Caractères complexes des groupes généraux linéaires de rang deux sur les corps finis

Arthur Garnier

7 juillet 2017

Table des matières

Préambule

Ce travail a pour objectif de déterminer de façon générale la table des caractères irréductibles (linéaires complexes) des groupes généraux linéaires GL_2 sur les corps finis. Nous avons déjà, lors d'un précédent mémoire, donné de manière *ad hoc* (en utilisant notamment la théorie de Sylow) les caractères de $GL_2(\mathbb{F}_3)$: nous généralisons cela ici. Aussi développerons-nous des méthodes systématiques. Notre présentation suit de près celle donnée dans [4], que nous avons cherché à compléter et développer.

Nous déterminerons les classes de conjugaisons en passant par l'étude générale des sous-groupes de Cartan et de Borel de GL_2 ; pour lesquels nous aurons besoin de la notion d'endomorphisme semi-simple, que nous présentons rapidement en début d'exposé. Nous encourageons le lecteur à consulter Bourbaki pour plus de précisions sur cette notion et son lien avec les modules semi-simples. De plus, dans notre première partie, nous simplifierons l'exposé en supposant le corps de base parfait (ce qui nous suffira puisque tout corps fini est parfait), mais signalons que nos résultats restent valables dans un corps quelconque.

La méthode employée pour trouver les caractères simples utilisera à fond les représentations induites, obtenues à partir de représentations de degré 1 de sous-groupes abéliens (à savoir les sous-groupes diagonale, de Borel et de Cartan). Nous étudierons leur éventuelle simplicité et nous verrons que dans deux des types de caractères trouvés (il y en a quatre), il nous faudra retirer une composante pour les rendre simples.

Nous récapitulerons enfin nos résultats dans la table générale de $GL_2(q)$, dont on dérivera le fait que pour $q \neq 2$, on a $D(GL_2(q)) = SL_2(q)$. En guise de conclusion, nous appliquons nos considérations globales aux cas $q \in \{2, 3, 4\}$, pour lesquels nous donnons une procédure systématique de calcul des tables.

Première partie

Généralités, sous-groupes de Cartan

Soient $\mathbb{F}$ un corps parfait et $V := \mathbb{F}^2$ l'espace vectoriel bidimensionnel sur $\mathbb{F}$, sur lequel $GL_2(\mathbb{F})$ agit naturellement. Considérons $\mathbb{F}^a = \overline{\mathbb{F}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et notons

$$V^a := \mathbb{F}^a \otimes_{\mathbb{F}} V \simeq \mathbb{F}^a \times \mathbb{F}^a.$$

L'isomorphisme annoncé ici provient du fait général suivant (voir [7], Chapter 1, Lemma 1.7.9 & Lemma 1.7.10) : Si A est une algèbre et si M est un A-module, alors on a $M \otimes_A A \simeq M$ d'où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$M \otimes_A A^n = M \otimes_A \bigoplus_{1\leq i\leq n} A = \bigoplus_{1\leq i\leq n} M \otimes_A A \simeq \bigoplus_{1\leq i\leq n} M = M^n,$$

et dans notre cas, ceci entraîne $\mathbb{F}^a \otimes V = \mathbb{F}^a \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^2 \simeq (\mathbb{F}^a)^2$.

Définition 1. * Un élément $\alpha \in GL_2(\mathbb{F})$ est dit semi-simple si V^a est un $\mathbb{F}^a[\alpha]$-module semi-simple ; où $\mathbb{F}^a[\alpha]$ est la sous-$\mathbb{F}$-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ engendrée par 1 et α.

* Un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{F})$ est dit semi-simple si tous ses éléments le sont.

Remarque 1. • Pour $G \leq GL_2(\mathbb{F})$, on note $\mathbb{F}G$ l'algèbre du groupe G. Les notions de $\mathbb{F}G$-module et de $\mathbb{F}[G]$-module sont équivalentes (autrement dit, on a une équivalence de catégories $\mathbb{F}G - \mathfrak{Mod} \simeq \mathbb{F}[G] - \mathfrak{Mod}$). Ceci montre que $\mathbb{F}[G]$ est semi-simple si et seulement si $\mathbb{F}G$ l'est ; ce qui nous permet d'invoquer à loisir le théorème de Maschke dans le cas de groupes finis.

• Concernant la définition et les propriétés des endomorphismes semi-simples, on renvoie le lecteur à [1], Chapitre 8, §9. De façon générale, on dit d'une famille $\mathscr{F}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel V (sur un corps $\mathbb{k}$), pour laquelle on note $A = \mathbb{k}[\mathscr{F}]$ la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ engendrée par $\mathscr{F}$, qu'elle est semi-simple si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

  * A est semi-simple,
  * V est un A-module semi-simple,
  * Tout sous-espace de V $\mathscr{F}$-stable admet un supplémentaire $\mathscr{F}$-stable.

  Pour la démonstration, on pourra consulter Bourbaki.
  Ensuite, pour une extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{k}$ et un endomorphisme $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$, on note $u_{(\mathbb{K})} := 1 \otimes u$ l'endomorphisme de $V_{(\mathbb{K})} := \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{k}} V$ déduit de u par extension des scalaires. On note de même $\mathscr{F}_{(\mathbb{K})}$ l'ensemble des $u_{(\mathbb{K})}$ pour $u \in \mathscr{F}$. On dit alors que $\mathscr{F}$ est absolument semi-simple si $\mathscr{F}_{(\mathbb{K})}$ est semi-simple pour toute extension $\mathbb{K}$ de $\mathbb{k}$. On a alors les proptiétés suivantes :

  (a) Si $\mathscr{F}_{(\mathbb{K})}$ est semi-simple, alors il en est de même de $\mathscr{F}$.

  (b) Si $\mathscr{F}$ est semi-simple et si $\mathbb{K}/\mathbb{k}$ est séparable, alors $\mathscr{F}_{(\mathbb{K})}$ est semi-simple.

Nous utiliserons librement ces résultats dans la suite.

Revenons à notre propos. Soit $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ une extension quadratique (séparable) et choisissons une base de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{F}$. La représentation régulière de $\mathbb{K}$ relativement à cette base est la multiplication (des éléments de $\mathbb{K}$) par des éléments de $\mathbb{K}^\times$, ce qui donne une représentation fidèle

$$j : \mathbb{K}^\times \hookrightarrow GL_2(\mathbb{F}).$$

Rendons cette action plus explicite. L'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est finie et séparable, donc par le théorème de l'élément primitif, il existe $\omega \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{F}(\omega)$. Alors, $(1, \omega)$ est une base de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{F}$ et soit $\mu_{\omega,\mathbb{F}}(X) = X^2 + aX + b$ le polynôme minimal de ω. Si $k := x + y\omega \in \mathbb{K}$, on a $k \cdot 1 = x + y\omega$ et $k \cdot \omega = x\omega + y\omega^2 = (x - ya)\omega - yb$, donc la multiplication par k est représentée dans la base $(1, \omega)$ par la matrice

$$M(k) = \mathrm{Mat}_{(1,\omega)}(k\cdot ?) = \begin{pmatrix} x & -yb \\ y & x - ay \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est la forme quadratique sur $\mathbb{F}^2$

$$\det(M(k)) = x^2 - axy + by^2.$$

Par ailleurs, l'extension $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est quadratique, donc normale, donc galoisienne, de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) \simeq {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$ et soit σ le $\mathbb{F}$-automorphisme non trivial de $\mathbb{K}$. Si $\overline{\omega}$ désigne le conjugué (galoisien) de ω, alors $\overline{\omega} = \sigma(\omega)$. On peut alors calculer la norme de $k = a + y\omega \in \mathbb{K}$,

$$N_{\mathbb{F}}^{\mathbb{K}}(k) = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})} \tau(k) = k\sigma(k) = (x + y\omega)(x + y\overline{\omega})$$

$$= x^2 + xy(\omega + \overline{\omega}) + y\omega\overline{\omega} = x^2 - axy + by^2 = \det(M(k)).$$

Comme le déterminant et la norme sont invariants par changement de base, ceci montre l'égalité

$$j(\ker N_{\mathbb{F}}^{\mathbb{K}}) = SL_2(\mathbb{F}) \cap j(\mathbb{K}^\times).$$

Autrement dit, les éléments de norme 1 sont exactement les éléments de $SL_2(\mathbb{F})$ qui sont dans l'image de $\mathbb{K}^\times$. De plus, un changement de base de $\mathbb{K}$ correspond à la conjugaison de l'image de $\mathbb{K}$ dans $GL_2(\mathbb{F})$.

Définition 2. On note $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ une de ces images, appelée un sous-groupe de Cartan non-déployé.

Remarque 2. On a un morphisme canonique $\mathbb{K}^\times \to \mathcal{C}_{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbb{F}[\mathcal{C}_{\mathbb{K}}]$, qui se prolonge naturellement en un morphisme d'algèbres $\mathbb{K} \to \mathbb{F}[\mathcal{C}_{\mathbb{K}}]$, qui est clairement un isomorphisme. De plus, on voit que $\mathbb{F}[\mathcal{C}_{\mathbb{K}}]^\times = \mathcal{C}_{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{K}^\times$.

