Une introduction aux formes et aux variétés différentielles

Arthur Garnier

17 avril 2015

Table des matières

Première partie
Éléments d'algèbre tensorielle

1 Formes multilinéaires, produit tensoriel

Définition 1. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit d'une application $f : E^k \to \mathbb{R}$ est une forme k-linéaire sur E si

$$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall v_i, w_i \in E,\ \forall v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k \in E,$$

$$f(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots, v_k) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \mu f(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$$

On remarque immédiatement que l'ensemble des formes k-linéaires sur E est un espace vectoriel réel appelé "k-ème puissance tensorielle de E^*" ou"k-ème puissance tensorielle duale de E" et on le notera $\bigotimes^k E^*$. Le symbole "$\bigotimes$" ne peut être introduit que par l'étude du produit tensoriel général qui ne nous servira pas ici. Nous pouvons cependant justifier cette notation par le fait que E^* représente habituellement l'espace dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E et ici, on a affaire à une sorte de "produit" de k copies de E^*, d'où le nom de "puissance tensorielle".

Proposition-Définition 1. *Soit $(f, g) \in \bigotimes^k E^* \times \bigotimes^l E^*$. On appelle produit tensoriel de f et g l'élément de $\bigotimes^{k+l} E^*$ noté $f \otimes g$ défini par*

$$\forall (v_1, \dots, v_{k+l}) \in E^{k+l},\ f \otimes g(v_1, \dots, v_{k+l}) := f(v_1, \dots, v_k) g(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

Cette loi est associative mais non commutative.

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification. □

Remarque 1. L'intérêt de ce produit est qu'il permet d'exhiber aisément une base de $\bigotimes^k E^*$; En effet, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, soit $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. On a alors pour tout $f \in \bigotimes^k E^*$ et tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$:

$$f(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*(v_1, \ldots, v_k)$$

De plus, comme

$$e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k).$$

on voit facilement que la famille $\{e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*,\ 1 \leq i_j \leq n,\ 1 \leq j \leq k\}$ est libre, c'est donc une base de $\bigotimes^k E^*$ et on obtient $\dim \bigotimes^k E^* = n^k$.

2 Formes multilinéaires alternées, produit extérieur

Définition 2. Soit $f \in \bigotimes^k E^*$. On dit que f est alternée si et seulement si

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \forall (v_1, \ldots, v_k) \in E^k,\ f(v_1, \ldots, v_k) = \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. On notera $\Lambda^k E^*$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires alternées sur E et on l'appellera "k-ème puissance extérieure de E^*" ou "k-ème puissance extérieure duale de E".

Notation 1. La définition précédente ne faisant sens que si $k \geq 1$, on introduira de plus $\Lambda^0 E^* := \mathbb{R}$ et on rappelle que $\Lambda^1 E^* \stackrel{\text{def}}{=} E^*$.

Exemple 1. L'application déterminant dans une base $\mathcal{B}$ donnée :

$$\begin{array}{cccc} \det_{\mathcal{B}} & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

est un élément de $\Lambda^n \mathbb{R}^{n*}$ (c'est même l'unique élément de $\Lambda^n \mathbb{R}^{n*}$ qui vaut 1 sur $\mathcal{B}$).

Remarque 2. On peut montrer sans difficulté que $f \in \bigotimes^k E^*$ est alternée si et seulement si toute famille liée de k-vecteurs annule f.

Définition 3. Soit $f \in \bigotimes^k E^*$. On appelle antisymétrisé de f la forme k-linéaire alternée $Alt(f) \in \Lambda^k E^*$ définie par :

$$Alt(f) : (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

Proposition 1.

$$\forall f \in \Lambda^k E^*, \ Alt(f) = f$$

Démonstration. Si $f \in \Lambda^k E^*$, on a, pour tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$:

$$Alt(f)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} f(v_1, \ldots, v_k)$$

$$= \frac{1}{k!} f(v_1, \ldots, v_k) |\mathfrak{S}_k| = f(v_1, \ldots, v_k)$$

□

Remarque 3. $Alt : \bigotimes^k E^* \to \Lambda^k E^*$ est une application dont l'ensemble des points fixes contient $\Lambda^k E^*$, ce qui rend la définition 3 cohérente.

Proposition-Définition 2. *Si $f \in \bigotimes^k E^*$ et $g \in \bigotimes^l E^*$, on définit le produit extérieur de f et g comme :*

$$f \wedge g := \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(f \otimes g) \in \Lambda^{k+l} E^*$$

ie

$$f \wedge g(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

Ce produit est bilinéaire, associatif et vérifie :

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$$

Pour montrer que le produit extérieur est associatif, nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 1.

$$\forall (f,g) \in \bigotimes^{k} E^* \times \bigotimes^{l} E^* \ ; \ Alt(g) = 0, \ Alt(f \otimes g) = 0$$

Démonstration. Soit la relation d'équivalence définie sur $\mathfrak{S}_{k+l}$ par :

$$\sigma \sim \tau \ \Leftrightarrow \ \forall 1 \leq i \leq k, \ \sigma(i) = \tau(i)$$

On note c_j les classes d'équivalence de $\sim$. Pour tout j,

$$\sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$= f(v_1, \ldots, v_k) \sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = 0$$

car $Alt(g) = 0$. Or, $\mathfrak{S}_{k+l}$ est réunion disjointe des classes C_j, donc

$$Alt(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{j} \sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = 0$$

□

Nous pouvons donc démontrer la Proposition-Définition 2 :

Démonstration. Il est clair que le résultat du produit ainsi défini est $(k+l)$-linéaire et qu'il définit une loi bilinéaire. Montrons qu'il est alterné. Soit donc τ une permutation de $\mathfrak{S}_{k+l}$, on a

$$f \wedge g(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k+l)})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau)^2 f(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\tau(k)}) g(v_{\sigma\circ\tau(k+1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\tau(k+l)})$$

$$= \varepsilon(\tau)\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}\varepsilon(\sigma\circ\tau)f(v_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(k)})g(v_{\sigma\circ\tau(k+1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(k+l)})$$

$$= \varepsilon(\tau) f\wedge g(v_1,\dots,v_{k+l})$$

Pour l'associativité, on a

$$Alt(Alt(f\otimes g)-(f\otimes g)) = Alt(f\otimes g) - Alt(f\otimes g) = 0$$

Donc, d'après le lemme précédent :

$$Alt((Alt(f\otimes g)\otimes h) - Alt(f\otimes g\otimes h)$$

$$= Alt((Alt(f\otimes g)-(f\otimes g))\otimes h) = 0$$

On en déduit que :

$$(f\wedge g)\wedge h = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}Alt((f\wedge g)\otimes h) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt(f\otimes g\otimes h) = f\wedge(g\wedge h)$$

d'où l'associativité recherchée.
Enfin, soit μ la permutation de $\{1,\dots,k+l\}$ qui envoie $(1,\dots,k,k+1,\dots,k+l)$ sur $(k+1,\dots,k+l,1,\dots,k)$. On a $\varepsilon(\mu) = (-1)^{kl}$ et $f\wedge g(v_1,\dots,v_{k+l}) = f\wedge g(v_{\mu(1)},\dots,v_{\mu(k+l)})$, ce qui donne $f\wedge g = (-1)^{kl} g\wedge f$. □

Exemple 2. 1) On a, si $k=l=1$, alors $f\wedge g(u,v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$.
2) On peut montrer qu'en notant :

$$\Gamma_{k,l} := \{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}\ ;\ \sigma(1)<\ldots<\sigma(k) \text{ et } \sigma(k+1)<\ldots<\sigma(k+l)\} \leq \mathfrak{S}_{k+l}$$

Alors

$$f\wedge g(v_1,\dots,v_k) = \sum_{\sigma\in\Gamma_{k,l}}\varepsilon(\sigma)f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})g(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

3) Si $L_1,\dots,L_k$ sont des formes linéaires sur E, alors :

$$\bigwedge_{i=1}^{k} L_i(v_1,\dots,v_k) := L_1\wedge\ldots\wedge L_k(v_1,\dots,v_k)$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{k}L_i(v_{\sigma(i)}) = \det((L_i(v_j))_{1\leq i,j\leq k})$$

Remarque 4. On considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale et les indices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. On a :

$$e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc la famille $\{e_{i_1}^*, \ldots, e_{i_k}^*\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ est libre.

Théorème 1. *Soient $f \in \Lambda^k E^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale associée. Alors*

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq j \leq k$, on pose $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme f est multilinéaire,

$$f(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

(car $f = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*$). De plus, si les indices $i_1, \ldots, i_k$ ne sont pas tous distincts, alors $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0$ et s'ils sont distincts, alors il existe une unique permutation de $\mathfrak{S}_k$ telle que $i_{\sigma(1)} < \ldots < i_{\sigma(k)}$. Ensuite, $f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)})$. Donc :

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \ldots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \ldots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \ldots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Corollaire 1. *Si $k > n$, l'espace vectoriel $\Lambda^k E^*$ est trivial. De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est sa base duale associée, alors la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ est une base de $\Lambda^k E^*$ et on a*

$$\dim \Lambda^k E^* = \binom{n}{k}$$

Démonstration. Si $k > n$, l'ensemble des indices $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ est vide, donc $\Lambda^k E^* = \{0\}$. Ensuite, la remarque 4 montre que la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ est libre et le Théorème 1, qu'elle est génératrice, c'est donc bien une base de l'espace $\Lambda^k E^*$. Enfin,

$$\dim \Lambda^k E^* = \mathrm{card}\{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*,\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\} = \binom{n}{k}$$

□

Définition 4. Enfin, on peut, grâce au produit extérieur, définir une structure d'algèbre anticommutative sur l'espace vectoriel :

$$\Lambda E^* := \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k E^*$$

On appelle cet espace l'algèbre extérieure sur E.

