Théorie de la dimension

Arthur Garnier

27 juillet 2015

Table des matières

Préambule

Nous proposons ici une brève initiation à quelques notions de dimension en topologie. Nous y étudierons la dimension métrique, la dimension de Hausdorff ainsi que la dimension topologique ; et nous exposerons les liens entre ces différentes dimensions.

Ces considérations nous entraînerons ensuite vers l'étude de la définition d'objet fractal selon Mandelbrojt, dont nous exhiberons quelques exemples. Nous nous sommes pour cela très largement inspiré du livre de topologie d'Hervé Queffélec, que nous recommandons chaudement.

Pour aborder ces notions, le lecteur devra être déjà familier avec les rudiments de la topologie générale, ainsi que la topologie sur les espaces métriques. En particulier, les notions de compacité, de connexité, de séparabilité, de limite et de continuité seront essentielles.

Afin de permettre une lecture plus autonome, nous proposons une légère introduction sur l'ensemble de Cantor (qui se trouve être une fractale !), ainsi qu'une Annexe dans laquelle on démontre notamment le théorème de Tychonov sur le produit d'espaces compacts.

Introduction : Ensemble de Cantor

Soit $A := \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ muni de la topologie produit des topologies discrètes sur $\{0,1\}$. D'après le théorème de Tychonov dénombrable (voir Annexe), A est compact et métrisable. On l'appelle l'ensemble de Cantor abstrait. Ensuite, on définit sur la classe $\mathcal{A}$ des unions finies de segments de $\mathbb{R}$ l'opération :

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & & X = \bigcup_{i=1}^n I_i & \mapsto & \bigcup_{i=1}^n T(I_i) \end{array},$$

où

$$T(I) = I \setminus \left]a + \frac{h}{3}, a + \frac{2h}{3}\right[= \left[a, a + \frac{h}{3}\right] \cup \left[a + \frac{2h}{3}, a + h\right] \text{ si } I = [a, a+h].$$

On pose alors

$$K_1 := T([0,1]),\ K_{n+1} = T(K_n),\ \forall n \geq 1 \text{ et } K := \bigcap_{n \geq 1} K_n.$$

K est alors appelé l'ensemble triadique de Cantor. On va montrer par récurrence que

$$\left.\begin{array}{l} K_n \text{ est réunion de } 2^n \text{ segments disjoints de longueur } 3^{-n} \\ \text{et d'origine } \sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j},\ \alpha_j = 0, 2 \end{array}\right\} \quad (*)$$

En effet, la propriété a lieu à l'étape 1 : $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Si elle a lieu aux étapes $1, \ldots, n$, on a $K_n = \bigcup_\alpha I_n(\alpha)$ où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ parcourt $\{0,2\}^n$ et où

$$I_n(\alpha) := \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j}, \sum_{j=1}^n \alpha_j 3^{-j} + 3^{-n}\right].$$

On voit alors que

$$T(I_n(\alpha)) = I_{n+1}(\alpha^0) \cup I_{n+1}(\alpha^1) \text{ où } \left\{\begin{array}{l} \alpha^0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0) \\ \alpha^1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 2) \end{array}\right. .$$

D'où

$$K_{n+1} = \bigcup_{\alpha \in \{0,2\}^n} \left(I_{n+1}(\alpha^0) \cup I_{n+1}(\alpha^1)\right) = \bigcup_{\beta \in \{0,2\}^{n+1}} I_{n+1}(\beta). \quad \square$$

Montrons à présent que $A \simeq K$. Pour cela, on pose

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & A & \to & \mathbb{R} \\ & & x=(x_j) & \mapsto & 2\sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j} \end{array}.$$

et $B := \varphi(A)$. Alors

Proposition 1. *1. φ est un homéomorphisme de A sur B (on note alors $A \simeq B$),*

2. On a $K = B$.

Démonstration. Montrons que φ est continue. On a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|2 \cdot 3^{-j}\right| = 2\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} = 3 < \infty$$

et on pose $u_n(x) := 2x_n 3^{-j}$. L'application $x \mapsto x_n$ est continue par définition de la topologie produit, donc u_n est continue sur A et on a $||u_n||_\infty = \sup_{x\in A} |u_n(x)| = 2 \cdot 3^{-j}$ donc la série $\sum u_n$ est normalement convergente et donc φ est continue sur A. Soient ensuite $x, x' \in A$, $x \neq x'$ et $n := \min\{j\ ;\ x'_j \neq x_j\}$. Par exemple, $x_n = 0$ et $x'_n j = 1$. Alors

$$\varphi(x') - \varphi(x) = 2 \cdot 3^{-j} + 2\sum_{j>n}(x'_j - x_j)3^{-j} \geq 2 \cdot 3^{-n} - 2\sum_{j>n} 3^{-j} = 3^{-n},$$

donc φ est injective et $\varphi^{-1} : B \to A$ est continue car A est compact. Soit en effet $y \in B$, $x = \varphi^{-1}(y)$. Si $y' \in B$ vérifie $|y' - y| < 3^{-n}$, on vient de voir que $x_j = x'_j$ pour $j < n$, où $x' = \varphi^{-1}(y')$, x' est donc aussi proche que l'on veut de x quand y' est proche de y. Ainsi, $\varphi : A \to B$ est un homéomorphisme.
Montrons que $B \subset K$. Soit $y = 2\sum_{j=1}^{\infty} x_j 3^{-j}$, où $x_j = 0, 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit $\alpha = (2x_1, \ldots, 2x_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On voit que

$$0 \leq y - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j 3^{-j} = 2\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j 3^{-j} \leq 2\sum_{j=n+1}^{\infty} 3^{-j} = 3^{-n},$$

donc avec les notation de $(*)$, $y \in I_n(\alpha) \subset K_n$, n étant arbitraire, $y \in \bigcap_{n\geq 1} K_n = K$. Montrons alors que $K \subset B$ et soit $y \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 2\}^n$ tel que $y \in I_n(\alpha)$, en particullier

$$\left|y - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 3^{-j}\right| = \left|y - \varphi\left(\frac{\alpha_1}{2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{2}, 0, \ldots\right)\right| \leq 3^{-n}$$

donc $\mathrm{dist}(y, \varphi(A)) \leq 3^{-n}$ et n étant quelconque, $\mathrm{dist}(y, \varphi(A)) = 0$ donc $y \in \overline{\varphi(A)} = \overline{B}$. Or B est fermé car compact, donc $y \in B$. $\square$

Remarque 1. On peut montrer que

1. Tout espace métrique compact est image continue de K,
2. Tout espace métrique compact parfait (ie sans point isolé) totalement discontinu est homéomorphe à K.

Proposition 2. *Si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors*

1. *K est non dénombrable,*
2. *$\lambda(K) = 0$,*
3. *K est totalement discontinu.*

Démonstration. 1. On a

$$|K| = |A| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|,$$

donc K est non dénombrable.

2.
$$K = \bigcap_{n\geq 1} K_n \Rightarrow \lambda(K) \leq \inf_{n\geq 1} \lambda(K_n) = \inf_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

3. Si $I \subset K$ est un intervalle connexe non vide, alors I a un diamètre inférieur ou égal à 3^{-n} pour tout n, donc I est de diamètre nul, d'où le résultat.

$\square$

Première partie
Dimension métrique

1 Définitions

Soient (X,d) un espace métrique et $\emptyset \neq E \subset X$ une partie précompacte de X.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules fermées de rayon ε (centrées ou non dans E). Notons alors $N_E(\varepsilon)$ le plus petit nombre de telles boules fermées recouvrant E :

$$N_E(\varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \exists x_1, \ldots, x_n \in X \ ; \ E \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, \varepsilon) \right\}.$$

En général, $N_E(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, c'est α qui est significatif et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 \varepsilon^{-\alpha} \leq N_E(\varepsilon) \leq C_2 \varepsilon^{-\alpha}$, alors α s'obtient par

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_E(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon},$$

où log désigne le logarithme népérien. D'où la

Définition 1.

1. On appelle dimension métrique supérieure de E la quantité

$$\overline{\dim}_B(E) := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_E(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq +\infty.$$

2. De même, on appelle dimension métrique inférieure de E la quantité

$$\underline{\dim}_B(E) := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_E(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq +\infty.$$

3. Si ces deux quantités sont égales, on appelle dimension métrique de E le nombre

$$\dim_B(E) = \underline{\dim}_B(E) = \overline{\dim}_B(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_E(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq +\infty.$$

De plus, si E n'est pas précompact, on convient que $\underline{\dim}_B(E) = +\infty$.

