

Localisation et Catégories Dérivées

Arthur Garnier

21 août 2016

Table des matières

Introduction	3
1 Localisation dans les catégories	4
2 Catégorie dérivée des complexes	16
3 Foncteurs dérivés totaux	28
4 Produit tensoriel total, espace Hom total, hypertor et hyper-ext	32
5 Suite Spectrale	36
Références	38

Introduction

Afin d'illustrer l'origine de ce travail, observons un phénomène particulier :

- Si on considère l'algèbre $A = \mathbb{Z}$, le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

est acyclique (i.e. a une homologie nulle), mais n'est pas homotope à zéro d'après [1], Proposition 21.

- D'autre part, soit A l'algèbre $A := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ et soit le complexe

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

Ce complexe est acyclique, mais n'est pas homotope à zéro. En effet, pour tout candidat h pouvant donner une équivalence d'homotopie, on a

$$\mathrm{im}(\partial h + h\partial) \subseteq 2 \cdot \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

donc $id \approx 0$.

Ces exemples montrent que les complexes de modules non projectifs, ou les complexes non bornés de modules projectifs peuvent être acyclique sans être homotope à zéro.

La catégorie dérivée des complexes est introduite afin de contourner ce problème. Le but va être d'inverser les quasi-isomorphismes, par un procédé dit de "localisation". Nous allons ici commencer par décrire la localisation dans le contexte général des "systèmes multiplicatifs localement petits" et nous montrerons en particulier le théorème de Gabriel-Zisman. Nous utiliserons ensuite ce formalisme pour construire la catégorie dérivée, que nous étudierons rapidement. Nous terminerons par une nouvelle construction des foncteurs dérivés dans les catégories dérivées et nous (re)construirons notamment les hypertor et hyperext ; puis nous conclurons sur une réinterprétation, dans ce nouveau contexte, des suites spectrales de Grothendieck.

Notre travail suivra les exposés de [5], Chapter 10 et [6], Section 3.5.3. Enfin, nous supposerons connus les rudiments de Théorie des Catégories et d'Algèbre Homologique, tels que décrits par exemple dans [1], [5] ou [6]. Les résultats de base de [2] concernant les suites spectrales seront également supposés maîtrisés ; ainsi que la notion de catégorie triangulée.

Première partie

Localisation dans les catégories

Nous allons ici considérer une situation légèrement plus générale que celle des complexes et des quasi-isomorphismes. Nous nous plaçons dans une catégorie (localement petite), dans laquelle on choisit une classe S de morphismes, que nous souhaitons inverser, en construisant une catégorie dite "localisée" ; cette construction s'inspirant de celle de localisation dans les anneaux, que le lecteur connaît probablement déjà.

Nous allons tout d'abord expliciter ce que l'on entend par "localisation" d'une catégorie ; puis nous discuterons leur construction et les hypothèses requises pour assurer leur existence. Nous suivons ici [5], Section 10.3.

Définition 1. Soit S une collection (classe) de morphismes dans une catégorie $\mathcal{C}$. Une localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S est une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$, munie d'un foncteur $q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ tel que

1. Pour tout s dans S , $q(s)$ est un isomorphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$.
2. Tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $F(s)$ soit un isomorphisme pour tout s de S se factorise de manière unique à travers q :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ q \downarrow & \nearrow \exists! & \\ S^{-1}\mathcal{C} & & \end{array}$$

Remarque 1. • Par la propriété universelle ci-dessus, la catégorie localisée $S^{-1}\mathcal{C}$ (si elle existe) est unique à équivalence près.

- Nous verrons que, si $\mathcal{C}$ est petite, ou si S est un ensemble, la localisation $S^{-1}\mathcal{C}$ existe. Cependant, sans une de ces conditions, l'existence de $S^{-1}\mathcal{C}$ est un problème délicat de Théorie des Ensembles. Nous verrons que si $\mathcal{C}$ est une catégorie de modules, sa localisation par rapport aux quasi-isomorphismes existe. Dans le cas général, on peut résoudre le problème via les "Univers de Grothendieck", ou simplement les ignorer, comme dans [4].

Nous allons construire $S^{-1}\mathcal{C}$ dans le cas où S est un "système multiplicatif localement petit".

Définition 2. Une collection S de morphismes de $\mathcal{C}$ est un système multiplicatif s'il vérifie :

1. (Stabilité) S est stable par composition et contient tous les morphismes identité.
2. (Condition d'Ore) Si $t : Z \rightarrow Y$ est dans S , alors pour tout $g : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$, il existe un diagramme commutatif " $gs = tf$ " dans $\mathcal{C}$, avec s dans S :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ s \downarrow & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Le slogan est " $t^{-1}g = fs^{-1}$ pour certains f et s ".

De plus, l'assertion symétrique correspondant au slogan " $fs^{-1} = t^{-1}g$ pour certains t et g " est aussi vérifiée.

3. (Simplification) Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont dans $\mathcal{C}$, alors on a équivalence entre

- (a) $sf = sg$ pour un certain s dans S ,
- (b) $ft = gt$ pour un certain t dans S .

Exemple 1. (Localisation dans les anneaux)

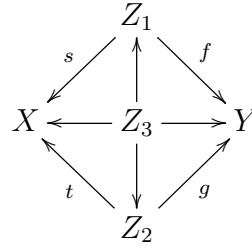
Soit R un anneau unitaire, considéré comme une catégorie additive $\mathcal{R}$ à un seul objet $\bullet$ via $R = \text{End}_{\mathcal{R}}(\bullet)$. Soit $S \subseteq R$ stable par multiplication et contenant 1. Si R est commutatif, ou plus généralement si S est central (i.e. si $S \subseteq Z(R)$), alors S est un système multiplicatif dans $\mathcal{R}$ et l'anneau localisé $S^{-1}R$ est aussi la localisation $S^{-1}\mathcal{R}$. Ceci nous sert de prototype pour la construction générale de $S^{-1}\mathcal{C}$.

Il nous faut maintenant (comme pour le cas des anneaux) définir les "fractions".

Une chaîne dans $\mathcal{C}$ de la forme

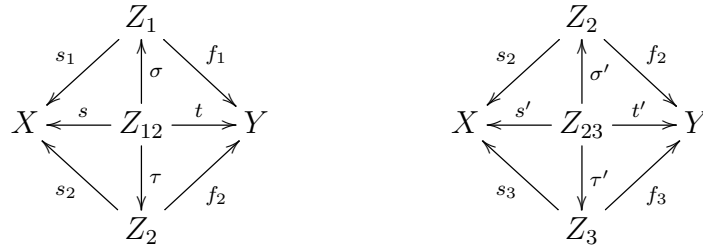
$$fs^{-1} : X \xleftarrow{s} Z_1 \xrightarrow{f} Y$$

est appelée fraction à droite si s est dans S . Disons que fs^{-1} est équivalente à $gt^{-1} : X \xleftarrow{t} Z_2 \xrightarrow{g} Y$ s'il existe une fraction $X \longleftarrow Z_3 \longrightarrow Y$ et un diagramme commutatif



On peut également dire que fs^{-1} (ou gt^{-1}) est recouverte par $X \longleftarrow Z_3 \longrightarrow Y$ et alors fs^{-1} et gt^{-1} sont équivalentes si et seulement si elles sont communément recouvertes.

Montrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Par définition, la réflexivité et la symétrie sont claires. Il nous reste à montrer que la relation est transitive. Supposons donc $f_1s_1^{-1} \sim f_2s_2^{-1}$ et $f_2s_2^{-1} \sim f_3s_3^{-1}$. On a donc deux diagrammes commutatifs :



Par la condition d'Ore, il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\alpha} & Z_{23} \\ \beta \downarrow & & \downarrow s' \\ Z_{12} & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

avec β dans S . Soient $u := \tau \circ \beta$ et $v := \sigma' \circ \alpha$. On a

$$s_2 \circ u = s_2 \circ \tau \circ \beta = s \circ \beta = s' \circ \alpha = s_2 \circ \sigma' \circ \alpha = s_2 \circ v.$$

Par la condition de simplification, il existe alors $w : Z_{123} \rightarrow T$ dans S tel que $u \circ w = v \circ w$. Posons $x := \sigma \circ \beta \circ w$ et $y := \tau' \circ \alpha \circ w$. Alors, on a

$$s_1 \circ x = s_1 \circ \sigma \circ \beta \circ w = s \circ \beta \circ w = s' \circ \alpha \circ w = s_3 \circ \tau' \circ \alpha \circ w = s_3 \circ y$$

et comme s, β et w sont dans S , on obtient que $s_1 \circ x = s_3 \circ y$ est dans S . De plus, il vient

$$\begin{aligned} f_3 \circ y &= f_3 \circ \tau' \circ \alpha \circ w = t' \circ \alpha \circ w = f_2 \circ \sigma' \circ \alpha \circ w = f_2 \circ v \circ w \\ &= f_2 \circ u \circ w = f_2 \circ \tau \circ \beta \circ w = t \circ \beta \circ w = f_1 \circ \sigma \circ \beta \circ w = f_1 \circ x \end{aligned}$$

et donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & Z_1 & & \\ & s_1 \swarrow & \uparrow x & \searrow f_1 & \\ X & \longleftarrow & Z_{123} & \longrightarrow & Y \\ & s_3 \swarrow & \downarrow y & \searrow f_3 & \\ & & Z_3 & & \end{array}$$

et donc $f_1 s_1^{-1} \sim f_3 s_3^{-1}$ (voir [3], lemma 1.3.3 pour cet argument).

Désignons par $\text{Mor}_S(X, Y)$ la famille des classes d'équivalence pour cette relation. Malheureusement, il n'y a pas de raison pour que ceci soit un ensemble, à moins que S ne soit "localement petit", dans le sens suivant :

Définition 3. Un système multiplicatif S est dit localement petit (à droite) si, pour chaque X , il existe un ensemble S_X de morphismes dans S , tous de but X , tel que pour tout $X_1 \rightarrow X$ dans S , il existe $X_2 \rightarrow X_1$ dans $\mathcal{C}$ tel que $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X$ soit dans S_X .

Lemme 1. Si S est un système multiplicatif localement petit, alors $\text{Mor}_S(X, Y)$ est un ensemble pour tous X et Y .

Démonstration. Rappelons qu'une petite catégorie I est dite filtrée si

1. Pour $i, j \in I$, il existe $k \in I$ et des flèches

$$i \longrightarrow k \longleftarrow j$$

2. Pour deux $u, v : i \rightarrow j$, il existe $w : j \rightarrow k$ tel que $wu = wv$.

Une colimite filtrée dans $\mathcal{C}$ est alors la colimite d'un foncteur $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ avec I filtrée.

