$\begin{aligned} g &= -\varphi^*(c_1(\eta)) = c_1(\varphi^*(\Lambda^2(\eta^*))) = c_1(\gamma^* \otimes \mathcal{O}_1(1) \otimes \mathcal{O}_2(1)) \\ &= c_1(\gamma^*) + c_1(\mathcal{O}_1(1)) + c_1(\mathcal{O}_2(1)) \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon + p + q, \end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon = p + q - g,$$

comme souhaité. □

2.2 Premier exemple : le nombre de bitangentes d'une courbe plane lisse

Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse de \mathbb{P}^3 , de degré n et notons ε_{22} la condition qu'une droite est tangente à S en deux points distincts. Ceci revient à dire que parmi les points p_1, \dots, p_n d'intersection de cette droite avec S , deux paires sont formées de points coïncidents, disons par exemple (p_1, p_2) et (p_3, p_4) . Comme les rôles de (p_1, p_2) et (p_3, p_4) peuvent être échangés sur la bitangente, d'après la formule (12), on a

$$2\varepsilon_{22} = (p_1 + p_2 - g)(p_3 + p_4 - g),$$

d'où

$$2\varepsilon_{22} = p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 - p_1g - p_2g - p_3g - p_4g + g^2.$$

Or, les symboles p_ip_j (pour $i \neq j$) ont tous la même signification, ainsi que les symboles p_ig et comme on a vu que $g^2 = g_e + g_p$, il vient alors

$$2\varepsilon_{22} = 4p_1p_3 - 4p_1g + g_e + g_p.$$

À présent, multiplions ceci par g_e : $\varepsilon_{22}g_e$ dénote les droites bitangentes à S dans un plan donné : ce sont donc les bitangentes à la courbe obtenue en intersectant la surface avec un plan. On obtient

$$2\varepsilon_{22}g_e = 4p_1p_3g_e - 4p_1gg_e + g_e^2 + \underbrace{g_pg_e}_{=0} = 4p_1p_3g_e - 4p_1g_s + G = 4p_1p_3g_e - 4p_1^3g - 3G,$$

cette dernière égalité provenant de l'équation (11). Calculons $p_1p_3g_e$. On travaille en fait dans l'espace $(S \times S) \times (S \times S) \times \mathcal{G}$ et un élément générique de cet espace s'écrit $((P_1, P_2), (Q_1, Q_2), g)$ avec $P_i, Q_i \in S \cap g$. La condition p_i impose à P_i d'être dans le plan e_i ($i = 1, 3$) et g_e impose à g d'être dans le plan e . Mais $e_i \cap e$ coupe S en n points ($i = 1, 3$), ainsi la droite dans les configurations satisfaisant $p_1p_3g_e$ est déterminée par l'une des n^2 paires de points P_1 sur $e_1 \cap e \cap S$ et P_3 sur $e_3 \cap e \cap S$ et pour un tel choix de P_1 et P_3 , on peut choisir P_2 et P_4 parmi les $n - 2$ points restants de la droite. Il y a donc $n^2(n - 2)(n - 3)$ configurations possibles. Pour trouver G , notons que pour une droite donnée g , il y a $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$ paires de points distincts sur $g \cap S$. De plus, $p_1^3 = 0$ et donc

