Démonstration du théorème fondamental de l'Analyse

Arthur GARNIER

Le 26 février 2014

Table des matières

1	Énoncé	2
2	Démonstration	3

Chapitre 1

Énoncé

Le théorème dont il est question est, comme son nom l'indique, un résultat d'une importance capitale en analyse, et plus particulièrement en calcul intégral puisqu'il donne un moyen "simple" et directe pour calculer de façon exacte l'intégrale de Riemann de n'importe quelle fonction numérique continue sur un compact de $\mathbb{R}$ et il permet même le calcul d'intégrales généralisées, à paramètres, complexes, de fonctions vectorielles, etc.

Sans plus attendre, énonçons ce résultat décrit par Riemann lui-même comme étant "le plus beau théorème que l'on sache démontrer..."

THÉORÈME 1

Soient $[a, b]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ un compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f . Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Chapitre 2

Démonstration

Avant de démontrer le résultat, nous donnons un lemme qui nous permettra de prouver le théorème ensuite :

LEMME 1

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, f admet une unique primitive valant λ en a .

PREUVE 1

La fonction f étant continue, on sait que son intégrale existe, on peut donc

définir l'application suivante :
$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lambda + \int_a^x f(t) dx$$

On va montrer que c'est l'unique primitive que l'on recherche. Montrons d'abord l'existence : on doit donc justifier que $F' = f$

Soit donc $x_0 \in [a, b]$ fixé. On calcul :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} (\lambda + \int_a^x f(t) dt - \lambda - \int_a^{x_0} f(t) dt) - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} (\int_{x_0}^x f(t) dt - (x - x_0)f(x_0)) \right| \end{aligned}$$

en supposant que $x_0 < x$ mais le résultat reste inchangé si $x_0 > x$. Par définition et avec les propriétés de l'intégrale, on obtient :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0) dt \right) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \quad (1)$$

Or, f est continue sur $[a, b]$, donc elle est continue en x_0 , ce qui signifie :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$, pour $x \in [a, b]; |x - x_0| < \eta$ on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, d'où avec (1) :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon$$

On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \eta \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$

Ce qui est, par définition : $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ et ce pour tout $x_0 \in [a, b]$ donc $F' = f$.

Montrons l'unicité : soit G une autre primitive de f valant λ en a , on a :
 $G' = f = F'$ donc $F - G$ est une fonction constante, or $F(a) - G(a) = 0$
donc $F = G$, d'où l'unicité, et le lemme est démontré. $\square$

Nous pouvons à présent prouver le théorème :

PREUVE 2

On sait, grâce au lemme, que f admet une unique primitive sur $[a, b]$, valant λ en a ; soit donc F une telle primitive. On écrit : $\lambda := F(a)$, et on a :

$$\forall x \in [a, b], F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$$

Finalement, il suffit d'évaluer l'expression précédente en $x = b$ pour obtenir

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t) dt \Leftrightarrow \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad \square$$