Lemme 1. *$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ est un sous-groupe semi-simple abélien maximal de $GL_2(\mathbb{F})$.*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ est semi-simple. Dans le cas où $\mathbb{F}$ est fini, de cardinal q et de caractéristique p, on a $|\mathbb{K}| = q^2$ et alors $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ est d'ordre divisant $q^2 - 1$, donc $\langle \alpha \rangle$ est d'ordre premier à $p = \mathrm{car}(\mathbb{F}^a)$, donc $\mathbb{F}^a[\alpha]$ est semi-simple par le théorème de Maschke et donc α est semi-simple. Dans le cas général, pour montrer que $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ est semi-simple, comme $\mathbb{F}$ est parfait et en tenant compte de la remarque 1, il suffit de montrer que V est semi-simple sur $\mathbb{F}[\alpha]$. Pour ce faire, il suffit de montrer que si α admet une droite propre dans V, alors cette droite admet une droite supplémentaire propre et ceci sera dès que α est une homothétie, ou dès que ses valeurs propres sont simples. Rappelons que la matrice de $\alpha = k = x + y\omega$ dans la base $(1, \omega)$ s'écrit

$$\alpha = M(k) = \begin{pmatrix} x & -yb \\ y & x - ay \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_\alpha(X) = \det(\alpha - X\mathrm{id}_V) = X^2 - \mathrm{tr}(\alpha)X + \det(\alpha),$$

de discriminant

$$\Delta(\chi_\alpha) = \mathrm{tr}(\alpha)^2 - 4\det(\alpha) = (2x - ay)^2 - 4x^2 + 4axy - 4by^2 = y^2(a^2 - 4b) = y^2\Delta(\mu_{\omega,\mathbb{F}}).$$

Comme $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ est séparable, $\mu_{\omega,\mathbb{F}}$ est séparable et donc $\Delta(\mu_{\omega,\mathbb{F}}) \neq 0$ et pour que $\Delta(\chi_\alpha) = 0$ il faut que $y = 0$, c'est-à-dire que $\alpha = x\mathrm{id}_V$. Ainsi, soit les valeurs propres de α sont simples, soit α est une homothétie, comme souhaité.
Ensuite, si $\alpha \in GL_2(\mathbb{F})$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}_\mathbb{K}$, alors $\alpha \in \mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]$. En effet, comme $\mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]$ est isomorphe en tant que $\mathbb{F}$-algèbre à $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]$ est un corps et un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension 2 donc, comme $\dim_\mathbb{F}(\mathcal{M}_2(\mathbb{F})) = 4$ et $\mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}] \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, on a $\dim_{\mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]}(\mathcal{M}_2(\mathbb{F})) = 2$ et si $\alpha \notin \mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]$, alors $(1, \alpha)$ est une famille $\mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]$-linéairement indépendante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, donc une base et $\mathcal{M}_2(\mathbb{F})$ serait commutative, ce qui n'est pas. Ainsi, $\alpha \in \mathbb{F}[\mathcal{C}_\mathbb{K}]^\times = \mathcal{C}_\mathbb{K}$ et donc $\mathcal{C}_\mathbb{K}$ est abélien maximal. □

Définition 3. * Le sous-groupe de Cartan déployé est, par définition,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{F}^\times \right\}.$$

* Un sous-groupe de Cartan est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F})$ conjugué à $\mathcal{A}$ ou à l'un des $\mathcal{C}_\mathbb{K}$.

Lemme 2. *Les sous-groupes semi-simples abéliens maximaux de $GL_2(\mathbb{F})$ sont exactement les sous-groupes de Cartan.*

Démonstration. Des égalités

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ dz & dt \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & dy \\ az & dt \end{pmatrix}$$

on déduit que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C_{GL_2(\mathbb{F})}(\mathcal{A}) \iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{A},$$

donc $\mathcal{A}$ est abélien maximal. De plus, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{F}$, donc sont semi-simples sur $\mathbb{F}$ et donc sur $\mathbb{F}^a$ puisque $\mathbb{F}$ est parfait (remarque 1). Ainsi, un sous-groupe de Cartan (déployé ou non) est un sous-groupe semi-simple abélien maximal de $GL_2(\mathbb{F})$.
Réciproquement, soit H un sous-groupe semi-simple abélien maximal de $GL_2(\mathbb{F})$. Si H est

diagonalisable sur $\mathbb{F}$, alors H est conjugué à $\mathcal{A}$. Sinon, H est diagonalisable sur $\mathbb{F}^a$. En effet, si $\alpha \in H$, comme $V^a = \mathbb{F}^a \oplus \mathbb{F}^a$ est semi-simple sur $\mathbb{F}^a[\alpha]$ et de dimension 2 sur $\mathbb{F}^a$, soit α possède deux sous-espaces propres, soit son unique espace propre est de dimension 2. En particulier, α n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Ainsi, si λ, μ sont les valeurs propres de α (dans $\mathbb{F}^a$), alors soit $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ et $\lambda \neq \mu$, auquel cas α est diagonalisable sur $\mathbb{F}$, ou bien $\lambda = \mu$ et $\alpha = \lambda \mathrm{id}_V$, soit $\lambda \notin \mathbb{F}$ et comme $\mathbb{F}$ est parfait, l'extension $\mathbb{F}^a/\mathbb{F}$ est séparable, donc λ est séparable sur $\mathbb{F}$, donc $\lambda \neq \mu$ et α se diagonalise sur $\mathbb{F}^a$. Ainsi, H se diagonalise sur $\mathbb{F}^a$ et ceci donne lieu à deux caractères :

$$\psi, \psi' : H \to (\mathbb{F}^a)^\times.$$

Pour chaque $\alpha \in H$, $\psi(\alpha)$ et $\psi'(\alpha)$ sont les valeurs propres de α et il existe $\alpha_0 \in H$ tel que $\psi(\alpha_0) \neq \psi'(\alpha_0)$, car sinon H se diagonaliserait sur $\mathbb{F}$. Les éléments $\psi(\alpha_0)$ et $\psi'(\alpha_0)$ sont ainsi conjugués quadratiques sur $\mathbb{F}$. Ensuite, $\psi(H)$ est un sous-groupe fini de $(\mathbb{F}^a)^\times$, donc est cyclique, disons engendré par $\psi(\alpha_1)$ et alors $\mathbb{K} := \mathbb{F}(\psi(\alpha_1))$ est quadratique. L'application

$$\begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{K} \\ \alpha & \mapsto & \psi(\alpha) \end{array}$$

se prolonge en une application $\mathbb{F}$-linéaire $\mathbb{F}[H] \twoheadrightarrow \mathbb{K}$, encore notée ψ. Comme H est abélien, $\mathbb{F}[H]$ est commutative, donc $\mathbb{F}[H] \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$. De plus, $\mathbb{F}[H]$ est semi-simple. En effet, dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$, comme H se diagonalise sur $\mathbb{F}^a$ et est semi-simple, l'ordre de tout élément de H est premier à p, donc l'ordre de H aussi par le premier théorème de Sylow, donc l'ordre de H est premier à la caractéristique de $\mathbb{F}$ et d'après le théorème de Maschke, $\mathbb{F}H$ est semi-simple et donc $\mathbb{F}[H]$ aussi. Dans le cas général, d'après la remarque 1, pour tout $\alpha \in H$, V^a est semi-simple sur $\mathbb{F}^a[\alpha]$, donc $H_{(\mathbb{F}^a)}$ est semi-simple, donc H est semi-simple (au sens de la remarque 1), donc V est semi-simple sur $\mathbb{F}[H]$ et donc $\mathbb{F}[H]$ est semi-simple. Ceci dit, la semi-simplicité de $\mathbb{F}[H]$ entraîne que $\psi : \mathbb{F}[H] \twoheadrightarrow \mathbb{K}$ est un isomorphisme. En effet, ψ est surjectif et comme $\ker \psi$ est un idéal (bilatère) de $\mathbb{F}[H]$, il admet un sous-$\mathbb{F}[H]$-module supplémentaire $M \subseteq \mathbb{F}[H]$ et on a $\mathbb{F}[H] = \ker \psi \oplus M$. Or, $\psi(1) \neq 0$ donc $1 \in M$ et comme M est un idéal, on doit avoir $M = \mathbb{F}[H]$ et donc $\ker \psi = 0$. L'image de H par ψ (qui est isomorphe à H) est contenue dans $\mathbb{K}^\times$ et est en fait égale à $\mathbb{K}^\times$ par maximalité de H et donc H est conjugué à $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$, qui est bien un sous-groupe de Cartan. □

Définition 4. Les caractères ψ, ψ' sont appelés les caractères propres du sous-groupe de Cartan.

Remarque 3.

- Dans le cas déployé, si $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, alors $\psi(\alpha) = a$ et $\psi'(\alpha) = d$ et ce sont des éléments de $\mathbb{F}$. Dans le cas non-déployé, ces valeurs sont conjuguées quadratiques sur $\mathbb{F}$ et sont dans $\mathbb{K}$.
- L'ordre d'un élément du groupe des unités d'un corps est premier à la caractéristique. En effet, si $x \in \mathbb{F}^\times$ (avec $p = \mathrm{car}(\mathbb{F})$) était d'ordre divisible par p, alors $\mathbb{F}^\times$ posséderait un élément d'ordre p, qui serait racine du polynôme $X^p - 1 = (X-1)^p$, ce qui est absurde. On en déduit qu'un élément d'ordre fini de $GL_2(\mathbb{F})$ est semi-simple si et seulement si son ordre n'est pas divisible par la caractéristique (et ce en vertu du théorème de Maschke).

Proposition 1. *Soit H un sous-groupe de Cartan de $GL_2(\mathbb{F})$. Alors, H est d'indice deux dans son normalisateur $N(H) := N_{GL_2(\mathbb{F})}(H)$:*

$$[N(H) : H] = 2.$$

Démonstration. On peut considérer que $GL_2(\mathbb{F})$ opère sur l'espace vectoriel $V^a = \mathbb{F}^a \oplus \mathbb{F}^a$, de dimension 2 sur $\mathbb{F}^a$. Que H soit ou non déployé, les caractères propres sont distincts (à cause de l'hypothèse de séparabilité dans le cas non-déployé) et un élément $n \in N(H)$ doit soit fixer les espaces propres, soit les permuter. Si n fixe les espaces propres de $\alpha \in H$, disons $E_a \neq E_b$ et si $\alpha = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} \in GL_2(\mathbb{F}^a)$, avec $nE_a = E_a$ et $nE_b = E_b$, alors $P^{-1}nP =: \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et on a alors

$$nAn^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} = A$$

et comme H est abélien, ses éléments se codiagonalisent et donc si $n \in N(H)$ fixe tous les espaces propres, alors $n \in C_{GL_2(\mathbb{F})}(H)$ et donc $n \in H$ par maximalité de H. Si $n \in N(H)$ échange les espaces propres, alors n n'est pas élément de H et par ce qui précède, doit donner lieu à une seule classe non triviale modulo H, et donc $[N(H) : H] = 2$. $\square$

Remarque 4.