$$2\varepsilon_{22}g_e = 4n^2(n - 2)(n - 3) - 3n(n - 1)(n - 2)(n - 3),$$

soit

$$\varepsilon_{22}g_e = \frac{n(n - 2)(n - 3)(n + 3)}{2}.$$

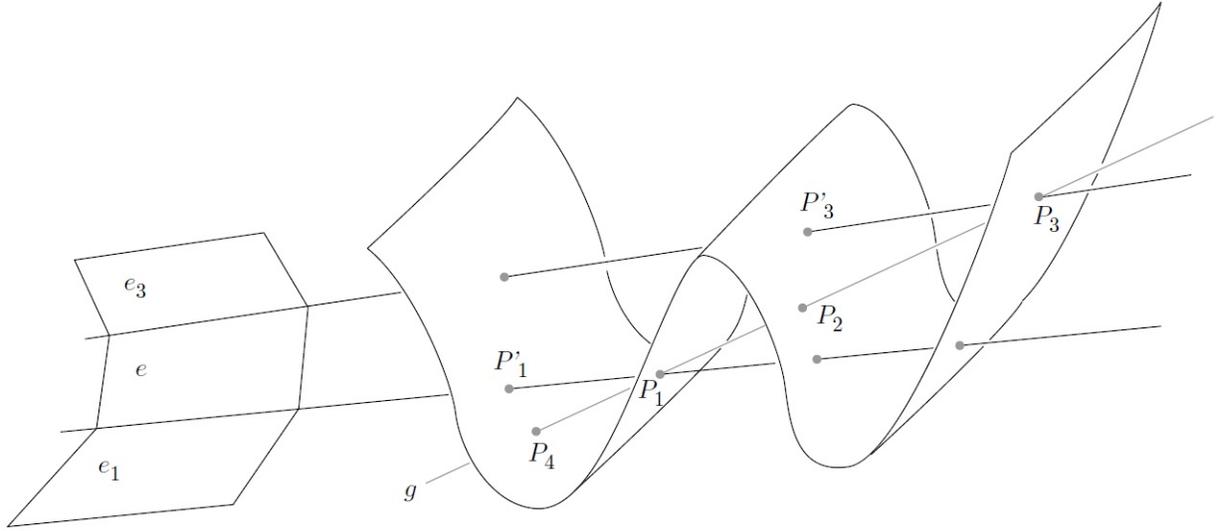


FIGURE 6 – Calcul de $p_1 p_3 g_e$

2.3 Second exemple : le nombre de quadritangentes d'une surface lisse

Soit $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface lisse de degré n et notons ε_{2222} la condition qu'une droite est tangente à S en quatre points distincts. Ceci signifie que parmi les n points d'intersection de cette droite avec S , quatre paires sont formées de points coïncidents : disons (p_1, p_2) , (p_3, p_4) , (p_5, p_6) et (p_7, p_8) . Nous allons calculer de la même façon que pour l'exemple précédent. D'après la formule (12), comme les rôles des paires coïncidentes sont symétriques, on a

$$24\varepsilon_{2222} = 4!\varepsilon_{2222} = (p_1 + p_2 - g)(p_3 + p_4 - g)(p_5 + p_6 - g)(p_7 + p_8 - g).$$

Les symboles $p_i p_j$, $i \neq j$ ont même signification, ainsi que les $g p_i p_j$ etc. Il vient alors

$$\begin{aligned} 24\varepsilon_{2222} &= 2^4 p_1 p_2 p_3 p_4 - 4 \times 2^3 g p_1 p_2 p_3 + 2^2 \binom{4}{2} g^2 p_1 p_2 - 2 \binom{4}{3} g^3 p_1 + g^4 \\ &= 16 p_1 p_2 p_3 p_4 - 32 g p_1 p_2 p_3 + 24 g^2 p_1 p_2 - 8 g^3 p_1 + g^4. \end{aligned}$$

Ensuite, d'après la formule (9), on a $pg = p_g + g_e$, d'où

$$g p_1 p_2 p_3 = p_1^2 p_2 p_3 + g_e p_1 p_2.$$

On a aussi $g^2 = g_p + g_e$, d'après les calculs fait dans la section 1.2 (en effet, on a $g^2 = s_1(\eta)^2 = c_1(\eta)^2 - c_2(\eta) + c_2(\eta) = s_2(\eta) + c_2(\eta) = g_p + g_e$) et ceci implique

$$g^2 p_1 p_2 = \underbrace{g_p p_1 p_2}_{=0} + g_e p_1 p_2 = g_e p_1 p_2$$

et de même

$$g^3 p_1 = g(g_e + g_p) p_1 = 2g_s p_1 = 2G,$$

cette avant-dernière égalité provenant des équations $gg_p = s_1(\eta)s_2(\eta) = -c_1(c_1^2 - c_2) = -c_1^3 + c_1c_2 = -c_1c_2 = s_1c_2 = g_s$, $gg_e = s_1c_2 = g_s$ et $gg_s = s_1^2c_2 = c_1^2c_2 = c_2^2 = G$. En remplaçant ces trois dernières égalités dans l'équation trouvée ci-dessus, il vient

$$24\varepsilon_{2222} = 16p_1p_2p_3p_4 - 32p_1^2p_2p_3 - 8g_ep_1p_2 + 10G. \quad (14)$$

On va identifier chaque terme de cette équation un par un (en commençant par les derniers termes), en travaillant dans $(S \widetilde{\times} S)^4 \times \mathcal{G}$.