Deuxième partie

Formes différentielles sur un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie

3 Définitions

Définition **5.** On dit d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un autre est lisse si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition **6.** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et U un ouvert de E. On appelle k-forme différentielle sur U toute application lisse ω de U dans $\Lambda^k E^*$. On notera $\Omega^k(U) := \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k E^*)$ leur ensemble. Il est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ mais aussi d'une structure de module libre sur $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. De plus, l'entier k est appelé degré de la forme et on le note $\deg \omega$.

Remarque 5. 1) Nous avons choisi de nous restreindre au cas où ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais nous aurions pu considérer les k-formes de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 1$. Les résultats s'étendent alors sans problème à ces cas et si nous avons affaire à une forme de classe $\mathcal{C}^p,\ p \neq \infty$, nous le préciserons en notant : $\omega \in \Omega_p^k(U) := \mathcal{C}^p(U, \Lambda^k E^*)$.
2) Une 0-forme différentielle est une application lisse de U dans $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$. De plus, la différentielle (au sens usuel) d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ lisse est une 1-forme différentielle, c'est-à-dire une application lisse de U dans E^*. Elle sera notée df.

Notre travail préliminaire sur l'algèbre tensoriel nous permet d'énoncer :

Proposition **2.** *Soient U un ouvert de E, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E munie* *de sa base duale* $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ *et* $\omega \in \Omega^k(U)$*. On a :*

$$\forall x \in U,\ \exists \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) \in \mathbb{R}\ ;\ \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^*$$

Cela étant, e_i^* *est la différentielle de la i-ème projection* $x \mapsto x_i$*, on notera donc :*

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Exemple 3. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, sa différentielle s'écrit :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Définition 7. 1) Soient $\omega \in \Omega^k(U)$ et $\alpha \in \Omega^l(U)$. On définit le produit extérieur de ω et α comme étant l'unique $(k+l)$-forme différentielle notée $\omega \wedge \alpha$ telle que

$$(\omega \wedge \alpha)(x) := \omega(x) \wedge \alpha(x),\ \forall x \in U$$

Où le "$\wedge$" apparaissant dans le deuxième membre de l'égalité ci-dessus est le produit extérieur de deux formes multilinéaires défini plus haut.
2) Ce produit donne à l'espace vectoriel :

$$\Omega(U) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$$

une structure d'algèbre anticommutative.

Définition 8. Soient $U \subseteq E,\ V \subseteq F$ deux ouverts et $f : U \to V$ une fonction lisse. L'image réciproque de $\omega \in \Omega^k(V)$ par f est l'élément $f^*\omega \in \Omega^k(U)$ tel que, pour tout $x \in U$ et tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$:

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k) := \omega(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k)$$

Remarque 6. Si $y_1, \ldots, y_m$ sont les coordonnées sur F est si $(f_1, \ldots, f_m)$ sont les composantes de f, on a :

$$dy_i(Df(x).v) = (df_i)(x)(v)$$

Donc, si

$$\omega(y) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(y) dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$$

alors

$$(f^*\omega)(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(f(x)) df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$$

Pour finir le calcul, on peut développer par multilinéarité du produit extérieur.

Exemple 4. Si $U, V \subseteq E$ sont des ouverts et si $f : U \to V$ est lisse, alors :

$$f^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = (\det Df(x))(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$$

Proposition 3. *Soit $f : U \to V$ une fonction lisse. On a :*

1) $\forall \omega, \alpha \in \Omega^k(V),\ f^*(\omega + \alpha) = f^*\omega + f^*\alpha$

2) $\forall \omega \in \Omega^k(V),\ \forall \alpha \in \Omega^l(V),\ f^*(\omega \wedge \alpha) = (f^*\omega) \wedge (f^*\alpha)$

3) Si $W \subseteq G$ est ouvert, $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(V, W),\ \forall \omega \in \Omega^k(W),\ (g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$

Démonstration. 1) On a, pour tout $x \in U$ et tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E$:

$$f^*(\omega + \alpha)(x)(v_1, \ldots, v_k) = (\omega + \alpha)(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k)$$
$$= \omega(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k) + \alpha(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k)$$
$$= (f^*\omega + f^*\alpha)(x)(v_1, \ldots, v_k)$$

2) Par définition

$$f^*(\omega \wedge \alpha)(x)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = (\omega \wedge \alpha)(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_{k+l})$$

$$= (\omega(f(x)) \wedge \alpha(f(x)))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x)).v_{k+l})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\omega(f(x))(Df(x).v_{\sigma(1)}, \ldots, Df(x).v_{\sigma(k)})\alpha(f(x))(Df(x).v_{\sigma(k+1)}, \ldots, Df(x).v_{\sigma(k+l)})$$

$$= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) f^*\omega(x)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) f^*\alpha(x)(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$= ((f^*\omega) \wedge (f^*\alpha))(x)(v_1, \ldots, v_k)$$

3) On a :

$$((g \circ f)^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(g \circ f)(x)(D(g \circ f)(x).v_1, \ldots, D(g \circ f)(x).v_k)$$

$$= \omega(g(f(x)))(Dg(f(x)).Df(x).v_1, \ldots, Dg(f(x)).Df(x).v_k)$$

$$= g^*\omega(f(x))(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k) = f^*(g^*\omega)(x)(v_1, \ldots, v_k)$$

$\square$

4 Différentielle extérieure

On peut prolonger la notion de différentielle d'une fonction à toute k-forme différentielle :

Théorème 2. *Soit U un ouvert de E. Il existe une unique application $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ telle que :*

i) $\forall \omega \in \Omega^k(U),\ d\omega \in \Omega^{k+1}(U)$
ii) La restriction de d à $\Omega^0(U)$ coïncide avec la différentielle des fonctions
iii) $\forall (\omega, \alpha) \in \Omega^k(U) \times \Omega^l(U),\ d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$
iv) $d^2 = 0$

En outre, cette application est $\mathbb{R}$-linéaire.

Démonstration. Raisonnons par analyse-synthèse :
Analyse : Si $d^2 = 0$, on a $d(dx_i) = 0$. Avec iii), il vient $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = 0$. On en déduit :

$$d(fdx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Soit donc $\omega \in \Omega^k(U)$. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Comme l'opérateur d est linéaire, on a :

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \qquad (1)$$

Synthèse : On voit alors que l'expression (1) convient. En effet, elle est linéaire et vérifie clairement i) et ii). De plus, elle satisfait bien la condition iii) car si

$$\omega = fdx_{i_1} \wedge dx_{i_k} \text{ et } \alpha = gdx_{j_1} \wedge dx_{j_l}$$

Alors on a

$$d(\omega \wedge \alpha) = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_l}$$
$$= (fdg + gdf) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k}$$
$$= fdg \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k} + gdf \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k}$$
$$= fdg \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k} + d\omega \wedge \alpha$$
$$= (-1)^k f \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k} + d\omega \wedge \alpha$$
$$= (-1)^k \omega \wedge d\alpha + d\omega \wedge \alpha$$

Enfin, montrons que iv) est aussi satisfaite. Montrons-la tout d'abord pour les 0-formes, c'est-à-dire pour les fonctions lisses. Soit donc une fonction lisse f. On écrit :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

D'où, avec (1) :

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j) \wedge dx_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i = 0$$

d'après le Théorème de Schwarz.
Et donc, toujours avec (1), $d(dx_i) = 0$ pour tout i. Donc :

$$\forall \omega \in \Omega^k(U),\ d^2\omega = d(d\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d(d\omega_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0$$

et le théorème est démontré. □

Exemple 5. 1) Si $U \subseteq \mathbb{R}^2$ et si $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(U)$, alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

2) Si $U \subseteq \mathbb{R}^3$ et si $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1(U)$, alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx$$

Si $\alpha = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy) \in \Omega^2(U)$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Définition 9. 1) L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure (ou la dérivée extérieure).
2) Soit $\omega \in \Omega^k(U)$. Si $d\omega = 0$, on dit que ω est fermée.
3) Soit $\omega \in \Omega^k(U)$. S'il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ telle que $\omega = d\alpha$, on dit que ω est exacte. Dans ce cas, la forme α est appelée primitive de ω.

Remarque 7. 1) Pour les formes différentielles de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$, on peut définir de manière analogue $d : \Omega_p^k(U) \to \Omega_{p-1}^{k+1}(U)$.
2) On peut exprimer la propriété $d^2 = 0$ sous la forme suivante :
Toute forme différentielle exacte est fermée.
Nous verrons que le théorème de Poincaré offre une réciproque partielle à cette dernière assertion.

Proposition 4. *Soient $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ deux ouverts et $f : U \to V$ une application lisse. Alors*

$$\forall \omega \in \Omega(V),\ d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Démonstration. Commençons par les 0-formes (ie les fonctions lisses). Soit donc $g \in \Omega^0(V)$, on a :

$$d(f \circ g) = f^*(dg)$$

d'après le Théorème de dérivation des fonctions composées. Ensuite, par linéarité de d et de f^*, il suffit de montrer le résultat pour les formes qui s'écrivent :

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

On a, en notant $(f_1, \ldots, f_m)$ les composantes de f :

$$f^*\omega = (g \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$$

Donc

$$d(f^*\omega) = d(g \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_k} = (f^* dg) \wedge f^*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = f^*(d\omega)$$

□

Remarque 8. On peut donc dire que l'image réciproque et la différentielle extérieure commutent et donc que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est fermée (resp. exacte).

Proposition 5. *Soit $\omega := \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i \in \Omega^1(U)$. On a :*

$$d\omega = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall 1 \leq i, j \leq n,\ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

Démonstration. On écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$$

et on calcule

$$
\begin{aligned}
d\omega = \sum_{i=1}^{n} d\omega_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j<i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i - \sum_{j>i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_i \wedge dx_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j<i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i - \sum_{j<i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i
\end{aligned}
$$

d'où le résultat. □

5 Théorème de Poincaré

<u>Définition</u> 10. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que U est étoilé par rapport à un de ses points $a \in U$ si, pour tout $x \in U$ le segment $[a, x] = \{tx + (1-t)a,\ t \in [0,1]\}$ est contenu dans U.