- Dans le cas déployé, un représentant de $N(\mathcal{A}) / \mathcal{A}$ qui échange les espaces propres est

$$w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Dans le cas non-déployé, soient $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F}) \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{K}}\}$ et $(\omega, \sigma(\omega))$ une base normale. Une telle base existe car sinon, $\sigma(\omega) = \lambda_\omega \omega$ pour tout $\omega \in \mathbb{K}$, donc σ est une homothétie d'ordre 2, donc $\sigma \in \{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\}$, ce qui est impossible. Pour prouver l'existence d'une base normale, on peut aussi invoquer le théorème de la base normale, ou encore le théorème d'Artin sur l'indépendance linéaire des caractères. Dans la base normale $(\omega, \sigma\omega)$, la matrice de σ est

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans ce cas aussi, il existe un élément non trivial dans $N(\mathcal{C}_{\mathbb{K}}) / \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$. Notons que l'on a la relation

$$M(\sigma)M(x)M(\sigma)^{-1} = M(\sigma x), \ \forall x \in \mathbb{K}.$$

Deuxième partie
Classes de conjugaison de $GL_2(q)$

On se place désormais dans le cas d'un corps fini à $q = p^r$ éléments, de caractéristique p et on note $\mathbb{F} := \mathbb{F}_q$, $G := GL_2(\mathbb{F}) = GL(2,q) = GL_2(q)$, $Z := Z(G)$, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{K}^\times$ un sous-groupe de Cartan non-déployé de G.

Dans une clôture algébrique donnée $\mathbb{F}_q^a$, il n'existe qu'une seule extension quadratique $\mathbb{K}$ de $\mathbb{F}_q$, que l'on note $\mathbb{F}_{q^2} \subset \mathbb{F}_q^a$. Ainsi, à conjugaison près, il n'existe qu'un seul sous-groupe de Cartan non déployé $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{F}_{q^2}}$. Comme l'ordre de G est le nombre de bases de $\mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$, on a

$$|G| = (q^2-1)(q^2-q) = q(q+1)(q-1)^2.$$

Pour la classe de conjugaison de $\alpha \in G$, on a seulement deux cas :

* Cas 1 : Le polynôme caractéristique χ_α est réductible, auquel cas les valeurs propres de α sont dans $\mathbb{F}$ et χ_α est scindé. Par la réduction de Jordan, α est alors conjugué à l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \; d \neq a \in \mathbb{F}_q^\times.$$

  Elles sont appelées respectivement centrale, unipotente et rationnelle non centrale.

* Cas 2 : Le polynôme caractéristique $\chi_\alpha(X) = X^2 + aX + b$ est irréductible. Alors α est tel que $\mathbb{F}_q[\alpha] \simeq \mathbb{F}_{q^2}$. En effet, comme α se diagonalise sur $\mathbb{F}_{q^2}$ et a deux valeurs propres distinctes, $\mathbb{F}_q[\alpha]$ est de dimension 2 sur $\mathbb{F}_q$, tout comme $\mathbb{F}_{q^2}$ et le caractère $\langle \alpha \rangle \to \mathbb{F}_{q^2}$ induit un morphisme surjectif d'algèbres $\mathbb{F}_q[\alpha] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_{q^2}$, qui est un isomorphisme car $\dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_{q^2}) = 2 = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[\alpha])$. Alors $(1,\alpha)$ est une base de $\mathbb{F}_q[\alpha]$ sur $\mathbb{F}_q$ et la matrice associée à α pour la représentation par multiplication sur $\mathbb{F}_q[\alpha]$ est la matrice compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

On a ainsi le tableau récapitulatif suivant pour les classes de conjugaison :

Classes de conjugaison		
Représentants	**Nombre de classes**	**Nombre d'éléments par classe**
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{F}_q^\times$	$q-1$	1
$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{F}_q^\times$	$q-1$	q^2-1
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \; a \neq d \in \mathbb{F}_q^\times$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$q(q+1)$
$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q(q-1)$

TABLE 1

Dans chaque cas, le nombre d'éléments d'une classe donnée est calculé via l'indice du normalisateur (ou du centralisateur) de l'élément. Le premier cas est trivial. Pour le second, par calculs directs, le centralisateur est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{F}_q^\times, \ y \in \mathbb{F}_q$$

qui sont en nombre $q(q-1)$. Dans le troisième cas, un matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ centralise $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (avec $a \neq d$) si et seulement si $y = z = 0$ et alors le centralisateur de cette dernière matrice est d'ordre $(q-1)^2$, donc d'indice $q(q+1) = q^2+q$. On peut aussi le voir en utilisant la Proposition 1. Toujours d'après la Proposition 1, on a $[N(\mathcal{C}) : \mathcal{C}] = 2$ donc les éléments centralisant $\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$ sont exactement ceux de $\mathcal{C} \simeq \mathbb{F}_{q^2}^\times$, donc sont en nombre $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, donc α possède exactement $q(q-1) = q^2 - q$ conjugués.

Quant au nombre de classes de chaque type, les deux premièrs cas correspondent aux choix distincts d'un élément $a \in \mathbb{F}_q^\times$ et ce nombre est bien $q-1$. Dans le troisième cas, la classe de conjugaison est déterminée par les valeurs propres. Il existe $q-1$ choix possibles pour a et $q-2$ pour d ; or la classe de conjugaison est déterminée uniquement par la pair non ordonnée de valeurs propres $\{a, d\}$ et le nombre de classes est obtenu en divisant $(q-1)(q-2)$ par 2. Finalement, dans le cas d'un élément non trivial d'un sous-groupe de Cartan non-déployé, on a vu que si σ engendre $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{F})$, alors $M(\sigma x)$ est conjugué à $M(x)$ dans $GL_2(\mathbb{F})$. Réciproquement, si $x, x' \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ avec $M(x)$ conjugué à $M(x')$ dans $GL_2(\mathbb{F})$ pour une certaine représentation régulière de $\mathbb{K}^\times$ dans $\mathbb{K}$ pour une certaine base, alors cette conjugaison induit un automorphisme de $\mathbb{F}_q$-algèbres sur $\mathbb{F}[\mathcal{C}_{\mathbb{K}}]$, donc un $\mathbb{F}$-automorphisme de $\mathbb{K}$, qui est $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ ou σ. Par conséquent, le nombre de classes de conjugaison des éléments du quatrième type est

$$\frac{|\mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times|}{2} = \frac{|\mathbb{F}_{q^2}^\times| - |\mathbb{F}_q^\times|}{2} = \frac{q^2 - q}{2} = \frac{q(q-1)}{2}.$$

Troisième partie

Représentations induites et caractères irréductibles

3.1 Sous-groupe de Borel

Considérons le sous-groupe des matrices unipotentes :

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{F}_q \right\},$$

ainsi que le sous-groupe de Borel :

$$\mathcal{B} := \mathcal{U}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

C'est bien un sous-groupe car si $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ et $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, alors on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ad^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U},$$

donc $\mathcal{A}$ normalise $\mathcal{U}$ (i.e. $A \leq N_G(\mathcal{U})$) et donc $\mathcal{B}$ est bien un sous-groupe de G. De plus, on a

$$|\mathcal{B}| = \frac{|\mathcal{A}||\mathcal{U}|}{|\mathcal{A} \cap \mathcal{U}|} = |\mathcal{A}||\mathcal{U}| = q(q-1)^2.$$

Nous allons construire les représentations de G par des caractères induits de $\mathcal{B}$. Nous obtiendrons ainsi toutes les représentations irréductibles de G, en combinant correctement les induites. Nous considérerons quatre types de représentations irréductibles. En ce qui concerne le premier type, il sera constitué de caractères de degré 1, qui donc seront automatiquement irréductibles. Pour les autres types, on calculera les caractères induits pour montrer l'irréductibilité. Dans deux cas, il nous faudra soustraire un caractère de dimension 1 et nous verrons que les autres sont irréductibles. La procédure sera systématique et nous donnerons un tableau de valeurs pour chaque type. Nous vérifions, dans chaque cas, que pour le caractère χ dont nous voulons montrer l'irréductibilité, on a

$$\|\chi\|_G^2 = \|\chi\|_{L^2}^2 = \langle \chi | \chi \rangle_G = 1, \text{ i.e. } \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |G|.$$

Ceci fait, les tables de valeurs nous montrerons que les caractères ainsi obtenus sont distincts. Finalement, le nombre total de caractères distincts sera égal au nombre de classes de conjugaison, ce qui nous permettra de conclure quant à l'exhaustivité de notre répertoire de caractères.

Nous allons maintenant mettre en œuvre ce programme :

3.2 Premier type

D'un morphisme

$$\mu : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times,$$

(i.e. un élément du groupe dual $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$), on tire un caractère linéaire

$$\mu \circ \det : G \to \mathbb{C}^\times.$$

Petite parenthèse : notons que si $\mu := \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est le symbole de Legendre sur $\mathbb{F}_p$ avec $p \neq 2$, alors $\mu \circ \det = \varepsilon$ est la signature d'un endomorphisme, vu comme permutation du groupe $\mathfrak{S}(V)$. Ce phénomène provient du théorème de Frobenius-Zolotarev.
Les valeurs de $\mu \circ \det$ sur les classes de conjugaison sont données par le tableau

χ \ g^G	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a \neq d$	$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
$\mu \circ \det$	$\mu(a)^2$	$\mu(a)^2$	$\mu(ad)$	$\mu(\det(\alpha))$

Table 2

La dernière équation s'écrit encore

$$\mu(\det(\alpha)) = \mu(N_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_{q^2}}(\alpha)),$$

par le début de l'exposé, en considérant α comme élément de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$.

Définition 5. Un caractère de G sera dit du premier type s'il est égal à $\mu \circ \det$ pour un certain $\mu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$.

Il existe $q-1$ tels caractères car $\widehat{\mathbb{F}_q^\times} \simeq \mathbb{F}_q^\times$ est cyclique d'ordre $q-1$.