On fait alors de S_X une petite catégorie en convenant qu'un morphisme de $X_1 \xrightarrow{s} X$ à $X_2 \xrightarrow{t} X$ est un morphisme $X_2 \rightarrow X_1$ dans $\mathcal{C}$ tel que t soit la composée $X_2 \rightarrow X_1 \xrightarrow{s} X$. La Définition 2, et notamment la condition d'Ore, montre alors que S_X est une catégorie filtrée. Il existe un foncteur

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) : S_X \rightarrow \mathbf{Ens}$$

envoyant s sur l'ensemble des fractions fs^{-1} . On en déduit que

$$\text{Mor}_S(X, Y) = \varinjlim \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y) = \text{colim}_{s \in S_X} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(s, Y)$$

est bien un ensemble. □

On va munir les ensembles $\text{Mor}_S(X, Y)$ d'une loi de composition. Pour composer les fractions

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y \quad \text{et} \quad Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} W$$

on trouve, par la condition d'Ore, un objet Z'' , $u : Z'' \rightarrow Z$ dans S et $h : Z'' \rightarrow Z'$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Z'' & & \\ & u \swarrow & & \searrow h & \\ & Z & & Z' & \\ s \swarrow & & & & \searrow g \\ X & & f \searrow & \swarrow t & W \\ & & Y & & \end{array}$$

commute. On définit alors la composée par la classe de la fraction

$$X \xleftarrow{sou} Z'' \xrightarrow{goh} W.$$

Il nous faudra alors montrer que ceci est bien défini et associatif. En fait, on a le résultat fondamental suivant :

Théorème 1. *Soit S un système multiplicatif localement petit dans une catégorie $\mathcal{C}$. Alors, la classe des objets de $\mathcal{C}$, munie des ensembles $\text{Mor}_S(X, Y)$ forme une catégorie.*

Démonstration. Montrons que la composition des classes de fractions est bien définie. Si on a deux fractions

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y \quad \text{et} \quad Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} W$$

et si

$$X \xleftarrow{\hat{s}} \hat{Z} \xrightarrow{\hat{f}} Y \quad \text{recouvre} \quad Y \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$$

et si

$$Y \xleftarrow{\hat{t}} \hat{Z}' \xrightarrow{\hat{g}} W \quad \text{recouvre} \quad Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} W,$$

alors, la composée des recouvrements ainsi définis a un recouvrement commun avec la composée des fractions originales. La situation peut être décrite par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & \hat{Z} & & Z'' & & \hat{Z}' \\ & \hat{s} \swarrow & \downarrow & \swarrow u & \searrow h & \downarrow h' & \swarrow \hat{g} \\ & Z & & Z & & Z' & \\ s \swarrow & & \hat{f} \searrow & & \hat{t} \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y & & Y & & W \end{array}$$

Composer $X \xleftarrow{\hat{s}} \hat{Z} \xrightarrow{\hat{f}} Y$ et $Y \xleftarrow{\hat{t}} \hat{Z}' \xrightarrow{\hat{g}} W$, cela donne-t-il le même résultat que composer $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} W$? Par la condition d'Ore, il existe $\tilde{Z}$ et $\hat{Z} \xleftarrow{v} \tilde{Z} \xrightarrow{\quad} Z''$ avec v dans S . Mimer cette construction directement pour le côté droit du diagramme est illicite¹ puisqu'a priori, ni h ni h' n'est dans S . Nous contournons le problème

1. Je remercie vivement Alexis Mauviel de m'avoir signalé cette lacune.

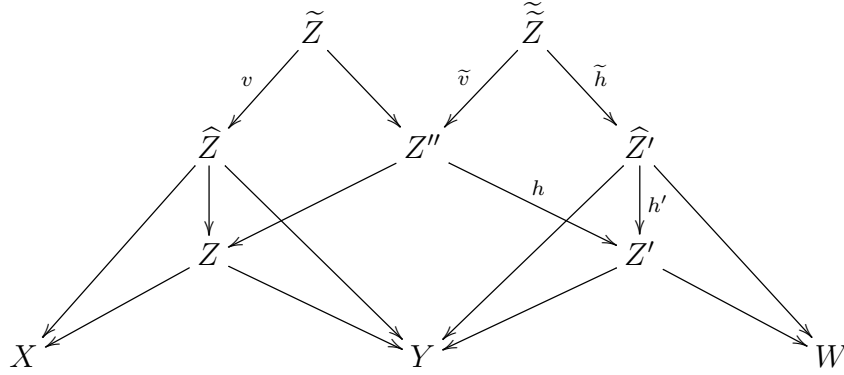
de la façon suivante : puisque $t \circ h' = \hat{t} \in S$ on peut appliquer la condition d'Ore et obtenir un carré

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\widetilde{Z}}_0 & \xrightarrow{h_0} & \widehat{Z}' \\ S \ni \widetilde{v}_0 \downarrow & & \downarrow \hat{t} = t \circ h' \\ Z'' & \xrightarrow{t \circ h} & Y \end{array}$$

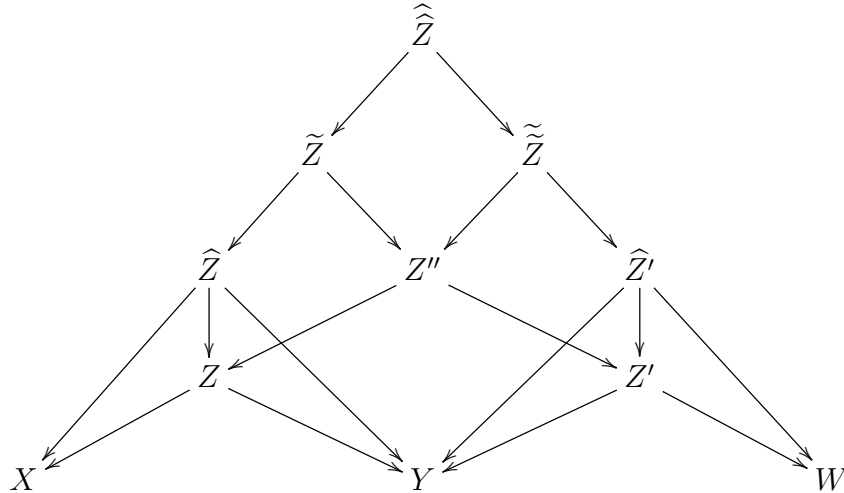
D'après l'hypothèse de simplification, la relation $t \circ h \circ \widetilde{v}_0 = t \circ h' \circ h_0$ assure l'existence d'un objet $\widetilde{\widetilde{Z}}$ et d'un morphisme $\tau : \widetilde{\widetilde{Z}} \rightarrow \widetilde{\widetilde{Z}}_0$ dans S tel que $h \circ \widetilde{v}_0 \circ \tau = h' \circ h_0 \circ \tau$. Ainsi, en posant $\widetilde{v} := \widetilde{v}_0 \circ \tau \in S$ et $\widetilde{h} := h_0 \circ \tau$, on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\widetilde{Z}} & \xrightarrow{\widetilde{h}} & \widehat{Z}' \\ \widetilde{v} \downarrow & & \downarrow h' \\ Z'' & \xrightarrow{h} & Z' \end{array}$$

qui s'inscrit maintenant dans le diagramme suivant :

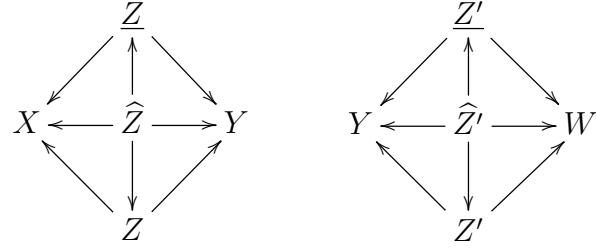


Appliquant à nouveau la condition d'Ore, on trouve $\widehat{\widehat{Z}}$ et $\widetilde{\widetilde{Z}} \xleftarrow{w} \widehat{\widehat{Z}} \longrightarrow \widetilde{\widetilde{Z}}$ avec w dans S tels que

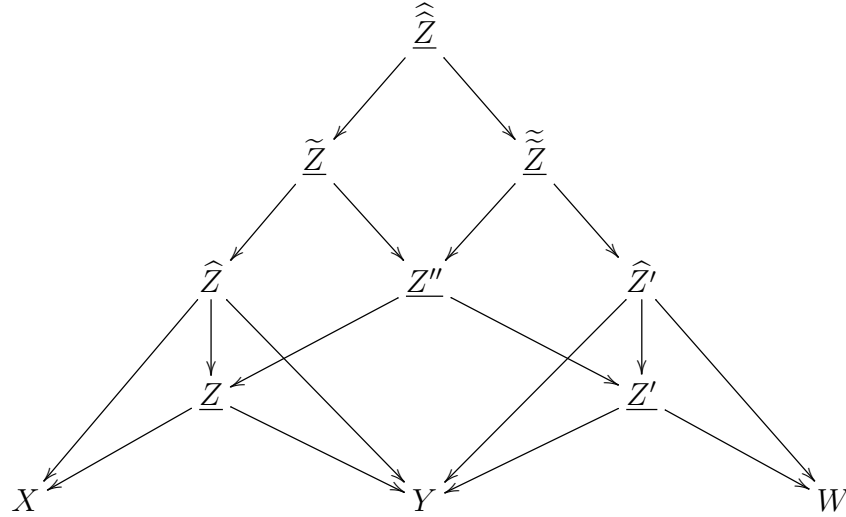


commute. Ainsi, $X \longleftarrow Z'' \longrightarrow W$ est recouverte par $X \longleftarrow \widehat{\widehat{Z}} \longrightarrow W$, comme voulu.

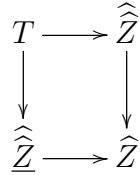
Ceci suffit car si on a les équivalences



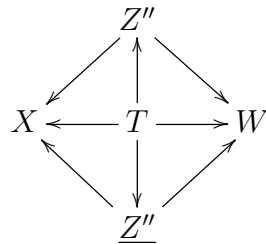
i.e. si on a $(X \longleftarrow Z \longrightarrow Y) \sim (X \longleftarrow \underline{Z} \longrightarrow Y)$, ainsi que $(Y \longleftarrow Z' \longrightarrow W) \sim (Y \longleftarrow \underline{Z'} \longrightarrow W)$, alors, par le même raisonnement que précédemment, on a un diagramme



et, par la condition d'Ore, on obtient un carré commutatif



avec $T \rightarrow \underline{\underline{\hat{Z}}}$ dans S et alors on a la commutativité de



i.e. $(X \longleftarrow Z'' \longrightarrow W) \sim (X \longleftarrow \underline{\underline{Z''}} \longrightarrow W)$.

Il reste à montrer l'associativité. En fait, par la condition d'Ore, c'est clair. En effet, en exprimant $(s_1, Z_1, f_1) \circ (s_2, Z_2, f_2)$ et $(s_2, Z_2, f_2) \circ (s_3, Z_3, f_3)$ comme décrit dans la définition de la composition, et en trouvant un recouvrement (s_4, Z_4, f_4) pour le résultat des compositions, on peut lire l'associativité dans un diagramme similaire à ceux ci-dessus.

Enfin, il est clair que la classe de la fraction $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{1} X$ est neutre pour la composition. $\square$

Théorème 2. (*Gabriel-Zisman*)

Soit S un système multiplicatif localement petit dans une catégorie $\mathcal{C}$. Alors, la catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ construite dans le Théorème 1 existe et est une localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S . De plus, le foncteur universel $q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ envoie $f : X \rightarrow Y$ sur $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{f} Y$.

Démonstration. Pour voir que $q : \mathcal{C} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ est un foncteur, on observe que la composée et $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xleftarrow{1} Y \xrightarrow{h} Z$ est $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{h \circ f} Z$ puisqu'on peut choisir $t = id_X$ et $f = g$ dans la condition d'Ore. Si s est dans S , alors $q(s)$ est un isomorphisme puisque la composée $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{s} Y$ à droite (resp. à gauche) avec $Y \xleftarrow{s} X \xrightarrow{1} X$ est $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{1} X$ (resp. est équivalente à $Y \xleftarrow{1} Y \xrightarrow{1} Y$). Enfin, supposons que $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ soit un autre foncteur envoyant S sur des isomorphismes. Considérons $S^{-1}F : S^{-1}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, envoyant la fraction fs^{-1} sur $F(f)F(s)^{-1}$. Ceci est bien défini car si on a un recouvrement commun

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z_1 & & \\
 & s_1 \swarrow & \uparrow y & \searrow f_1 & \\
 X & \xleftarrow{x} & T & \xrightarrow{z} & Y \\
 & \nwarrow s_2 & \downarrow t & \nearrow f_2 & \\
 & & Z_2 & &
 \end{array}$$

alors on a

$$\begin{aligned}
 F(f_1)F(s_1)^{-1} &= F(f_1)F(y)F(x)^{-1} = F(f_1 \circ y)F(x)^{-1} = F(z)F(x)^{-1} \\
 &= F(f_2 \circ t)F(x)^{-1} = F(f_2)F(t)F(x)^{-1} = F(f_2)F(s_2)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Étant donnés g et t , l'égalité $gs = tf$ dans $\mathcal{C}$ montre que $F(g)F(s) = F(t)F(f)$, ou encore $S^{-1}F(t^{-1}g) = S^{-1}F(fs^{-1})$, il s'ensuit que $S^{-1}F$ respecte la composition et est un foncteur. Il est alors clair que $F = (S^{-1}F) \circ q$ et que cette factorisation est unique. $\square$

Corollaire 1. $S^{-1}\mathcal{C}$ peut être construite en utilisant les classes d'équivalence de fractions à gauche

$$t^{-1}g : X \xrightarrow{g} Y' \xleftarrow{t} Y,$$

en disant que S est "localement petit à gauche" (notion duale à celle de locale petitesse à droite, utilisant des morphismes $Y \rightarrow Y'$ dans S).