Remarque 2. 1. Si on sétait limité aux boules centrées dans E, cela n'aurait rien changé aux dimensions. Par exemple, si

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B}(x_j, \varepsilon),\ x_j \in X,$$

on pose

$$I := \{1 \leq j \leq n\ ;\ \overline{B}(x_j, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset\}$$

et soit $y_j \in \overline{B}(x_j, \varepsilon) \cap E$, pour tout $j \in I$. Alors

$$E \subset \bigcup_{j \in I} \overline{B}(y_j, 2\varepsilon),\ y_j \in E,\ |I| \leq n.$$

2. La dimension métrique est parfois appelée "dimension de boîte", d'où la notation $\dim_B$.

2 Propriétés

Définition 2. On appelle ε-nombre de packing de E et on note $P_E(\varepsilon)$ le plus grand nombre n de points $x_1, \ldots, x_n$ de E tels que $d(x_i, x_j) > \varepsilon,\ \forall i \neq j$:

$$P_E(\varepsilon) := \max\{n \in \mathbb{N}\ ;\ \exists x_1, \ldots, x_n \in E\ ;\ \forall i \neq j,\ d(x_i, x_j) > \varepsilon\}.$$

Alors les $B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sont deux à deux disjointes et on a

Proposition 3.

$$\forall \varepsilon > 0,\ N_E(\varepsilon) \leq P_E(\varepsilon) \leq N_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Démonstration. Soit $p := P_E(\varepsilon)$ ($p < \infty$ car E est précompact), et soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ avec $d(x_i, x_j) > \varepsilon$ si $i \neq j$. Si maintenant $x \in E$ et $x \notin \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(x_j, \varepsilon)$, les points $x, x_1, \ldots, x_n$ sont mutuellement distants de plus de ε, donc $P_E(\varepsilon) \geq p + 1$, ce qui est absurde. Donc

$$E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(x_j, \varepsilon) \ \Rightarrow\ N_E(\varepsilon) \leq p = P_E(\varepsilon).$$

Soient ensuite $q := N_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $y_1, \dots, y_q \in X$ tels que $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \overline{B}\left(y_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Pour tout $1 \leq u \leq p$, il existe $1 \leq \varphi(u) \leq q$ tel que $d(x_u, y_{\varphi(u)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $\varphi(u) = \varphi(v) = j$, on a

$$d(x_u, x_v) \leq d(x_u, y_j) + d(y_j, x_v) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d'où $u = v$ et $\varphi : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, q\}$ est injective, et donc $p \leq q$. $\square$

Théorème 1. *On a*

1.

$$E \subset F \;\Rightarrow\; \overline{\dim}_B(E) \leq \overline{\dim}_B(F),$$

2.

$$\overline{\dim}_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sup_{1 \leq i \leq n} \overline{\dim}_B(E_i),$$

3. Si $f : E \to X$ est α-höldérienne (ie $\exists C > 0$; $\forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq C d(x,y)^\alpha$), alors

$$\overline{\dim}_B(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \overline{\dim}_B(E).$$

Démonstration. 1. En effet, si $n = N_F(\varepsilon)$ et $F \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} \overline{B}(x_j, \varepsilon)$, on a aussi $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} \overline{B}(x_j, \varepsilon)$, d'où $N_E(\varepsilon) \leq n$.

2. Evident.

3. Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ défini par $C\delta^\alpha = \varepsilon$ et $p := N_E\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Comme on l'a vu, il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(x_j, \delta)$ d'où

$$F = f(E) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(f(x_j), C\delta^\alpha) = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(f(x_j), \varepsilon),$$

et $N_F(\varepsilon) \leq N_E\left(\frac{\delta}{2}\right)$. Soient ensuite $\rho > 0$ et $d := \overline{\dim}_B(E)$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$N_E\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{d+\rho},$$

d'où

$$N_F(\varepsilon) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{d+\rho} = \left(\frac{2C^{1/\alpha}}{\varepsilon^{1/\alpha}}\right)^{d+\rho}.$$

Il en résulte que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_F(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \frac{d+\rho}{\alpha}$$

et

$$\overline{\dim}_B(F) \leq \frac{d}{\alpha}$$

car $\rho > 0$ est aussi petit que l'on veut.

$\square$

Corollaire 1. *Quand cela a un sens, on a*

1. $$E \subset F \;\Rightarrow\; \dim_B(E) \leq \dim_B(F),$$

2. $$\dim_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sup_{1 \leq i \leq n} \dim_B(E_i),$$

3. *Si $f : E \to X$ est α-höldérienne, alors*
$$\dim_B(f(E)) \leq \frac{\dim_B(E)}{\alpha}.$$

3 Exemples

3.1 Ensemble de Cantor

Soient $0 < r < \frac{1}{2}$ et $K = K(r)$ le compact fixe associé aux contractions

$$\begin{array}{rcccl} f_1 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & rx \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcccl} f_2 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & rx+1-r \end{array}.$$

K est l'ensemble de Cantor de rapport de dissection r. Pour $r = \frac{1}{3}$, on retrouve l'ensemble triadique de Cantor. On a

$$K = \left\{ x \in [0,1] \ ; \ x = (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} x_j r^j, \ x_j = 0,1 \right\}.$$

Soit en effet

$$L := \left\{ 0 \leq x \leq 1 \ ; \ x = (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} x_j r^j, \ x_j = 0,1 \right\}.$$

$L = \varphi(A)$ est compact ($A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$) et $\varphi((x_j)) := (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} x_j r^j$. On voit que

$$f_1(L) = \left\{ (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} x_j r^{j+1} \right\} = \left\{ y = (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} y_j r^j, \ y_0 = 0, \ (y_j) \in A \right\},$$

et

$$f_2(L) = \left\{ (1-r)\left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} x_j r^{j+1}\right) \right\} = \left\{ y = (1-r)\sum_{j=0}^{\infty} y_j r^j, \ y_0 = 1, \ (y_j) \in A \right\}.$$

Donc $f_1(L) \cup f_2(L) = L$ et $L = K$ par unicité du compact fixe (voir Annexe). On va montrer que

$$\dim_B(K) = \frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

Démonstration. En effet, soient $0 < \varepsilon < r$, n l'entier ≥ 1 tel que $r^{n+1} \leq \varepsilon < r^n$,

$$R := \left\{ (1-r)\sum_{j=0}^{n} x_j r^j \right\}$$

et

$$S := \left\{ (1-r)\sum_{j=0}^{n-1} x_j r^j, \ x_j = 0,1 \right\}.$$

Si $x = \sum_{j=0}^{\infty}(1-r)x_j r^j \in K$, soit $u := \sum_{j=0}^{n}(1-r)x_j r^j \in R$, on a

$$|x-u| = (1-r)\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j r^j \leq (1-r)\sum_{j=n+1}^{\infty} r^j = r^{n+1} \leq \varepsilon$$

donc $K \subset \bigcup_{u\in R} \overline{B}(u,\varepsilon)$, et $N_K(\varepsilon) \leq |R| = 2^{n+1} = 2\cdot 2^n$. Or $r^n > \varepsilon$, d'où $n < \frac{\log\varepsilon}{\log r}$ et $2^n = e^{n\log 2} < e^{\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{\log 2}{\log 1/r}\right)}$. Ainsi,

$$N_K(\varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon}\frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

Il en résulte déjà que

$$\overline{\dim}_B(K) \leq \frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

D'autre part, si $u = (1-r)\sum_{j=0}^{n-1} u_j r^j$ et $v = (1-r)\sum_{j=0}^{n-1} v_j r^j \in S$ avec $u \neq v$, soit $k := \min\{l \leq n-1\ ;\ u_l \neq v_l\}$, par exemple, $u_k = 0$ et $v_k = 1$. Alors

$$v - u \geq (1-r)(r^k - r^{k+1} - r^{k-2} - \cdots) = (1-r)\left(r^k - \frac{r^{k+1}}{1-r}\right)$$

$$= (1-2r)r^k \geq (1-2r)r^{n-1} = \frac{1-2r}{r}r^n > \frac{1-2r}{r}\varepsilon.$$

En posant $\lambda := \frac{1-2r}{r}$, on voit que $P_K(\lambda\varepsilon) \geq |S| = 2^n$. On en déduit de même que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\log P_K(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \geq \frac{\log 2}{\log 1/r},$$

et donc que

$$\underline{\dim}_B(K) \geq \frac{\log 2}{\log 1/r}$$

d'après la Proposition 3, d'où le résultat. $\square$

3.2 Suite de limite nulle

Soient $\alpha > 0$ et $K := \{n^{-\alpha},\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Alors K est compact comme fermé borné de $\mathbb{R}$ et on a

$$\dim_B(K) = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 := \min\{n\ ;\ n^{-\alpha} \leq \varepsilon\}$. Alors on recouvre K par $\overline{B}(0,\varepsilon) \cup \bigcup_{j \leq n_0} \overline{B}(j^{-\alpha},\varepsilon)$, donc $N_K(\varepsilon) \leq n_0$ avec $n_0 \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$ alors $\overline{\dim}_B(K) \leq \frac{1}{\alpha}$. On va voir qu'on peut faire mieux.
Pour cela, soient $0 < \varepsilon < 1$, $p \geq 1$, $K_p := \{i^{-\alpha}\ ;\ i < p\}$ et $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. On recouvre K par les boules $\overline{B}(i^{-\alpha},\varepsilon)$ et par les intervalles $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]$, avec $i < p$ et $j \leq Np^{-\alpha}$. En effet, si $i^{-\alpha} \notin K_p$, ie si $i \geq p$, $i^{-\alpha} \in \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]$, $\frac{j}{N} \leq i^{-\alpha} \leq p^{-\alpha}$. A fortiori, comme $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$, on a

$$K \subset \bigcup_{i<p} \overline{B}(i^{-\alpha},\varepsilon) \cup \bigcup_{j \leq Np^{-\alpha}} \overline{B}\left(\frac{j}{N},\varepsilon\right).$$