<u>Théorème</u> 3. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, alors toute formes différentielle fermée sur U est exacte.*

Démonstration. On peut supposer que U est étoilé par rapport à l'origine. Montrons tout d'abord le résultat pour les 1-formes. Soit donc $\omega := \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ telle que $d\omega = 0$. On pose :

$$
f : x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \omega_i(tx)\mathrm{d}t.
$$

Cette opération a bien un sens puisque le segment $[0, x]$ est dans U quel que soit $x \in U$. On calcule, en tenant compte du fait que $d\omega = 0$:

$$
df(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \omega_i(tx)\mathrm{d}t \right) dx_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_j
$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \omega_i(tx)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 tx_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \omega_i(tx)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 tx_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \omega_i(tx)\mathrm{d}t + \int_0^1 t \frac{d\omega_j}{dt}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{d(t\omega_j)}{dt}(tx)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x) dx_j = \omega(x)$$

Etablissons à présent le résultat pour une forme différentielle de degré quelconque $k \geq 1$. Soit donc

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U).$$

Comme U est étoilé, on peut définir un opérateur $I : \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(U)$ par :

$$I\omega(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\mathrm{d}t \right) x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

où le symbole $\widehat{\ }$ désigne une omission. On calcule ensuite :

$$d(I\omega)(x) = k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t \right) x_{i_j} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

On a aussi

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

donc

$$I(d\omega)(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t \right) x_i dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$- \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t \right) x_{i_j} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Et si l'on ajoute ces deux expressions, les triples sommes se simplifient et on obtient alors :

$$(d(I\omega) + I(d\omega))(x) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$+ \sum_{1\leq i_,<\ldots<i_k\leq n} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k x_i \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \left(\int_0^1 \frac{d(t\omega_{i_1,\ldots,i_k})}{dt}(tx)\mathrm{d}t \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \overset{\text{def}}{=} \omega(x)$$

Finalement, on a :

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega$$

Donc, si $d\omega = 0$, on a clairement $I(d\omega) = I(0) = 0$ et donc :

$$\omega = d(I\omega)$$

Et ω est bien exacte. □

<u>Corollaire</u> 2. *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega^k(U)$. Si U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et si ω est fermée, alors elle est exacte.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^n \to U$ un difféomorphisme. La Proposition 4 nous assure que $f^*\omega$ est fermée. D'après le Théorème de Poincaré, il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $d\alpha = f^*\omega$. En utilisant à nouveau les Propositions 3 et 4, on obtient :

$$d(f^{-1*}\alpha) = f^{-1*}d\alpha = f^{-1*}f^*\omega = \omega$$

Et donc, ω est exacte. □

Troisième partie

Introduction à la géométrie différentielle et formes différentielles sur les variétés

6 Partition de l'unité

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de U. On note $\mathcal{C}^m(U)$ (resp. $\mathcal{C}^m(K)$) l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ sur U (resp. au voisinage de K). Ensuite, $\mathcal{C}^m_K$ désignera l'espace des fonctions $\mathcal{C}^m$ à support dans K (ie $\{x \ ; \ f(x) \neq 0\} \subseteq K$). Enfin $\mathcal{C}^m_0(U)$ est la réunion des $\mathcal{C}^m_K$ où K parcourt l'ensemble des compacts de U.
Nous allons établir à présent quelques résultats qui nous serons grandement utiles dans la suite.

Lemme 2. *La fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^\infty$:*

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{R} \to & \mathbb{R}_+ \\ & & t \mapsto & \begin{cases} e^{-1/t} \ si \ t \geq 0 \\ 0 \ si \ t \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

Démonstration. On montre par récurrence que, pour tout $p \geq 0$ et tout $t > 0$,

$$f^{(p)}(t) = \frac{P(t)}{t^p} e^{-1/t}, \ P \in \mathbb{R}[X]$$

En effet, c'est vrai pour $p = 0$ et la dérivée de $t \mapsto \frac{P(t)}{t^p} e^{-1/t}$ est

$$\frac{tP'(t) - 2pP(t)}{t^{2p+1}} e^{-1/t} - \frac{P(t)}{t^{2p+2}} e^{-1/t}$$

qui est bien de la forme désirée. On voit donc que $f^{(p)}$ est bien définie pour $t > 0$ et que $\lim_{t \to 0} f^{(p)}(t) = 0$. On en déduit que f est p-fois dérivable en 0 et que sa dérivée p-ème est continue. f est donc de classe $\mathcal{C}^p$ quel que soit $p \geq 0$; elle est donc bien $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Lemme 3. *Il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $g(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $g(t) = 1$ pour $t \geq 1$.*

Démonstration. Si f est la fonction définie précédemment, il suffit de poser :

$$\lambda := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(1-t)\mathrm{d}t \ (= \frac{1}{e})$$

On a $\lambda > 0$ et si on pose

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) := \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t} f(s)f(1-s)\mathrm{d}s = \frac{\int_{-\infty}^{t} f(s)f(1-s)\mathrm{d}s}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)f(1-s)\mathrm{d}s}$$

Alors, cette fonction g répond bien à la question d'après le Lemme précédent. $\square$

Proposition 6. *Soit K un compact de U. Il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ égale à 1 au voisinage de K.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x,\delta) \subset U$ pour tout $x \in K$. Un tel δ existe car $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ atteint son minimum (qui est strictement positif) sur le compact K car elle y est continue. Alors, si g désigne la fonction définie dans le Lemme 3, on pose

$$\psi_x : y \mapsto 2g\left(1 - \frac{|y-x|^2}{\delta^2}\right)$$

et $W_x := \{y\ ;\ \psi_x(y) > 1\}$. $K \subset \bigcup_{x\in K} W_x$ est un recouvrement ouvert de K, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini par les W_{x_j}. Enfin, on pose $\varphi : y \mapsto g(\sum_j \psi_{x_j}(y))$. Alors, $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ hors d'un δ-voisinage de K. $\square$

<u>Corollaire</u> 3. *Si F est un fermé contenu dans un ouvert U, il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans U égale à 1 sur F.*

Démonstration. On pose

$$F_j := F \cap \overline{B(0,j) \setminus B(0,j-2)}$$

On voit alors que F est la réunion des compacts F_j. La Proposition précédente associe à F_j une fonction φ_j à support dans

$$U_j := U \cap (B(0,j+1) \setminus B(0,j-3))$$

et la somme $\sum_j \varphi_j$ étant localement finie (ie tout point possède un voisinage sur lequel seul un nombre fini de φ_j sont non nuls), la fonction

$$\varphi := \sum_j \varphi_j$$

convient. □

<u>Théorème</u> 4. *Soit X un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un recouvrement localement fini de X. Il existe alors des fonctions $\chi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(U_j)$, à valeurs dans $[0,1]$ et telles que*

$$\sum_j \chi_j = 1,\ \forall x \in X$$

La famille $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est alors appelée partition de l'unité subordonnée à $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Il existe un recouvrement de X par des ouverts V_j tels que $\overline{V_j} \subset U_j$ (recouvrement qui est localement fini). Supposons en effet avoir défini $V_1, \ldots, V_m$ tels que

$$X \subset \bigcup_{1\le j\le m} V_j \subset \bigcup_{k\ge m+1} U_k$$

On pose alors $F_{m+1} := X \setminus (\bigcup_{1\le j\le m} V_j \cup \bigcup_{k\ge m+2} U_k)$. On a, par hypothèse $F_{m+1} \subset U_{m+1}$, il existe donc un ouvert V_{m+1} tel que $F_{m+1} \subset V_{m+1} \subset \overline{V_{m+1}} \subset U_{m+1}$. On a alors

$$X \subset \bigcup_{1\le j\le m+1} V_j \cup \bigcup_{k\ge m+2} U_k$$

On prend alors φ_j valant 1 sur $\overline{V_j}$ et s'annulant hors de U_j. Alors $\sum_j \varphi_j > 0$ sur $\bigcup_j V_j$ et si $\psi(x) = 1$ sur X et vaut 0 hors de $\bigcup_j V_j$, on a sur X l'égalité

$$\sum_j \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)} = 1$$

Les fonctions

$$\chi_j : x \mapsto \frac{\varphi_j(x)}{(1-\psi(x)) + \sum_j \varphi_j(x)}$$

donnent alors le résultat. □

7 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Nous allons maintenant pouvoir exposer les premières notions de géométrie différentielle, c'est-à-dire l'étude des variétés ainsi que leurs transformations, comportement, propriétés, etc. Nous allons commencer par l'étude des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.
Dans cette section, lorsque nous parlerons de difféomorphisme, il faudra comprendre qu'il s'agit d'un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

Définition 11. Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme (local) $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\}) \cap \varphi(U)$$

L'entier p est appelé dimension (locale) de M en x. On le note

$$p =: \dim_x M$$

Le couple (U, φ) est appelé carte locale de M en x.

Exemple 6. Pour $p = 0$ une sous-variété est un ensemble de points isolés, pour $p = 1$, c'est une courbe plane régulière et pour $p = n$, une sous-variété de dimension n est simplement un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7. *La dimension de M en un point $x \in M$ est bien définie dans le sens où elle est unique (elle ne dépend pas de la carte locale choisie). De plus, si la sous-variété M est connexe, la dimension ne dépend plus du point x choisi, ie on a*

$$\forall x, y \in M, \ \dim_x M = \dim_y M$$

Dans ce cas, ne nombre unique est appelé la dimension de M et est notée $\dim M$.