3.3 Second type

Par le deusième théorème d'isomorphisme, comme $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = 1$, on a

$$\mathcal{B}/\mathcal{U} = \mathcal{AU}/\mathcal{U} = \mathcal{UA}/\mathcal{U} \simeq \mathcal{A}/(\mathcal{A} \cap \mathcal{U}) \simeq \mathcal{A}.$$

Un caractère de $\mathcal{A}$ peut ainsi être vu comme un caractère de $\mathcal{B}$, via le quotient $\mathcal{B}/\mathcal{U} = \mathcal{A}$. Posons

$$\psi_\mu := \mathrm{res}_{\mathcal{A}}^G(\mu \circ \det) : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^\times$$

et on considère $\psi_\mu : \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{A} \to \mathbb{C}^\times$ comme un caractère sur $\mathcal{B}$. Ainsi, on a

$$\psi_\mu \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \psi_\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \mu \circ \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \mu(ad)$$

et on obtient le caractère induit

$$\psi_\mu^G := \mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi_\mu)$$

qui n'est pas irréductible car il contient $\mu \circ \det$, par réciprocité de Frobenius :

$$\left\langle \psi_\mu^G | \mu \circ \det \right\rangle_G = \left\langle \mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G \psi_\mu | \mu \circ \det \right\rangle_G = \left\langle \psi_\mu | \mathrm{res}_{\mathcal{B}}^G(\mu \circ \det) \right\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\mu \circ \det(\beta)|^2$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{a,d \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q} \left| \mu \left(\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) \right|^2 = \frac{q}{q(q-1)^2} \sum_{a,d} |\mu(ad)|^2$$

$$= \left(\frac{1}{q-1} \sum_{k \in \mathbb{F}_q^\times} |\mu(k)|^2 \right)^2 = \langle \mu | \mu \rangle_{\mathbb{F}_q^\times}^2 = 1.$$

Remarquons que l'on aurait pu être plus direct, en se souvenant que $\mathrm{res}_{\mathcal{B}}^G(\mu \circ \det)$ est irréductible, car de degré 1, et en écrivant

$$\left\langle \psi_\mu^G | \mu \circ \det \right\rangle_G = \left\langle \mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G \psi_\mu | \mu \circ \det \right\rangle_G = \left\langle \psi_\mu | \mathrm{res}_{\mathcal{B}}^G(\mu \circ \det) \right\rangle_{\mathcal{B}} = \|\mathrm{res}_{\mathcal{B}}^G(\mu \circ \det)\|_{\mathcal{B}}^2 = 1.$$

Définition 6. Les caractères $\chi_\mu = \psi_\mu^G - \mu \circ \det$ sont dits du second type.

Les valeurs des χ_μ sont données par

χ \ g^G	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a \neq d$	$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
$\chi_\mu = \psi_\mu^G - \mu \circ \det$	$q\mu(a)^2$	0	$\mu(ad)$	$-\mu(\det(\alpha))$

Table 3

Pour ceci, on calcule $\mathrm{tr}(\psi_\mu^G)$ et on soustrait $\mu \circ \det$. On utilise la formule (voir [6], §3.3, Théorème 12)

$$\mathrm{ind}_H^G(\varphi)(u) = \frac{1}{|H|} \sum_{v \in G\ ;\ u^v \in H} \varphi(u^v) = \frac{1}{|H|} \sum_{v \in G} \varphi_H(vuv^{-1}) = \sum_{r \in R} \varphi_H(rur^{-1}),$$

où $\varphi_H := \mathbb{1}_H \cdot \varphi$ et R est un système de représentants des classes à gauche modulo H. Comme un élément de Z commute à tout $v \in G$, pour $\varphi = \psi_\mu$, la valeur du caractère induit sur un tel élément est alors

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi_\mu) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = [G : \mathcal{B}] \psi_\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = (q+1)\mu(a)^2,$$

d'où $\chi_\mu \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = q\mu(a)^2$. Pour $u = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, les seuls $v \in G$ tels que $vuv^{-1} \in \mathcal{B}$ sont les éléments de $\mathcal{B}$ lui-même (comme on le voit par calculs directs). Il est alors immédiat que

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi_\mu)(u) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in \mathcal{B}} \psi_\mu(vuv^{-1}) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in \mathcal{B}} \psi_\mu(v)\psi_\mu(u)\psi_\mu(v)^{-1} = \psi_\mu(u) = \mu(a)^2,$$

d'où $\chi_\mu(u) = 0$. Ensuite, si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$, par calculs directs, on a

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{-1} \in \mathcal{B} \ \Leftrightarrow\ z = 0 \text{ ou } t = 0,$$

et

$$\begin{cases} t = 0 \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & \frac{x}{z}(a-d) \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ z = 0 \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & \frac{y}{t}(d-a) \\ 0 & d \end{pmatrix}. \end{cases}$$

d'où en notant $u := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$,

$$\operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^{G}(\psi_\mu)(u) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in G\ ;\ u^v \in \mathcal{B}} \psi_\mu(u^v) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \left(\sum_{u^v \in \mathcal{B},\ t=0} \psi_\mu(u^v) + \sum_{u^v \in \mathcal{B},\ z=0} \psi_\mu(u^v) \right)$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{B}|}(|\mathcal{B}|\mu(ad) + |\mathcal{B}|\mu(ad)) = 2\mu(ad),$$

d'où $\chi_\mu(u) = \mu(ad)$. Enfin, si $\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$, aucun $v \in G$ ne vérifie $v\alpha v^{-1} = \alpha^v \in \mathcal{B}$ car sinon α se diagonaliserait sur $\mathbb{F}_q$ ou serait conjugué à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, ce qui n'est pas, donc $\operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^{G}(\psi_\mu)(\alpha) = 0$ et donc $\chi_\mu(\alpha) = -u \circ \det(\alpha)$.

De la table ainsi obtenue, on tire de façon générale que, pour un caractère χ de G, on a

$$|G| \times \|\chi\|_G^2 \tag{1}$$

$$= \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \left| \chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right|^2 + (q^2 - 1) \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \left| \chi \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right|^2 + \frac{q(q+1)}{2} \sum_{a,d \in \mathbb{F}_q^\times\ ;\ a \neq d} \left| \chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right|^2 + \frac{q(q-1)}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times} |\chi(\alpha)|^2$$

Ceci entraîne

$$|G| \left\langle \chi_\mu | \chi_\mu \right\rangle_G = \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \left| q\mu(a)^2 \right|^2 + 0 + \frac{q(q+1)}{2} \sum_{\beta \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{F}_q^\times} |\mu(\det(\beta))|^2 + \frac{q(q-1)}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times} |\mu(\det(\alpha))|^2$$

$$= q^2(q-1)\|\mu^2\|_{\mathbb{F}_q^\times}^2 + \frac{q(q+1)}{2} \left(|\mathcal{A}| \|\mu \circ \det\|_{\mathcal{A}}^2 - (q-1)\|\mu \circ \det\|_{\mathbb{F}_q^\times}^2 \right) + \frac{q(q-1)}{2} \left| |\mathcal{C}| - |\mathbb{F}_q^\times| \right|$$

$$= q^2(q-1) + \frac{q(q+1)}{2}((q-1)^2 - (q-1)) + \frac{q(q-1)}{2}(q^2 - q) = q(q-1)^2(q+1) = |G|$$

car $\mu, \mu^2 \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ et $\mu \circ \det$ peut se voir comme un caractère sur $\mathbb{F}_q^\times$ et les groupes de Cartan. D'où $\|\chi_\mu\|^2 = 1$ et donc χ_μ est irréductible. Remarquons que le même calcul donnerait $\|\mu \circ \det\|_G^2 = 1$. Ainsi, les caractères du second type χ_μ sont irréductibles. De plus, on voit qu'il existe autant de tels caractères que d'éléments de $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$, à savoir $(q-1)$.

3.4 Troisième type

Soit $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme (i.e. $\psi \in \widehat{\mathcal{A}}$). D'après la Proposition 1, le représentant $w = w_{\mathcal{A}} = w^{-1}$ de ${N(\mathcal{A})}/{\mathcal{A}}$ est tel que

$$w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} w^{-1} = w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \alpha^w, \text{ si } \alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Cette conjugaison par w est un automorphisme involutif de $\mathcal{A}$. Soit $[w]\psi$ le caractère

$$([w]\psi)(\alpha) = \psi(w\alpha w) = \psi(\alpha^w), \ \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Alors, on a $[w](\mu \circ \det) = \mu \circ \det$. De plus, si $\chi \in \widehat{\mathcal{A}}$ vérifie $[w]\chi = \chi$, alors pour tous $a, d \neq 0$, on a

$$\chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

d'où

$$\forall k \neq 0, \ \chi \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \chi \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix} = 1,$$

donc $SL_2(q) = \ker(\det) \subseteq \ker(\chi)$ et donc χ se factorise par le déterminant :

$$\exists \mu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times} \ ; \ \chi = \mu \circ \det.$$

Ainsi, les caractères $\mu \circ \det$ sont exactement ceux invariants par $[w]$. De plus, pour les autres caractères ψ, on a $\psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ donc on peut écrire

$$\psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \psi_1(a)\psi_2(d)$$

pour des caractères distincts $\psi_1, \psi_2 \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$. En vertu de l'isomorphisme ${\mathcal{B}}/{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{A}$, on peut concevoir ψ comme un caractère sur $\mathcal{B}$ et si $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, alors $\psi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \psi_1(a)\psi_2(d)$ et on peut définir également $\psi \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} := \psi_1(a)\psi_2(d)$. On a alors

$$\operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^G([w]\psi)(u) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in G \ ; \ u^v \in \mathcal{B}} [w]\psi(u^v) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{u^v \in \mathcal{B}} \psi(wvu(wv)^{-1})$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{u^v \in \mathcal{B}^w} \psi(u^v) = \operatorname{ind}_{\mathcal{B}^w}^G(\psi) = \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi).$$

Soit alors $\psi^G := \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi) = \operatorname{ind}_{\mathcal{B}}^G([w]\psi)$.

Définition 7. Pour $[w]\psi \neq \psi$, les caractères $\chi := \psi^G$ sont dits du troisième type.