Il s'ensuit que

$$N_K(\varepsilon) \leq p - 1 + np^{-\alpha} \leq p + \frac{2p^{-\alpha}}{\varepsilon}.$$

On optimise en p cette inégalité avec $p = \frac{2p^{-\alpha}}{\varepsilon}$ ie $p = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$ et comme $p \in \mathbb{N}$ on pose

$$p := \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\right]$$

et on obtient

$$N_K(\varepsilon) \leq \kappa \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

où κ est une constante indépendante de ε et donc

$$\overline{\dim}_B(K) \leq \frac{1}{\alpha+1}.$$

D'autre part, soit q le plus grand entier tel que $\frac{\alpha}{q^{\alpha+1}} \geq \varepsilon$, $(q \sim p)$, alors les points $i^{-\alpha},\ i \leq q$ sont distants de plus de ε, car si $i^{-\alpha}, j^{-\alpha},\ i < l$ sont deux tels points, le théorème des accroissements finis donne

$$i^{-\alpha} - j^{-\alpha} \geq i^{-\alpha} - (i+1)^{-\alpha} > \frac{\alpha}{(i+1)^{\alpha+1}} \geq \frac{\alpha}{q^{\alpha+1}} \geq \varepsilon.$$

On en déduit que $P_K(\varepsilon) \geq q$, or $q \sim \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$, donc

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log P_K(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \geq \frac{1}{\alpha+1}$$

donc

$$\underline{\dim}_B(K) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N_K(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log P_K(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \geq \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ainsi,

$$\overline{\dim}_B(K) \leq \frac{1}{\alpha+1} \leq \underline{\dim}_B(K) \ \Rightarrow\ \dim_B(K) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

□

3.3 Boule unité d'un espace vectoriel normé et théorème de Riesz

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $\mathbb{B}$ sa boule unité fermée. Montrons que, si E est de dimension (vectorielle) finie, alors

$$\dim(E) = \dim_B(\mathbb{B}).$$

Démonstration. Ponsons $n := \dim(E)$. Quitte à composer par un automorphisme linéaire, on peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une certaine norme et soit λ_n la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Soient aussi $\varepsilon > 0$, $p := N_{\mathbb{B}}(\varepsilon)$ et supposons que

$$\mathbb{B} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} \overline{B}(x_j, \varepsilon) = \bigcup_{1 \leq j \leq p} (x_j + \varepsilon\mathbb{B}),$$

il vient alors

$$\lambda_n(\mathbb{B}) \le \sum_{1\le j\le p} \lambda_n(x_j + \varepsilon\mathbb{B}) = \sum_{1\le j\le p} \lambda_n(\varepsilon\mathbb{B}) = \sum_{1\le j\le p} \varepsilon^n \lambda_n(\mathbb{B})$$

et $\lambda_n(\mathbb{B}) \neq 0$ implique que

$$1 \le p\varepsilon^n \ \Rightarrow\ N_{\mathbb{B}}(\varepsilon) \ge \frac{1}{\varepsilon^n} \ \Rightarrow\ n \le \frac{\log N_{\mathbb{B}}(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \text{ si } 0 < \varepsilon < 1 \qquad (*)$$

Soient maintenant $q := P_{\mathbb{B}}(\varepsilon)$ et $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{B}$ avec $||y_j - y_i|| > \varepsilon,\ i \neq j$. Alors les $\overline{B}\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sont disjointes et incluses dans $\overline{B}\left(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, soit

$$\bigsqcup_{1\le i\le q} \left(y_i + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}\right) \subset \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathbb{B}$$

et on a

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n q\lambda_n(\mathbb{B}) \le \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \lambda_n(\mathbb{B}) \ \Rightarrow\ q \le \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$$

et la Proposition 3 implique que

$$N_{\mathbb{B}}(\varepsilon) \le P_{\mathbb{B}}(\varepsilon) \le \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n,$$

donc

$$\dim_B(\mathbb{B}) = n = \dim(E).$$

□

<u>Théorème</u> 2. *(F. Riesz) E est de dimension finie si et seulement si $\mathbb{B}$ est compacte.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, alors $\mathbb{B}$ est compacte comme fermé borné.
Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Soient aussi E_0 un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathbb{B}_0 := \mathbb{B} \cap E_0$. Compte-tenu des définitions, si $N'_{\mathbb{B}_0}(2\varepsilon)$ est le nombre minimal de boules fermées de rayon 2ε contrées en E_0 nécessaires pour recouvrir $\mathbb{B}_0$, alors

$$N'_{\mathbb{B}_0}(2\varepsilon) \le N_{\mathbb{B}_0}(\varepsilon) \le N_{\mathbb{B}}(\varepsilon)$$

et $(*)$ appliqué à E_0 implique

$$\dim E_0 \leq \frac{\log N'_{\mathbb{B}_0}(2\varepsilon)}{\log 1/2\varepsilon} \leq \frac{\log N_{\mathbb{B}}(\varepsilon)}{\log 1/2\varepsilon} =: C(\varepsilon).$$

Donc les sous-espaces de dimension finie de E ont une dimension inférieure ou égale à $C(\varepsilon)$; ainsi, E est de dimension $\leq C(\varepsilon) < +\infty$. $\square$

Remarque 3. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, $(e_n)_{n\geq 1}$ une famille orthonormale de H et $K \subset H$ le compact défini par

$$K := \left\{ \frac{e_n}{\log(n+1)},\ n \geq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

Alors $\dim_B(K) = +\infty$. Ainsi, un compact n'a pas forcément une dimension métrique finie.

3.4 Objets auto-similaires

Rappel : Soit $||\cdot|| = ||\cdot||_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Une similitude de $\mathbb{R}^n$ est une application $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto rg(x) + a$, où $g \in \mathcal{O}(n)$ est une transformation orthogonale, $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Si $r < 1$, la similitude S est dite contractante.
On se donne à présent n similitudes contractantes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de $\mathbb{R}^N$ avec $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n < 1$. D'après l'Annexe, il existe un unique compact non vide K de $\mathbb{R}^N$ tel que

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} S_i(K) \tag{1}$$

K est alors dit auto-similaire car si l'on applique $S_1, \ldots, S_n$ à K et qu'on réunit le tout, on retombe sur K, mais il faut prendre garde à ne pas confondre cette notion avec celle de fractalité, qui sera développée plus tard.

Exemple 1. Si $K = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ est auto-similaire car c'est le compact fixe des similitudes S_1, S_2, S_3, S_4 définies par

$$S_1(z) = \frac{z}{2},\ S_2(z) = \frac{z+1}{2},\ S_3(z) = \frac{z+i}{2},\ S_4(z) = \frac{z+1+i}{2}$$

mais on a évidemment pas envie de l'appeler "fractale".

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $s > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^s = 1.$$

s est alors appelé la dimension d'auto-similarité de K. Par exemple, la carré $[0,1]^2$ a une dimension d'auto-similarité donnée par $4 \cdot 2^{-s} = 1 \ \Rightarrow \ s = 2$.

Soient ensuite $E := \{1, \dots, n\}$ et $F := E^{\mathbb{N}^*}$ le Cantor de E, muni de la topologie produit des topologies discrètes sur E. Un $x \in F$ est une suite $x = (i_1, \dots, i_p, \dots) = (i_1(x), \dots, i_p(x), \dots)$. Un mot sur E est une suite finie $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \rangle$ d'éléments de E et on note M l'ensemble des mots sur E. Posons $\rho_i := r_i^s, \ \rho_\alpha := \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_p}$ si $\alpha \in M$. On pose aussi $S_\alpha := S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}$ et $K_{i_1,\dots,i_p} = K_\alpha = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}(K) = S_\alpha(K)$.
D'après l'équation (1), on voit par récurrence sur p que

$$K = \bigcup_{i_1 \in E} K_{i_1} = \bigcup_{i_1,i_2 \in E^2} K_{i_1,i_2} = \cdots = \bigcup_{i_1,\dots,i_p \in E^p} K_{i_1,\dots,i_p} = \cdots \tag{2}$$

On définit alors l'application de "codage" $h : F \to K$:

$$\{h(x)\} = K_{i_1} \cap K_{i_1,i_2} \cap \cdots K_{i_1,\dots,i_p} \cap \cdots = \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1,\dots,i_p} \text{ si } x = (i_1 \dots, i_p, \dots) \in F. \tag{3}$$

En effet, si $G_p := K_{i_1,\dots,i_p}$, les G_p forment une suite décroissante car :

$$G_p = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p}(K) = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_p} \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i(K) \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} S_{i_1} \circ \cdots S_{i_p} \circ S_i(K) = \bigcup_{i=1}^{n} K_{i_1,\dots,i_p,i} \supset K_{i_1,\dots,i_p,i_{p+1}} = G_{p+1}.$$

De plus, si $\operatorname{diam}(K) = d$, $\operatorname{diam}(K_{i_1,\dots,i_p}) = r_{i_1} \cdots r_{i_p} d \leq r_n^p d$, alors

$$\operatorname{diam}(G_p) \to 0$$

et les compacts G_p ont une intersection réduite à un point noté $h(x)$ car $\mathbb{R}^N$ est complet.

