

QUELQUES (AFFREUX) CALCULS EN TYPE A_2

ARTHUR GARNIER

1. ACTION DE W SUR $\mathcal{B} = \mathcal{B}(A_2)$

On se donne $g := \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R})$ (ou plutôt une classe modulo B), représentant

un drapeau

$$V_\bullet := \left[L := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \subset P := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3 \right]$$

que l'on écrit plutôt

$$V_\bullet := \left[\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) \right]$$

On va l'orthogonaliser (sans faire attention aux normes, puisque $T \subset B$). On considère les mineurs

$$\begin{cases} m_1 := ae - bd \\ m_2 := af - cd \\ m_3 := bf - ce \end{cases}$$

et on voit que

$$L^{\perp P} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -bm_1 - cm_2 \\ am_1 - cm_3 \\ am_2 + bm_3 \end{pmatrix} \right)$$

et, avec le produit vectoriel

$$P^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} m_3 \\ -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix} \right)$$

et on note alors g' (ou $g^\perp$) l'orthogonalisée

$$g' := \begin{pmatrix} a & -bm_1 - cm_2 & m_3 \\ b & am_1 - cm_3 & -m_2 \\ c & am_2 + bm_3 & m_1 \end{pmatrix}$$

représentant le drapeau

$$V_\bullet^\perp := \left[\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bm_1 - cm_2 \\ am_1 - cm_3 \\ am_2 + bm_3 \end{pmatrix} \right) \right]$$

De plus, si $g = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in B$, alors on a $g' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2e & 0 \\ 0 & 0 & ae \end{pmatrix} \in T \subset B$ donc on obtient

une application

$$\begin{array}{ccc} SL_3(\mathbb{R}) & \rightarrow & GL_3(\mathbb{R}) \\ g & \mapsto & g' \end{array}$$

qui passe au quotient

$$\begin{array}{ccc} SL_3(\mathbb{R})/B & \rightarrow & GL_3/B \\ \bar{g} & \mapsto & \bar{g}' \end{array}$$

(on fait ici l'abus de confondre le Borel standard de SL_3 et celui de GL_3).

Ensuite, $W = \mathfrak{S}_3$ agit à droite par multiplication sur g' (ce qui est cohérent puisque W agit sur un drapeau "orthogonal" en permutant ses droites). Ainsi, pour $g \in GL_3(\mathbb{R})$, et $w \in \mathfrak{S}_3$, on a

$$w \cdot \bar{g} = \bar{g}' w^{-1}.$$

Notons que $g' \in GL_3(\mathbb{R})$ mais qu'a priori, $g' \notin SL_3(\mathbb{R})$, ce dont on se fiche puisque les variétés de drapeaux sont les mêmes. Après, on peut choisir de divier une colonne de g' par $\det(g') \neq 0$ et ensuite, puisque $W = \mathfrak{S}_3$ ne fait que permuter les colonnes, il suffira de diviser la colonne résultante par le déterminant et on obtiendra une classe dans SL_3 . Pour éviter tout ça, on suppose dès le départ que l'on regarde le groupe réductif $G = GL_3(\mathbb{R})$ plutôt que le groupe semi-simple $SL_3(\mathbb{R})$ et on s'intéresse à $GL_3/B \simeq SL_3/(SL_3 \cap B)$.

2. STRATES DE LUSZTIG-RIETSCH DE $\mathcal{B}_{\geq 0}$

On a 19 strates $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ dont six de dimension 0, huit de dimension 1, quatre de dimension 2 et une de dimension 3. Les paramétrages sont donnés par (sous-entendu, les variables t, t', t'' vivent dans $\mathbb{R}_{>0}$)

- Dimension 0 :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{R}_{1,1}^{>0} = \{B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha, s_\alpha}^{>0} = \{s_\alpha \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta, s_\beta}^{>0} = \{s_\beta \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha s_\beta, s_\alpha s_\beta}^{>0} = \{s_\alpha s_\beta \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta s_\alpha, s_\beta s_\alpha}^{>0} = \{s_\beta s_\alpha \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{R}_{w_0, w_0}^{>0} = \{w_0 \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \end{array} \right.$$