Démonstration. S^{op} est un système multiplicatif dans $\mathcal{C}^{op}$. Puisque $\mathcal{C}^{op} \rightarrow (S^{op})^{-1}\mathcal{C}^{op}$ est une localisation, il en est de même de son dual $\mathcal{C} \rightarrow ((S^{op})^{-1}\mathcal{C}^{op})^{op}$, mais ceci est bien construit en utilisant les fractions à gauche $t^{-1}g$. $\square$

Corollaire 2. Deux morphismes $f, g : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$ sont identifiés dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement si $sf = sg$ pour un certain $s : Y \rightarrow Z$ dans S .

Lemme 2. 1. Si Z est un objet zéro (resp. initial, final) dans $\mathcal{C}$, alors $q(Z)$ est un objet zéro (resp. initial, final) dans $S^{-1}\mathcal{C}$.

2. Si les biproduits finis existent dans $\mathcal{C}$, alors pour tous X et Y , on a

$$q(X \times Y) \simeq q(X) \times q(Y).$$

Démonstration. 1. Il suffit de montrer que si Z est initial (resp. final), alors $q(Z)$ est initial (resp. final). Supposons Z initial et soit X dans $S^{-1}\mathcal{C}$. On a un morphisme $Z \xleftarrow{1} Z \xrightarrow{\exists! \gamma} X$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$. Si $Z \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} X$ est un autre morphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$, alors on a

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ Z & & X \\ 1 \swarrow & & \searrow \gamma \\ & Z & \end{array}$$

et, comme Z est initial, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & s \swarrow & \uparrow \exists! \delta & \searrow f & \\ Z & \xleftarrow{1} & Z & \xrightarrow{\gamma} & X \\ & 1 \swarrow & \downarrow 1 & \searrow \gamma & \\ & & Z & & \end{array}$$

donc $Z \xleftarrow{1} Z \xrightarrow{\gamma} X = Z \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{f} X$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$ et $q(Z)$ est donc initial.

De même, si Z est final et si on a un morphisme $X \xleftarrow{s} Y \xrightarrow{\exists! \delta} Z$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & s \swarrow & \uparrow 1 & \searrow \exists! \delta & \\ X & \xleftarrow{s} & Y & \xrightarrow{\delta} & Z \\ & 1 \swarrow & \downarrow s & \searrow \exists! \gamma & \\ & & X & & \end{array}$$

commute et $X \xleftarrow{1} X \xrightarrow{\gamma} Z$ est l'unique élément de $\text{Mor}_S(X, Z)$, donc $q(Z)$ est final.

2. Soit Z un objet de $S^{-1}\mathcal{C}$ et soient $\varphi_1 \in \text{Mor}_S(Z, X)$, $\varphi_2 \in \text{Mor}_S(Z, Y)$. On écrit

$$\varphi_1 = Z \xleftarrow{s_1} A \xrightarrow{f_1} X \quad \text{et} \quad \varphi_2 = Z \xleftarrow{s_2} B \xrightarrow{f_2} Y$$

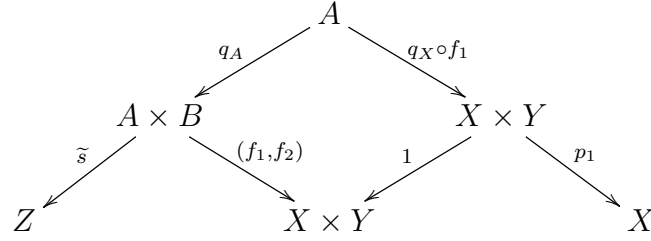
ainsi que

$$q(p_1) := X \times Y \xleftarrow{1} X \times Y \xrightarrow{p_1} X \quad \text{et} \quad q(p_2) := X \times Y \xleftarrow{1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y.$$

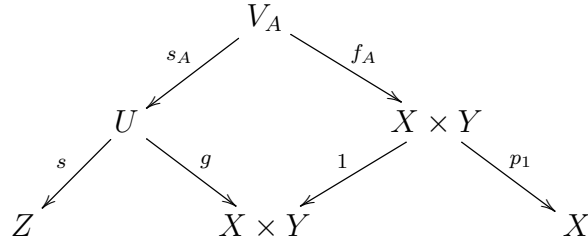
En écrivant $q_A : A \hookrightarrow A \times B$ et $q_B : B \hookrightarrow A \times B$, par la propriété universelle du coproduit, il existe un unique $\tilde{s} : A \times B \rightarrow Z$ tel que $\tilde{s} \circ q_A = s_1$ dans S et $\tilde{s} \circ q_B = s_2$ dans S . Alors, $\tilde{s}$ est dans S et en définissant

$$\varphi : Z \xleftarrow{\tilde{s}} A \times B \xrightarrow{(f_1, f_2)} X \times Y,$$

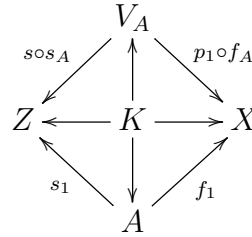
on a la composée



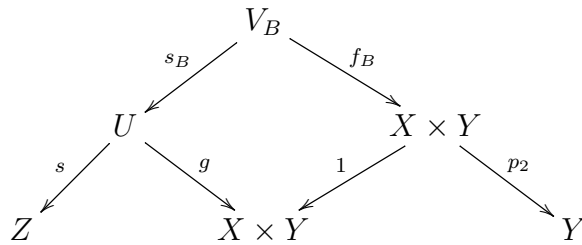
i.e. $q(p_1) \circ \varphi = \varphi_1$ et de même $q(p_2) \circ \varphi = \varphi_2$. Pour l'unicité, supposons que l'on ait $Z \xleftarrow{s} U \xrightarrow{g} X \times Y$ tel que la composée



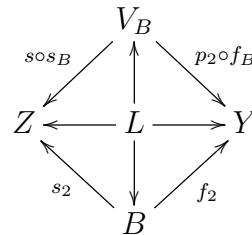
soit équivalente à $Z \xleftarrow{s_1} A \xrightarrow{f_1} X$ par le diagramme



et tel que la composée



soit équivalente à $Z \xleftarrow{s_2} B \xrightarrow{f_2} Y$ par le diagramme



Alors, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times B & & \\
 & \nearrow \tilde{s} & \uparrow & \searrow (f_1, f_2) & \\
 Z & \longleftarrow K \times L & \longrightarrow & X \times Y & \\
 & \nwarrow s & \downarrow & \nearrow g & \\
 & & U & &
 \end{array}$$

donc $Z \longleftarrow U \longrightarrow X \times Y$ est équivalent à $Z \longleftarrow A \times B \longrightarrow X \times Y$. Ainsi, $q(X \times Y)$ vérifie la propriété universelle de $q(X) \times q(Y)$ et on a le résultat. $\square$

Corollaire 3. Si $\mathcal{C}$ a un objet 0, alors pour tout X de $\mathcal{C}$, on a

$$q(X) \simeq 0 \text{ dans } S^{-1}\mathcal{C} \iff X \xrightarrow{0} X \text{ est dans } S.$$

Démonstration. Puisque $q(0)$ est un zéro dans $S^{-1}\mathcal{C}$, $q(X) \simeq 0$ si et seulement si $0, id_X : X \rightarrow X$ sont identifiés dans $S^{-1}\mathcal{C}$, i.e. si et seulement si $0 = s \circ 0 = s \circ id_X = s$ pour un certain s dans S . $\square$

Corollaire 4. Si $\mathcal{C}$ est additive, alors $S^{-1}\mathcal{C}$ l'est aussi et q est foncteur additif.

Démonstration. Si $\mathcal{C}$ est additive, on peut additionner les (classes de) fractions comme suit :
Soient

$$X \xleftarrow{s_1} Z \xrightarrow{f_1} Y \quad \text{et} \quad X \xleftarrow{s_2} Z' \xrightarrow{f_2} Y.$$

Alors, par la condition d'Ore, il existe $\widehat{Z}$, $\sigma : \widehat{Z} \rightarrow Z$ dans S et $\sigma' : \widehat{Z} \rightarrow Z'$ tels que

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{Z} & \xrightarrow{\sigma} & Z \\
 \sigma' \downarrow & & \downarrow s_1 \\
 Z' & \xrightarrow{s_2} & X
 \end{array}$$

commute. Ainsi, la fraction

$$X \xleftarrow{s_1 \circ \sigma} \widehat{Z} \xrightarrow{f_1 \circ \sigma} Y$$

recouvre

$$X \xleftarrow{s_1} Z \xrightarrow{f_1} Y$$

par $\sigma : \widehat{Z} \rightarrow Z$ et la fraction

$$X \xleftarrow{\frac{s_2 \circ \sigma'}{s_1 \circ \sigma}} \widehat{Z} \xrightarrow{f_2 \circ \sigma'} Y$$

recouvre

$$X \xleftarrow{s_2} Z' \xrightarrow{f_2} Y$$

par $\sigma' : \widehat{Z} \rightarrow Z'$. Posons

$$(X \xleftarrow{s_1} Z \xrightarrow{f_1} Y) + (X \xleftarrow{s_2} Z' \xrightarrow{f_2} Y) := (X \xleftarrow{s_1 \circ \sigma} \widehat{Z} \xrightarrow{f_1 \circ \sigma + f_2 \circ \sigma'} Y).$$

Si les fractions $X \xleftarrow{\tilde{s}_1} \tilde{Z} \xrightarrow{\tilde{f}_1} Y$ et $X \xleftarrow{\tilde{s}_2} \tilde{Z}' \xrightarrow{\tilde{f}_2} Y$ recouvrent $X \xleftarrow{s_1} Z \xrightarrow{f_1} Y$ et $X \xleftarrow{s_2} Z' \xrightarrow{f_2} Y$, alors par la condition d'Ore, le recouvrement commun $\widehat{Z}$ est recouvert par le recouvrement $\tilde{\widehat{Z}}$ commun aux fractions couvrantes $X \xleftarrow{\tilde{s}_1} \tilde{Z} \xrightarrow{\tilde{f}_1} Y$ et $X \xleftarrow{\tilde{s}_2} \tilde{Z}' \xrightarrow{\tilde{f}_2} Y$. Ainsi, " + " est bien définie et c'est une loi de groupe abélien, comme on le voit par des arguments usuels de calcul de fractions dans les anneaux. Nous renvoyons le lecteur à [3], section 2.1 pour plus de détails.

De plus, $q(X \times Y) \simeq q(X) \times q(Y)$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$ et donc $S^{-1}\mathcal{C}$ est additive. Enfin, il est clair que q est un foncteur additif. $\square$

Définition 4. Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ et soit S un système multiplicatif localement petit de $\mathcal{C}$ tel que $S \cap \mathcal{B}$ (i.e. la restriction à $\mathcal{B}$) soit multiplicatif. Par soucis de lisibilité, on écrit $S^{-1}\mathcal{B}$ pour désigner $(S \cap \mathcal{B})^{-1}\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ est appelée sous-catégorie localisante pour S si le foncteur naturel $S^{-1}\mathcal{B} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ est pleinement fidèle, i.e. s'il identifie $S^{-1}\mathcal{B}$ avec la sous-catégorie pleine de $S^{-1}\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathcal{B}$.

Lemme 3. Pour une sous-catégorie pleine $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$, on considère les assertions suivantes :

- a) Pour tous objets B, B' dans $\mathcal{B}$, la colimite $\text{Mor}_{S \cap \mathcal{B}}(B, B')$ (dans $\mathcal{B}$) s'envoie de façon bijective sur la colimite $\text{Mor}_S(B, B')$ (dans $\mathcal{C}$).
- b) Si $C \rightarrow B$ est dans S , avec B dans $\mathcal{B}$, il existe un morphisme $B' \rightarrow C$ avec B' dans $\mathcal{B}$ tel que $B' \rightarrow B$ est dans S .
- c) Si $B \rightarrow C$ est dans S , avec B dans $\mathcal{B}$, il existe un morphisme $C \rightarrow B'$ avec B' dans $\mathcal{B}$ tel que $B \rightarrow B'$ est dans S .

Alors, $\mathcal{B}$ est localisante pour S si et seulement si on a a). De plus, b) implique que $\mathcal{B}$ soit localisante pour S si S est localement petit à droite et c) implique que $\mathcal{B}$ soit localisante pour S si S est localement petit à gauche.