Proposition 4. *On a*

1. *$h : F \to K$ est une surjection continue*
2. *Soit $a_\alpha \in M$ le point fixe de S_α (qui existe d'après le théorème de Picard). Alors $a_\alpha \in K$ et l'ensemble des a_α est dense dans K.*

Démonstration. 1. Soient $x = (i_1, \dots, i_p, \dots) \in F$, $\varepsilon > 0$, p tel que $r_{i_1} \dots r_{i_p} d \leq \varepsilon$ où $d = \mathrm{diam}(K)$, et V le voisinage de x défini par

$$V := \{y \in F \; ; \; i_1(y) = i_1, \dots, i_p(y) = i_p\}.$$

Notons alors que

$$y \in V \;\Rightarrow\; |h(y) - h(x)| \leq r_{i_1} \cdots r_{i_p} d \leq \varepsilon.$$

En effet, $K_{i_1,\dots,i_p} = G_p$ est de diamètre $\leq r_{i_1} \cdots r_{i_p} d \leq \varepsilon$ et si $y \in V$, on a par définition $h(x) \in G_p$ et $h(y) \in G_p$, d'où $|h(y) - h(x)| \leq \mathrm{diam}(G_p)$, donc h est continue en x. D'autre part, si $y \in K$, (2) montre qu'on peut choisir par récurrence $i_1, \dots, i_p, \dots \in E$ tels que

$$y \in K_{i_1}, \; y \in K_{i_1,i_2}, \; \dots$$

Soit $x = (i_1 \dots, i_p, \dots) \in F$ et avec (3), $h(x)$ est l'unique poit de $\bigcap_{q \geq 1} K_{i_1,\dots,i_q}$, donc $h(x) = y$.

2. Soit $\alpha = \langle i_1 \dots, i_p \rangle$ et soit $x \in F$ obtenu en répétant $\alpha : x = (i_1, \dots, i_p, i_1, \dots, i_p, \dots)$. Se limitant dans le développement de x à la sous-suite des multiples de p, on voit que $h(x) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_\alpha^k(K)$, or les $S_\alpha^k(K)$ forment une suite décroissante (car $S_\alpha(K) \subset K$) de compacts non vides de $\mathbb{R}^N$, de diamètre tendant vers 0, leur intersection est donc réduite à $h(x)$. De plus, elle est par définition stable par S_α, autrement dit, $S_\alpha h(x) = h(x) \;\Rightarrow\; a_\alpha = h(x)$ et d'après (1), $a_\alpha \in K$.
Réciproquement, si $y \in K$, soit $x \in F$ tel que $y = h(x)$. Notons $\overline{x_p} := (i_1, \dots, i_p, i_1, \dots, i_p, \dots)$ le p-périodisé de $x = (i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots)$. Par définition de la topologie sur F, on a $\lim_{p\to\infty} \overline{x_p} = x$, donc $\lim_{p\to\infty} h(\overline{x_p}) = y$ par continuité. Or, on vient de voir que $h(\overline{x_p}) = a_\alpha, \; \alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$, donc y s'approche par des a_α.

□

<u>Lemme</u> 1. *Pour $r > 0$, on définit $I = I(r)$ l'ensemble des mots minimaux $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$ tels que $r_\alpha = r_{i_1} \cdots r_{i_p} \leq r$, (ie $\alpha \in I$ si et seulement si $r_{i_1} \cdots r_{i_p} \leq r$ et $r_{i_1} \cdots r_{i_{p-1}} > r$). Alors $I \neq \emptyset$ car $r_{i_1} \cdots r_{i_p} \leq r_n^p$ et $\lim_{p \to \infty} r_n^p = 0$. Alors, si*

$$S(r) := \sum_{\alpha \in I(r)} \rho_\alpha,$$

on a

$$S(r) = 1, \ \forall r > 0.$$

Démonstration. On a

$$S(r) = 1, \ \forall r \geq r_n \tag{4}$$

En effet, si $r \geq r_n$, $I(r)$ est constitué des mots $\langle 1 \rangle, \dots, \langle n \rangle$, donc $S(r) = \sum_{i=1}^n \rho_i = \sum_{i=1}^n r_i^s = 1$, et

$$S(r) = \sum_{j=1}^n \rho_j S\left(\frac{r}{r_j}\right), \ \forall z > 0 \tag{5}$$

En effet, $I = I(r) = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n$ où $I_j = \{\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle \in I \ ; \ i_1 = j\}$. Si $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle \in I_1$, on voit que $r_1 \cdots r_{i_{p-1}} > r$ et $r_1 \cdots r_{i_p} \leq r$, autrement dit, $r_2 \cdots r_{i_{p-1}} > \frac{r}{r_1}$ et $r_2 \cdots r_{i_p} \leq \frac{r}{r_1}$, ie $\langle i_2, \dots, i_p \rangle \in I\left(\frac{r}{r_1}\right)$. D'où $\sum_{\alpha \in I_1} \rho_\alpha = r_1^s \sum_{\beta \in I\left(\frac{r}{r_1}\right)} \rho_\beta = r_1^s S\left(\frac{r}{r_1}\right)$. Plus généralement, $\sum_{\alpha \in I_j} \rho_\alpha = r_j^s S\left(\frac{r}{r_j}\right) = \rho_j S\left(\frac{r}{r_j}\right)$, pour tout $1 \leq j \leq n$, et en ajoutant, on obtient (5). Pour finir, soit $T := \{t > 0 \ ; \ S(r) = 1 \text{ si } r \geq t\}$ et soit $m := \inf T$ ($r_n \in T \neq \emptyset$). $S(r) = 1$ sur $]m, +\infty[$; en effet, si $r > m$, il existe $t \in T$ tel que $t \leq r$. Supposons $m > 0$ et posons $\mu := m r_n < m$. Si $r > \mu$, on a $\frac{r}{r_1} \geq \cdots \geq \frac{r}{r_n} > m$, d'où $S(r) = \sum_{i=1}^n \rho_i S\left(\frac{r}{r_i}\right) = \sum_{i=1}^n \rho_i = 1$. Mais alors $]\mu, +\infty[\subset T$, ce qui est absurde. Donc $m = 0$. □

<u>Théorème</u> 3. *Si s est la dimension d'auto-similarité de K, alors on a toujours*

$$\overline{\dim}_B(K) \leq s.$$

Démonstration. Le Lemme permet de majorer $|I(r)|$ comme suit :

$$|I(r)| \leq r^{-s} r_1^{-s} \text{ si } 0 < r < 1. \tag{6}$$

En effet, pour $\alpha \in I(r)$, on a $\rho_\alpha \geq r^s r_1^s$, car on a ou bien $\alpha = \langle i_1 \rangle$, alors $\rho_\alpha = r_{i_1}^s \geq r_1^s \geq r_1^s r^s$, ou bien $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$, $p \geq 2$, alors $\rho_\alpha = (r_{i_1} \cdots r_{i_{p-1}})^r r_{i_p}^s \geq r^s r_{i_p}^s \geq r^s r_1^s$. Le Lemme 1 montre alors que $1 = \sum_{\alpha \in I(r)} \rho_\alpha \geq \sum_{\alpha \in I(r)} r^s r_1^s = r^s r_1^s |I(r)|$, d'où (6).
D'autre part, $K \subset \bigcup_{\alpha \in I(r)} K_\alpha$. Soit en effet $y \in K,\ x = (i_1, \dots, i_p, \dots) \in F$ tel que $y = h(x)$ et p tel que $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$, le "début" de x, soit dans $I(r)$. D'après la démonstration de la Proposition 4, on a $y = h(x) \in K_\alpha$. Soit $0 < \varepsilon < d = \mathrm{diam}(K)$, et soit $r := \frac{\varepsilon}{d} < 1$. Si $\alpha \in I(r)$, on a $\mathrm{diam}(K_\alpha) = r_\alpha d \leq rd < \varepsilon$ et l'inclusion précédente montre alors que $N_K(\varepsilon) \leq |I(r)| \leq r^{-s} r_1^{-s} = d^s r_1^{-s} \frac{1}{\varepsilon^s}$ avec (6), d'où le résultat. $\square$

Remarque 4. Le Cantor $R = R(r),\ 0 < r < \frac{1}{2}$ est le compact auto-similaire associé aux

$$S_1(x) = rx \text{ et } S_2(x) = rx + 1 - r.$$

La dimension d'auto-similarité est donnée par $2r^s = 1$, soit $s = \frac{\log 2}{\log 1/r}$ et l'inégalité du Théorème 3 est alors une égalité.
Attention ! ce n'est pas toujours le cas. En effet, en reprenant les similitudes S_1, S_2 avec $\frac{1}{2} < r < 1$, le compact fixe associé est $[0, 1]$, car :

$$S_1([0,1]) \cup S_2([0,1]) = [0, r] \cup [1 - r, r] = [0, 1], \text{ car } r \geq 1 - r.$$

Pourtant $\dim_B([0, 1]) = 1$ et $1 < s = \frac{\log 2}{\log 1/r}$.