Démonstration. Supposons qu'on ait deux difféomorphismes φ_1, φ_2 tels que

$$\varphi_1(U \cap M) = \varphi_1(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

$$\varphi_2(U \cap M) = \varphi_2(U) \cap \mathbb{R}^q \times \{0\}$$

Alors, l'application $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme local défini sur un voisinage de 0 envoyant $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^q \times \{0\}$. Ce qui implique que $d\psi(0)$ soit une application linéaire bijective donc injective, envoyant $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^q \times \{0\}$, donc $p \leq q$. Le raisonnement précédent étant symétrique, on a aussi $q \leq p$ et donc $p = q$.
Ensuite, si $\varphi : U \to \varphi(U)$ est une carte en x et si $y \in U$, φ fournit (par translation) une carte en y. En effet, le difféomorphisme $\psi(z) := \varphi(x) - \varphi(y)$ est bien une carte en y. On en déduit que $\dim_x M = \dim_y M$. Donc l'ensemble

$$\Delta_p := \{x \in M \ ; \ \dim_x M = p\}$$

est un ouvert. De plus, son complémentaire est réunion d'ouverts :

$$M \setminus \Delta_p = \bigcup_{j \neq p} \Delta_j$$

Donc, le complémentaire de Δ_p est aussi un ouvert, on en déduit que Δ_p est ouvert et fermé. Ainsi, si Δ_p est non vide et si M est connexe, alors $M = \Delta_p$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 8. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. M est une sous-variété si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage W de x dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'on ait au moins une des propriétés suivantes :*

1) Il existe un changement linéaire de coordonnées, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que

$$W \cap M = W \cap \{A(z, f(z)),\ z \in \mathbb{R}^p\}$$

2) Il existe une application $\mathcal{C}^\infty$, $F : W \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x)$ soit surjective et $W \cap M = F^{-1}(0)$.
3) Il existe $j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et définie sur un voisinage U de 0, telle que $j(0) = x$, $dj(0)$ est injective et j est une bijection bicontinue

$$j : U \to M \cap W$$

Démonstration. Montrons qu'une sous-variété vérifie la propriété 2).
Soit $\varphi : M \cap W \to \mathbb{R}^p \times \{0\}$. On note $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{n-p})$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^n$ et $F : x \mapsto (v_1(\varphi(x)), \ldots, v_{n-p}(\varphi(x)))$. On a alors

$$x \in M \cap W \;\Leftrightarrow\; F(x) = 0 \text{ et } x \in W$$

Or, $dF(0)$ est surjective car c'est la composée de la différentielle de $(u, v) \mapsto v$ et de $d\varphi$.
Montrons que 2) implique 1).
Soit $(u, v) \in W$. Alors

$$F(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; (u, v) \in M \cap W$$

Quitte à effectuer un changement linéaire de variables et à restreindre à W, on peut supposer que $\frac{\partial F}{\partial v}$ est inversible. Par le théorème des fonctions implicites, il existe $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ tel que

$$(u, v) \in W \text{ et } F(u, v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v = f(u) \text{ et } u \in U$$

Donc M est localement le graphe de f.
Montrons que 1) entraine que M soit une sous-variété.
Ici encore, quitte à faire un changement linéaire de variables, on peut supposer que $M \cap W$ est le graphe de $f : U \to V$. Alors $\varphi : (u, v) \mapsto (u, v - f(u))$ envoie $M \cap W$ sur $\mathbb{R}^p \times \{0\} \cap (U \times V)$
Montrons que 1) implique 3).
Soit $M \cap (U \times V)$ le graphe de $f : U \to V$. Soit aussi $j : x \mapsto (x, f(x))$ définie sur U. Alors j a sa différentielle injective. De plus, l'image d'un ouvert U'

contenu dans U est égale à $(U' \times V) \cap M$ qui est donc un voisinage de x dans M. L'application j est donc bicontinue.
Montrons enfin que 3) implique 1).
Soit $j(x) = (u(x), v(x))$ définie sur U, et telle que $j(U) = M \cap W$. On peut supposer après changement linéaire de variables, que l'image de $dj(0)$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, ie que $dv(0) = 0$ et $du(0)$ est un isomorphisme. Le théorème d'inversion locale permet alors de trouver des ouverts $U' \subset U$ et $V' \subset V$ et une application $\mathcal{C}^\infty$, $\rho : U' \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \to V'$ telle que pour tout $(x, y) \in U' \times V'$

$$u(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = \rho(y)$$

Alors $f : x \mapsto v \circ \rho(x)$ a pour graphe

$$\{(x, v \circ \rho(x)),\; x \in V'\} = \{(u(x), v(x)),\; x \in U'\}.$$

Par bicontinuité de j, on peut affirmer que $j(U') = M \cap W'$ pour un voisinage W' de x. Alors $M \cap W'$ est bien le graphe de f au dessus de U'. $\square$

Exemple 7. 1) La spirale décrite par la paramétrisation : $t \mapsto (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t))$ est une sous-variété, d'après le critère 3) de la Proposition 8. Notons qu'elle n'est pas fermée.
2) la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ peut-être définie comme l'ensemble des zéros de l'application :

$$\begin{array}{cccc} S & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \end{array}$$

Si $(x_1, \ldots, x_n) \in S^{-1}(\{0\})$, alors

$$dS(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i dx_i \neq 0 \text{ car } (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Donc $dS(x)$ est surjective si $x \in S^{-1}(\{0\})$ (car elle est alors linéaire et injective entre espaces de dimension finies). Enfin, d'après le critère 2) de la Proposition 8, $\mathbb{S}^{n-1}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. De même, les quadriques $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2 = 1,\ \varepsilon_i = \pm 1$ sont des sous-variétés (de dimension $n-1$) de $\mathbb{R}^n$.
3) Soit encore le tore paramétré par :

$$\begin{array}{ccccc} j & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (\theta, \varphi) & \mapsto & ((r - \rho\cos(\theta))\cos(\varphi), (r - \rho\cos(\theta))\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)),\ \rho < r \end{array}$$

Cette application j est localement bicontinue. En effet, soit $j(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Si z appartient à un intervalle de longueur inférieure à $1/2$, il existe une unique dérmination continue de $\theta(z) = \arcsin(\frac{z}{\rho})$ telle que $\theta(z_0) = \theta_0$. Or $\rho < r$, donc $r - \rho\cos(\theta(z)) > 0$ et comme on peut choisir une détermination de $\varphi(y,z) = \arcsin\left(\frac{y}{r-\rho\cos(\theta(z))}\right)$ telle que $\varphi(y_0, z_0) = \varphi_0$, l'application $(x,y,z) \mapsto (\theta(z), \varphi(y,z))$ est continue et envoie un voisinage de (x_0, y_0, z_0) du tore sur un voisinage de (θ_0, φ_0). De plus, les vecteurs suivants sont indépendants :

$$\frac{\partial j}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\theta))$$

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (\rho\cos(\theta) - r)\sin(\varphi), (r - \cos(\theta))\cos(\varphi), 0)$$

On en conclut, en utilisant le critère 3) de la Proposition 8, que le tore est une sous-variété.

Nous pouvons à présent définir la notion d'espace tangent à une sous-variété, qui étend les notions de courbe tangente et de plan tangent.

Définition 12. Soient M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$, x un point de M et φ une carte en x. On appelle espace (vectoriel) tangent à M en x l'espace vectoriel $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, noté T_xM. On appelle espace affine tangent à M en x l'unique espace affine passant par x et de direction T_xM, noté $\tilde{T}_xM$.

Pour que cette définition soit cohérente, il faut montrer que l'espace vectoriel $d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ ne dépend pas de la carte φ choisie. Soient donc deux cartes φ, ψ en $x \in M$. L'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ envoie alors $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ sur lui-même, donc sa différentielle aussi et on obtient

$$d\varphi(x)d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = \mathbb{R}^p \times \{0\}$$

ie

$$d\psi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\}) = d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$$

d'où le résultat.

Remarque 9. On peut montrer que :
1) Si M est définie localement comme le graphe $\{(y, f(y)),\ y \in \mathbb{R}^p\}$, alors

$$T_{x=(z,f(z))}M = \{(h, df(z)h),\ h \in \mathbb{R}^p\}$$

2) Si M est définie (localement) comme l'ensemble des zéros de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $dF(x)$ soit surjective, alors

$$T_xM = \ker dF(x)$$

3) Enfin, si M est vue (localement) comme l'image de $j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec $j(0) = x$ et $dj(0)$ injective, alors

$$T_xM = dj(0)(\mathbb{R}^p)$$

Proposition 9. *Si M est une sous-variété et si $x \in M$, alors l'espace tangent T_xM est l'ensemble des vecteurs vitesse en $t = 0$ des chemins de classe $\mathcal{C}^\infty$ tracés dans M et passant par x en $t = 0$.*

Démonstration. Soit φ une carte en x.
Soit γ une courbe tracée dans M telle que $\gamma(0) = x$. Alors, pour t proche de 0, $\varphi(\gamma(t))$ est bien définie, tracée dans $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$ et passe par 0 en $t = 0$. Dans la tangent en 0 de $\varphi(\gamma(t))$ est dans $\mathbb{R}^p$, ie $d\varphi(\gamma(0))\gamma'(0) \in \mathbb{R}^p$, donc par définition, $\gamma'(0) \in T_xM$.
Soit $\xi \in T_xM$. Alors, $d\varphi(x)\xi \in \mathbb{R}^p$. Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^p$, tangent à $d\varphi(x)\xi$ en $t = 0$. Par continuité, on peut supposer que l'image de c est contenue dans $\varphi(U)$, donc $\gamma : t \mapsto \varphi^{-1}(c(t))$ est une courbe tracée dans M et elle est tangente à ξ en $t = 0$. $\square$

Exemple 8. 1) Soit $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité dans l'espace. Nous avons vu dans l'Exemple 7 2) qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. De plus, si on pose $F : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, on a $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(\{0\})$, on a $dF(x).h = 2\langle x, h\rangle$; donc l'espace tangent $T_xM\mathbb{S}^2$ à $\mathbb{S}^2$ est le plan orthogonal à x (et l'espace affine tangent à M en x est le plan affine orthogonal à x et passant par ce dernier).
2) Soit $\mathcal{O} := O(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tM \cdot M = I_n\}$

(on note $\mathcal{S}_n := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_n := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ {}^tM = -M\}$ et on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$).
On pose :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n \\ & & M & \mapsto & {}^tM \cdot M - I_n \end{array}$$