- Dimension 1 :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{R}_{1,s_\alpha}^{>0} = \{y_\alpha(t) \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{1,s_\beta}^{>0} = \{y_\beta(t) \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha, s_\alpha s_\beta}^{>0} = \{s_\alpha y_\beta(t) \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha, s_\beta s_\alpha}^{>0} = \{y_\beta(t) s_\alpha \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta, s_\alpha s_\beta}^{>0} = \{y_\alpha(t) s_\beta \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta, s_\beta s_\alpha}^{>0} = \{s_\beta y_\alpha(t) \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha s_\beta, w_0}^{>0} = \{s_\alpha s_\beta y_\alpha(t) \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta s_\alpha, w_0}^{>0} = \{y_\alpha(t) s_\beta s_\alpha \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -t & -1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \end{array} \right.$$

- Dimension 2 :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{R}_{1,s_\alpha s_\beta}^{>0} = \{y_\alpha(t) y_\beta(t') \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t' & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{1,s_\beta s_\alpha}^{>0} = \{y_\beta(t) y_\alpha(t') \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t' & 1 & 0 \\ tt' & t & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\alpha, w_0}^{>0} = \{y_\alpha(t) y_\beta(t') s_\alpha \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ t' & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \\ \mathcal{R}_{s_\beta, w_0}^{>0} = \{y_\alpha(t) s_\beta y_\alpha(t') \cdot B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ t' & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B \right\} \end{array} \right.$$

- Dimension 3 :

$$\mathcal{R}_{1,w_0}^{>0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t+t'' & 1 & 0 \\ t't'' & t' & 1 \end{pmatrix} \cdot B \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t' & t'' & 1 \end{pmatrix} \cdot B ; tt'' > t' \right\} = U_{>0}^- \cdot B = \mathcal{B}_{>0}$$

3. IMAGES DES STRATES DE LUSZTIG-RIETSCH SOUS $\mathfrak{S}_3$

On inspecte ceci dimension par dimension.

Dimension 0 : On vérifie que pour tout $w \in \mathfrak{S}_3$, on a $w' = w$ et il en découle que

$$\forall v, w \in W, w \cdot \mathcal{R}_{v,v}^{>0} = \mathcal{R}_{vw^{-1}, vw^{-1}}^{>0}$$

et ceci se généralise immédiatement à tout groupe G .

Dimension 1 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{1,s_\alpha}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 0 & -t & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\
 \\
 \mathcal{R}_{1,s_\beta}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -t & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\
 \\
 \mathcal{R}_{s_\alpha, s_\alpha s_\beta}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 0 & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{s_\alpha, s_\beta s_\alpha}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 0 & -1-t^2 & 0 \\ 1 & 0 & -t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -1-t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -t \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+t^2 \\ 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+t^2 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -1-t^2 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 1+t^2 & 0 \\ -t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\
\\
\mathcal{R}_{s_\beta, s_\alpha s_\beta}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 0 & -1 \\ 0 & 1+t^2 & 0 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 0 & -t & -1 \\ 1+t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t^2 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -1-t^2 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \\ 1+t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ -1 & 0 & t \\ 0 & -1-t^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\
\\
\mathcal{R}_{s_\beta, s_\beta s_\alpha}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & -1 & 0 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & -1 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{s_\alpha s_\beta, w_0}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & -t & -1 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\
\mathcal{R}_{s_\beta s_\alpha, w_0}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -t & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 0 & -t & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ -t & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ 0 & -1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ -1 & 0 & t \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \\ -t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Dimension 2 :