Deuxième partie

Dimension de Hausdorff

4 Définitions

Définition 3. Soient (X, d) un espace métrique séparable, $E \subset X$ et $s > 0$. On appelle s-mesure de E, et on note $H^s(E)$, l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$H^s(E) := \limsup_{\varepsilon \to 0} H^s_\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} H^s_\varepsilon(E),$$

avec

$$H^s_\varepsilon(E) := \inf_{\substack{B_i = \overline{B}(x_i, r_i) \\ E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i \\ \mathrm{diam} B_i \leq \varepsilon}} \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam} B_i)^s$$

$$= \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty (\mathrm{diam} B_i)^s, \ E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i, \ B_i \text{ boules fermées}, \ \mathrm{diam} B_i \leq \varepsilon \right\}.$$

Remarque 5.

1. X étant séparable, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par une suite de boules de rayon $\leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc de diamètre $\leq \varepsilon$.
2. Contrairement à la dimension métrique, à chaque B_i, on affecte le poids $(\mathrm{diam} B_i)^s$ au lieu de 1, c'est plus fin...
   En effet, si $a \in E$ est isolé, recouvrir a consomme une boule B de diamètre arbitrairement petit et $(\mathrm{diam} B)s$ compte pour 0, pas pour 1.
3. On peut définir la s-mesure de Hausdorff avec des parties quelconques B de diamètre $\leq \varepsilon$. On obtient une s-mesure H'^s équivalente à H^s en ce sens que

$$H'^s(E) \leq H^s(E) \leq 2^s H'^s(E), \ \forall E \subset X.$$

4. On rappelle qu'une mesure extérieure μ sur X est une application $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ telle que
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A \subset B \ \Rightarrow \ \mu(A) \leq \mu(B)$
(c) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \ \forall (E_n)_{n\geq 1}, \ E_n \subset X.$
De plus, on dit que μ est métrique si
(d) $\mu(E \sqcup F) = \mu(E) + \mu(F)$ si $d(E,F) > 0$.
Ensuite, à une mesure extérieure μ, on associe la tribu

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \in \mathcal{P}(X) \ ; \ \mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap A^c), \ \forall T \subset X\}.$$

Alors $\mu_{|\mathcal{A}_\mu}$ est une mesure usuelle. Soit $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$ la tribu borélienne de (X,d). Alors, on peut montrer que, si μ est métrique, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\mu$.

Proposition 5. *H^s est une mesure extérieure métrique sur X, appelée s-mesure de Hausdorff sur X.*

Démonstration. On fixe $\varepsilon > 0$ et montrons que

$$H^s_\varepsilon\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} H^s_\varepsilon(E_n)$$

pour toute suite de parties $(E_n)_{n\geq 1}$ de X. On peut supposer $H^s_\varepsilon(E_n) < \infty, \forall n$. Soit $\rho > 0$, on peut, pour tout n, trouver une suite $(B_{i,n})_{i\geq 1}$ de boules fermées de diamètre $\leq \varepsilon$, telles que

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,n} \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} B_{i,n})^s \leq H^s_\varepsilon(E_n) + \rho 2^{-n}.$$

Alors, $E := \bigcup_n E_n \subset \bigcup_{i,n} B_{i,n}$, d'où :

$$H^s_\varepsilon(E) \leq \sum_{i,n} (\text{diam} B_{i,n}) s \leq \sum_{n=1}^{\infty} (H^s_\varepsilon(E_n) + \rho 2^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} H^s_\varepsilon(E_n) + \rho.$$

En faisant tendre ρ vers 0, et ε vers 0, on obtient (c). (a) et (b) sont claires, donc H^s est une mesure extérieure.
Soient maintenant $E, F \subset X$ tels que $d(E,F) = \delta > 0$. Soient $\varepsilon < \delta, \ \rho > 0$. Il existe un recouvrement de $E \cup F$ par des boules B_i de diamètre $\leq \varepsilon$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} B_i)^s \leq H^s_\varepsilon(E \cup F) + \rho.$$

Soit $I := \{i \in \mathbb{N}^* \ ; \ B_i \cap E \neq \emptyset\}$ et $J := \{i \in \mathbb{N} \ ; \ B_i \cap F \neq \emptyset\}$. $I \cap J = \emptyset$ car si $x \in E \cap B_i$ et $y \in F \cap B_i$, on a $d(E,F) \leq d(x,y) \leq \mathrm{diam} B_i \leq \varepsilon < \delta$ et de plus, $E \subset \bigcup_{i \in I} B_i$ et $F \subset \bigcup_{i \in J} B_i$, d'où

$$H^s_\varepsilon(E) + H^s_\varepsilon(F) \leq \sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^s + \sum_{i \in J} (\mathrm{diam} B_i)^s$$

$$= \sum_{i \in I \cup J} (\mathrm{diam} B_i)^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^s \leq H^s_\varepsilon(E \cup F) + \rho.$$

Et en faisant tendre successivement ρ et ε vers 0, on obtient

$$H^s_\varepsilon(E) + H^s_\varepsilon(F) = H^s_\varepsilon(E \cup F) \text{ si } \varepsilon < \delta.$$

et

$$H^s(E) + H^s(F) = H^s(E \cup F).$$

□

Remarque 6. Si $(X,d) = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$, on a

$$H^s(\lambda E) = \lambda^s H^s(E), \ \forall \lambda > 0, \ \forall E \subset \mathbb{R}^n.$$

autrement dit, H^s réagit aux homothéties comme λ_s, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^s$, si $s \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 2. *Si on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le volume de la boule unité $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{R}^n$ (ie $V_n = \lambda_n(\mathbb{B}_n)$) et Γ la fonction d'Euler, alors*

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Démonstration. En effet, posons

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,t) & \mapsto & e^{-t}\mathbb{I}_{\{||x||^2 \leq t\}}(x,t) \end{array}$$

où $\mathbb{I}$ désigne la fonction indicatrice. f est positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) \mathrm{d}x = e^{-t} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ ||x||^2 \leq t\})$$

$$= e^{-t}\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ ||x|| \leq \sqrt{t}\}) = e^{-t}\lambda_n(\sqrt{t}\mathbb{B}_n) = e^{-t}t^{\frac{n}{2}}V_n.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathbb{I}_{\{||x||^2 \leq t\}}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{||x||^2}^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-||x||^2}.$$

D'autre part, $f \geq 0$, donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \sqrt{\pi^n} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-x_1^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+} f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} V_n t^{\frac{n}{2}} e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= V_n \int_0^{+\infty} t^{\left(\frac{n}{2}+1\right)-1}e^{-t}\mathrm{d}t = V_n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Donc

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

□

<u>Définition</u> 4. On dit qu'une famille de boules fermées $\mathcal{B}$ non réduites à des points de $\mathbb{R}^n$ <u>recouvre finiment</u> $E \subset \mathbb{R}^n$ si

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathcal{B}\ ;\ x \in B \text{ et } \mathrm{diam}B \leq \varepsilon.$$

<u>Lemme</u> 3. *(Lemme de Federer)*
On suppose que $\mathcal{B}$ recouvre finiment E et que tout $B \in \mathcal{B}$ est inclus dans un borélien V fixe, de mesure finie. Alors il existe une suite $(B_i)_{i\geq 1}$ de $\mathcal{B}$ telle que

1. *$\forall i \neq j,\ B_i \cap B_j = \emptyset$,*
2. *$\forall N \geq 1,\ E \setminus \bigcup_{i=1}^N B_i \subset \bigcup_{i=N+1}^\infty \widetilde{B_i}$ où $\widetilde{B_i}$ est la boule de même centre que B_i, de rayon 5 fois plus grand.*

Démonstration. Admis. Voir [2], 2.8.6, p.144. □

Théorème 4. *En posant $\gamma_n := \frac{2^n}{V_n}$, on a*

$$H^n(E) = \gamma_n \lambda_n(E),\ \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. On majore d'abord λ_n en fonction de H^n. Pour cela, supposons $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, où les B_i sont des boules fermées, de rayon r_i, avec $2r_i = \mathrm{diam} B_i \leq \varepsilon$. Alors

$$\lambda_n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(B_i) = V_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^n.$$

En passant à l'infimum sur les recouvrements B_i, il vient

$$\lambda_n(E) \leq \frac{H^n(E)}{\gamma_n}.$$

On majore maintenant H^n en fonction de λ_n, en montrant d'abord que

$$H^n(E) \leq 2^n \gamma_n \lambda_n(E),\ \forall E \subset \mathbb{R}^n \text{ compact.} \tag{7}$$

Soit alors $q := P_E(\varepsilon)$ et soient $x_1, \ldots, x_q \in E$ tels que $||x_i - x_j|| > \varepsilon,\ i \neq j$. On utilise le même argument que dans 3.3.3 :
Posons $E_\varepsilon ;= \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ d(x, E) \leq \varepsilon\}$ et utilisons les volumes dans l'inclusion disjointe $\bigsqcup_{i=1}^{q} \overline{B}\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset E_\varepsilon$. On obtient alors $q \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n V_n \leq \lambda_n(E_\varepsilon)$, soit $q \leq \frac{\gamma_n}{\varepsilon^n} \lambda_n(E_\varepsilon)$, et l'inclusion $E \subset \bigcup_{i=1}^{q} \overline{B}(x_i, \varepsilon)$ montre que

$$H_{2\varepsilon}^n(E) \leq q(2\varepsilon)^n \leq 2^n \gamma_n \lambda_n(E_\varepsilon).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient (7) qui s'étend facilement à tout borélien E de $\mathbb{R}^n$, par régularité intérieure.
On peut supposer ensuite que E est borné. Soient V un ouvert borné contenant E, $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{B} := \{B \text{ boule fermée}\ ;\ B \subset V,\ \mathrm{diam} \widetilde{B} \leq \varepsilon\}$. Alors $\mathcal{B}$ recouvre finiment E et d'après le lemme de Federer, il existe une suite $(B_i)_{i \geq 1}$ vérifiant 1) et 2) du lemme. On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} B_i)^n < +\infty.$$