On a la table de valeurs suivante :

$\chi \backslash g^G$	$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\alpha = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a \neq d$	$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
$\psi^g,\ [w]\psi \neq \psi$	$(q+1)\psi(\alpha)$	$\psi(\alpha)$	$\psi(\alpha) + \psi(\alpha^w)$	0

TABLE 4

En effet, on a immédiatement

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in G} \psi \left(v \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} v^{-1} \right) = [G : \mathcal{B}]\psi(a) = (q+1)\psi(a).$$

Pour la seconde valeur, on a déjà vu que si $v \in G$ est tel que $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^v \in \mathcal{B}$, alors $v \in \mathcal{B}$ et la formule

$$\psi^G \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in \mathcal{B}} \psi \left(v \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} v^{-1} \right) = \psi \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

donne la valeur de ψ^G pour les éléments unipotents. Pour $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ avec $a \neq d$, on a la possibilité additionnelle des éléments $w \in N(\mathcal{A})$, d'où, en se rappelant que

$$\alpha^{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } t = 0,$$

et

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow \alpha^{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & a \end{pmatrix}, \\ z = 0 \Rightarrow \alpha^{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

et qu'il existe $q(q-1)^2 = |\mathcal{B}|$ éléments de chacun de ces types,

$$\psi^G(\alpha) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \sum_{v \in G\ ;\ \alpha^v \in \mathcal{B}} \psi(\alpha^v) = \frac{1}{|\mathcal{B}|} \left(\sum_{\mathrm{Sp}(\alpha^v) = (d,a)} \psi(\alpha^v) + \sum_{\mathrm{Sp}(\alpha^v) = (a,d)} \psi(\alpha^v) \right)$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{B}|} \left(|\mathcal{B}|\psi \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & a \end{pmatrix} + |\mathcal{B}|\psi \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = \psi(\alpha) + \psi(\alpha^w),$$

où la notation $\mathrm{Sp}(\beta) = (x, y)$ signifie que β s'écrit $\begin{pmatrix} x & * \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Enfin, pour un élément non trivial du sous-groupe de Cartan non-déployé, aucun de ses conjugués ne peut appartenir à $\mathcal{B}$, donc ψ^G s'annule sur ces éléments d'où la table.

Montrons qu'un caractère du troisième type $\chi = \psi^G$ est irréductible et pour cela, montrons que $\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |G|$. En utilisant les relations (2), on voit par calculs directs que si $\alpha, \alpha' \in \mathcal{A}$, alors α et α' sont conjugués dans G si et seulement si $\alpha = \alpha'$ ou $[w]\alpha = \alpha'$. En utilisant la grande équation (1), il vient alors

$$\sum_{g \in G} |\psi^G(g)|^2 = (q+1)^2(q-1) + (q-1)(q^2-1) + \frac{q(q+1)}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{F}_q^\times} |\psi(\alpha) + \psi(\alpha^w)|^2.$$

Le troisième terme s'écrit aussi

$$\frac{q(q+1)}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathbb{F}_q^\times}(\psi(\alpha)+\psi(\alpha^w))(\overline{\psi(\alpha)}+\overline{\psi(\alpha^w)})$$

$$=\frac{q(q+1)}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathbb{F}_q^\times}(\psi(\alpha)+\psi(\alpha^w))(\psi(\alpha^{-1})+\psi(\alpha^{-w}))=\frac{q(q+1)}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathbb{F}_q^\times}(2+\psi(\alpha^{1-w})+\psi(\alpha^{w-1}))$$

$$=\frac{q(q+1)}{2}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(2+\psi(\alpha^{1-w})+\psi(\alpha^{w-1}))-\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^\times}(2+\psi(\alpha^{1-w})+\psi(\alpha^{w-1}))\right).$$

Si $\alpha\in\mathbb{F}_q^\times$, alors $\alpha^{1-w}=\alpha^{w-1}=1$. Par hypothèse sur ψ, le caractère

$$\widetilde{\psi}:\alpha\mapsto\psi(\alpha^{1-w})=\frac{\psi(\alpha)}{[w]\psi(\alpha)}$$

est non-trivial (car $\psi\neq[w]\psi$) et ainsi la somme sur $\alpha\in\mathcal{A}$ des $\psi(\alpha^{1-w})$ est égale à $\left\langle\widetilde{\psi}|\mathbb{1}\right\rangle_{\mathcal{A}}=0$ et de même pour $\psi(\alpha^{w-1})$. On a donc

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(2+\psi(\alpha^{1-w})+\psi(\alpha^{w-1}))=2|\mathcal{A}|=2(q-1)^2$$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^\times}(2+\psi(\alpha^{1-w})+\psi(\alpha^{w-1}))=4|\mathbb{F}_q^\times|=4(q-1)$$

et donc le troisième terme vaut

$$\frac{q(q+1)}{2}\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathbb{F}_q^\times}|\psi(\alpha)+\psi(\alpha^w)|^2=\frac{q(q+1)}{2}(2(q-1)^2-4(q-1))=q(q^2-1)(q-3).$$

Ainsi,

$$\sum_{g\in G}|\psi^G(g)|^2=(q+1)^2(q-1)+(q-1)(q^2-1)+q(q^2-1)(q-3)=q(q-1)^2(q+1)=|G|$$

et donc ψ^G est bien irréductible.

On remarque enfin qu'il existe $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ caractères du troisième type. C'est le nombre des caractères ψ tels que $[w]\psi\neq\psi$, divisé par deux pour rendre compte du fait que $\psi^G=([w]\psi)^G$. À ceci près, les caractères induits sont distincts, comme on le voit directement sur le tableau de leurs valeurs.

3.5 Quatrième type

Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme (i.e. $\theta \in \widehat{\mathbb{F}_{q^2}^\times} = \widehat{\mathcal{C}}$), considéré comme un caractère de $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{F}_{q^2}}$. Par la Proposition 1, il existe $w \in N(\mathcal{C})$ tel que $w \notin \mathcal{C}$ et $w = w^{-1}$. Alors, l'application

$$\alpha \mapsto w\alpha w^{-1} = \alpha^w = [w]\alpha$$

est un automorphisme de $\mathcal{C}$. Par ailleurs, $x \mapsto x^w$ est aussi un $\mathbb{F}_q$-automorphisme de $\mathbb{F}_q[\mathcal{C}] \simeq \mathbb{F}_{q^2}$, que l'on note $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$. Par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$, on a (on notant $q = p^r$)

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2r\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

et par la Correspondance de Galois, il vient

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_p) \Big/ \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$$

et comme $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_p)$ est cyclique d'ordre $2r$ et $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ est cyclique d'ordre r, $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ est l'unique sous-groupe d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_p)$ et on note $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q) = \langle \tau \rangle$. Il existe donc une unique $\mathbb{F}_q$-involution de $\mathbb{F}_{q^2}$, or $x \mapsto x^q$ est une telle involution et donc $\sigma = \tau = (x \mapsto x^q)$. Ainsi, la conjugaison par w est l'automorphisme

$$\alpha \mapsto \alpha^q.$$

Le caractère conjugué $[w]\theta$ est ainsi tel que

$$([w]\theta)(\alpha) = \theta([w]\alpha) = \theta(\alpha^w) = \theta(\alpha^q)$$

et on obtient le caractère induit

$$\theta^G := \mathrm{ind}_{\mathcal{C}}^G(\theta) = \mathrm{ind}_{\mathcal{C}}^G([w]\theta).$$

Soient $\mu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ (comme pour le premier type) et $\lambda \in \widehat{\mathbb{F}_q}$ non trivial ($\lambda : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$), ainsi que (μ, λ) le caractère de $Z\mathcal{U}$ tel que

$$(\mu, \lambda)\begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & a \end{pmatrix} = (\mu, \lambda)\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) := \mu(a)\lambda(x)$$

et $(\mu, \lambda)^G := \mathrm{ind}_{Z\mathcal{U}}^G((\mu, \lambda))$. Calculons θ^G et $(\mu, \lambda)^G$. On a déjà

$$\theta^G\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \theta^G\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = 0,$$

car aucun des conjugués des éléments unipotents ou rationnels non centraux n'est dans $\mathcal{C}$. Ensuite,

$$\theta^G\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{v \in G \ ; \ u^v \in \mathcal{C}} \theta(u^v) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{v \in G} \theta(u) = [G : \mathcal{C}]\theta(a) = q(q-1)\theta(a)$$

et, par la Proposition 1 et la définition de w, si $\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$, alors

$$\theta^G(\alpha) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{v \in G \ ; \ \alpha^v \in \mathcal{C}} \theta(\alpha^v) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\left(\sum_{v \in \mathcal{C}} \theta(\alpha^v) + \sum_{wv \in \mathcal{C}} \theta(\alpha^v)\right)$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{C}|}(|\mathcal{C}|\theta(\alpha) + |\mathcal{C}|\theta(\alpha^w)) = \theta(\alpha) + \theta(\alpha^w),$$

ce qui donne les valeurs de θ^G. Ensuite, comme $Z\mathcal{U}$ est abélien, un conjugué d'un élément de G appartient à $Z\mathcal{U}$ si et seulement si l'élément est dans $Z\mathcal{U}$. Par maximalité de $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{F}_{q^2}}$, on a donc

$$(\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = (\mu, \lambda)^G(\alpha) = 0, \ \forall a \neq d \in \mathbb{F}_q^\times, \ \forall \alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times.$$

De plus, par calculs directs, on a $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}} \in Z\mathcal{U}$ si et seulement si $z = 0$, d'où

$$(\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{v \in G \ ; \ u^v \in Z\mathcal{U}} (\mu, \lambda)^G(u^v) = \frac{1}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \ z \neq 0} (\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & a\frac{x}{za} \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{q\mu(a)}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{xz \neq 0} \lambda\left(\frac{x}{za}\right) = \frac{q\mu(a)}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{xz \neq 0} \lambda\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$= \frac{q\mu(a)}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{z \neq 0} \sum_{x \neq 0} \lambda\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{q\mu(a)}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{z \neq 0} \left(\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \lambda\left(\frac{x}{z}\right) - \lambda(0) \right)$$

et pour tout $z \neq 0$, l'application $x \mapsto \lambda\left(\frac{x}{z}\right)$ est un caractère de $(\mathbb{F}_q, +)$ non trivial, donc $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \lambda\left(\frac{x}{z}\right) = q \left\langle \lambda\left(\frac{\cdot}{z}\right) | \mathbb{1} \right\rangle_{\mathbb{F}_q} = 0$ et donc $\sum_{xz \neq 0} \lambda\left(\frac{x}{z}\right) = -(q-1)$ et comme $|Z\mathcal{U}| = \frac{|Z||\mathcal{U}|}{|Z \cap \mathcal{U}|} = q(q-1)$, il vient

$$(\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{-q(q-1)\mu(a)}{q(q-1)} = -\mu(a).$$