Démonstration. Dire que $S^{-1}\mathcal{B} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ est pleinement fidèle signifie que les morphismes coïncident, ce qui, par le Lemme 1, est l'assertion a). b) implique qu'une fraction à droite $B \longleftarrow C \longrightarrow B''$ est équivalente à une fraction $B \longleftarrow B' \longrightarrow B''$ dans $\mathcal{B}$. En particulier, si deux fractions à droite de $\mathcal{B}$ sont équivalentes via une fraction $B \longleftarrow C \longrightarrow B''$ avec C dans $\mathcal{C}$, alors elles le sont via une fraction avec C dans $\mathcal{B}$. Ainsi, b) $\Rightarrow$ a) si S est localement petit à droite. Remplaçant "droite" par "gauche" et utilisant le Corollaire 1, on voit que c) $\Rightarrow$ a) si S est localement petit à gauche. $\square$

Corollaire 5. Si $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{C}$ et si, pour tout C dans $\mathcal{C}$, il existe $C \rightarrow B$ dans S avec B dans $\mathcal{B}$, alors on a

$$S^{-1}\mathcal{B} \simeq S^{-1}\mathcal{C}.$$

Supposons de plus que $S \cap \mathcal{B}$ soit constitué d'isomorphismes. Alors

$$\mathcal{B} \simeq S^{-1}\mathcal{B} \simeq S^{-1}\mathcal{C}.$$

Démonstration. La deuxième assertion découle directement de la première. Ensuite, par la Proposition 10 de [1], il suffit de montrer que $S^{-1}\mathcal{B} \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}$ est dense. Or, si C est dans $\mathcal{C}$, il existe B dans $\mathcal{B}$ et $C \rightarrow B$ dans S . Alors, la fraction $C \longleftarrow C \longrightarrow B$ est un isomorphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$, donc $B \simeq C$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$, d'où le résultat. $\square$

Deuxième partie

Catégorie dérivée des complexes

Nous allons ici montrer que la catégorie dérivée des complexes $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe, au moins dans le cas où $\mathcal{A} = A - \mathfrak{Mod}$, et que c'est une catégorie triangulée. Nous calculerons ensuite explicitement $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dans certains cas particuliers. Nous suivons pour cela [5], Section 10.4, [6], Section 3.5.3 et [3], Section 1.6.

On se donne $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, T, \mathbb{T})$ une catégorie triangulée, ainsi qu'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition 5. Un système S de morphismes dans $\mathcal{K}$ est dit provenant d'un foncteur (co)homologique $H : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ si S est la collection des morphismes s dans tels que $H^n(s) \stackrel{\text{def}}{=} H(T^n s)$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{A}$, pour tout $n \geq 0$.

Exemple 2. La classe des quasi-isomorphismes Q est un système provenant du foncteur cohomologique $H^\bullet : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ (cf [1], Proposition 22).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui est le lemme 25 de [1], mais dont la preuve ici n'utilise pas l'axiome (TR4).

Lemme 4. ([3], Lemma 1.4.2)

Soient un morphisme entre triangles distingués dans $\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & TX \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow Tu \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX' \end{array}$$

Si deux des trois premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes, alors il en est de même du troisième.

Démonstration. Par (TR2), il suffit de traiter le cas où u et v sont des isomorphismes. Par la proposition 15 de [1] (qui n'utilise pas (TR4)), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Hom}(Z', X) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', Y) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', TX) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', TY) \\ \downarrow u_* & & \downarrow v_* & & \downarrow w_* & & \downarrow u_* & & \downarrow Tv_* \\ \text{Hom}(Z', X') & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', Y') & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', Z') & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', TX') & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', TY') \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes et les morphismes verticaux sont des isomorphismes, sauf peut-être celui du milieu, qui en est tout-de-même un par le lemme des cinq. Il existe ainsi $a : Z' \rightarrow Z$ tel que $id_{Z'} = w_*(a) = w \circ a$. De la même façon, on a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et dont les flèches verticales sont des isomorphismes, par le lemme des cinq :

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Hom}(TY', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(TX', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y', Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(X', Z) \\ \downarrow Tv^* & & \downarrow Tu^* & & \downarrow w^* & & \downarrow v^* & & \downarrow u^* \\ \text{Hom}(TY, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(TX, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(X, Z) \end{array}$$

et il existe donc $b : Z' \rightarrow Z$ tel que $id_Z = w^*(b) = b \circ w$. Ainsi, w est un isomorphisme. $\square$

Proposition 1. *Si S provient d'un foncteur cohomologique, alors*

1. *S est un système multiplicatif.*
2. *$S^{-1}\mathcal{K}$ est une catégorie triangulée et $\mathcal{K} \rightarrow S^{-1}\mathcal{K}$ est un foncteur de catégories triangulées (dans tout univers contenant $S^{-1}\mathcal{K}$).*

Démonstration. Montrons que S est multiplicatif. Le premier axiome est clair. Pour le second, soient $f : X \rightarrow Y$ et $s : Z \rightarrow Y$ dans S donnés. En utilisant l'axiome (TR1), on peut trouver un triangle distingué

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{u} C \xrightarrow{\delta} TZ .$$

De même, $u \circ f : X \rightarrow C$ peut être complété en

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{u \circ f} C \xrightarrow{v} TW .$$

Par (TR3), il existe g tel que

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{u \circ f} & C & \xrightarrow{v} & TW \\ \downarrow g & & \downarrow f & & \parallel & & \downarrow Tg \\ Z & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{\delta} & TZ \end{array}$$

soit un morphisme de triangles. Si $H^\bullet(s)$ est un isomorphisme, alors $H^\bullet(C) = 0$. En appliquant ceci à la suite exacte longue associée à l'autre triangle, on voit que $H^\bullet(t)$ est aussi un isomorphisme. L'assertion symétrique peut être prouvée de façon analogue, ou en considérant le foncteur $\mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{A}^{op}$.

Pour vérifier le troisième axiome, considérons $h := f - g$. Étant donné $s : Y \rightarrow Y'$ dans S tel que $sf = sg$, plongeons s dans un triangle distingué

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{s} Y' \xrightarrow{\delta} TZ .$$

Notons que $H^\bullet(Z) = 0$. Puisque $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, -)$ est un foncteur homologique (voir [1], Proposition 15), la suite

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Z) \xrightarrow{u} \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \xrightarrow{s} \text{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y')$$

est exacte. Puisque $sh = s(f - g) = 0$, il existe $v : X \rightarrow Z$ dans $\mathcal{K}$ tel que $f - g = uv$. Produisons le triangle au-dessus de v :

$$X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX' .$$

Puisque $vt = 0$ ([1], Lemme 23), on a $(f - g)t = uvt = 0$, donc $ft = gt$. De plus, comme $H^\bullet(Z) = 0$, la suite exacte longue pour $H^\bullet$ et le triangle $X' \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow TX'$ montre que $H^\bullet(X) \simeq H^\bullet(X')$, donc t est dans S . L'autre implication du troisième axiome peut être déduite de ce qui précède par application à $\mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{A}^{op}$.

Supposons maintenant que $S^{-1}\mathcal{K}$ existe. La formule $T(fs^{-1}) = T(f)T(s)^{-1}$ définit une autovalence $T : S^{-1}\mathcal{K} \rightarrow S^{-1}\mathcal{K}$. Pour montrer que $S^{-1}\mathcal{K}$ est triangulée, on doit définir les triangles distingués. Un triangle distingué dans $S^{-1}\mathcal{K}$ est défini comme étant un triangle

isomorphe à l'image par $\mathcal{K} \rightarrow S^{-1}\mathcal{K}$ d'un triangle distingué de $\mathcal{K}$. La première partie de $(TR1)$ est alors triviale. Pour la seconde partie, si X est dans $S^{-1}\mathcal{K}$, le triangle

$$X \xrightarrow{q(1)} X \xrightarrow{q(0)} 0 \xrightarrow{q(0)} TX$$

est l'image de

$$X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX ,$$

donc est distingué. Vérifions la troisième partie de l'axiome $(TR1)$. Soit donc

$$\psi := X \xleftarrow{\nu} Z \xrightarrow{\alpha} Y$$

un morphisme dans $S^{-1}\mathcal{K}$. On a un triangle dans $\mathcal{K}$:

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ$$

donc dans $S^{-1}\mathcal{K}$ par définition. Puisque $X \simeq Z$ dans $S^{-1}\mathcal{K}$, on a un isomorphisme de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{\alpha} & Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & TZ \\ \downarrow \nu & & \parallel & & \parallel & & \downarrow T\nu \\ X & \xrightarrow{\psi} & Y & \longrightarrow & A & \longrightarrow & TX \end{array}$$

et ainsi, ψ apparaît dans un triangle isomorphe au triangle

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ .$$

On montre $(TR2)$ de la même façon. Étant donné un triangle

$$X \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow A \longrightarrow TX ,$$

on peut remplacer X par Z et obtenir un triangle dans $\mathcal{K}$

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ .$$

Mais, comme $\mathcal{K}$ est triangulée, on peut appliquer $(TR2)$ dans $\mathcal{K}$ et obtenir un triangle

$$Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ \longrightarrow TY$$

et en utilisant à nouveau que $Z \simeq X$, on a le triangle désiré. De même, si on a un triangle

$$X \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow A \longrightarrow TX$$

on a un triangle dans $\mathcal{K}$:

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ$$

qui donne, par $(TR2)$ un triangle

$$T^{-1}A \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A$$

et on obtient un triangle dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$T^{-1}A \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow A ,$$

d'où (TR2).

Montrons que (TR3) est vérifié. Pour cela, on se donne deux triangles (que l'on peut supposer provenant de triangles dans $\mathcal{K}$) dans un diagramme dont le carré gauche commute dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{q(f)} & Y & \xrightarrow{q(g)} & Z & \xrightarrow{q(h)} & TX \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & & & \downarrow T\varphi \\ X' & \xrightarrow{q(f')} & Y' & \xrightarrow{q(g')} & Z' & \xrightarrow{q(h')} & TX' \end{array}$$

et on écrit $\varphi = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{u} X'$ ainsi que $\psi = Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{v} Y'$. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{u} & U & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow f' & & & & \downarrow f \\ Y' & \xleftarrow{v} & V & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

Par la condition d'Ore, il existe un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{a} & V \\ t' \downarrow & & \downarrow t \\ U & \xrightarrow{f \circ s} & Y \end{array}$$

avec t' dans S . Par ailleurs, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & s \swarrow & \uparrow t' & \searrow u & \\ X & \xleftarrow{\quad} & U' & \xrightarrow{\quad} & X' \\ & \swarrow s \circ t' & \downarrow 1 & \searrow u \circ t' & \\ & & U' & & \end{array}$$

donc $\varphi = X \xleftarrow{s \circ t'} U' \xrightarrow{u \circ t'} X'$ et le diagramme analogue à celui ci-dessus est de la forme

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{u \circ t'} & U' & \xrightarrow{s \circ t'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow a & & \downarrow f \\ Y' & \xleftarrow{v} & V & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

et le carré de droite commute. On peut donc supposer que l'on avait au départ un diagramme dont le carré de droite commute :

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{u} & U & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow a & & \downarrow f \\ Y' & \xleftarrow{v} & V & \xrightarrow{t} & Y \end{array} \tag{1}$$

et on renomme alors les morphismes en fonction. Ensuite, on a $\varphi = q(u) \circ q(s)^{-1}$ et $\psi = q(v) \circ q(t)^{-1}$. Comme le carré du tout premier diagramme commute, on a

$$\psi \circ q(f) = q(f') \circ \varphi \Rightarrow q(f') \circ q(u) \circ q(s)^{-1} = q(v) \circ q(t)^{-1} \circ q(f)$$

$$\Rightarrow q(v) \circ q(t)^{-1} \circ q(f) \circ q(s) = q(f') \circ q(u)$$

et de plus,

$$q(t) \circ q(a) = q(f) \circ q(s) \Rightarrow q(v) \circ q(a) = q(f') \circ q(u),$$

donc le carré de gauche de (1) commute dans $S^{-1}\mathcal{K}$. Par la condition d'Ore, il existe alors $r : U'' \rightarrow U$ dans S tel que