En effet, $\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam} B_i)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_n\lambda_n(B_i) = \gamma_n\lambda_n\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \gamma_n\lambda_n(V) < +\infty$. Comme $(\mathrm{diam}\widetilde{B_i})^n = 5^n(\mathrm{diam} B_i)^n$, on a aussi $\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\widetilde{B_i})^n < +\infty$. Étant donné $\rho > 0$, on peut choisir N tel que $E \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i \cup \bigcup_{i=N+1}^{\infty}\widetilde{B_i}$, avec $\mathrm{diam} B_i \leq \mathrm{diam}\widetilde{B_i} \leq \varepsilon$, d'où

$$H_\varepsilon^n(E) \leq \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{diam} B_i)^n + \sum_{i=N+1}^{\infty}(\mathrm{diam}\widetilde{B_i})^n \leq \sum_{i=1}^{N}(\mathrm{diam} B_i)^n + \rho$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\gamma_n\lambda_n(B_i) + \rho = \gamma_n\lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) + \rho \leq \gamma_n\lambda_n(V) + \rho.$$

D'où, successivement (rappel : $\lambda_n(E) = \inf_{\substack{V \text{ ouvert} \\ E\subset V}} \lambda_n(V) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K\subset E}} \lambda_n(K)$) :

$$H_\varepsilon^n(E) \leq \gamma_n\lambda_n(V),\ \ H^n(E) \leq \gamma_n\lambda_n(V),\ \ H^n(E) \leq \gamma_n\lambda_n(E),$$

d'où le résultat. □

Lemme 4. *Soient $E \subset X$ et $0 < s < t$. Alors*

1. $H^s(E) < +\infty \ \Rightarrow\ H^t(E) = 0$,
2. $H^t(E) > 0 \ \Rightarrow\ H^s(E) = +\infty$.

Démonstration. 1. On a, par définition, $H_\varepsilon^t(E) \leq \varepsilon^{t-s}H_\varepsilon^s(E) \leq \varepsilon^{t-s}H^s(E)$.
2. C'est la contraposée de 1).

□

Définition 5. Ce Lemme montre que , pour $E \subset X$, il existe une valeur critique $s_0 > 0$ telle que

$$H^s(E) = 0 \text{ si } s > s_0 \text{ et } h^s(E) = +\infty \text{ si } s < s_0.$$

Soit

$$s_0 := \inf\{s > 0\ ;\ H^s(E) = 0\} = \sup\{s > 0\ ;\ H^s(E) = +\infty\}.$$

s_0 s'appelle la dimension de Hausdorff de E et on la note $\dim_H(E)$.

5 Propriétés

Proposition 6. *On a*

1. $$E \subset F \;\Rightarrow\; \dim_H(E) \leq \dim_H(F),$$

2. $$\dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sup_{n\geq 1} \dim_H(E_n).$$

   En particulier, si E est dénombrable, alors $\dim_H(E) = 0$.

3. *Si $E \subset X$, $f : E \to Y$ α-höldérienne, alors*

   $$\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H(E).$$

4. *Si $E \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim_H(E) \leq n$ avec égalité si et seulement si $\mathring{E} \neq \emptyset$.*

Démonstration. 1. Evident.

2. On peut supposer $\sum_n \dim_H(E_n) = s_0 < \infty$. Si $t > 0$, le Lemme 4 et la Proposition 5 montrent que $H^t\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} H^t(E_n) = 0$, d'où $\dim_H\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \leq s_0$. De plus, un singeton $E = \{a\}$ est de dimension de Hausdorff nulle car on a $\forall s, \varepsilon, \rho > 0$, avec $\rho \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $E \subset \overline{B}(a,\rho) = B$, avec $\operatorname{diam}(B) \leq \varepsilon$, d'où

   $$H^s_\varepsilon(E) \leq (2\rho)^s,\; H^s_\varepsilon(E) = 0 \;\Rightarrow\; H^s(E) = 0.$$

3. Soient $F := f(E)$, $s > s_0 = \dim_H(E)$, $\varepsilon, \rho, \delta > 0$; $2C\delta^\alpha = \varepsilon$. Il existe un recouvrement de E par des boules B_i telles que

   $$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(B_i)^s \leq \rho,\; \operatorname{diam}(B_i) \leq \delta$$

   et chaque B_i coupe E en un point x_i (on peut éliminer les boules ne rencontrant pas E). Alors

   $$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}(x_i, \operatorname{diam} B_i) \;\Rightarrow\; F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}(f(x_i), C(\operatorname{diam} B_i)^\alpha) =: \bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i,$$

avec $\mathrm{diam} B_i' \leq 2C(\mathrm{diam} B_i)^\alpha \leq 2C\delta^\alpha = \varepsilon$. Posant $t := \frac{s}{\alpha}$, on a

$$H_\varepsilon^t(F) \leq \sum_i (\mathrm{diam} B_i')^t \leq (2C)^t \sum_i (\mathrm{diam} B_i)^{\alpha t}$$

$$= (2C)^t \sum_i (\mathrm{diam} B_i)^s \leq (2C)^t \rho.$$

En faisant tendre successivement ρ et ε vers 0, on obtient $H_\varepsilon^t(F) = 0$, $H^t(F) = 0$, d'où $\dim_H(F) \leq t = \frac{s}{\alpha}$, $\forall s > s_0$ et $\dim_H(F) \leq \frac{s_0}{\alpha}$.

4. $\mathbb{R}^n$ est union dénombrable de parties bornées ; une partie bornée E est contenue dans un borélien F de volume fini, donc $H^n(E) \leq H^n(F) = \gamma_n \lambda_n(F) < \infty$, d'après le Théorème 4, et $\dim_H(F) \leq n$.
   Donc $\dim_H(\mathbb{R}^n) \leq n$ avec 2.. Si $E \subset \mathbb{R}^n$, la monotomie montre que $\dim_H(E) \leq n$, et si $\mathring{E} \neq \emptyset$, $\mathring{E}$ contient une boule F de volume strictement positif, d'où $H^n(E) \geq H^n(F) = \gamma_n \lambda_n(F) > 0$. Par suite, $\dim_H(E) \geq n$, ie $\dim_H(E) = n$.

$\square$

Proposition 7. *On a*

$$\forall E \subset X,\ \dim_H(E) \leq \underline{\dim}_B(E).$$

Démonstration. On peut supposer $\alpha = \underline{\dim}_B(E) < \infty$. Soit $\beta > \alpha$. On peut choisir des $\varepsilon > 0$ arbitrairement petis tels que

$$\frac{\log N_E(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leq \beta.$$

Soit $p = N_E(\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^\beta}$. Pour de tels ε, on a $E \subset \bigcup_{i=1}^p \overline{B}(x_i, \varepsilon)$, d'où $H_{2\varepsilon}^\beta(E) \leq p(2\varepsilon)^\beta \leq 2^\beta$, donc $H^\beta(E) \leq 2^\beta$ et $\dim_H(E) \leq \beta$, puis, en faisant tendre β vers α, $\dim_H(E) \leq \alpha$. $\square$

Remarque 7. 1. On voit qu'il est plus facile de majorer $\dim_H$ que de la minorer.

2. (a) Le nombre de packing sert à minorer $\dim_B$,
   (b) La mesure de Frostman sert à minorer $\dim_H$.

<u>Définition</u> 6. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et soit $s > 0$. Une mesure de probabilité μ portée par A (ie telle que $\mu(A) = 1$) est une <u>mesure de Frostman</u> pour A et s si

$$\exists C > 0 \; ; \; \forall B \subset \mathbb{R}^n \text{ boule fermée, } \mu(B) \leq C(\text{diam}B)^s.$$

On parle aussi de (A, s)-mesure de Frostman.

<u>Lemme</u> 5. *Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ porte une (A, s)-mesure de Frostman, on a*

$$\dim_H(A) \leq s.$$

Démonstration. Si $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, avec $\text{diam}B_i \leq \varepsilon$, et B_i est une boule fermée, on a

$$1 = \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}B_i)^s.$$

D'où

$$H_\varepsilon^s(A) \geq \frac{1}{C}, \; H^s(A) \geq \frac{1}{C}, \; \dim_H(A) \geq s.$$

□

6 Exemples

6.1 Ensemble de Cantor

Soit $K = K(r), \; 0 < r < \frac{1}{2}$ le compact du 3.1. On va montrer que

$$\dim_H(K) = \frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

On peut, comme dans l'Introduction, coder K à partir du Cantor abstrait $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & A & \rightarrow & K \\ & & X & \mapsto & (1-r)\sum_{j=1}^{\infty} x_j r^j, \; x_j = 0, 1 \end{array}$$

Soit σ la probabilité uniforme sur $\{0,1\}$ (ie $\sigma(\{0\}) = \sigma(\{1\}) = \frac{1}{2}$), et soit τ la probabilité sur A définie comme étant le produit tensoriel infinie de σ :

$$\tau := \bigotimes_{n=0}^{\infty} \sigma.$$

Par définition, si $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{P}(\{0,1\})$ et si $B_0 \times \cdots \times B_n = \{x \in A \; ; \; x_j \in B_j\}$, on a

$$\tau(B_0 \times \cdots \times B_n) = \sigma(B_0) \cdots \sigma(B_n).$$

Soit ensuite $\mu := \varphi * \tau$ la mesure image de τ par φ (ie $\mu(B) = \tau(\varphi^{-1}(B))$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). μ est bien définie car φ est continue donc borélienne, c'est une mesure de probabilité portée par K et on va voir que c'est une $\left(K, s = \frac{\log 2}{\log 1/r}\right)$-mesure de Frostman.