Enfin,

$$(\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{u^v \in Z\mathcal{U}} (\mu, \lambda)^G(u^v)$$

$$= \frac{1}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{v \in G} (\mu, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = [G : Z\mathcal{U}]\mu(a) = (q^2 - 1)\mu(a).$$

On obtient donc la table intermédiaire

χ \ g^G	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ a \neq d$	$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
θ^G	$q(q-1)\theta(a)$	0	0	$\theta(\alpha) + \theta(\alpha^w)$
$(\mu, \lambda)^G$	$(q^2-1)\mu(a)$	$-\mu(a)$	0	0

Table 5

En notant $\text{res}\ \theta := \text{res}_{\mathbb{F}_q^\times}^{\mathbb{F}_{q^2}^\times} \theta$ (c'est l'un des caractères $\mu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$), la réciprocité de Frobenius donne

$$\left\langle (\text{res}\ \theta, \lambda)^G | \theta^G \right\rangle_G = \left\langle (\text{res}\ \theta, \lambda) | \text{res}_{Z\mathcal{U}}^G(\theta^G) \right\rangle_{Z\mathcal{U}} = \frac{1}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{x \in \mathbb{F}_q, \ a \in \mathbb{F}_q^\times} \theta(a)\lambda(x)\overline{\theta^G \begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & a \end{pmatrix}}$$

et comme $\begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est conjugué à $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ si $x \neq 0$, on a $\theta^G \begin{pmatrix} a & ax \\ 0 & a \end{pmatrix} = q(q-1)\delta_{x,0}$ et donc

$$\left\langle (\text{res } \theta, \lambda)^G | \theta^G \right\rangle = \frac{q(q-1)}{|Z\mathcal{U}|} \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} |\theta(a)|^2 = \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} |\theta(a)|^2 = \|\theta\|^2_{\mathbb{F}_q^\times} = q - 1 \neq 0.$$

Remarquons que l'on aurait pu éviter le recours à la réciprocité de Frobenius et écrire directement

$$\left\langle (\text{res } \theta, \lambda)^G | \theta^G \right\rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} (\text{res } \theta, \lambda)^G \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \overline{\theta^G \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}} = \frac{q(q-1)^2(q+1)}{|G|} \|\theta\|^2_{\mathbb{F}_q^\times} = q - 1.$$

Ainsi, θ^G apparaît dans le caractère $(\text{res } \theta, \lambda)^G$. On définit alors

$$\theta' := (\text{res } \theta, \lambda)^G - \theta^G = ([w]\theta)'.$$

Définition 8. Un caractère est du quatrième type s'il est égal à un θ', pour $[w]\theta \neq \theta$. La représentation correspondante est aussi dite cuspidale.

On a la table

g^G \ χ	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a \neq d$	$\alpha \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
θ', $[w]\theta \neq \theta$	$(q-1)\theta(a)$	$-\theta(a)$	0	$-\theta(\alpha) - \theta(\alpha^w)$

Table 6

Ces caracères sont simples car on a

$$\sum_{g \in G} |\theta'(g)|^2 = (q-1)^2(q-1) + (q^2-1)(q-1) + \frac{q(q-1)}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \setminus \mathbb{F}_q^\times} |\theta(\alpha) + \theta(\alpha^w)|^2.$$

En procédant comme pour le troisième type, il vient

$$\frac{q(q-1)}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\times,\ \alpha \notin \mathbb{F}_q^\times} |\theta(\alpha) + \theta(\alpha^w)|^2$$

$$= \frac{q(q-1)}{2} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} (2 + \theta(\alpha^{1-w}) + \theta(\alpha^{w-1})) - \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^\times} (2 + \theta(\alpha^{1-w}) + \theta(\alpha^{w-1})) \right)$$

$$= \frac{q(q-1)}{2} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^\times} (2 + \theta(\alpha^{1-q}) + \theta(\alpha^{q-1})) - \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q^\times} (2 + \theta(\alpha^{1-q}) + \theta(\alpha^{q-1})) \right)$$

$$= \frac{q(q-1)}{2}(2(q^2-1) - 4(q-1)) = q(q-1)^2(q+1) - 2q(q-1)^2,$$

d'où

$$\sum_{g\in G} |\theta'(g)|^2 = (q-1)^3 + (q+1)(q-1)^2 + q(q-1)^2(q+1) - 2q(q-1)^2 = q(q-1)^2(q+1) = |G|$$

et donc $\|\theta'\|_G = 1$, ce qui montre que θ' est irréductible.

Enfin, le nombre de tels caractères est égal à $\mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$ (pour avoir $\theta \neq [w]\theta$), divisé par deux pour tenir compte du fait que $\theta' = ([w]\theta)'$, donc vaut $\frac{q(q-1)}{2}$.

3.6 Récapitulatif

Nous avons exhibé des caractères de quatre types, dont on a pu compter le nombre de caractères de chaque type :

Type	**Nombre de caractères simples**
I	$q-1$
II	$q-1$
III	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$
IV	$\frac{q(q-1)}{2}$

et on a donc autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison ; la liste des caractères simples est donc exhaustive. En fait, le nombre de caractères irréductibles de chaque type est précisément le nombre de classes correspondantes données par la Table 1. On peut détailler cette correspondance

Caractères de type	**Classes d'éléments**
I	centraux
II	unipotents
III	rationnels non centraux
IV	non triviaux du sous-groupe de Cartan non déployé

Nous pouvons enfin calculer les degrés des caractères irréductibles, soit directement, soit en utilisant le fait que le degré d'un caractère induit est l'indice du sous-groupe d'où provient ledit caractère, que multiplie le degré du caractère sur le sous-groupe. On a donc la table récapitulative suivante :

Type		**Nombre de chaque type**	**Degré**
I	$\mu \circ \det$	$q-1$	1
II	$\psi_\mu^G - \mu \circ \det$	$q-1$	q
III	ψ^G ; $[w]\psi \neq \psi$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$q+1$
IV	θ' ; $[w]\theta \neq \theta$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q-1$

Quatrième partie

Table des caractères de $GL_2(q)$ et quelques exemples

4.1 Table générale

En faisant les comptes, nous sommes à présent en mesure de produire la tables des caractères linéaires complexes de $GL_2(\mathbb{F}_q)$. Par commodité, nous la donnons sur la page suivante. En l'inspectant de près, on remarque que l'on retrouve le résultat suivant :

$$\forall q \neq 2,\ D(GL_2(\mathbb{F}_q)) = SL_2(\mathbb{F}_q).$$

Table des caractères de $GL(2,q)$

Classes	**Représentants**			$\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \neq 0$	$\beta = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \neq 0$	$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a \neq d$	$\delta \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$
	Cardinal			1	q^2-1	$q(q+1)$	$q(q-1)$
	Nombre de classes			$q-1$	$q-1$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	$\frac{1}{2}q(q-1)$
Caractères	**Type**		**Nombre**	**Valeurs**			
	I	$\mu \circ \det$	$q-1$	$\mu(a)^2$	$\mu(a)^2$	$\mu(ad)$	$\mu(\det(\delta))$
	II	$\psi_\mu^G - \mu \circ \det$	$q-1$	$q\mu(a)^2$	0	$\mu(ad)$	$-\mu(\det(\delta))$
	III	$\psi^G\ ;\ [w]\psi \neq \psi$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	$(q+1)\psi(\alpha)$	$\psi(\beta)$	$\psi(\gamma)+\psi(\gamma^w)$	0
	IV	$\theta'\ ;\ [w]\theta \neq \theta$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$(q-1)\theta(a)$	$-\theta(a)$	0	$-\theta(\delta)-\theta(\delta^w)$

TABLE 7

4.2 Quelques cas particuliers

Nous pouvons terminer en appliquant ce que nous avons vu dans les cas particuliers suivant :

$$GL_2(2),\ GL_2(3),\ GL_2(4).$$

Nous pourrions poursuivre avec $GL_2(5)$ ou encore $GL_2(7)$ pour montrer à quel point le résultat général ci-dessus est puissant. Cependant les calculs sont vites fastidieux et nous éviterons ces cas. Nos exemples nous permettront tout-de-même de réaliser que faire les calculs de manière *ad hoc* est possible, mais très pénible.

Pour les trois cas qui nous intéressent, la démarche sera toujours la même : nous explicitons le corps $\mathbb{F}_q$ s'il y a lieu, nous déterminons les classes de conjugaison type par type. Ceci sera aisé mais notons que dans le cas du type **IV**, un élément de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$ est représenté par

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix},$$

matrice compagnon du polynôme *irréductible* $X^2 + aX + b \in \mathbb{F}_q[X]$. Ensuite, pour trouver les caractères simples, nous inspecterons le cas de chaque type. Pour le type **I**, il nous faudra trouver les éléments de $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$, de même que pour le type **II**. Pour le type **III**, nous devrons trouver les $\psi \in \widehat{\mathcal{A}}$ tels que $[w]\psi \neq \psi$, choisir des représentants (car $\mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G(\psi) = \mathrm{ind}_{\mathcal{B}}^G([w]\psi)$) et calculer les valeur. Enfin, pour le type **IV**, nous construirons $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q(\omega)$ avec ω générateur de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$, puis nous déterminerons les éléments $\theta \in \widehat{\mathbb{F}_{q^2}^\times}$ pour lesquels $[w]\theta \neq \theta$ et nous choisirons des représentants. Nous calculerons enfin leurs valeurs en établissant une correspondance entre les puissances de ω et les matrices de $\mathcal{C} \setminus \mathbb{F}_q^\times$, puisqu'il serait difficile en pratique de trouver directement un isomorphisme $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{q^2}$. Nous ferons ceci en nous souvenant que la conjugaison par $w \in N(\mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}$ est donnée par la mise à la puissance q. Nous dresserons finalement la table des caractères ainsi établie.