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow 1 & \uparrow r & \searrow v \circ a & \\ U & \longleftarrow U'' & & & Y' \\ & \nwarrow 1 & \downarrow r & \nearrow f' \circ u & \\ & & U & & \end{array}$$

soit commutatif, i.e. les fractions du haut et du bas sont équivalentes. En particulier, on a $v \circ a \circ r = f' \circ u \circ r$. Comme le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow s & \uparrow r & \searrow u & \\ X & \longleftarrow U'' & & & X' \\ & \nwarrow s \circ r & \downarrow 1 & \nearrow u \circ r & \\ & & U'' & & \end{array}$$

il vient $\varphi = X \xleftarrow{s \circ r} U'' \xrightarrow{u \circ r} X'$. On peut donc remplacer le diagramme (1) par

$$\begin{array}{ccccc} X' & \xleftarrow{u \circ r} & U'' & \xrightarrow{s \circ r} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow a \circ r & & \downarrow f \\ Y' & \xleftarrow{v} & V & \xrightarrow{t} & Y \end{array}$$

dans lequel les deux carrés commutent. On peut donc supposer que le diagramme (1) est commutatif et on renomme alors les morphismes en conséquence. Considérons le triangle au-dessus de a :

$$U \xrightarrow{a} V \longrightarrow W \longrightarrow TU .$$

On peut alors compléter le tout premier diagramme en

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\ \uparrow s & & \uparrow t & & & & \uparrow Ts \\ U & \xrightarrow{a} & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & TU \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \downarrow Tu \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX' \end{array}$$

dans lequel les lignes sont des triangles distingués. Comme $\mathcal{K}$ est triangulée et comme S provient d'un foncteur cohomologique, il existe $p : W \rightarrow Z$ dans S et $w : W \rightarrow Z'$ tels que le

diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & TX \\
\uparrow s & & \uparrow t & & \uparrow p & & \uparrow Ts \\
U & \xrightarrow{a} & V & \longrightarrow & W & \longrightarrow & TU \\
\downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow Tu \\
X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & TX'
\end{array}$$

Si l'on pose $\chi := Z \xleftarrow{p} W \xrightarrow{w} Z'$, alors on a un morphisme de triangles dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{q(f)} & Y & \xrightarrow{q(g)} & Z & \xrightarrow{q(h)} & TX \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi & & \downarrow T\varphi \\
X' & \xrightarrow{q(f')} & Y' & \xrightarrow{q(g')} & Z' & \xrightarrow{q(h')} & TX'
\end{array}$$

et l'axiome (TR3) est vérifié.

Montrons enfin (TR4). Soient donc $\alpha_3 := X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{f} Y$, $\alpha_1 := Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{g} Z$ et $\alpha_2 := \alpha_1 \circ \alpha_3$ défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
& & W & & \\
& \swarrow s' & & \searrow f' & \\
U & & & & V \\
\swarrow s & & \searrow f & & \swarrow t \\
X & & & & Y \\
& & & & \searrow g \\
& & & & Z
\end{array}$$

i.e. $\alpha_2 = X \xleftarrow{s \circ s'} W \xrightarrow{g \circ f'} Z$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & U & & \\
& \swarrow s & & \searrow f & \\
X & & W & & Y \\
\swarrow \text{id} & & \downarrow 1 & & \swarrow f \circ s' \\
X & & W & & Y
\end{array}$$

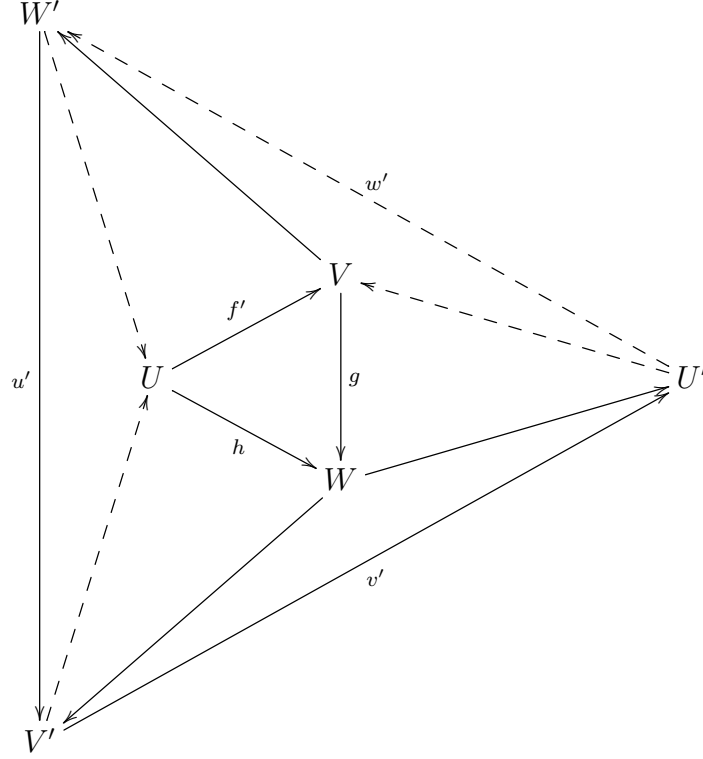
on déduit que $\alpha_3 = X \xleftarrow{s \circ s'} W \xrightarrow{f \circ s'} Y$. Après avoir renommé les morphismes, on peut donc supposer que α_2 est représenté par

$$\begin{array}{ccccc}
& & U & & \\
& \swarrow 1 & & \searrow f' & \\
U & & & & V \\
\swarrow s & & \searrow f & & \swarrow t \\
X & & & & Y \\
& & & & \searrow g \\
& & & & Z
\end{array}$$

c'est-à-dire que

$$\alpha_3 = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{f} Y, \quad \alpha_1 = Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{g} Z, \quad \alpha_2 = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{h} Z,$$

avec $h = g \circ f'$ et on pose $W = Z$. Comme $\mathcal{K}$ est triangulée, on a un octaèdre



que l'on peut aussi représenter par

$$\begin{array}{ccccccc}
 U & \xrightarrow{f'} & V & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & TU \\
 \downarrow 1 & & \downarrow g & & \downarrow u' & & \downarrow 1 \\
 U & \xrightarrow{h} & W & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & TU \\
 \downarrow f' & & \downarrow 1 & & \downarrow v' & & \downarrow Tf' \\
 V & \xrightarrow{g} & W & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & TV \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\
 W' & \xrightarrow{u'} & V' & \xrightarrow{v'} & U' & \xrightarrow{w'} & TW'
 \end{array} \tag{2}$$

Considérons une partie de son image dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\alpha_3} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \alpha_1 & & & & \downarrow 1 \\
 X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow \alpha_3 & & \downarrow 1 & & & & \downarrow T\alpha_3 \\
 Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY
 \end{array}$$

et on en extrait la partie supérieure :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\alpha_3} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \alpha_1 & & & & \downarrow 1 \\
 X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX
 \end{array}$$

On peut ensuite, par construction, le développer en un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_3} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\
q(s) \uparrow & & \uparrow q(t) & & & & \uparrow T(q(s)) \\
U & \xrightarrow{q(f')} & V & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & TU \\
1 \downarrow & & \downarrow q(g) & & \downarrow q(u') & & \downarrow 1 \\
U & \xrightarrow{q(h)} & W & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & TU \\
q(s) \downarrow & & \downarrow 1 & & & & \downarrow T(q(s)) \\
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX
\end{array}$$

dans lequel les carrés du haut et du bas de la première colonne sont commutatifs et la ligne du milieu provient de (2). Par (TR3), on peut encore le compléter avec $\alpha : W' \rightarrow Z'$ et $\beta : V' \rightarrow Y'$ pour obtenir

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_3} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\
q(s) \uparrow & & \uparrow q(t) & & \uparrow \alpha & & \uparrow T(q(s)) \\
U & \xrightarrow{q(f')} & V & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & TU \\
1 \downarrow & & \downarrow q(g) & & \downarrow q(u') & & \downarrow 1 \\
U & \xrightarrow{q(h)} & W & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & TU \\
q(s) \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \beta & & \downarrow T(q(s)) \\
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX
\end{array}$$

et comme le Lemme 4 n'utilise pas l'axiome (TR4), α et β sont des isomorphismes. De même, on peut étendre la partie inférieure de (2)

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\
\downarrow \alpha_3 & & \downarrow 1 & & & & \downarrow T\alpha_3 \\
Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY
\end{array}$$

en

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\
q(s) \uparrow & & \uparrow 1 & & \uparrow \beta & & \uparrow T(q(s)) \\
U & \xrightarrow{q(h)} & W & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & TU \\
q(f') \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow q(v') & & \downarrow Tf' \\
V & \xrightarrow{q(g)} & W & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & TV \\
q(t) \downarrow & & \downarrow 1 & & & & \downarrow T(q(t)) \\
Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY
\end{array}$$

et comme avant, on peut le compléter avec un isomorphisme $\gamma : X' \rightarrow U'$:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\
q(s) \uparrow & & \uparrow 1 & & \uparrow \beta & & \uparrow T(q(s)) \\
U & \xrightarrow{q(h)} & W & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & TU \\
q(f') \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow q(v') & & \downarrow Tf' \\
V & \xrightarrow{q(g)} & W & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & TV \\
q(t) \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \gamma & & \downarrow T(q(t)) \\
Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY
\end{array}$$

Posons à présent

$$\begin{cases}
\delta_1 := \beta \circ q(u') \circ \alpha^{-1} \\
\delta_3 := \gamma \circ q(v') \circ \beta^{-1} \\
\delta_2 := T\alpha \circ q(w') \circ \gamma^{-1}
\end{cases}$$

Alors, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
W' & \xrightarrow{q(u')} & V' & \xrightarrow{q(v')} & U' & \xrightarrow{q(w')} & TW' \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow T\alpha \\
Z' & \xrightarrow{\delta_1} & Y' & \xrightarrow{\delta_3} & X' & \xrightarrow{\delta_2} & TZ'
\end{array}$$

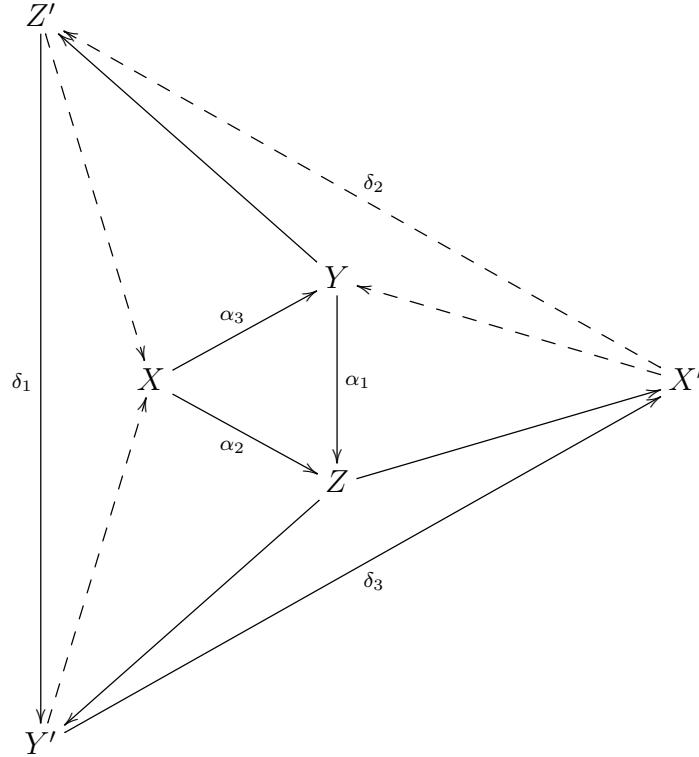
montre que le triangle

$$Z' \xrightarrow{\delta_1} Y' \xrightarrow{\delta_3} X' \xrightarrow{\delta_2} TZ'$$

est distingué. On peut finalement rassembler le tout et obtenir le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\alpha_3} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\
\downarrow 1 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow 1 \\
X & \xrightarrow{\alpha_2} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\
\alpha_3 \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \delta_3 & & \downarrow T\alpha_3 \\
Y & \xrightarrow{\alpha_1} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & TY \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\
Z' & \xrightarrow{\delta_1} & Y' & \xrightarrow{\delta_3} & X' & \xrightarrow{\delta_2} & TZ'
\end{array}$$

qui est encore l'octaèdre



(TR4) est donc vrai et la catégorie $S^{-1}\mathcal{K}$ est bien triangulée. $\square$

Corollaire 6. Soit $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ un foncteur de catégories triangulées tel que $F(s)$ soit un isomorphisme pour tout s dans S , avec S provenant d'un foncteur cohomologique. Puisque $q : \mathcal{K} \rightarrow S^{-1}\mathcal{K}$ est une localisation, il existe un unique foncteur $F' : S^{-1}\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ tel que $F = F' \circ q$. En fait, F' est un foncteur de catégories triangulées.