Soient pour cela une boule fermée B, de diamètre $0 < d < 1 - 2r$ et $n \geq 0$ tel que $r^{n-1}(1-2r) \leq d < r^n(1-2r)$. Fixons $x = (x_j) \in \varphi^{-1}(B)$. Si $x' = (x'_j) \in \varphi^{-1}(B)$, on a $x'_j = x_j, \; j \leq n$. En effet, on a vu en 3.1 que, si k est le plus petit entier tel que $x_k \neq x'_k$, on a $|\varphi(x) - \varphi(x')| \geq r^k(1-2r)$. D'autre part, $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \mathrm{diam} B = d < r^n(1-2r)$, d'où $r^k < r^n$ et $k > n$. D'où $\varphi^{-1}(B) \subset B_0 \times \cdots B_n$, où $B_j = \{x_j\}$. Par suite,

$$\mu(B) = \tau(\varphi^{-1}(b)) \leq \tau(B_0 \times \cdots \times B_n) = \sigma(B_0) \cdots \sigma(B_n) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Or, $\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \geq \frac{1-2r}{d}$, donc $n + 1 \geq \frac{\log \frac{1-2r}{d}}{\log 1/r}$ et

$$\mu(B) \leq \exp\left((n+1)\log\frac{1}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{\log 1/2}{\log 1/r}\log\frac{1-2r}{d}\right) = \left(\frac{d}{1-2r}\right)^s.$$

Si B est de diamètre $d \geq 1 - 2r$, on a

$$\frac{\mu(B)}{(\mathrm{diam} B)^s)} \leq \frac{1}{(1-2r)^s}.$$

On a donc toujours

$$\mu(B) \leq C(\mathrm{diam} B)^s, \; C = (1-2r)^{-s}$$

et le Lemme de Frostman montre que

$$\dim_H(K) \geq s = \frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

La majoration est immédiate d'parès 3.1 et la Proposition 7 :

$$\dim_H(K) \leq \underline{\dim}_B(K) = \frac{\log 2}{\log 1/r}.$$

□

6.2 Compacts auto-similaires

Soient $S_1, \ldots, S_n$ des similitudes contractantes de $\mathbb{R}^N$ comme dans 3.4, s la dimension d'auto-similarité donnée par $\sum_{i=1}^{n} r_i^s = 1$ et K le compact fixe de $(S_1, \ldots, S_n)$.

<u>Définition</u> 7. On dit que $(S_1, \ldots, S_n)$ vérifie la <u>condition de Moran</u> s'il existe un ouvert borné non vide O tel que

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ S_i(O) \subset O \text{ et } \forall i \neq j,\ S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset.$$

<u>Théorème</u> 5. *On a*

1. $$\dim_H(K) \leq s,$$
2. *Si $(S_1, \ldots, S_n)$ vérifie la condition de Moran, alors*

$$\dim_H(K) = \dim_B(K) = s;$$

Démonstration. 1. Le Théorème 3 et la Proposition 7 montrant que

$$\dim_H(K) \leq \underline{\dim}_B(K) \leq s.$$

2. On reprend les notations de 3.4, en particulier, on pose $\rho_i = r_i^s$ et, si $\alpha = \langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ est un mot sur E et $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose $S_\alpha = S_{i_1} \circ \cdots S_{i_p}$ et $A_\alpha = S_\alpha(A)$, ainsi que $T(A) = S_1(A) \cup \cdots \cup S_N(A)$. On va construire une mesure de Frostman :

Soit σ la probabilité sur E définie par $\sigma(\{i\}) = \rho_i$, $1 \leq i \leq n$ (ou encore $\sigma = \sum_i \rho_i \delta_i$). Soit τ la probabilité sur $F = E^{\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\tau := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma$$

et soit $\mu = h * \tau$ la mesure image de τ par l'application h de la Proposition 4-1). Montrons que μ est une (K, s)-mesure de Frostman.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}^N$ est un compact tel que $T(A) \subset A$, alors $K \subset A$ (en particulier $K_\alpha \subset \overline{O_\alpha}$, $\forall \alpha$ mot sur E).
Soit en effet $A_j = T^j(A) \subset A$. Le théorème sur l'existence et l'unicité des compacts fixes (cf. Annexe) entraîne que $A_j \to K$ pour le distance de Hausdorff; pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver j tel que $K \subset (A_j)_\varepsilon$ (où $(A_j)_\varepsilon = \{x\ ;\ d(x, A_j) \leq \varepsilon\}$), ε étant arbitrairement petit, on a bien $K \subset A$.
On applique cela à $A = \overline{O}$, où O est un ouvert comme dans la condiion de Moran : $\overline{O}$ est compact car fermé borné, et $S_i(\overline{O}) \subset \overline{S_i(O)} \subset \overline{O}$, donc $T(\overline{O}) \subset \overline{O}$. D'après ce qu'on vient de voir, on a $K \subset \overline{O}$, puis $K_\alpha = S_\alpha(K) \subset S_\alpha(\overline{O}) \subset \overline{S_\alpha(O)} = \overline{O_\alpha}$.

(b) Soient ensuite $r > 0$ et $I = I(r)$ l'ensemble des mots minimaux $\alpha = \langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ tels que $r_\alpha = r_{i_1} \cdots r_{i_p} \leq r$. Alors les $(O_\alpha)_{\alpha \in I}$ sont deux à deux disjoints.
Soient en effet $\alpha = \langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ et $\beta = \langle j_1, \ldots, j_q \rangle \in I$, $\alpha \neq \beta$ et, par exemple, $p \leq q$.

  i. Si $p = q$, soit $k+1 \leq p$ le plus petit indice tel que $i_{k+1} \neq j_{k+1}$, alors $O_\alpha \cap O_\beta \subset S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(S_{i_{k+1}}(O) \cap S_{j_{k+1}}(O)) = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(\emptyset) = \emptyset$.

  ii. Si $p > q$, on ne peut avoir $\langle i_1, \ldots, i_p \rangle = \langle j_1, \ldots, j_p \rangle$ puisque par définition, $r_{i_1} \cdots r_{i_p} \leq r$ et $r_{j_1} \cdots r_{j_p} > r$, il existe donc un premier indice $k+1 \leq p$ tel que $i_{k+1} \neq j_{k+1}$ et on peut raisonner comme dans le premier cas.

(c) Soient maintenant $B := \overline{B}(a, r)$, $J := \{\alpha \in I = I(r)\ ;\ \overline{O_\alpha} \cap B \neq \emptyset\}$ et pour $\alpha = \langle i_1, \ldots, i_p \rangle$, on désigne par F_α le cylindre de F constitué des $x = (i_1(x), \ldots, i_p(x), \ldots)$ tels que $i_1(x) = i_1, \ldots, i_p(x) = i_p$. Alors $|J| \leq p_N$ où p_N ne dépend pes de r, et $h^{-1}(B) \subset \bigcup_{\alpha \in J} F_\alpha$.

En effet, O est un ouvert borné non vide, on peut donc trouver $0 < C_1 < C_2$ et B_1, B_2 des boules fermées telles que $\mathrm{diam} B_i = C_i,\ i = 1, 2$ et $B_1 \subset O \subset B_2$. Les $(O_\alpha)_{\alpha \in J}$ sont donc de diamètre $\leq r_\alpha C_2 \leq r C_2$, et $\overline{O_\alpha}$ coupe B, donc est inclus dans $\overline{B}(a, r + rC_2)$; en prenant les volumes dans l'inclusion disjointe suivante (étape (b)), $\bigsqcup_{\alpha \in J} O_\alpha \subset \overline{B}(a, r + rC_2)$, on obtient

$$\sum_{\alpha \in J} \lambda_N(O_\alpha) \leq r^N (1 + C_2)^N V_N \qquad (*).$$

D'autre part, O_α contient une boule de diamètre $r_\alpha C_1 \geq r r_1 C_1$ (car α est minimal), donc $\lambda_N(O_\alpha) \geq \left(\frac{r r_1 C_1}{2}\right)^N$ et en reportant dans $(*)$, on voit que $\left(\frac{r r_1 C_1}{2}\right)^N V_N |J| \leq r^N (1 + C_2)^N V_N$, les r^N et V_N se simplifient et on obtient

$$|J| \leq \left(\frac{2 + 2C_2}{r_1 C_1}\right)^N =: p_N.$$

Soient maintenant $x \in h^{-1}(B)$ et $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$ tels que x commence par le mot α : $i_1(x) = i_1, \dots, i_p(x) = i_p$. Comme on l'a vu dans la partie I, $h(x) \in K_\alpha$ et $h(x) \in B$ par hypothèse, donc $h(x) \in K_\alpha \cap B \subset \overline{O_\alpha} \cap B$, d'après la première étape. Ceci montre que $\alpha \in J$, or, $x \in F_\alpha$ par définition, d'où l'inclusion annoncée.