$$\mathcal{R}_{1, s_\alpha s_\beta}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t' & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & -t & tt' \\ t & 1 & -t' \\ 0 & t'(1+t^2) & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{aligned} s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -t & -1 & tt' \\ 1 & -t & -t' \\ t'(1+t^2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} 1 & tt' & t \\ t & -t' & -1 \\ 0 & 1 & -t'(1+t^2) \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g &= \begin{pmatrix} tt' & -1 & t \\ -t' & -t & -1 \\ 1 & 0 & -t'(1+t^2) \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g &= \begin{pmatrix} -t & tt' & 1 \\ 1 & -t' & t \\ t'(1+t^2) & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g &= \begin{pmatrix} tt' & t & 1 \\ -t' & -1 & t \\ 1 & -t'(1+t^2) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$\mathcal{R}_{1,s_\beta s_\alpha}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t' & 1 & 0 \\ tt' & t & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & -t'(1+t^2) & 0 \\ t' & 1 & -t \\ tt' & t & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t'(1+t^2) & -1 & 0 \\ 1 & -t' & -t \\ t & -tt' & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t'(1+t^2) \\ t' & -t & -1 \\ tt' & 1 & -t \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t'(1+t^2) \\ -t & -t' & -1 \\ 1 & -tt' & -t \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t'(1+t^2) & 0 & 1 \\ 1 & -t & t' \\ t & 1 & tt' \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & t'(1+t^2) & 1 \\ -t & -1 & t' \\ 1 & -t & tt' \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{R}_{s_\alpha, w_0}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ t' & 0 & 1 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 0 & -1-t'^2 & tt' \\ 1 & -tt'^2 & -t' \\ t' & tt' & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -1-t'^2 & 0 & tt' \\ -tt'^2 & -1 & -t' \\ tt' & -t' & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & tt' & 1+t'^2 \\ 1 & -t' & tt'^2 \\ t' & 1 & -tt' \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} tt' & 0 & 1+t'^2 \\ -t' & -1 & tt'^2 \\ 1 & -t' & -tt' \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -1-t'^2 & tt' & 0 \\ -tt'^2 & -t' & 1 \\ tt' & 1 & t' \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} tt' & 1+t'^2 & 0 \\ -t' & tt'^2 & 1 \\ 1 & -tt' & t' \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{R}_{s_\beta, w_0}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & -1 \\ t' & 1 & 0 \end{pmatrix}, g' = \begin{pmatrix} 1 & -t' & t \\ t & -tt' & -1 \\ t' & 1+t^2 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t' & -1 & t \\ -tt' & -t & -1 \\ 1+t^2 & -t' & 0 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & t & t' \\ t & -1 & tt' \\ t' & 0 & -1-t^2 \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} t & -1 & t' \\ -1 & -t & tt' \\ 0 & -t' & -1-t^2 \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t' & t & 1 \\ -tt' & -1 & t \\ 1+t^2 & 0 & t' \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} t & t' & 1 \\ -1 & tt' & t \\ 0 & -1-t^2 & t' \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Dimension 3 :

$$\mathcal{R}_{1,w_0}^{>0} : g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t' & t'' & 1 \end{pmatrix} \quad (m := tt'' - t'), \quad g' = \begin{pmatrix} 1 & -t - t't'' & m \\ t & 1 - t'm & -t'' \\ t' & t'' + tm & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} -t - t't'' & -1 & m \\ 1 - t'm & -t & -t'' \\ -t'' - tm & -t' & 1 \end{pmatrix} \\ s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & m & t't'' - t \\ t & -t'' & t'm - 1 \\ t' & 1 & -t'' - tm \end{pmatrix} \\ s_\alpha s_\beta \cdot g = \begin{pmatrix} m & -1 & t't'' - t \\ -t'' & -t & t'm - 1 \\ 1 & -t' & -t'' - tm \end{pmatrix} \\ s_\beta s_\alpha \cdot g = \begin{pmatrix} t - t't'' & m & 1 \\ 1 - t'm & -t'' & t \\ t'' + tm & 1 & t' \end{pmatrix} \\ w_0 \cdot g = \begin{pmatrix} m & t't'' - t & 1 \\ -t'' & t'm - 1 & t \\ 1 & -t'' - tm & t' \end{pmatrix} \end{array} \right.$$