# Caractérisation des points critiques d'une fonction lisse sur $K/T$

Arthur Garnier

3 juillet 2019

On prend $G$ un groupe algébrique complexe semi-simple connexe et simplement connexe, $T^{\mathbb{C}}$ un tore maximal, $B$ un Borel contenant $T$, $K$ une forme réelle compacte de $G$, de tore maximal $T = K \cap B$ et on note $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$) l'algèbre de Lie de $G$ (resp. de $T^{\mathbb{C}}$, $B$, $K$, $T$). On note également $\Phi$ le système de racine associé à $G$ et $T^{\mathbb{C}}$, $\Phi_+$ les racines positives, $\Pi$ les racines simples et $W = N_G(T^{\mathbb{C}})/T^{\mathbb{C}} = N_K(T)/T$ le groupe de Weyl.
On choisit ensuite un système de générateurs de Serre $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\Phi_+}$ et on pose

$$\forall \alpha \in \Phi_+,\ u_\alpha := \frac{e_\alpha - f_\alpha}{2},\ v_\alpha := \frac{i(e_\alpha + f_\alpha)}{2},\ w_\alpha := \frac{ih_\alpha}{2}.$$

*pour se comprendre, on pourrait appeler cela la "base de Pauli" de* $\mathfrak{k}$. On a alors les relations "quaternioniques"

$$\forall \alpha \in \Phi_+,\ [u_\alpha, v_\alpha] = w_\alpha,\ [v_\alpha, w_\alpha] = u_\alpha,\ [w_\alpha, u_\alpha] = v_\alpha.$$

Si l'on note $\kappa^{\mathbb{C}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et $\kappa$ sa restriction à $\mathfrak{k}$, alors il est connu que, puisque $K$ est compact, $\kappa$ est définie négative sur $\mathfrak{k}$. On note alors $\langle\ ,\ \rangle := -\kappa$ le produit scalaire associé sur $\mathfrak{k}$. De plus, par construction de la forme réelle compacte $K$, on a

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{\alpha\in\Pi} \mathbb{R}w_\alpha \oplus^\perp \overset{\perp}{\bigoplus_{\alpha\in\Phi_+}} (\mathbb{R}u_\alpha \oplus^\perp \mathbb{R}v_\alpha).$$

**Exemple 1.** On peut prendre $G = SL_3(\mathbb{C})$, $K = SU_3(\mathbb{C})$, et tout le toutim usuel. On a dans ce contexte $\kappa^{\mathbb{C}}(x, y) = 6\mathrm{tr}\,(xy)$ et $\kappa(x, y) = 6\mathrm{tr}\,(xy)$ et on note $\Phi_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$. Les vecteurs $(u_\delta)_\delta$ sont orthogonaux entre eux, ainsi que les $(v_\delta)_\delta$ et $u_\delta \perp v_\delta \perp w_\delta \perp u_\delta$. Cependant, $w_\alpha$ et $w_\beta$ ne sont pas orthogonaux. On peut poser $w_c := \frac{w_\alpha+2w_\beta}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas, $(u_\alpha, u_\beta, u_{\alpha+\beta}, v_\alpha, v_\beta, v_{\alpha+\beta}, w_\alpha, w_c)$ est une base orthogonale de $\mathfrak{k}$ dont tous les vecteurs sont de norme $\sqrt{3}$ (je ne normalise pas, afin de garder les relations quaternioniques).

On définit alors $f : K/T \to \mathbb{R}$ par

$$f(kT) := \sum_{\gamma,\delta\in\Phi_+} \left\langle w_\gamma^k, u_\delta \right\rangle^2 + 2\left\langle w_\gamma^k, v_\delta \right\rangle^2 = \sum_{\gamma,\delta} \kappa(w_\gamma^k, u_\delta)^2 + 2\kappa(w_\gamma^k, v_\delta)^2,$$

où $x^k := \mathrm{Ad}_k(x)$. Puisque les $w_\alpha$, $w_\beta$ et $w_{\alpha+\beta}$ sont permutés par $W$, il est immédiat que $f$ est $W$-invariante.