Lemme 5. Soient R un anneau et Q la collection des quasi-isomorphismes de complexes de $\mathcal{C}(R - \mathfrak{Mod})$. Alors Q est un système multiplicatif localement petit.

Démonstration. Par la Proposition 1, Q est multiplicatif. Montrons qu'il est localement petit. Soit A un complexe de cochaînes de R -modules et choisissons un nombre cardinal $\aleph$ plus grand que chaque cardinal sous-jacent à A^n , $n \in \mathbb{Z}$ et à R . Un complexe B est dit petit si tous les B^n ont un cardinal sous-jacent strictement plus petit que $\aleph$. Il existe alors un ensemble de classes d'isomorphie de complexes de cochaînes petits et ainsi un ensemble Q_A de classes d'isomorphie de quasi-isomorphismes $A' \rightarrow A$ avec A' petit.

Étant donné un quasi-isomorphisme $B \rightarrow A$, il suffit de montrer que B contient un sous-complexe petit B' quasi-isomorphe à A . Puisque $H^\bullet(A)$ est de cardinal strictement plus petit que $\aleph$, il existe un petit sous-complexe B_0 de B tel que $f_0^\bullet : H^\bullet(B_0) \rightarrow H^\bullet(A)$ soit surjective. Puisque $\ker f_0^\bullet$ est de cardinal plus petit que $\aleph$, on peut agrandir B_0 en un petit sous-complexe B_1 de B tel que $\ker f_0^\bullet$ s'annule dans $H^\bullet(B_1)$. Par récurrence, on peut construire une suite croissante de petits sous-complexes B_n de B tels que le noyau de $H^\bullet(B_n) \rightarrow H^\bullet(A)$ soit nul dans $H^\bullet(B_{n+1})$. Mais leur union $B' = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ est alors un sous-complexe petit de B et on a

$$H^\bullet(B) = \varinjlim H^\bullet(B_n) \simeq H^\bullet(A).$$

$\square$

Théorème 3. *La catégorie $\mathcal{D}(R - \mathfrak{Mod}) := Q^{-1}\mathcal{K}(R - \mathfrak{Mod})$ existe et est triangulée.*

Démonstration. La catégorie $Q^{-1}\mathcal{K}(R - \mathfrak{Mod})$ existe bien d'après le Lemme 5 et le Théorème de Gabriel-Zisman (Théorème 2). De plus, la Proposition 1 assure que $\mathcal{D}(R - \mathfrak{Mod})$ est triangulée puisque $\mathcal{K}(R - \mathfrak{Mod})$ l'est ([1], Théorème 8). $\square$

Remarque 2. On peut parfaitement, comme dans [4] ou [6], éviter de tenir compte des quelques difficultés ensemblistes soulignées plus haut et convenir que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe et est triangulée pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Aussi, en première lecture, on pourra passer sous silence les Lemmes 1 et 5.

Définition 6. Si $\mathcal{A} = R - \mathfrak{Mod}$ (ou plus généralement, si $\mathcal{A}$ est abélienne), la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ construite dans le Théorème 3 est appelée la catégorie dérivée des complexes dans $\mathcal{A}$. Si $x, y \in \{+, -, \emptyset, b\}$, on peut désigner par $\mathcal{D}^{x,y}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ formée par les objets de $\mathcal{K}^{x,y}(\mathcal{A})$ (qui sont aussi ceux de $\mathcal{C}^{x,y}(\mathcal{A})$). C'est évidemment une catégorie triangulée.

Lemme 6. *Soit Y un complexe de cochaînes borné inférieurement d'objets injectifs. Tout quasi-isomorphisme $t : Y \rightarrow Z$ de complexes est un monomorphisme scindé dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Le cône (tel que construit dans [1], Proposition-Définition 1) $\mathcal{C}(t) = Y[1] \oplus Z$ est exact ([1], Corollaire 13) et il existe un morphisme naturel $\varphi : \mathcal{C}(t) \rightarrow Y[1]$. D'après les Lemmes 27 et 28 de [1], φ est homotope à 0 par une certaine homotopie $v : (k, s) : Y[1] \oplus Z \rightarrow Y$. L'équation

$$y = \varphi(y, z) = (vd^{\mathcal{C}(t)} + d^{Y[1]}v)(y, z) = (vd^{\mathcal{C}(t)} - d^Y v)(y, z) = (vd - dv)(y, z)$$

donne

$$y = (sty - kdy - dky) + (sdz - dsz)$$

donc $ds = sd$ et s est un morphisme de complexes et $st = id_Y + dk + kd$, donc k est une équivalence d'homotopie $st \sim id_Y$. Donc $st = id_Y$ dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$. $\square$

Corollaire 7. *Si I est un complexe de cochaînes borné inférieurement d'objets injectifs, alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, I) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, I),$$

pour tout X .

De façon duale, si P est un complexe de chaînes borné supérieurement d'objets projectifs, alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P, X).$$

Démonstration. On ne montre que la première assertion. Pour $Y = I$ avec les notations du Lemme 6, toute fraction à gauche $t^{-1}g : X \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{t} Y$ est équivalente à $sg = (st)t^{-1}g : X \rightarrow Y$. Réciproquement, si $f, g : X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ sont identifiés dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \simeq Q^{-1}\mathcal{K}(\mathcal{A})$, alors $tf = tg$ pour un quasi-isomorphisme $t : Y \rightarrow Z$ par le Corollaire 2, ce qui implique que $f = stf = stg = g$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. $\square$

Théorème 4. *Supposons que $\mathcal{A}$ ait assez d'injectifs. Alors $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ existe dans notre univers, car elle est équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ de $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes de cochaînes bornés inférieurement d'injectifs :*

$$\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{K}^+(\mathcal{I}).$$

Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ existe et est équivalente à $\mathcal{K}^-(\mathcal{P})$, sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ formée des complexes de chaînes bornés supérieurement de projectifs :

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{K}^-(\mathcal{P}).$$

Démonstration. Rappelons ([2], Proposition 8) que tout complexe X de $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ a une résolution de Cartan-Eilenberg $X \rightarrow I$ avec $\text{Tot}(I)$ dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ et puisque X est minoré, on a un quasi-isomorphisme $X \rightarrow \text{Tot}(I)$ (cf [5], Exercice 5.7.1). Si $Y \rightarrow X$ est un quasi-isomorphisme, il en est de même de $Y \rightarrow \text{Tot}(I)$. Par le Lemme 3, $\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ est donc une sous-catégorie localisante de $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$. Ceci montre que $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \simeq Q^{-1}\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ et par le Corollaire 5, il suffit de montrer que tout quasi-isomorphisme dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ est un isomorphisme. Soient X, Y des complexes de cochaînes bornés inférieurement d'injectifs et un quasi-isomorphisme $t : Y \rightarrow X$. Par le Lemme 6, il existe $s : X \rightarrow Y$ tel que $st = id_Y$ dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$. En échangeant les rôles de X et Y et de s et t , on a $us = id_X$ pour un certain u . Ainsi, t est un isomorphisme dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ et on a $t^{-1} = s$.

De façon duale, si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors $\mathcal{A}^{op}$ a assez d'injectifs et on a

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{D}^+(\mathcal{A}^{op})^{op} \simeq \mathcal{K}^+(\mathcal{I}^{op})^{op} \simeq \mathcal{K}^-(\mathcal{P}).$$

□

Remarque 3. $X \simeq 0$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si et seulement si X est acyclique. De plus, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X, Y)$ est nul dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si et seulement s'il existe un quasi-isomorphisme $s : Y \rightarrow Y'$ tel que sf est homotope à zéro. Ces faits découlent directement de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. On constate alors que le problème décrit en introduction est résolu.

Troisième partie

Foncteurs dérivés totaux

Nous allons ici (re)définir la notion de foncteurs dérivés, en utilisant les catégories dérivées. Cette nouvelle définition présente l'avantage de ne pas supposer *a priori* que le foncteur considéré soit exact à gauche ou à droite, ni que la catégorie de départ possède suffisamment d'injectifs ou de projectifs. En revanche, elle est bien moins naturelle que la définition que le lecteur connaît déjà et utilise à fond la notion de catégorie triangulée. Nous suivrons ici les exposés de [5], Section 10.5 et [6], Section 3.7.1.

Il existe une catégorie des catégories triangulées : un morphisme $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ de catégories triangulées étant un foncteur additif qui commute avec les autovalences T et qui envoie un triangle distingué sur un autre (voir [1], Définition 28). Les morphismes de catégories triangulées seront ici appelés des ∂ -foncteurs covariants. Bien-sûr, un ∂ -foncteur contravariant est un ∂ -foncteur covariant $\mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{K}'$.

Soit un foncteur additif $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre catégories abéliennes. Puisque F préserve les équivalences d'homotopie, il s'étend en des foncteurs additifs $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$. Puisque F commute avec $?[1]$, il préserve même les cônes et les triangles distingués, donc $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ est un morphisme de catégories triangulées (∂ -foncteur).

On voudrait pouvoir étendre F en $F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Si F est exact, ceci est aisé. Cependant, se ce n'est pas le cas, F ne préservera pas les quasi-isomorphismes et il se peut que l'extension soit impossible. Il est cependant raisonnable d'exiger que F soit exact à droite ou à gauche, et les foncteurs dérivés nous donneront une extension, un peu comme pour les foncteurs hyperdérivés (cf [2], Partie 7).

Définition 7. Soit $\mathcal{K}$ une sous-catégorie triangulée localisante de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ et soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ correspondant à $\mathcal{K}$. Soit aussi $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ un ∂ -foncteur. Un foncteur dérivé (total) à droite de F sur $\mathcal{K}$ est un ∂ -foncteur $\mathcal{R}F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$, muni d'une transformation naturelle ξ de $qF : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ dans $(\mathcal{R}F)q : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ universels en ce sens que si $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ est un autre ∂ -foncteur muni d'une transformation naturelle $\zeta : qF \rightarrow Gq$, alors il existe une unique transformation naturelle $\eta : \mathcal{R}F \rightarrow G$ tel que $\zeta_A = \eta_{qA} \circ \xi_A$ pour tout A dans $\mathcal{K}$.

Remarque 4. • La propriété universelle implique que si $\mathcal{R}F$ existe, alors il est unique à isomorphisme naturel près.

- On notera $\mathcal{R}^b F$, $\mathcal{R}^+ F$, ... pour le foncteur dérivé de F sur $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$, ...
- De façon duale, un foncteur dérivé (total) à gauche de F est un ∂ -foncteur $\mathcal{L}F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ et une transformation naturelle $\xi : (\mathcal{L}F)q \rightarrow qF$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout ∂ -foncteur $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ et toute transformation naturelle $\zeta : Gq \rightarrow qF$ il existe une unique transformation naturelle $\eta : G \rightarrow \mathcal{L}F$ telle que, pour tout A dans $\mathcal{K}$, on ait $\zeta_A = \xi_A \circ \eta_{qA}$.
Comme $\mathcal{L}F$ est $(\mathcal{R}F^{op})^{op}$, avec $F^{op} : \mathcal{K}^{op} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B}^{op})$, on peut passer de $\mathcal{R}F$ à $\mathcal{L}F$ par simple argument de dualité.

Définition 8. Soit $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ un ∂ -foncteur. Un complexe X dans $\mathcal{K}$ est dit F -acyclique si $F(X)$ est acyclique (exact).

Exemple 3. Soit $\mathcal{K}$ une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ telle que tout complexe acyclique dans $\mathcal{K}$ soit F -acyclique. Si $s : X \rightarrow Y$ est un quasi-isomorphisme dans $\mathcal{K}$, alors le cône $\mathcal{C}(s)$ est acyclique, donc $F(\mathcal{C}(s))$ est acyclique. Puisque F préserve les triangles distingués, la suite de cohomologie montre que $F(s)^\bullet : H^\bullet(FX) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(FY)$, i.e. $F(s)$ est un quasi-isomorphisme. Par la propriété universelle de $\mathcal{D} = Q^{-1}\mathcal{K}$, il existe un unique foncteur $Q^{-1}F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ tel que $qF = (Q^{-1}F)q$. On voit alors que $Q^{-1}F$ est un foncteur dérivé à droite et à gauche de F .