On a :

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}, \ df(M).H = {}^tM \cdot H + {}^tH \cdot M$$

$df(M)$ est surjective sur $f^{-1}(\{0\})$: en effet, si $S \in \mathcal{S}_n$, $H := \frac{1}{2}({}^tM)^{-1}S = \frac{1}{2}MS$ vérifie $df(M) \cdot H = S$. Et on a $f^{-1}(\{0\}) = O(n)$ donc $\mathcal{O}$ est une sous-variété (de $\mathbb{R}^{n^2}$). De plus, son espace tangent en I_n est donné par

$$T_{I_n}\mathcal{O} = \ker(df(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \ ; \ {}^tH + H = 0\} = \mathcal{A}_n$$

3) Attention, le cône défini par

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 = z^2\}$$

n'est pas une sous-variété. Supposons par l'absurde que ce soit une sous-variété. On voit que $\mathcal{C}$ est connexe par arcs, donc connexe et d'après le deuxième critère de la Proposition 8, un voisinage de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ est une sous-variété de dimension 2 étant donné que sur ce point, $dF(x, y, z)(u, v, w) = x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w$ n'est pas identiquement nulle. Donc $\mathcal{C}$ serait uniformément de dimension 2. Cependant, en $(0, 0, 0)$, les courbes $t \mapsto (t\cos(\theta), t\sin(\theta), t)$ tracées dans $\mathcal{C}$ ont pour vecteur vitesse en 0 le vecteur $(\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$, or l'ensemble de ces vecteurs ne peut être inclus dans aucun plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, d'où une contradiction et donc le fait que $\mathcal{C}$ ne soit pas une sous-variété.

Concernant les fonctions sur les sous-variétés, nous ne les étudierons pas en détail. Nous pouvons cependant donner la proposition suivante, que nous ne démontrerons pas :

Proposition 10. *Soit M une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) := \{f_{|M}, \ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ si et seulement si pour toute carte (U, φ), l'application $f \circ \varphi^{-1}_{|\varphi(U) \cap \mathbb{R}^p}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Nous allons à présent définir la notion de sous-variété à bord qui nous permettra de donner une nouvelle façon de considérer le bord d'une courbe

ou d'une surface qui, en général, ne coïcide pas avec le bord topologique usuel (sauf dans le cas d'une sous-variété de dimension n dans $\mathbb{R}^n$).
Dans toute la suite, on note $\mathbb{H}^n$ le demi-espace :

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_1 \leq 0\}$$

Définition 13. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x_0) = 0$ et tel que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

$$\varphi(U \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}) \cap \varphi(U)$$

L'entier p est unique et est appelé la dimension de M en x_0 et si M est connexe, il ne dépend pas du point choisi.
On appelle bord de M et on note ∂M le sous-ensemble

$$\partial M := \{x \in M \ ; \ \varphi_x(U_x \cap M) = (\mathbb{H}^p \times \{0\}) \cap \varphi_x(U_x)\} \subset M$$

Remarque 10. 1) Les deux cas ci-dessus ne peuvent se présenter simultanément pour un seul point x_0 car il n'existe aucun difféomorphisme préservant l'origine et envoyant $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}^n$; en effet, l'image par un difféomorphisme d'un ouvert contenant l'origine est un ouvert contenant l'origine et il n'existe pas de tel ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.
2) On peut encore définir l'espace tangent comme dans le cas sans bord. Pour les point de $M \setminus \partial M$, on procède comme précédemment. Pour les points de ∂M, on définit

$$T_x M := d\varphi^{-1}(0)(\mathbb{R}^p)$$

pour φ une carte en x. Mais attention, en un point x du bord, l'espace $T_x M$ n'est plus l'ensemble des vecteurs vitesse d'une courbe tracée dans M passant par x !

Exemple 9. Soit la demi-sphère :

$$\mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0\}$$

Alors, $\mathbb{S}^2_+$ est une sous-variété à bord, dont le bord est le cercle

$$\partial\mathbb{S}^2_+ = \{(x, y, 0) \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}$$

et dont l'espace tangent en (x, y, z) est donné par

$$T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2_+ = \{(u, v, w) \ ; \ xu + yv + zw = 0\}$$

Définition 14. Une sous-variété M telle que $\partial M = \emptyset$ sera appelée sous-variété sans bord ou sous-variété simple.

Enfin, avant de commencer l'étude des variétés différentielles dites abstraites, nous allons donner une proposition pratique, que nous admettrons :

Proposition 11. *Soient M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $M = F^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ et telle que, sur $F^{-1}(\{0\})$, $dF(x)$ soit surjective et sur $F^{-1}(\mathbb{R}^*_+ \times \{0\})$ l'application $d(\pi \circ F)(x)$ soit surjective ; où $\pi : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^{n-p-1}$ est la projection parallèlement à $\mathbb{R} \times \{0\}$.*
Alors, M est une sous-variété à bord de $\mathbb{R}^n$, de dimension p et de bord $\partial M = F^{-1}(\{0\})$.

8 Variétés différentielles abstraites

Nous allons maintenant pouvoir entrer dans le cadre général de la géométrie différentielle. Pour cela, nous allons définir la notion de variété abstraite qui se débarasse de l'espace $\mathbb{R}^n$ ambiant, qui peut parfois se révéler inutile voire encombrant. Mais cette abstraction a un prix et l'intuition est souvent mise en défaut...

Définition 15. Soit M un espace topologique métrisable, k un entier naturel strictement positif et n un entier naturel. On appelle Atlas n-dimmensionnel de classe $\mathcal{C}^k$ sur M tout ensemble indexé de couples $(U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ tels que :

1) $(U_j)_{j\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de M
2) Chaque φ_j est un homéomorphisme $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$
3) Pour tous $i, j \in \Lambda,$ si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ alors, l'application
$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est de classe $\mathcal{C}^k$

On peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas n-dimmensionnels de classe $\mathcal{C}^k$ sur M :

Proposition-Définition 3. *Soient $\mathcal{A} := (U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ un atlas n-dimmensionnel de classe $\mathcal{C}^k$ et (U, φ) un couple tel que U soit un ouvert de M et $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme. On dit que (U, φ) est compatible avec $\mathcal{A}$ si la réunion $\mathcal{A} \cup (U, \varphi)$ est encore un atlas de classe $\mathcal{C}^k$.*
De même, si $\mathcal{B} := (V_i, \psi_i)_{i\in\Delta}$ est un autre atlas n-dimmensionnel de classe $\mathcal{C}^k$ sur M, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont compatibles et on note $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est encore un atlas sur M.
La relation $\sim$ est alors une relation d'équivalence.

Démonstration. C'est une vérification élémentaire. □

Définition 16. On appelle variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$, de dimension n, la donnée d'un espace topologique métrisable M et d'une classe d'équivalence d'atlas n-dimmensionnels de classe $\mathcal{C}^k$ pour la relation $\sim$.

Remarque 11. 1) On aurait pu considérer le cas où M est simplement un ensemble quelconque car si M est une variété différentielle au sens que nous venons de définir, alors cet ensemble est canoniquement muni d'une topologie métrisable rendant M localement compact ; mais cette généralisation ne nous sera pas utile.
2) Dans la pratique, on définira une variété comme un espace métrisable M muni d'un atlas, dont on prendra implicitement la classe d'équivalence pour $\sim$. Ce qui motive la définition suivante :

Définition 17. Soit M un espace topologiqe métrisable, réunion dénombrable de compacts. On appelle structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur M la donnée d'un atlas $\mathcal{A} := (U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ de classe $\mathcal{C}^k$.
Si $k = 0$, on dit que M est une variété topologique.

Remarque 12. n est appelé la dimension de M en x et on note $n =: \dim_x M$. Il est trivial de vérifier que n ne dépend pas de la carte car $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes pour $m \neq n$. De plus, comme dans le cas des sous-variétés, si M est connexe, alors $\dim_x M$ ne dépend plus de x et on note alors $\dim_x M =: \dim M$ la dimension de M.
Notons que la définition précédente est compatible avec la notion de sous-variété : en effet, pour toute carte (U, φ) d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ on associe $(U \cap M, \varphi_{|U\cap M})$ qui est une carte de la variété M. Alors, toute sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété.
Enfin, lorsque l'on considèrera une variété M, on désignera toujours par $\mathcal{A}$ l'atlas que l'on a choisi (et par $\overline{\mathcal{A}}$ sa classe).

On peut également définir la notion de variété à bord, qui nous servira beaucoup par la suite. Mais avant cela, démontrons un théorème fondamental, fruit de notre préliminaire concernant les partitions de l'unité :

<u>Théorème</u> 5. *Soient M une variété et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe alors une famille $(\rho_i)_{i\in I}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :*

$$\textit{1) } \forall i \in I,\ supp(\rho_i) \subset U_i$$

$$\textit{2) } \forall x \in M,\ 0 \leq \rho_i(x) \leq 1$$

$$\textit{3) } \forall x \in M,\ \sum_{i\in I} \rho_i(x) = 1$$

4) Tout point $x \in M$ possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de supports des ρ_i

Une telle famille s'appelle une partition de l'unité subordonnée à $(U_i)_{i\in I}$.

Démonstration. Pour commencer, passons à un recouvrement localement fini, dont chaque ouvert est contenu dans le domaine d'une carte. Soit $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un tel recouvrement et V_j un sous-recouvrement tel que

$$V_j \subset \overline{V_j} \subset U_j$$

Via les cartes $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, on peut, grâce au Corollaire 3, trouver des fonctions f_j à support dans U_j telles que $f_j = 1$ sur V_j. Alors les fonctions suivantes répondent à la question :

$$\rho_i := \frac{f_i}{\sum_j f_j}$$

□

<u>Définition</u> 18. Soit M un espace métrisable, réunion dénombrable de compacts. On appelle structure de variété différentielle à bord de classe $\mathcal{C}^k$ sur M la donnée d'une famille de couples $(U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ telle que :

1) $(U_j)_{j\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de M
2) φ_j est soit un homéomorphisme $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$
ou un homéomorphisme $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{H}^n$
où $\varphi_j(U_j)$ est un ouvert
3) Les applications $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_j \cap U_i) \to \varphi_j(U_j \cap U_i)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$

Une telle famille de couples est encore appelé un atlas sur M.