- La condition G représente le nombre de 8-uplets de points distincts P_1, \dots, P_8 qui peuvent être pris dans l'intersection d'une droite (en position générale) avec la surface S de degré n , i.e.

$$G = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7).$$

- Dans le premier exemple, on avait trouvé la formule $g_ep_1p_3 = n^2(n-2)(n-3)$. Dans le cas qui nous occupe ici, on a toujours quatre points à choisir parmi les $n-4$ points dans l'intersection d'une droite avec S , d'où

$$g_ep_1p_2 = n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7).$$

- Pour le cas de $p_1^2p_2p_3$, notons e_1, e'_1 des plans exprimant la condition p_1^2 , de telle sorte que P_1 se trouvera parmi les n points de l'intersection $S \cap e_1 \cap e'_1$. Soient e_2 et e_3 des plans exprimant les conditions respectives p_2 et p_3 , et ℓ la droite contenant P_1, \dots, P_8 . On voit que le point P_1 doit appartenir au cône $C_{P_1}(S \cap e_2)$ de sommet P_1 sur la courbe $S \cap e_2$; ce cône est de degré n . De plus, le point P_3 doit également appartenir à ce cône, ainsi qu'à $S \cap e_3$, qui est de degré n . Ainsi, pour un point P_1 donné, on a n^2 choix possibles pour P_2 et P_3 (et donc ℓ), mais nous devons supprimer les choix correspondant aux n points de $S \cap e_2 \cap e_3$, car autrement on aurait $P_2 = P_3$. Il nous reste donc $n^2 - n = n(n-1)$ solutions. Comme il y a n choix possibles pour P_1 , on a $n^2(n-1)$ choix pour P_1, P_2, P_3 . Il nous reste à choisir P_4, \dots, P_8 parmi les $n-3$ autres points de $S \cap \ell$. On trouve alors

$$p_1^2p_2p_3 = n^2(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7).$$

Remarquons ici que pour $n = 3$, si l'on ne compte que les choix possibles pour P_1, P_2, P_3, P_4 , on trouve le résultat bien connu qu'il existe 27 droites qui coupent une cubique en quatre points, ce qui entraîne que les droites soient entièrement contenues dans la cubique. Une cubique (générique) contient donc 27 droites.

- Enfin, pour $p_1p_2p_3p_4$, concentrons-nous en premier lieu sur les points P_1, \dots, P_4 . Soient e_1, \dots, e_4 des plans exprimant les conditions respectives p_1, p_2, p_3, p_4 . Il nous faut trouver le degré de la surface (réglée) S' formée des droites ℓ intersectant $S \cap e_2, S \cap e_3$ et $S \cap e_4$. Pour cela, il nous faut intersecter S' avec une droite générique, ce qui revient à calculer $gp_2p_3p_4 = (g_e + p_2^2)p_3p_4$. Par la formule précédente, on a $g_ep_2p_3 = n^2(n-2)$ et $p_2^2p_3p_4 = n^2(n-1)$, donc S' est de degré $n^2(2n-3)$. D'après le théorème de Bézout, l'intersection $S \cap S' \cap e_1$ consiste en $n^3(2n-3)$ points parmi lesquels, d'après le cas précédent, $n^2(n-1)$ se trouvent sur e_2 (resp. e_3, e_4). Les points restants, en nombre $n^3(2n-3) - 3n^2(n-1) = n^2(2n^2 - 6n + 3)$, constituent $p_1p_2p_3p_4$. Si l'on prend maintenant en compte les choix possibles pour P_5, \dots, P_8 parmi les $n-4$ points restants, on trouve

$$p_1p_2p_3p_4 = n^2(2n^2 - 6n + 3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7).$$

On peut maintenant substituer ces formules dans l'équation (14) pour obtenir

$$24\varepsilon_{2222} = (16n^2(2n^2 - 6n + 3) - 32n^2(n-1)(n-3) - 8n^2(n-2)(n-3) + 10n(n-1)(n-2)(n-3)) \\ (n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$

et finalement, le nombre de droites tangentes à la surface S en quatre points et donné par

$$\varepsilon_{2222} = \frac{n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3 + 6n^2 + 7n - 30)}{12}.$$

Par exemple, une surface de degré 8 possède 14752 quadritangentes.