Théorème 5. (*Existence*)

Soit $F : \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ un ∂ -foncteur. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, alors le foncteur dérivé à droite de F , $\mathcal{R}^+F$, existe sur $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ et si I est un complexe minoré d'injectifs, alors

$$\mathcal{R}^+F(I) \simeq qF(I).$$

De façon duale, si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors $\mathcal{L}^-F$ existe sur $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ et si P est un complexe majoré de projectifs, alors

$$\mathcal{L}^-F(P) \simeq qF(P).$$

Démonstration. Par le Théorème 4, on peut choisir une équivalence $U : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{I})$ réciproque au foncteur naturel $q : \mathcal{K}^+(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ et définissons $\mathcal{R}^+F$ comme étant la composée

$$qFU : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^+(\mathcal{I}) \xrightarrow{F} \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{q} \mathcal{D}^+(\mathcal{B}).$$

Pour construire ξ , on utilise l'isomorphisme naturel du Corollaire 7

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^+(\mathcal{A})}(qX, qUqX) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^+(\mathcal{A})}(X, UqX).$$

sous cet isomorphisme, il existe un morphisme naturel $f_X : X \rightarrow UqX$ dans $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ correspondant à l'augmentation $\eta : qX \rightarrow qUqX$ dans $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$. On définit ξ comme étant la transformation naturelle donnée par $\xi_X := qF(f_X) : qF(X) \rightarrow qF(UqX) \simeq (qFU)(qX)$. Il est facile de voir que ξ possède la propriété universelle voulue et $(\mathcal{R}^+F, \xi)$ est donc un foncteur dérivé à droite de F .

Comme d'habitude, l'assertion duale stipulant que la composée

$$\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}^-(\mathcal{P}) \xrightarrow{F} \mathcal{K}^-(\mathcal{B}) \xrightarrow{q} \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$$

est un foncteur dérivé à gauche de F se fait par passage au dual F^{op} . □

Corollaire 8. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.

1. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, alors on a, pour tout n et tout X minoré,

$$\mathbb{R}^n F(X) \simeq H^n \mathcal{R}^+F(X).$$

2. Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors on a, pour tout n et tout X majoré,

$$\mathbb{L}_n F(X) \simeq H^{-n} \mathcal{L}^- F(X).$$

Démonstration. On ne montre que le premier point, puisque le second est dual (mais nécessite une réindexation). Si X est minoré et si $X \rightarrow I$ est une résolution de Cartan-Eilenberg de X , alors on a

$$X \simeq \text{Tot}^\oplus(I) \simeq \text{Tot}^\Pi(I)$$

dans $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$. Alors, $F(X) \simeq F(\text{Tot}^\oplus(I)) \simeq \text{Tot}^\oplus(F(I))$ dans $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ et il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n F(X) &= H^n(\text{Tot}(F(I))) \simeq H^n(F(\text{Tot}(I))) \\ &\simeq H^n(qF(\text{Tot}(I))) \simeq H^n(\mathcal{R}^+ F(\text{Tot}(I))) \simeq H^n(\mathcal{R}^+ F(X)). \end{aligned}$$

□

Théorème 6. (*Existence généralisée*)

Supposons que $\mathcal{K}'$ soit une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{K}$ telle que

1. Tout X dans $\mathcal{K}$ possède un quasi-isomorphisme $X \rightarrow X'$ dans un objet de $\mathcal{K}'$,
2. Tout complexe acyclique de $\mathcal{K}'$ est F -acyclique.

Alors on a

$$\mathcal{D}' \simeq \mathcal{D}$$

et

$$\mathcal{R}F : \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}' \xrightarrow{\mathcal{R}'F} \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

est un foncteur dérivé à droite de F .

Démonstration. Par la première condition et le Corollaire 5, $\mathcal{K}'$ est localisante et $\mathcal{D}' \simeq \mathcal{D}$. Ensuite, par la seconde condition, F envoie un quasi-isomorphisme de $\mathcal{K}'$ sur un quasi-isomorphisme donc il se factorise

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}' & \xrightarrow{F} & \mathcal{K}(\mathcal{B}) \\ q' \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{\mathcal{R}'F} & \mathcal{D}(\mathcal{B}) \end{array}$$

et la propriété universelle se montre comme dans le Théorème 5. □

Définition 9. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additif entre catégories abéliennes. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, alors $R^\bullet F$ existe et on dit que F est de dimension cohomologique n si $R^i F = 0$ pour tout $i > n$ et $R^n F \neq 0$.

Par dualité, si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors $L_\bullet F$ existe et F est de dimension homologique n si $L_i F = 0$ pour $i > n$ et $L_n F \neq 0$.

Remarque 5. Si F est de dimension cohomologique finie, alors tout complexe exact d'objets F -acycliques est un complexe F -acyclique. En effet, soient n la dimension cohomologique de F et

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \longrightarrow \dots$$

un complexe exact d'objets F -acycliques et fixons i . En prenant la troncature subtile $\tau_{\geq i-n-1}X$, on obtient une résolution F -acyclique de $\ker(d^{i-n-1})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tau X : & 0 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X^{i-n-1} & \longrightarrow & X^{i-n} & \longrightarrow X^{i-n+1} \longrightarrow \dots \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & \ker(d^{i-n-1}) & & & & \end{array}$$

Ainsi, par le Lemme 11 de [2], on peut écrire

$$H^i(F(X)) = H^i(F(\tau X)) = R^{n+1}F(\ker(d^{i-n-1})) = 0.$$

Corollaire 9. Si F est de dimension cohomologique finie, alors $\mathcal{R}F$ existe sur $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et sa restriction à $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ est $\mathcal{R}^+F$.

Si F est de dimension homologique finie, alors $\mathcal{L}F$ existe sur $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et sa restriction à $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ est $\mathcal{L}^-F$.

Démonstration. Soit n la dimension cohomologique de F . Soit $\mathcal{K}$ la sous-catégorie de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ formée des complexes d'objets F -acycliques dans $\mathcal{A}$. Par le Théorème 6 et la Remarque 5, il suffit de montrer que tout complexe X admet un quasi-isomorphisme $X \rightarrow X'$ avec X' un complexe d'objets F -acycliques. Choisissons pour ceci une résolution de Cartan-Eilenberg $X^\bullet \rightarrow I^{\bullet\bullet}$ de X et soit τI le sous-complexe double de I obtenu par la troncature subtile $\tau_{\leq n}(I^p)$ de chaque colonne. Puisque chaque $X^p \rightarrow I^p$ est une résolution injective, chaque $\tau_{\leq n}(I^p)$ est une résolution finie de X^p par des objets F -acycliques. Ainsi, $X' := \text{Tot}(\tau I)$ est un complexe de cochaînes d'objets F -acycliques. La suite spectrale bornée

$${}^I E_2^{p,q} = H_h^p(H_v^q(\tau I)) \implies H^{p+q}(X')$$

s'effondre en première page et donne

$$H^\bullet(X) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(X')$$

i.e., $X \rightarrow X'$ est un quasi-isomorphisme. □

Quatrième partie

Produit tensoriel total, espace Hom total, hypertor et hyperext

Nous suivons ici les sections 10.6 et 10.7 de [5], ainsi que la section 3.7.2 de [6].

Soit R un anneau. Les lettres $A, B, \dots$ désignerons ici des complexes de cochaînes de R -modules. Pour chaque complexe A de R -modules, le complexe produit tensoriel total est un foncteur

$$F(B) := \text{Tot}^\oplus(A \otimes_R B),$$

$$F : \mathcal{K}(R - \mathfrak{Mod}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{Ab}).$$

Son foncteur dérivé $\mathcal{L}^-F : \mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{Ab})$ existe par le Théorème 5.

Définition 10. Le produit tensoriel total des complexes A et B est défini par

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} B := \mathcal{L}^- \text{Tot}^\oplus(A \otimes_R -)(B).$$

Lemme 7. Si A, A', B sont des complexes de cochaînes bornés supérieurement et si $A' \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme, alors on a

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} B \simeq A' \otimes_R^{\mathbb{L}} B.$$

Démonstration. On peut supposer que B est constitué de modules projectifs, quitte à composer par un quasi-isomorphisme. Dans ce cas, par le Théorème 5, on a

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} B \simeq \text{Tot}^\oplus(A \otimes_R B)$$

et

$$A' \otimes_R^{\mathbb{L}} B \simeq \text{Tot}^\oplus(A' \otimes_R B).$$

Le Théorème de Comparaison ([2], Théorème 1) appliqué à $E_1^{p,q}(A) \rightarrow E_1^{p,q}(A')$, avec

$$E_1^{p,q}(A) = H^q(A) \otimes_R B^p \implies H^{p+q}(A \otimes_R^{\mathbb{L}} B)$$

donne le résultat. □

Théorème 7. Le produit tensoriel total est un bifoncteur

$$- \otimes_R^{\mathbb{L}} - : \mathcal{D}^-(\mathfrak{Mod} - R) \times \mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod}) \rightarrow \mathcal{D}^-(\mathfrak{Ab}).$$

Sa cohomologie est l'hypertor

$$\mathbf{Tor}_n^R(A, B) \simeq H^{-n}(A \otimes_R^{\mathbb{L}} B).$$

Démonstration. Pour chaque B fixé, le foncteur $F : \mathcal{K}^-(\mathfrak{Mod} - R) \rightarrow \mathcal{D}^-(\mathfrak{Ab})$ défini par $F(A) := A \otimes_R^{\mathbb{L}} B$ envoie un quasi-isomorphisme sur un isomorphisme par le Lemme 7, donc F se factorise à travers la localisation $\mathcal{D}^-(\mathfrak{Mod} - R)$ de $\mathcal{K}^-(\mathfrak{Mod} - R)$. Ensuite, par le Corollaire 8, il vient

$$\mathbf{Tor}_n^R(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_n(- \otimes_R B)(A) \simeq \mathbb{L}_n(A \otimes_R -)(B) = H^{-n} \mathcal{L}^-(A \otimes_R -)(B) = H^{-n}(A \otimes_R^{\mathbb{L}} B).$$

Un autre argument serait de dire que si P, Q sont des complexes de chaînes de modules plats, alors par définition, les groupes hypertor $\mathbf{Tor}_n^R(P, Q)$ sont l'homologie de $\text{Tot}^{\oplus}(P \otimes_R Q)$. En réindexant les complexes de chaînes en complexes de cochaînes, le complexe de cochaînes $\text{Tot}^{\oplus}(P \otimes_R Q)$ est isomorphe à $P \otimes_R^{\mathbb{L}} Q$. $\square$

Corollaire 10. *Si A et B sont des R -modules, alors*

$$\text{Tor}_n^R(A, B) \simeq H^{-n}(A \otimes_R^{\mathbb{L}} B),$$

avec A et B considérés comme des complexes concentrés au degré zéro.

Remarque 6. • On peut montrer que $\mathcal{L}^-\text{Tot}^{\oplus}(- \otimes_R B)$ existe et qu'on a

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} B \simeq \mathcal{L}^-\text{Tot}^{\oplus}(- \otimes_R B)(A),$$

dans $\mathcal{D}^-(\mathfrak{Ab})$.

- Si R est commutatif, on a même un bifoncteur

$$- \otimes_R^{\mathbb{L}} - : \mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod}) \times \mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod}) \rightarrow \mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod})$$

et un isomorphisme naturel

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} B \simeq B \otimes_R^{\mathbb{L}} A.$$

Définition 11. Soient P un complexe de chaînes et I un complexe de cochaînes. On définit

$$\text{Hom}^{\bullet\bullet}(P, I) := (\text{Hom}(P_p, I^q))_{p,q}$$

avec une variante de la Remarque 3 de [2] :

Si $f : P_p \rightarrow I^q$, soit

$$\begin{aligned} d^h f & : P_{p+1} \rightarrow I^q \\ p & \mapsto f(dp) \end{aligned}$$

et soit

$$\begin{aligned} d^v f & : P_p \rightarrow I^{q+1} \\ p & \mapsto (-1)^{p+q+1} d(fp) \end{aligned}$$

$\text{Hom}^{\bullet\bullet}(P, I)$ est le bicomplexe $\text{Hom}^{\bullet\bullet}$. De plus, $\text{Tot}^{\Pi}(\text{Hom}^{\bullet\bullet}(P, I)) =: \text{Hom}^{\bullet}(P, I)$ est appelé le complexe de cochaînes $\text{Hom}^{\bullet}$ total.