Remarque 13. 1) Rappel : Un ouvert de $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$ est l'intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{H}^n$.
2) On note ∂M l'ensemble :

$$\partial M := \{x \in M \ ; \ \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A} \ ; \ x \in U, \ \varphi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \partial \mathbb{H}^n\}$$

3) Toute variété de classe $\mathcal{C}^k$ possède une unique structure de classe $\mathcal{C}^\infty$ et cela parce qu'en vertue du théorème d'inversion locale, les $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes sont $\mathcal{C}^1$-denses. On peut alors parler de structure différentiable.

On peut définir les morphismes de variété :

Définition 19. Soient $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux variétés. On note :

1) $\mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}^0(M, \mathbb{R}) \ ; \ \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}, \ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}(\varphi(U), \mathbb{R})\}$

2) $\mathcal{C}^k(M, N) := \{f \in N^M \ ; \ \forall ((U, \varphi), (V, \psi)) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^k\}$

(Le domaine de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ étant $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ et son image, $\psi(f(U) \cap V)$.)

Définition 20. Soient M une variété, $x \in M$ et $\gamma, \delta :] - 1, 1[\to M$ deux courbes paramétrées telles que $\gamma(0) = \delta(0) = x$. On note leur ensemble Γ_x. On dit que γ, δ sont tangentes en x et on note $\gamma \sim_x \delta$ si

$$\gamma \sim_x \delta \ \Leftrightarrow \ \forall (U, \varphi) \in \mathcal{A} \ ; \ x \in U, \ \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ \delta)}{dt}(0)$$

(Si c'est vrai pour une carte, ça l'est pour toutes). La relation $\sim_x$ est une relation d'équivalence et on appelle espace tangent à M en x l'ensemble des classes d'équivalances de ces courbes (ie le quotient) :

$$T_x M := \Gamma_x / \sim_x$$

C'est un espace vectoriel.
On appelle espace tangent à M l'ensemble

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$$

Remarque 14. Si $f : M \to N$ est une application différentiable entre variétés, on définit :

$$\begin{array}{cccc} df & : & T_xM & \to & T_{f(x)}N \\ & & \overline{\gamma} & \mapsto & \overline{f \circ \gamma} \end{array}$$

Nous allons voir le définition de fibré vectoriel, qui nous permettra de donner une structure intéressante à l'espace tangent TM.

Définition 21. Soit M une variété. On appelle fibré vectoriel sur M tout couple (E, p) où E est un espace topologique et $p : E \to M$ est une application (appelée projection) telle que les $p^{-1}(x) =: E_x$ (appelés fibres) soient des espaces vectoriels vérifiant :
Il existe un recouvrement ouvert U_j de M et des cartes (dites de fibré) $\psi_j : p^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^n$ telles que :
1) $p_1 \circ \psi_j = p$ où $p_1 : U_j \times \mathbb{R}^n \to U_j$ est la première projection
2) Les $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ sont de la forme $(x, v) \to (x, g_{i,j}(x).v)$ où $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U_i \cap U_j, GL_n(\mathbb{R}))$.
Les $g_{i,j}$ sont appelés applications de recollement, ou cocycles définissant le fibré.

Théorème 6. *L'espace tangent TM à une variété M, muni de la projection $p(T_xM) = \{x\}$ est un fibré vectoriel. On l'appelle alors le fibré tangent de M. De plus, si $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte, on définit la carte de fibré :*

$$\begin{array}{cccc} d\varphi := \psi & : & T_xM & \to & U \times \mathbb{R}^n \\ & & \overline{\gamma} & \mapsto & \psi(\overline{\gamma}) = (\gamma(0), \frac{d(\varphi\circ\gamma)}{dt}(0)) \end{array}$$

Aux cartes φ_i, φ_j, on a alors associé les cartes
$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$ car $d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ est l'application qui envoie $\frac{d(\varphi_i\circ\gamma)}{dt}(0)$ sur $\frac{d(\varphi_j\circ\gamma)}{dt}(0)$.

Démonstration. Si les (U_j, φ_j) sont des cartes de M, les applications :

$$\begin{array}{ccc} T_{U_j}M & \to & U_j \times \mathbb{R}^n \\ \overline{\gamma} & \mapsto & (\gamma(0), \frac{d(\varphi_j\circ\gamma)}{dt}(0)) \end{array}$$

fournissent les cartes de fibré. En effet,

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, v) = (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}).v)$$

est bien de la forme $(x,v) \mapsto (x, g_{i,j}(x).v)$. De plus, on voit vérifie facilement que ψ est bijective. $\square$

Une vérification (un peu fastidueuse) nous conduit ensuite à :

Théorème 7. *Un vecteur tangent à M est une classe d'équivalance de quadruplets (U, φ, x, v) où $x \in M$, (U, φ) est une carte locale en x et v est un point de $\mathbb{R}^n$, pour la relation d'équivalence*

$$(U, \varphi, x, v) \sim (U', \varphi', x', v') \;\Leftrightarrow\; x' = x,\; d(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(v) = v'$$

On a que TM est l'ensemble des vecteurs tangents à M. Si p est la projection définie précédemment sur TM, pour $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, l'application suivante est une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n & \to & p^{-1}(U) \\ (x,v) & \mapsto & \overline{(U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v)} \end{array}$$

On note $T\varphi : p^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ son inverse. Alors, $\mathcal{A}_{TM} := (p^{-1}(U_j), T\varphi_j)_{j \in \Lambda}$ est un atlas donnant à TM une structure de variété différentielle, de même dimension que M.

Définition 22. Soient M, N deux variétés et E, F deux fibrés vectoriels respectivement sur M et N.
On appelle morphisme de fibrés vectoriels toute application $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que f envoie $p_E^{-1}(x)$ sur $p_F^{-1}(x)$ par une application linéaire.

Remarque 15. 1) Si on a une application $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, alors $df : TM \to TN$ est un morphisme de fibrés.
2) Deux variétés difféomorphes ont des espaces tangents isomorphes.
3) Si M, N sont deux variétés, $M \times N$ est une variété dont l'atlas est donné par

$$\mathcal{A}_{M \times N} := \{(U \times V, \varphi \times \psi) \;;\; (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M,\; (V, \psi) \in \mathcal{A}_N\}$$

Le fibré tangent de $M \times N$ est donné par

$$T(M \times N) := TM \times TN$$

où

$$T_{(x,y)}(M \times N) := T_x M \oplus T_y N$$

Pour la culture, voici un théorème, appelé Théorème de plongement de Whitney, que nous admettrons :

Théorème 8. *Toute variété M de dimension n se plonge dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$.*

Enfin, avant d'attaquer les formes différentielles sur les variétés, parlons un peu des variétés différentielles orientées, qui sont les objets sur lesquels nous intégrerons les formes différentielles.

Définition 23. Soit M une variété à bord. On dit que M est orientable si on peut choisir un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de l'atlas $\mathcal{A}$ de M tel que :

$$\forall x \in M,\ \forall (U,\varphi),(V,\psi) \in \mathcal{O}\ ;\ x \in (U \cap M) \cap (V \cap M),\ \det(d(\varphi \circ \psi^{-1}))(x) > 0$$

Dans ce cas, $\mathcal{O}$ est appelé une orientation (ou un atlas orienté) de M et M munie de cette orientation est appelée une variété orientée.

On peut donner un critère permettant de conclure sur l'orientabilité potentielle d'une variété :

Définition 24. Une orientation des espaces T_xM est dite continue si :
Pour tout n-uplet de champs de vecteurs définis au voisinage de $x \in M$, $(X_1(x), \dots, X_n(x))$ définissant une base orientée positivement de T_xM et pour y voisin de x, les $(X_1(y), \dots, X_n(y))$ définissent encore une base orientée positivement de T_yM.

Proposition 12. *La variété M admet une orientation continue de ses espaces tangents si et seulement si elle est orientable.*

Démonstration. Soit s une symétrie hyperplane de $\mathbb{R}^n$. Soit φ une carte définie sur un ouvert connexe. Alors, soit φ, soit $s \circ \varphi$ possède la propriété suivante :
$d\varphi(x) : T_xM \to \mathbb{R}^n$ envoie une base orientée positivement de T_xM sur une base orientée positivement de $\mathbb{R}^n$.