On note que, puisque

$$\forall x \in \mathfrak{k},\ x = \frac{1}{3}\left( \langle x, w_\alpha\rangle w_\alpha + \langle x, w_c\rangle w_c + \sum_\delta \langle x, u_\delta\rangle u_\delta + \langle x, v_\delta\rangle v_\delta \right)$$

on a

$$\sum_\delta \langle x, u_\delta\rangle^2 + \langle x, v_\delta\rangle^2 = 9\|x - \mathrm{pr}_{\mathfrak{t}}(x)\|^2.$$

Ainsi, en notant $U := \mathrm{Vect}(\{u_\delta,\ \delta \in \Phi_+\})$ et $V := \mathrm{Vect}(\{v_\delta,\ \delta \in \Phi_+\})$ (on a alors $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus^\perp U \oplus^\perp V$) et il vient

$$f(kT) = 9 \sum_{\gamma\in\Phi_+} \left(\|w_\gamma^k - \mathrm{pr}_{\mathfrak{t}}(w_\gamma^k)\|^2 + \|\mathrm{pr}_V(w_\gamma^k)\|^2\right) = 9 \sum_{\gamma\in\Phi_+} (\|\mathrm{pr}_U(w_\gamma^k)\|^2 + 2\|\mathrm{pr}_V(w_\gamma^k)\|^2).$$

De ceci on déduit (il y a un peu de calcul avec des champs de vecteurs, mais rien de bien compliqué, c'est juste un peu long et de toute façon j'ai vérifié avec Scilab et ça a bien l'air d'être la bonne condition) :

**Proposition 2.** *Pour tout $kT \in K/T$, on a*

$$kT \in \mathrm{Crit}(f) \;\Leftrightarrow\; \sum_{\gamma\in\Phi_+}[w_\gamma^k, \mathrm{pr}_V(w_\gamma^k)] = \sum_{\gamma\in\Phi_+}[w_\gamma^k, \mathrm{pr}_{\mathfrak{t}}(w_\gamma^k)].$$

**Exemple 3.** Si $k := \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}) \subset SU_3(\mathbb{C})$, alors $kT \in SU_3/T$ est critique pour $f$ ssi

$$\left\{\begin{array}{l} (ab-de)(a^2-b^2+e^2-d^2)+(de-gh)(d^2-e^2+h^2-g^2)+(ab-gh)(a^2-b^2+h^2-g^2)=0 \\ (ac-df)(a^2-c^2+f^2-d^2)+(df-gj)(d^2-f^2+j^2-g^2)+(ac-gj)(a^2-c^2+j^2-g^2)=0 \\ (bc-fe)(b^2-c^2+f^2-e^2)+(ef-hj)(e^2-f^2+j^2-h^2)+(bc-hj)(b^2-c^2+j^2-h^2)=0 \end{array}\right.$$

*Remarque* 4. En fait, un nonuplet $(a,b,c,d,e,f,g,h,j)$ de réels définissent une matrice $k = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Crit}(f)$ ssi ils vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{l} ab+de+gh = ac+df+gj = bc+ef+hj = 0 \\ ad+eb+fc = ag+hb+jc = gd+he+jf = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = d^2+e^2+f^2 = g^2+h^2+j^2 = 1 \\ a^2+d^2+g^2 = b^2+e^2+h^2 = c^2+f^2+j^2 = 1 \\ aej+dhc+gbf-ceg-fha-jbd = 1 \\ (ab-de)(a^2-b^2+e^2-d^2)+(de-gh)(d^2-e^2+h^2-g^2)+(ab-gh)(a^2-b^2+h^2-g^2)=0 \\ (ac-df)(a^2-c^2+f^2-d^2)+(df-gj)(d^2-f^2+j^2-g^2)+(ac-gj)(a^2-c^2+j^2-g^2)=0 \\ (bc-fe)(b^2-c^2+f^2-e^2)+(ef-hj)(e^2-f^2+j^2-h^2)+(bc-hj)(b^2-c^2+j^2-h^2)=0 \end{array}\right.$$

On sait (grâce à Macaulay2) que ceci définit une sous-variété affine de dimension 0 de $\mathbb{A}^9(\mathbb{R})$, mais impossible d'en trouver le nombre de points...