Bien-sûr, si A et B sont des complexes de cochaînes, on peut former $\text{Hom}^{\bullet}(A, B)$ en prenant $P_p := A^{-p}$ et $I^q := B^q$. Pour expliquer notre convention de signe, voici un phénomène intéressant. Si A et B sont des complexes de cochaînes, on peut former $\text{Hom}^{\bullet}(A, B)$ comme ci-dessus. Un n -cocycle f de $\text{Hom}^{\bullet}(A, B)$ est une suite de morphismes $\tilde{f}_p : P_p \rightarrow I^{n-p}$

tels que $\widetilde{f}_p \circ d = (-1)^n d \circ \widetilde{f}_{p+1}$ et si $f_p := \widetilde{f}_{-p} : A^p \rightarrow B^{n+p} = B[n]^p$ alors on a $f_p \circ d = (-1)^n d \circ f_{p-1}$, i.e. $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(R-\mathfrak{Mod})}(A, B[n])$. De plus, on voit qu'un n -cobord est un $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(R-\mathfrak{Mod})}(A, B[n])$, homotope à zéro. Ainsi, avec nos conventions, on a

$$H^n(\text{Hom}^\bullet(A, B)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}(R-\mathfrak{Mod})}(A, B[n]),$$

ou encore

$$H^n(\text{Hom}^\bullet(A, B)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A, T^n B),$$

avec $T(B) := B[1]$ et $\mathcal{A} = R - \mathfrak{Mod}$.

$$\text{Hom}^\bullet(A, -) : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{Ab})$$

et

$$\text{Hom}^\bullet(-, B) : \mathcal{K}(\mathcal{A})^{op} \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{Ab})$$

sont des ∂ -foncteurs. En fait, $\text{Hom}^\bullet$ est un bifoncteur

$$\text{Hom}^\bullet : \mathcal{K}(\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{Ab}).$$

Nous allons ici construire un objet $\mathcal{R}\text{Hom}(A, B)$ dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et montrer que si A et B sont bornés inférieurement, alors

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B) \simeq H^n(\mathcal{R}\text{Hom}(A, B)).$$

Puisque $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ceci motive la définition suivante :

Définition 12. Soient A et B des complexes de cochaînes d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Le $n^{\text{ième}}$ hyperext total de A et B est le groupe abélien

$$\mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, B) := \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B).$$

Remarque 7. Puisque $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est triangulée, ses foncteurs $\text{Hom} : \mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, -)$ et $\mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(-, B)$ sont (co)homologiques (voir [1], Corollaire 10), i.e. ils envoient triangles distingués sur suites exactes longues. De même, $H^n(\text{Hom}^\bullet(A, -))$ et $H^n(\text{Hom}^\bullet(-, B))$ sont (co)homologiques puisque $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est triangulée. De plus, on a des morphismes naturels

$$H^n(\text{Hom}^\bullet(A, B)) = \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A, T^n B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B) = \mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, B).$$

Définition 13. Supposons que $\mathcal{A}$ ait assez d'injectifs, de sorte que $\mathcal{R}^+(\text{Hom}^\bullet(A, -) : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{Ab})$ existe pour tout complexe de cochaînes A . On désigne par $\mathcal{R}\text{Hom}(A, B)$ l'objet $\mathcal{R}^+(\text{Hom}^\bullet(A, -))$ de $\mathcal{D}(\mathfrak{Ab})$.

Lemme 8. Si $A \rightarrow A'$ est un quasi-isomorphisme, alors

$$\mathcal{R}\text{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}\text{Hom}(A', B).$$

Démonstration. Quitte à composer par un quasi-isomorphisme, on peut supposer que B est un complexe de cochaînes borné inférieurement et formé d'objets injectifs. Dans ce cas,

$$\mathcal{R}(\mathrm{Hom}(A', B)) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(A', B)$$

est quasi-isomorphe à

$$\mathcal{R}(\mathrm{Hom}(A, B)) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet(A, B)$$

car on a vu dans le Corollaire 7 que

$$\begin{aligned} H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(A', B)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A', T^n B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A', T^n B) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A, T^n B) = H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(A, B)). \end{aligned}$$

□

Théorème 8. 1. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs, alors $\mathcal{R}\mathrm{Hom}$ est un bifoncteur

$$\mathcal{R}\mathrm{Hom}(-, -) : \mathcal{D}(\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{Ab}).$$

2. Si $\mathcal{A}$ a assez de projectifs, alors $\mathcal{R}\mathrm{Hom}$ est un bifoncteur

$$\mathcal{R}\mathrm{Hom}(-, -) : \mathcal{D}^-(\mathcal{A})^{op} \times \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{Ab}).$$

Dans les deux cas, on a

$$\mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, B) \simeq H^n(\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)).$$

Démonstration. Le Lemme 8 montre que, pour chaque B fixé, le foncteur $F(A) = \mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)$ de $\mathcal{K}(\mathcal{A})^{op}$ dans $\mathcal{D}(\mathfrak{Ab})$ envoie un quasi-isomorphisme sur un isomorphisme, donc F se factorise à travers la localisation $\mathcal{D}(\mathcal{A})^{op}$ de $\mathcal{K}(\mathcal{A})^{op}$. Ainsi, pour calculer $H^n(\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B))$, on peut supposer que B est un complexe de cochaînes borné inférieurement, formé d'objets injectifs. Mais, ayant construit $\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)$ comme $\mathrm{Hom}^\bullet(A, B)$, on a

$$H^n(\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)) = H^n(\mathrm{Hom}^\bullet(A, B)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(A, T^n B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A, T^n B).$$

□

Corollaire 11. Si $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs ou de projectifs, alors, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$, le groupe $\mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, B)$ est le groupe $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B)$ usuel.

Démonstration. Si $B \rightarrow I$ est une résolution injective, alors la définition usuelle de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B)$ est

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B) &= H^n(\mathrm{Hom}(A, I)) = H^n(\mathrm{Tot}^\Pi(\mathrm{Hom}(A, I))) = \mathbb{R}^n(\mathrm{Hom}^\bullet(A, -))(B) \\ &= H^n(\mathcal{R}^+\mathrm{Hom}^\bullet(A, -)(B)) = H^n(\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)) = \mathbf{Ext}_{\mathbb{R}}^n(A, B). \end{aligned}$$

De même, si $P \rightarrow A$ est une résolution projective, le $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^n(A, B)$ usuel est

$$H^n(\mathrm{Hom}(P, B)) = H^n(\mathcal{R}\mathrm{Hom}(A, B)).$$

□

Cinquième partie

Suite Spectrale

Terminons notre étude par une version revisitée de la suite spectrale de Grothendieck, dans le cadre des foncteurs dérivé totaux. Nous suivons la Section 10.8 de [5], et nous commençons par un théorème, dit de composition :

Théorème 9. (*Théorème de Composition*)

Soient $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}(\mathcal{B})$ des sous-catégories triangulées localisantes et supposons donnés des ∂ -foncteurs $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$, $G : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$. Supposons de plus, que $\mathcal{R}F$, $\mathcal{R}G$ et $\mathcal{R}(GF)$ existent, avec $\mathcal{R}F(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$. Alors

1. Il existe une unique transformation naturelle $\zeta = \zeta_{G,F} : \mathcal{R}(GF) \rightarrow \mathcal{R}G \circ \mathcal{R}F$ telle que, pour tout A dans $\mathcal{K}$, le diagramme suivant commute dans $\mathcal{D}(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} qGF(A) & \xrightarrow{\xi_G} & (\mathcal{R}G)(qFA) \\ \downarrow \xi_{GF} & & \downarrow \xi_F \\ \mathcal{R}(GF)(qA) & \xrightarrow{\zeta_{qA}} & (\mathcal{R}G)(\mathcal{R}F)(qA) \end{array}$$

2. S'il existe des sous-catégories triangulées $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{K}'_0 \subset \mathcal{K}'$ vérifiant les hypothèse du Théorème 6 (Existence généralisée) pour F et G et si F envoie $\mathcal{K}_0$ dans $\mathcal{K}'_0$, alors ζ est un isomorphisme fonctoriel

$$\zeta : \mathcal{R}(GF) \simeq (\mathcal{R}G) \circ (\mathcal{R}F).$$

Démonstration. 1. Ceci est conséquence de la propriété universelle de $\mathcal{R}(GF)$, provenant de la Définition 7.

2. Il suffit d'observer que si A est dans $\mathcal{K}_0$, alors on a

$$\mathcal{R}(GF)(qA) \simeq qGF(A) \simeq \mathcal{R}G(qFA) \simeq \mathcal{R}G(\mathcal{R}F(qA)).$$

□

Exemple 4. Soient A dans $\mathcal{D}^-(\mathfrak{Mod} - R)$, B dans $\mathcal{D}^-(R - \mathfrak{Mod} - S)$ et C dans $\mathcal{D}^-(S - \mathfrak{Mod})$. Quitte à composer par des quasi-isomorphismes, on peut supposer que A et C sont constitués de projectifs. Appliquer la version duale du Théorème 9 à $F = \text{Tot}(- \otimes_S C)$ et $G = \text{Tot}(A \otimes_R -)$, en remarquant que $GF = FG$, donne

$$A \otimes_R^{\mathbb{L}} (B \otimes_S^{\mathbb{L}} C) \simeq (A \otimes_R^{\mathbb{L}} B) \otimes_S^{\mathbb{L}} C.$$

Le produit tensoriel total est donc associatif.

Théorème 10. (*Suite Spectrale de Grothendieck*)

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ trois catégories abéliennes, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ayant assez d'injectifs et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ des foncteurs exacts à gauche. Si F envoie les injectifs de $\mathcal{A}$ sur des G -acycliques de $\mathcal{B}$, alors

$$\zeta : \mathcal{R}^+(GF) \simeq (\mathcal{R}^+G) \circ (\mathcal{R}^+F).$$

De plus, si F envoie les complexes acycliques sur des complexes G -acycliques et si F et G sont de dimensions cohomologiques finies, alors $\mathcal{R}(GF) : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$ existe et

$$\zeta : \mathcal{R}(GF) \simeq (\mathcal{R}G) \circ (\mathcal{R}F).$$

Dans les deux cas, il existe une suite spectrale convergente, pour tout complexe X :

$$E_2^{p,q} = R^pG(\mathbb{R}^qF(X)) \implies \mathbb{R}^{p+q}GF(X).$$

Si enfin X est un objet de $\mathcal{A}$, ceci est la suite spectrale de Grothendieck, telle que construite dans le théorème 10 de [2].

Démonstration. Les deux premières assertions proviennent du Théorème 9. Ensuite, dans le premier cas, X doit être borné et dans le second cas, on peut tronquer une résolution de Cartan-Eilenberg de X , car F et G sont de dimensions cohomologiques finies, et ce dans la perspective d'obtenir un bicomplexe borné. On peut alors appliquer la proposition 9 de [2] et la suite spectrale d'hypercohomologie convergeant vers

$$\mathbb{R}^{p+q}G(\mathcal{R}F(X)) = H^{p+q}(\mathcal{R}G)(\mathcal{R}F)(X) \simeq H^{p+q}\mathcal{R}(GF)(X) \simeq \mathbb{R}^{p+q}GF(X)$$

a pour seconde page

$$E_2^{p,q} = R^pG(H^q(\mathcal{R}F(X))) = R^pG(\mathbb{R}^qF(X)).$$

□

Références

- [1] Arthur Garnier, *Théorie de l'Homologie Générale - Cohomologies des Groupes et de Hichschild*, Université de Picardie Jules Verne, 2016.
- [2] Arthur Garnier, *Introduction à la Théorie des Suites Spectrales*, maniscrit, août 2016.
- [3] Dragan Milićic, *Lectures on Derived Categories*, University of Utah, Salt Lake City.
- [4] Jean-Louis Verdier, *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes*, Astérisque, 1996.
- [5] Charles A. Weibel, AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Cambridge University Press, 1994.
- [6] Alexander Zimmermann, REPRESENTATION THEORY : A HOMOLOGICAL ALGEBRA POINT OF VIEW, Springer, 2014