C'est clair pour un point x et comme $\det(d\varphi(x)X_1(x),\ldots,d\varphi(x)X_n(x))$ varie continuement sur un ouvert connexe sans s'annuler, son signe est donc constant. Donc, pour chaque ouvert de carte, on a une application φ. Il ne reste qu'à vérifier que si φ est définie sur U et ψ sur V, alors $\varphi\circ\psi^{-1}$ a un déterminant positif. Mais en $x\in U\cap V$, $d\varphi(x)$ et $d\psi(x)$ envoient une base orientée positivement de T_xM sur une base orientée de $\mathbb{R}^n$. On en déduit donc que le déterminant de $d(\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(x)) = d\varphi(x)\circ d\psi(x)^{-1}$ est positif. $\square$

Exemple 10. Il existe des variétés non-orientables. Le ruban de Möbius en est un exemple. Posons

$$f:(r,\theta)\mapsto((1+r\cos(\theta/2))\cos(\theta),(1+r\cos(\theta/2))\sin(\theta),r\sin(\theta/2))$$

Soit

$$M := \{f(r,\theta),\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -1/2\le r\le 1/2\}$$

On peut construire facilement une base de T_zM dépendant continuement de θ le long de $z=(\cos(\theta),\sin(\theta),0)$ qui change d'orientation lorsque θ varie de 0 à 2π. En effet, les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}(0,\theta),\ \frac{\partial f}{\partial r}(0,\theta)$$

forment une base de $T_{(\cos(\theta),\sin(\theta),0)}M$ mais

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial\theta}(0,2\pi)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial r}(0,0)=-\frac{\partial f}{\partial r}(0,2\pi)$$

Théorème 9. *Le bord de toute variété (à bord) orientée est une variété orientée sans bord.*

Démonstration. En utilisant les cartes, on voit que si $x\in\partial M$, T_xM est divisé en deux demi-espaces. On appelle demi-espace intérieur (resp. extérieur) le demi-espace $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}_-\times\{0\}\times\mathbb{R}^{p-1})$ (resp. $d\varphi(x)^{-1}(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R}^{p-1})$). Cela permet de diviser les vecteurs non tangents à ∂M en deux classes :

ceux pointant vers l'extérieur et ceux pointant vers l'intérieur de M. Les seconds sont par exemple des vecteurs tangents en 0 à une courbe $\gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(t) \in M, \ \forall t > 0$. Soit alors v un vecteur sortant. On dira d'une base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de $T_x\partial M$ qu'elle est positivement orientée si la base $(v, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base positivement orientée de T_xM. Cela fournit une orientation continue de $T_x\partial M$ qui est orientable d'après la Proposition précédente. $\square$

9 Formes différentielles sur les variétés, intégration et Théorème de Stokes

Après avoir défini les formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ainsi que les variétés, nous allons à présent pouvoir définir les formes différentielles sur les variétés qui offrent un cadre général et abstrait aux notions d'intégrales curvilignes et surfaciques qui, nottamment par le biais du théorème de Stokes, trouvent énormément d'applications mathématiques, comme par exemple le théorème du point fixe de Brouwer en topologie, que nous démontrerons ; mais aussi des applications cruciales en physique, chimie et ingénierie...

Notation 2. Dans la suite, on notera $T_x^*M := (T_xM)^*$ le dual de T_xM, ainsi que $T^*M := \bigcup_{x \in M} T_x^*M$.

Définition 25. Soit M une variété lisse (de classe $\mathcal{C}^\infty$). On appelle forme différentielle de degré k sur M toute application :

$$\begin{array}{rcccc} \omega & : & M & \to & \Lambda^k T^*M \\ & & x & \mapsto & \omega(x) \in \Lambda^k T_x^*M \end{array}$$

On dit qu'une telle forme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si pour toute carte φ de M, la forme différentielle $(\varphi^{-1})^*\omega$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens défini plus haut.
On note $\Omega^k(M)$ l'ensemble des k-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ainsi qu'un module (libre) sur $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Remarque 16. On peut considèrer les formes différentielles de degré k et de classe $\mathcal{C}^p$ sur une variété de classe $\mathcal{C}^m, \ m \geq p$ et noter leur ensemble $\Omega_p^k(M)$. Cependant, dans la suite, toutes les formes différentielles seront supposées de

classe $\mathcal{C}^\infty$.
De plus, nous noterons :

$$\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M)$$

Tout comme sur un ouvert d'un espace vectoriel, on peut définir le produit extérieur, l'image réciproque ainsi que la différentielle extérieure des formes définies sur une variété.

Définition 26. Soit M une variété lisse. Pour tout $(\omega, \alpha) \in \Omega^k(M) \times \Omega^l(M)$ on définit $\omega \wedge \alpha$ par :

$$\forall x \in M,\ (\omega \wedge \alpha)(x) = \omega(x) \wedge \alpha(x)$$

où $\wedge$ est le produit extérieur défini au début entre les formes multilinéaires $\omega(x) \in \Lambda^k T_x^* M$ et $\alpha(x) \in \Lambda^l T_x^* M$.

Définition 27. Soient M, N deux variétés lisses et $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$. On appelle image réciproque par f l'application $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ définie par :

$$f^*(\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(x))(df(x).v_1, \dots, df(x).v_k),\ \forall x \in M$$

Exemple 11. 1) Si $n = \dim(M)$, $\omega = f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(M)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors

$$g^*(\omega)(x) = f(g(x)) \det(dg(x)) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

2) Si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ et M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors ω induit de manière évidente une k-forme sur M égale à $i^*\omega$, où $i : M \to \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique.
3) De même, si M est une variété à bord, alors une forme différentielle sur M peut être restreinte à une forme sur ∂M par $i^*\omega$ où $i : \partial M \to M$ est ici encore l'injection canonique.

Proposition 13. *Soient L, M, N trois variétés lisses, $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(M, N) \times \mathcal{C}^\infty(L, M)$. On a :*

$$1)\ \forall \omega, \alpha \in \Omega^k(N),\ f^*(\omega + \alpha) = f^*\omega + f^*\alpha$$

$$2)\ \forall (\omega, \alpha) \in \Omega^k(N) \times \Omega^l(N),\ f^*(\omega \wedge \alpha) = f^*\omega \wedge f^*\alpha$$

$$3)\ (g \circ f)^* = g^* \circ f^*$$

Démonstration. Une simple modification de notation nous ramène à la Proposition 3. □

Proposition-Définition 4. *Soit M une variété lisse. Il existe une unique application linéaire $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ appelée différentiation extérieure telle que :*

$$i)\ \forall \omega \in \Omega^k(M),\ d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$$

ii) La restriction de d à $\Omega^0(M)$ coïncide avec la différentielle des fonctions

$$iii)\ \forall (\omega, \alpha) \in \Omega^k(M) \times \Omega^l(M),\ d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$$

$$iv)\ d^2 = 0$$

Démonstration. Soient M une variété, $\mathcal{A} = (U_j, \varphi_j)_{j \in \Lambda}$ un atlas de M. D'après le Théorème 5, il existe une partition de l'unité $(\rho_j)_{j \in \Lambda}$ subordonnée à la famille des domaines de $\mathcal{A}$. On étend la définition de d à $\Omega(M)$ par la formule suivante :

$$\forall \omega \in \Omega(M),\ d\omega := \sum_j d(\rho_j \omega) = \sum_j \varphi_j^* d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

Cette formule étant linéaire, on a le résultat ; □

Proposition 14. *Soient M, N deux variétés, $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$ et $\omega \in \Omega(N)$. Alors*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Démonstration. Par linéarité de d et f^*, une partition de l'unité subordonnée aux domaines d'un atlas ainsi que la Proposition 4 donnent le résultat :

$$f^*(d\omega) = f^*(\sum_j \varphi^* d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega))$$

$$= \sum_j \varphi^* d(f^* \circ \varphi_j^{-1*}(\rho_j\omega)) = \sum_j \varphi^* d(\varphi_j^{-1*}(\rho_j f^*\omega) = d(f^*\omega)$$

□

Enfin, avant de définir l'intégrale d'une forme différentielle, donnons une définition ainsi qu'un lemme qui permettront de conclure quant à l'orientabilité d'une variété en passant par les formes différentielles.

<u>Définition</u> 28. Soient M une variété différentielle de dimension n et $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme différentielle sur M. On dit que ω est une forme volume si

$$\forall x \in M,\ \omega(x) \neq 0$$

<u>Lemme</u> 4. *Une variété différentielle est orientée si et seulement si elle possède une forme volume.*

Démonstration. Soient M une variété de dimension n, $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme volume sur M et $\mathcal{A} = (U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ un atlas de M. Alors, l'ensemble des cartes (U, φ) de $\mathcal{A}$ telles que $(\varphi^{-1})^*(\omega_{|U}) = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,\ f \in \mathcal{C}^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}_+^*)$ est un atlas de cartes $\mathcal{C}^\infty$ dont les difféomorphismes de transition $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ont une différentielle de déterminant positif par changement de variable. Dans ce cas, M est orientable.
Soient maintenant M une variété de dimension n, orientable et $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$ une orientation de M. Soient aussi $(\rho_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée aux domaines de $\mathcal{O}$ et $\omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ la forme volume canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons

$$\omega := \sum_j \rho_j(\varphi_j^*\omega_0) \in \Omega^n(M)$$

ω est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$; il reste donc à montrer que $\omega(x) \neq 0,\ \forall x \in M$. Soient donc $x \in M$, il existe j_0 tel que $\rho_{j_0}(x) \neq 0$. Et, pour $j \neq j_0$, on a

$$\rho_j\varphi_j^*(\omega_0)(x) = \rho_j(x)(\varphi_j \circ \varphi_{j_0}^{-1} \circ \varphi_{j_0})^*(\omega_0)(x) = \rho_j(x)\varphi_{j_0}^*(\varphi_j \circ \varphi_{j_0}^{-1})^*(\omega_0)(x)$$

Or,

$$(\varphi_j \circ \varphi_{j_0}^{-1})^*(\omega_0) = J(\varphi_j \circ \varphi_{j_0})(\omega_0)$$

On a donc $J(\varphi_j \circ \varphi_{j_0}^{-1}) > 0$, et donc

$$\omega(x) = \left(\rho_{j_0}(x) + \sum_{j \neq j_0} \rho_j(x) J(\varphi_j \circ \varphi_{j_0}^{-1}) \circ \varphi_{j_0}(x) \right) \varphi_{j_0}^*(\omega_0)(x)$$

Enfin, La parenthèse étant une somme finie de termes positifs ou nuls et l'un étant $\rho_{j_0}(x) > 0$, on obtient bien $\omega(x) \neq 0$ et ω est une forme volume sur M. □

Définition 29. Soit ω une forme différentielle de degré n à support compact sur $\mathbb{R}^n$. On peut l'exprimer sous la forme

$$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

On pose alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

où $dx_1 \ldots dx_n$ est la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 10. *Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ un difféomorphisme préservant l'orientation (ie tel que $\det d\varphi > 0$) et $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Alors, on a la formule de changement de variable*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\omega)$$

Démonstration. On écrit

$$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Comme le déterminant de $d\varphi$ est positif, on a :

$$f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) |\det(d\varphi(x_1, \ldots, x_n))| dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$= f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) \det(d\varphi(x_1, \ldots, x_n)) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \varphi^*(\omega)$$

Et avec la formule du changement de variable pour les intégrales multiples, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^*(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x_1, \ldots, x_n))|\det(d\varphi(x_1, \ldots, x_n))|dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1, \ldots, y_n)dy_1 \ldots dy_n \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

□

Définition 30. On dit d'une k-forme qu'elle est à support compact si les fonctions qui constituent ses coefficients sont à support compact. On notera $\Omega_c^k(M)$ leur ensemble.