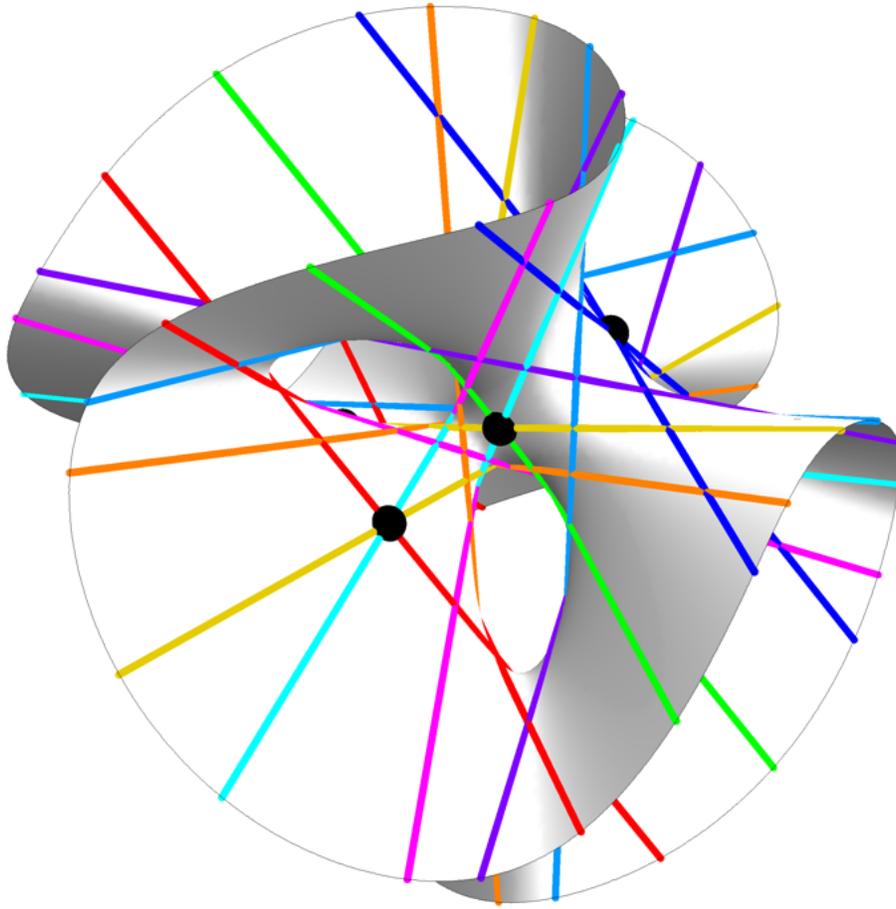


FIGURE 7 – La cubique de Clebsch, contenant 27 droites

Références

- [1] R. Bott, L. W. Tu, DIFFERENTIAL FORMS IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, Springer, 1982.
- [2] M. Chasles, *Considérations sur la méthode générale exposée dans la séance du 15 février...- Procédés généraux de démonstration*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 58 :1167-1175, 1864.
- [3] A. Dold, LECTURES IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, Springer Classics in Mathematics, 1972, 2015 reprint.
- [4] W. Fulton, INTERSECTION THEORY, Springer, Second Edition, 1998.
- [5] R. Hartshorne, ALGEBRAIC GEOMETRY, Springer, 1977.
- [6] K. W. Johnson, *Immersion and embedding of projective varieties*, Institute of advanced studies, Princeton, Acta Mathematica, Vol. 140, 49-74, 1978.
- [7] J. Milnor, J. D. Stasheff, CHARACTERISTIC CLASSES, Princeton University Press & Tokyo University Press, Princeton, 1974.
- [8] F. Ronga, *Schubert calculus according to Schubert*, arXiv :math/0608784, 2008.
- [9] H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Teubner Verlag, Leipzig, 1879.
- [10] R. Stong, *Notes on cobordism theory*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, 1968.