$\underline{G := GL(2,2)}$

Trouvons les classes de conjugaison. La seule classe de type **I** est celle de l'identité et la seule de type **II** est représentée par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, il n'y a pas de classe du troisième type (donc il n'y aura pas non plus de caractère de ce type). Enfin, le seul polynôme irréductible de $\mathbb{F}_2[X]$ est $X^2 + X + 1$ et la matrice associée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour les caractères, notons que le seul caractère du premier type est trivial, car $\widehat{\mathbb{F}_2^\times} = 1$. De même, il n'y a qu'un seul caractère de type **II** et leurs valeurs se calculent avec la table 7. Pour le quatrième type, on a

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X] \Big/ (X^2 + X + 1) \simeq \mathbb{F}_2(\omega),$$

avec $\omega^2 = \omega + 1$. On a alors $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega + 1\}$. On a trois choix pour $\theta : \mathbb{F}_4^\times \to \mathbb{C}^\times$, qui sont déterminés par $\theta(\omega) \in \{1, j, j^2\}$, où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Comme on veut $[w]\theta \neq \theta$, il faut que $\theta(\omega) \in \{j, j^2\}$ et comme $([w]\theta)' = \theta'$, on peut choisir $\theta(\omega) = j$ et on obtient les valeurs de $\theta' := (\theta_j)'$ pour les deux premières classes et on a

$$\theta' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\theta(\omega) - \theta(\omega)^2 = -\theta(\omega)(1 + \theta(\omega)) = -j(j+1) = 1,$$

d'où la table :

Type	**I**	**II**	**IV**
$I(G)$ \ g^G	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_1$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}_3$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}_2$
$\mathbb{1}$	1	1	1
$\psi_{\mathbb{1}}^G - \mathbb{1}$	2	0	-1
$\theta' = \theta'_j$	1	-1	1

TABLE 8

Notons que cette table était attendue, puisque $GL_2(2) \simeq \mathfrak{S}_3$.

$\underline{G := GL(2,3)}$

Les classes de type **I** sont représentées par

$$\alpha_1 := \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \alpha_2 := \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

celles de type **II**, par

$$\beta_1 := \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \beta_2 := \begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix},$$

et celle de type **III** par

$$\gamma := \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\left(\sim\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Pour le type **IV**, les polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{F}_3$ sont

$$X^2 - X - 1,\ X^2 + X - 1,\ X^2 + 1$$

et on obtient les représentants associés

$$\delta_1 := \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \delta_2 := \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix},\ \delta_3 := \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Intéressons-nous maintenant aux caractères et à leurs valeurs. Pour le type **I**, il y a deux morphismes $\mu : \mathbb{F}_3^\times \to \mathbb{C}^\times$ qui sont $\mu = \mathbb{1}$ et $\mu(-1) = -1$. On note μ celui non trivial. On obtient deux caractères : $\mathbb{1}$ et $\mu \circ \det = (-1)^{\det}$. Les valeurs se calculent alors directement. Pour le type **II**, on a deux caractères : $\psi_{\mathbb{1}}^G - \mathbb{1}$ et $\psi_\mu^G - \mu \circ \det$ et on obtient les valeurs. Pour le type **III**, on a d'abord

$$\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\} \simeq \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2.$$

On a donc quatre morphismes $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^\times$, tous d'ordre 2. On les trouve :

$$\begin{cases}\psi_1 = \mathbb{1},\\ \psi_2 = \det,\\ \psi_3 = E_{1,1}^*,\\ \psi_4 = E_{2,2}^*.\end{cases}$$

$E_{i,j}^*$ désigne ici l'élément du dual $\mathcal{M}_2(\mathbb{F}_3)^*$ correspondant à la $(i,j)^{\text{ème}}$ coordonnée. ψ_1 et ψ_2 sont exclus car $\psi_{1,2} = [w]\psi_{1,2}$. De plus, on a $[w]\psi_3 = \psi_4$, donc $\psi_x := \psi_3$ est le seul caractère de $\mathcal{A}$ dont on aura besoin. (On l'a noté ψ_x pour rappeler que $\psi_x \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x$). Ceci étant, les valeurs se calculent aisément. Le type **IV** va nous donner plus de fil à retordre. Le polynôme $X^2 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$ et on choisit

$$\mathbb{F}_9 := \mathbb{F}_3[X] \Big/ (X^2 - X - 1) \simeq \mathbb{F}_3(\omega),$$

avec $\omega^2 = \omega + 1$. On calcule

$$\begin{cases} \omega = \omega, \\ \omega^2 = \omega + 1, \\ \omega^3 = 1 - \omega, \\ \omega^4 = -1, \\ \omega^5 = -\omega, \\ \omega^6 = -\omega - 1, \\ \omega^7 = \omega - 1, \\ \omega^8 = 1, \end{cases}$$

donc $\mathbb{F}_9^\times = \langle \omega \rangle \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et on a

$$F_9 = \{0, 1, -1, \omega, -\omega, \omega + 1, -\omega - 1, \omega - 1, 1 - \omega\}.$$

On cherche alors $\theta : \mathbb{F}_9^\times \to \mathbb{C}^\times$ considéré comme $\theta \in \widehat{\mathcal{C}_{\mathbb{F}_9}}$ tel que $[w]\theta \neq \theta$. $?^w$ est représenté par la puissance 3 et on a

$$[w]\theta \neq \theta \;\Leftrightarrow\; \theta^3 \neq \theta \;\Leftrightarrow\; \theta(\omega)^3 \neq \theta(\omega) \;\Leftrightarrow\; \theta(\omega)^2 \neq 1.$$

On doit de plus avoir $\theta(\omega) \in \mu_8(\mathbb{C})$, d'où

$$\theta(\omega) \in \left\{ \pm 1, \pm i, \pm e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \right\}$$

et la condition $\theta(\omega)^2 \neq 1$ supprime les cas $\theta(\omega) = \pm 1$. On note θ_λ l'élément de $\widehat{\mathcal{C}}$ tel que $\theta_\lambda(\omega) = \lambda \in \mu_8(\mathbb{C})$. On a de plus

$$(\theta_i)^3 = \theta_{-i},\; \left(\theta_{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}\right)^3 = \theta_{-\exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)},\; \left(\theta_{\exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)}\right)^3 = \theta_{-\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)},$$

donc il nous reste à considérer les cas

$$\theta_1 := \theta_i,\; \theta_2 := \theta_{\frac{1+i}{\sqrt{2}}},\; \theta_3 := \theta_{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}.$$

Ensuite, la matrice de G correspondant à $\omega \in \mathbb{F}_9$ est δ_1. Le sous-groupe engendré par δ_1 est donné par

$$\begin{aligned} \langle \delta_1 \rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{\delta_1, \ldots, \delta_7, \delta_8 = 1\}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\theta_k'(\delta_1) = -\theta_k(\delta_1) - \theta_k(\delta_1^w) = -\theta_k(\delta_1) - \theta_k(\delta_1)^3 = -\theta_k(\delta_1)(1 + \theta_k(\delta_1)^2).$$

ce qui donne les valeurs des θ'_k en δ_1. Ensuite, δ_1 et δ_3 sont d'ordre 8 et δ_2 est d'ordre 4. Aucun des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ n'est d'ordre 4, donc on a une seule classe d'éléments d'ordre 4 et donc δ_2 est conjugué à δ_1^2, d'où

$$\theta'_k(\delta_2) = -\theta_k(\delta_1)^2(1 + \theta_k(\delta_1)^4),$$

d'où les valeurs des θ'_k en δ_2. Enfin, on a seulement deux classes d'éléments d'ordre 8 et comme δ_1 et δ_3 ne sont pas conjugués, on doit avoir $\delta_3 \sim \delta_1^{-1}$ car $\delta_1 \nsim \delta_1^{-1}$ car $\theta'_2(\delta_1^{-1}) = \overline{\theta'_2(\delta_1)} \neq \theta'_2(\delta_1) \in i\mathbb{R}^*$. Ainsi,

$$\theta'_k(\delta_3) = -\theta_k(\delta_1)^{-1}(1 + \theta_k(\delta_1)^4),$$

d'où les valeurs et la table. Notons que l'on aurait pu donner un argument moins *ad hoc* pour faire correspondre les δ_k et les puissances de δ_1 en calculant leurs polynômes minimaux et caractéristiques, en remarquant que tous sont irréductibles et donnent alors leurs invariants de similitude, dont l'unicité permet de conclure. Nous aurons besoin de cet argument dans le cas suivant.

Type	**I**		**II**		**III**	**IV**		
$I(G)$ \ g^G	$(\alpha_1)_1$	$(\alpha_2)_1$	$(\beta_1)_8$	$(\beta_2)_8$	$(\gamma)_{12}$	$(\delta_1)_6$	$(\delta_2)_6$	$(\delta_3)_6$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu \circ \det$	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
$\psi_{\mathbb{1}}^G - \mathbb{1}$	3	3	0	0	1	-1	-1	-1
$\psi_\mu^G - \mu \circ \det$	3	3	0	0	-1	1	-1	1
ψ_x^G	4	-4	1	-1	0	0	0	0
$\theta'_1 = \theta'_i$	2	2	-1	-1	0	0	2	0
$\theta'_2 = \theta'_{(1+i)/\sqrt{2}}$	2	-2	-1	1	0	$i\sqrt{2}$	0	$-i\sqrt{2}$
$\theta'_3 = \theta'_{(1-i)/\sqrt{2}}$	2	-2	-1	1	0	$-i\sqrt{2}$	0	$i\sqrt{2}$

Table 9

$G := GL(2,4)$

Reprenons tout d'abord la construction du corps $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\omega)$, donnée dans le cas de $GL_2(2)$. Nous trouvons les représentants des classes suivants pour les trois premiers types :

$$\alpha_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \ \alpha_3 := \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2 := \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \ \beta_3 := \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \ \gamma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \ \gamma_3 := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, les polynômes irréductibles de degré 2 sur $\mathbb{F}_4$ sont les suivants :

$$X^2 + X + \omega, \ X^2 + \omega X + \omega, \ X^2 + \omega X + 1, \ X^2 + X + \omega^2, \ X^2 + \omega^2 X + \omega^2, \ X^2 + \omega^2 X + 1,$$

et les matrices non triviales du sous-groupe de Cartan non déployé corresepondantes sont