Définition 31. Soient M une variété lisse orientée de dimension n et ω une n-forme différentielle sur M, à support compact. On considère $(\rho_j)_j$ une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de M par des cartes (U_j, φ_j) preservant l'orientation. On pose :

$$\int_M \omega := \sum_j \int_{\varphi_j(U_j)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j \omega)$$

où la somme est supposée finie car la partition de l'unité est localement finie.

Exemple 12. Soient M une sous-variété orientée de $\mathbb{R}^n$ et α_0 la forme volume canonique sur M. On appelle volume de M et on note $\text{vol}(M)$ le nombre

$$\text{vol}(M) := \int_M \alpha_0$$

Remarque 17. Si M est une variété de dimension n, $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ et si $i : \partial M \hookrightarrow M$ est l'injection canonique, alors $i^*(\omega) \in \Omega_c^{n-1}(\partial M)$ et on écrira, par abus de notation :

$$\int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} i^*(\omega)$$

Notons que l'intégrale ci-dessus a bien un sens car $\dim(\partial M) = n - 1 = \deg i^*(\omega)$.

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le fameux Théorème de Stokes.

<u>Théorème</u> 11. *Soient M une variété différentielle orientée, à bord, de dimension n et ω une $(n-1)$-forme différentielle à support compact sur M. Alors*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Démonstration. Supposons tout d'abord, que ω soit une forme à support compact dans $\mathbb{H}^n$. Elle s'écrit :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où les ω_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. On a

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et

$$\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-2}} \omega_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i, \ \forall i \geq 2$$

car les ω_i sont à support compact. On calcule donc, avec le théorème de Fubini,

$$\int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}} \omega_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n + \sum_{i=2}^{n} \int_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-2}} \omega_i dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n + \sum_{i=2}^{n} \int_{\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{H}^n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{H}^n} d\omega$$

Supposons ensuite que ω soit à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Comme ω_i est à support compact pour tout $1 \leq i \leq n$, on a facilement, grâce au théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0 = \int_{\partial\mathbb{R}^n=\emptyset} \omega$$

Soient maintenant M une variété lisse de dimension n, orientée, à bord, $\mathcal{A} = (U_j, \varphi_j)_{j\in\Lambda}$ un atlas (orienté) de M et $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, à support compact. On a, pour tout $j \in \Lambda$, soit

$$\varphi_j(U_j) \subset \mathbb{H}^n$$

soit

$$\varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

On note alors :

$$\Lambda_1 := \{j \in \Lambda \ ; \ \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{H}^n\}$$

et

$$\Lambda_2 := \{j \in \Lambda \ ; \ \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n\}$$
$$\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$$

De plus, on peut supposer que

$$\varphi_j(U_j \cap \partial M) \subset \partial\mathbb{H}^n, \ \forall j \in \Lambda_1$$

On introduit ensuite $(\rho_j)_{j\in\Lambda}$ une partition de l'unité subordonnée à $(U_j)_{j\in\Lambda}$. Comme le support de ω est compact, il ne rencontre qu'un nombre fini de supports des ρ_j et on a, par commutativité entre la dérivée extérieure et l'image réciproque et par changement de variable (φ_j préserve l'orientation) :

$$\int_M d\omega = \sum_{j\in\Lambda} \int_M d(\rho_j\omega) = \sum_{j\in\Lambda_1} \int_M d(\rho_j\omega) + \sum_{j\in\Lambda_2} \int_M d(\rho_j\omega)$$

$$= \sum_{j\in\Lambda_1} \int_{\mathbb{H}^n} d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} + \sum_{j\in\Lambda_2} \int_{\mathbb{R}^n} d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)}$$

Or, la deuxième intégrale ci-dessus est nulle car si $j \in \Lambda_2$, alors $(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ est à support compact. De plus, comme

$$\forall j \in \Lambda_1, \ (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{H}^n)$$

dans ce cas, nous avons montré plus tôt que

$$\int_{\mathbb{H}^n} d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} = \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} \text{ si } j \in \Lambda_1$$

Et donc, comme $U_j \cap \partial M = \emptyset,\ \forall j \in \Lambda_2$,

$$\int_M d\omega = \sum_{j\in\Lambda_1} \int_{\mathbb{H}^n} d(\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)} = \sum_{j\in\Lambda_1} \int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)\big|_{\varphi_j(U_j)}$$

$$= \sum_{j\in\Lambda_1} \int_{\varphi_j(U_j\cap\partial M)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega) + \sum_{j\in\Lambda_2} \int_{\varphi_j(U_j\cap\partial M)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega)$$

$$= \sum_{j\in\Lambda} \int_{\varphi_j(U_j\cap\partial M)} (\varphi_j^{-1})^*(\rho_j\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial M} \omega$$

□

<u>Théorème</u> 12. *Soient $K \subset U$ un compact d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de bord orienté $\gamma = \partial K$, une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, $P, Q : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

On appelle cette égalité la formule de Green-Riemann.

Démonstration. K est clairement une sous-variété compacte et orientée de dimension 2 dont le bord correspond à son bord topologique $\partial K = \gamma$. Donc, si on pose

$$\omega := P(x,y)dx + Q(x,y)dy \in \Omega^1(K)$$

on a

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

et le Théorème de Stokes donne

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

□

Remarque 18. Cette formule est très utile, nottamment en théorie des fonctions holomorphes, pour démontrer le théorème intégral de Cauchy qui donne le fondement de l'intégration complexe, impliquant l'époustouflant Théorème des Résidus... Mais elle permet aussi, plus humblement, de déterminer facilement l'aire d'une surface compacte du plan à bord paramétré, comme dans l'exemple suivant :

Exemple 13. Soit $\mathcal{E}_{a,b},\ a, b \in \mathbb{R}_+$ l'intérieur de l'ellipse définie comme étant l'image de l'application :

$$\begin{array}{rcccc} \delta_{a,b} & : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \mapsto & (a\cos(t), b\sin(t)) \end{array}$$

Si on pose $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = x$, la formule de Green-Riemann donne

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}_{a,b}) = \iint_{\mathcal{E}_{a,b}} dxdy = \oint_{\delta_{a,b}} xdy = \int_0^{2\pi} a\cos(t)d(b\sin(t))$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \pi ab$$

Théorème 13. *Soient $W \subset V$ un compact d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de bord orienté $\Sigma := \partial W$, une nappe de classe $\mathcal{C}^1$, $P, Q, R : V \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\oint_\Sigma P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \iiint_W div(P, Q, R)dxdydz$$

$$= \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

On appelle cette égalité la formule de Green-Ostrogradski.

Démonstration. On applique le Théorème de Stokes de manière analogue à la démonstration précédente, en remarquant que si

$$\omega := P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

□

Et pour finir, voici le spectaculaire théorème du point fixe de Brouwer :

Théorème 14. *Toute application continue de la boule unité de dimension n dans elle-même admet un point fixe.*

Démonstration. Soient $\mathbb{B}^n$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $\alpha_n \in \Omega^{n-1}(\mathbb{B}^n)$ définie par

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x_j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

On a

$$d\alpha_n = n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{B}^n)$. Grâce au théorème de Stone-Weierstraβ, on peut supposer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Supposons, par l'absurde, que f est sans point fixe. Construisons une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$ qui vaille l'identité sur $\mathbb{S}^{n-1}$. La demi droite $\{x + t(f(x) - x),\ t \leq 0\}$ rencontre $\mathbb{S}^{n-1}$ en un point unique donné par l'unique solution négative ou nulle $t(x)$ de

$$|x|^2 + 2t < x, f(x) - x > + t^2 |f(x) - x|^2 = 1$$

On remarque que c'est un trinôme qui a deux solutions réelles soit nulles, soit de signes opposés. En effet, le coefficient dominant ne s'annnule jamais par hypothèse et le discriminant ne s'annule que si

$$| < x, f(x) - x > |^2 - |f(x) - x|^2 (|x|^2 - 1) = 0$$

ce qui n'est possible que si $|x| = 1$ et x orthogonal à $f(x) - x$, mais alors on voit immédiatement que $f(x) = x$. Notons aussi que si $|x| = 1$, on a $t(x) = 0$. De plus, $t(x)$ est fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x. Soit alors $r(x) := x + t(x)(f(x) - x)$. On a

$$n\mathrm{vol}(\mathbb{B}^n) = n \int_{\mathbb{B}^n} dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{B}^n} d\alpha_n$$

Or, d'après le Théorème de Stokes,

$$\int_{\mathbb{B}^n} d\alpha_n = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \alpha_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \alpha_n = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^*\alpha_n = \int_{\partial\mathbb{B}^n} r^*\alpha_n = \int_{\mathbb{B}^n} r^* d\alpha_n = 0$$

car les vecteurs $dr(x)(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont toujours linéairement dépendants ; en effet, ils sont tangents à $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est de dimension $n - 1 < n$. Donc

$$n\mathrm{vol}(\mathbb{B}^n) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{vol}(\mathbb{B}^n) = 0$$

ce qui est absurde. □

Références

[1] M. Berger and B. Gostiaux, *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces*, 2012.

[2] M. Spivak, *Calculus on manifolds.* Addison-Wesley, 1965.

[3] C. Viterbo, "Notes de cours de géométrie différentielle," 2013.

[4] F. Paulin, "Géométrie différentielle élémentaire," 2006-2007.

[5] P. Mounoud, "Formes différentielles," 2012.

[6] Wikipedia.