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \delta_2 := \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 1 & \omega \end{pmatrix},\ \delta_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix},\ \delta_4 := \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \delta_5 := \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 \end{pmatrix},\ \delta_6 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Pour les caractères de type **I**, la donnée de $\mu : \mathbb{F}_4^\times \to \mathbb{C}^\times$ est la donnée de $\mu(\omega) \in \{1, j, j^2\}$, ce qui donne les trois morphismes

$$\begin{array}{cccccc} \mu_1 & : & \omega & \mapsto & 1 \\ \mu_j & : & \omega & \mapsto & j \\ \mu_{j^2} & : & \omega & \mapsto & j^2 = \overline{j} \end{array}$$

et on obtient les valeurs avec la table 7. Pour le type **II**, on peut calculer directement les trois caractères $\psi_{\mu_k}^G - \mu_k \circ \det$ pour $k \in \{1, j, j^2\}$. Pour le type **III**, on a

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\simeq \left(\mathbb{Z} / 3\mathbb{Z} \right)^2.$$

Les caractères $\psi \in \widehat{\mathcal{A}}$ sont alors

$$\begin{cases} \psi_1 = \mathbb{1} = [w]\mathbb{1}, \\ \psi_2 = \det = [w]\det, \\ \psi_3 = \mu_j \circ E_{1,1}^*, \\ \psi_4 = \mu_j \circ E_{2,2}^*, \\ \psi_5 = \mu_{j^2} \circ E_{1,1}^*, \\ \psi_6 = \mu_{j^2} \circ E_{2,2}^*, \\ \psi_7 = \mu_j \circ ((E_{1,1}^*)^2 E_{2,2}^*), \\ \psi_8 = \mu_j \circ (E_{1,1}^* (E_{2,2}^*)^2). \end{cases}$$

Les deux premiers sont exclus et parmi les six restant, on peut choisir

$$\psi_x := \psi_3,\ \psi_{x^2} := \psi_5,\ \psi_{x^2 y} := \psi_7$$

et comme on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

on peut calculer les valeurs de ψ_x^G, $\psi_{x^2}^G$ et $\psi_{x^2 y}^G$. Pour le type **IV**, on construit $\mathbb{F}_{16}$. Le polynôme $X^2 + X + \omega$ est irréductible sur $\mathbb{F}_4$ et on a

$$\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_4[X] \Big/ (X^2 + X + \omega) \simeq \mathbb{F}_4(\tau),$$

avec $\tau^2 = \tau + \omega$. On a de plus

$$\begin{cases} \tau = \tau, \\ \tau^2 = \tau + \omega, \\ \tau^3 = \omega^2\tau + \omega, \\ \tau^4 = \tau + 1, \\ \tau^5 = \omega, \\ \tau^6 = \omega\tau, \\ \tau^7 = \omega\tau + \omega^2, \\ \tau^8 = \tau + \omega^2, \\ \tau^9 = \omega\tau + \omega, \\ \tau^{10} = \omega^2, \\ \tau^{11} = \omega^2\tau, \\ \tau^{12} = \omega^2\tau + 1, \\ \tau^{13} = \omega\tau + 1, \\ \tau^{14} = \omega^2\tau + \omega^2, \\ \tau^{15} = 1 \end{cases}$$

donc $\mathbb{F}_{16}^\times = \langle \tau \rangle \simeq {}^{\mathbb{Z}}/{15\mathbb{Z}}$ et on cherche les morphismes $\theta : \mathbb{F}_{16}^\times \to \mathbb{C}^\times$. On doit avoir

$$\theta(\tau) \in \left\{ 1, e^{\pm\frac{2i\pi}{15}}, e^{\pm\frac{3i\pi}{15}}, e^{\pm\frac{4i\pi}{15}}, e^{\pm\frac{i\pi}{3}}, e^{\pm\frac{6i\pi}{15}}, e^{\pm\frac{7i\pi}{15}}, e^{\pm\frac{8i\pi}{15}} \right\}$$

et on veut $[w]\theta \neq \theta$, i.e. $\theta(\tau)^4 \neq \theta(\tau)$, i.e. $\theta(\tau)^3 \neq 1$ et en tenant compte du fait que $([w]\theta)' = \theta'$, on peut choisir les valeurs

$$\theta(\tau) \in \left\{ e^{\frac{2i\pi}{15}}, e^{\frac{4i\pi}{15}}, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{7i\pi}{15}}, e^{\frac{i\pi}{5}}, e^{\frac{14i\pi}{15}} = -e^{-\frac{i\pi}{15}} \right\}$$

et on a $\theta(\omega) = \theta(\tau)^5$. Pour calculer les valeurs de θ' sur δ_l, on utilise le fait que si δ_1^k a même polynôme caractéristique que δ_l et si ce polynôme est irréductible (ce qui est le cas ici), alors δ_1^k et δ_l ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal et tous ces polynômes sont égaux. δ_1^k et δ_l ont alors mêmes invariants de similitude sur $\mathbb{F}_4$, donc sont semblables sur $\mathbb{F}_4$ et donc sont conjugués dans G, ce qui donne les valeurs des θ' sur δ_l, connaissant celles de δ_1^k, qui sont données par

$$\theta'(\delta_1^k) = -\theta(\delta_1^k) - [w]\theta(\delta_1^k) = -\theta(\delta_1)^k(1 + \theta(\delta_1)^4)$$

et par calculs directs (mais longs...), on trouve les valeurs des θ' et on obtient la table de G. Par soucis de lisibilité, on note

$$\theta'_{\frac{n}{m}} := \left(\theta_{\frac{n}{m}}\right)', \quad \text{où} \quad \theta_{\frac{n}{m}}(\tau) = e^{\frac{in\pi}{m}}.$$

Notons finalement qu'après calculs, nous avons la correspondance suivante :

$$\begin{cases} \delta_1 & \sim & \delta_1, \\ \delta_2 & \sim & \delta_1^7, \\ \delta_3 & \sim & \delta_1^6, \\ \delta_4 & \sim & \delta_1^2, \\ \delta_5 & \sim & \delta_1^{11}, \\ \delta_6 & \sim & \delta_1^3. \end{cases}$$

On a alors la table des caractères de G :

Type	**I**			**II**			**III**			**IV**					
$I(G)$ \ g^G	$(\alpha_1)_1$	$(\alpha_2)_1$	$(\alpha_3)_1$	$(\beta_1)_{15}$	$(\beta_2)_{15}$	$(\beta_3)_{15}$	$(\gamma_1)_{20}$	$(\gamma_2)_{20}$	$(\gamma_3)_{20}$	$(\delta_1)_{12}$	$(\delta_2)_{12}$	$(\delta_3)_{12}$	$(\delta_4)_{12}$	$(\delta_5)_{12}$	$(\delta_6)_{12}$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_j \circ \det$	1	j^2	j	1	j^2	j	j	j^2	1	j	j	1	j^2	j^2	1
$\mu_{j^2} \circ \det$	1	j	j^2	1	j	j^2	j^2	j	1	j^2	j^2	1	j	j	1
$\psi_{\mathbb{1}}^G - \mathbb{1}$	4	4	4	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\psi_{\mu_j}^G - \mu_j \circ \det$	4	$4j^2$	$4j$	0	0	0	j	j^2	1	$-j$	$-j$	-1	$-j^2$	$-j^2$	-1
$\psi_{\mu_{j^2}}^G - \mu_{j^2} \circ \det$	4	$4j$	$4j^2$	0	0	0	j^2	j	1	$-j^2$	$-j^2$	-1	$-j$	$-j$	-1
ψ_x^G	5	$5j$	$5j^2$	1	j	j^2	$-j^2$	$-j$	-1	0	0	0	0	0	0
$\psi_{x^2}^G$	5	$5j^2$	$5j$	1	j^2	j	$-j$	$-j^2$	-1	0	0	0	0	0	0
$\psi_{x^2y}^G$	5	5	5	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
$\theta'_{2/15}$	3	$3j$	$3j^2$	-1	$-j$	$-j^2$	0	0	0	u	$\overline{v}$	φ	v	$\overline{u}$	φ^*
$\theta'_{4/15}$	3	$3j^2$	$3j$	-1	$-j^2$	$-j$	0	0	0	v	$\overline{u}$	φ^*	u	$\overline{v}$	φ
$\theta'_{2/5}$	3	3	3	-1	-1	-1	0	0	0	φ^*	φ	φ^*	φ	φ^*	φ
$\theta'_{7/15}$	3	$3j^2$	$3j$	-1	$-j^2$	$-j$	0	0	0	$\overline{u}$	v	φ	$\overline{v}$	u	φ^*
$\theta'_{1/5}$	3	3	3	-1	-1	-1	0	0	0	φ	φ^*	φ	φ^*	φ	φ^*
$\theta'_{14/15}$	3	$3j$	$3j^2$	-1	$-j$	$-j^2$	0	0	0	$\overline{v}$	u	φ^*	$\overline{u}$	v	φ

TABLE 10

On a noté :

$$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \varphi^* := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi},\ u := -e^{\frac{2i\pi}{15}}\left(1+e^{\frac{2i\pi}{5}}\right),\ v := -e^{\frac{4i\pi}{15}}\left(1+e^{\frac{4i\pi}{5}}\right).$$

Références

[1] N. Bourbaki, Éléments de Mathématique, Livre II : Algèbre, Hermann, 1973.

[2] J. Calais, Éléments de théorie des Groupes, Presses Universitaires de France, 1984.

[3] I. Gozard, Théorie de Galois, Ellipses, 1997.

[4] S. Lang, Algèbre, Springer-Verlag, 2002.

[5] I. Piatetski-Shapiro, *Complex representations of GL(2,K) for finite fields K*, American Mathematical Society, 1983.

[6] J-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, 1998.

[7] A. Zimmermann, Representation Theory : A homological point of view, Springer-Verlag, 2014.