Ainsi, la τ-mesure du cylindre $F_\alpha,\ \alpha \in J$ est par définition $\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_p} = \rho_\alpha = r_\alpha^s \leq r^s$, d'où

$$\mu(B) = \tau(h^{-1}(B)) \leq \sum_{\alpha \in J} \tau(F_\alpha) \leq \sum_{\alpha \in J} r^s = r^s |J| \leq p_N r^s \leq p_N (\mathrm{diam} B)^s.$$

On a donc montré que μ est une (K, s)-mesure de Frostman et le Lemme de Frostman (Lemme 5) montre que $\dim_H(K) \geq s$, soit $\dim_H(K) = s$, d'après 1.. Le Théorème 3 et la Proposition 7 impliquent alors que

$$s = \dim_H(K) \leq \underline{\dim}_B(K) \leq \overline{\dim}_B(K) \leq s,$$

donc $s = \dim_B(K)$, d'où le résultat.

$\square$

6.3 Fanion de Sierpinski

Soit OAB un triangle équilatéral de côté 1 du plan euclidien, $f_{1,2,3}$ les homothéties de centres respectifs O, A, B, de rapport $\frac{1}{2}$ et $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$.
On a facilement que

$$OAB = \{M \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \overrightarrow{OM} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}, \ u, v \geq 0, u + v \leq 1\}.$$

On pose alors $M := (u, v)$.
Montrons que le compact fixe K de T est l'ensemble des $M = (u, v)$ de OAB tels que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j 2^{-j}, \ v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j 2^{-j}, \ u_j, v_j \in \{0, 1\}, \ u_j v_j = 0, \ \forall j.$$

En effet, soient $L := \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ et $L_0 := \{(\omega, \omega') \in L^2 \ ; \ \omega_j \omega'_j = 0, \ \forall j\}$. L_0 est compact car fermé borné dans L^2 et K_0 est l'image continue de L_0 par l'application $(\omega, \omega') \mapsto (\sum \omega_j 2^{-j}, \sum \omega'_j 2^{-j})$, K_0 est donc un compact de $\mathbb{R}^2$ et il nous faut montrer que $T(K_0) = K_0$.
Si $M = (u, v)$, on a

$$f_1(M) = \left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right), \ f_2(M) = \left(\frac{u+1}{2}, \frac{v}{2}\right), \ f_3(M) = \left(\frac{u}{2}, \frac{v+1}{2}\right).$$

Ces formules montrent que $f_i(M) \in K_0, \ \forall M \in K_0$, donc $T(K_0) \subset K_0$. On voit aussi que

$$f_1^{-1}(M) = (2u, 2v), \ f_2^{-1}(M) = (2u - 1, 2v), \ f_3^{-1}(M) = (2u, 2v - 1).$$

Supposons maintenant $M = (u, v) \in K_0$ et distinguons trois cas :

1. $u_1 = v_1 = 0 \ \Rightarrow \ f_1^{-1}(M) \in K_0$ et$M \in f_1(K_0)$,
2. $u_1 = 1, \ v_1 = 0 \ \Rightarrow \ f_2^{-1}(M) \in K_0$ et$M \in f_2(K_0)$,
3. $u_1 = 0, \ v_1 = 1 \ \Rightarrow \ f_3^{-1}(M) \in K_0$ et$M \in f_3(K_0)$,

Donc $M \in T(K_0) \ \Rightarrow \ K_0 \subset T(K_0) \ \Rightarrow \ K_0 = T(K_0)$. Donc $K_0 = K$. □
La condition de Moran est alors satisfaite avec ω l'intérieur de OAB.

En effet, si B_1, O_1, A_1 sont les milieux de OA, AB, BO respectivement, $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega)$ sont respectivement les intérieurs de $OB_1A_1, B_1AO_1, O_1BA_1$, et ces intérieurs sont disjoints.
La dimension d'auto-similarité est donnée par $3 \cdot 2^{-s} = 1$, donc

$$\dim_H(K) = \dim_B(K) = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Montrons que K est connexe. On sait que

$$K = \left\{ M \ ; \ \overrightarrow{OM} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}, \ u = \sum u_j 2^{-j}, \ v = \sum v_j 2^{-j}, \ u_j, v_j \in \{0,1\}, \ u_j v_j = 0 \right\}.$$

Soit

$$K_n := \left\{ M = (u,v) \in K \ ; \ u = \sum_{j=1}^{n} u_j 2^{-j}, \ v = \sum_{j=1}^{n} v_j 2^{-j} \right\}.$$

Si $K_0 = \{O, A, B\}$, on voit par récurrence que $K_n = T^n(K_0)$, donc $K_{n+1} = T(K_n)$ s'obtient en ajoutant à K_n les milieux des segments de longueur 2^{-n} joignant deux points de K_n, d'où

$$\forall x \in K_n, \ \exists x_1, \ldots, x_r \in K_n \ ; \ x_1 = x, \ x_r = O \text{ et } [x_i, x_{i+1}] \text{ segment de longueur } 2^{-n} \tag{8}$$

On procède par récurrence sur n, le résultat étant clair pour $n = 0$. S'il est vrai pour n, soit $x \in K_{n+1}$. On distinguera deux cas :

1. $x \in K_n$. Soient $x_1, \ldots, x_r$ comme dans (8), et y_i le milieu de $[x_i, x_{i+1}]$. La chaîne $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{r-1}, y_r, x_r$ est une chaîne de K_{n+1} qui vérifie (8) à l'étape $n+1$.
2. $x \in K_{n+1} \setminus K_n$. Alors x est le milieu de $[u, v]$, $u, v \in K_n$. Comme on l'a vu précédemment, d'après le premier cas, on peut joindre u à O par une chaîne adéquate $u, z_2, \ldots, z_t$, et la chaîne $x, u, z_2, \ldots, z_t$ répond à la question.

Par ailleurs, la distance de Hausdorff de $K_n (= T^n(K_0))$ à K tend vers zéro d'après le théorème sur les compacts fixes de l'Annexe. Il résulte alors de (8) que K est bien enchaîné. K étant de plus compact, il est bien connexe.

Troisième partie

Dimension topologique

7 Définitions

<u>**Définition**</u> **8.** On dit d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est <u>normal</u> si pour tous fermés F, G de X disjoints, il existe deux ouverts U, V de X disjoints et tels que $F \subset U,\ G \subset V$.

<u>**Lemme**</u> **6.** *Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des fermés d'un espace normal X tels que $\bigcap_{i=1}^n F_j = \emptyset$, alors il existe des ouverts $U_1, \ldots, U_n$ de X tels que $\bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset$ et $\forall 1 \leq i \leq n,\ F_i \subset U_i$.*

Démonstration. En reprenant les notations de l'énoncé, $F_1 \subset (F_2 \cap \cdots \cap F_n)^c$, donc il existe $A_1 \in \mathcal{T}$ tel que

$$F_1 \subset A_1 \subset \overline{A_1} \subset (F_2 \cap \cdots \cap F_n)^c.$$

En effet, F_1 et $F_2 \cap \cdots \cap F_n$ sont des fermés disjoints, il existe donc V_1, V_2 deux ouverts de X tels que $F_1 \subset V_1$ et $F_2 \cap \cdots \cap F_n \subset V_2$, et $\overline{V_1} \cap V_2 = \emptyset$, donc $\overline{V_1} \subset (F_2 \cap \cdots \cap F_n)^c$ et $A_1 := V_1$ répond à la question. On a encore $\overline{A_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap F_2 = \emptyset$. On reproduit le processus pour $(\overline{A_1}, F_2, \ldots, F_n)$: il existe donc $A_2 \in \mathcal{T}$ tel que $F_2 \subset A_2$ et on recommence le processus pour $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, F_3, \ldots, F_n)$. De proche en proche, on remplace F_i par $\overline{A_i}$ et les $A_1, \ldots, A_n$ conviennent. □

<u>*Remarque*</u> 8. Notons que tout espace métrique compact est normal.
En effet, si F, G sont des fermés de X, comme X est compact, F et G le sont aussi. On a alors

$$\exists (x_0, y_0) \in F \times G\ ;\ \delta := \inf_{(x,y) \in F \times G} d(x, y) = d(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in F \times G} d(x, y).$$

Par l'absurde, si $\delta = 0$, alors $x_0 = y_0 \in F \cap G = \emptyset$, ce qui est absurde. Ainsi, $\delta > 0$ et en posant

$$U := \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{\delta}{3}\right) \text{ et } V := \bigcup_{y \in G} B\left(y, \frac{\delta}{3}\right)$$

on obtient

$$F \subset U,\ G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset.$$

$\square$

Définition 9. Un espace topologique compact métrisable (X, d) est dit de dimension topologique inférieure ou égale à $n \in \mathbb{N}$ et on note $\dim(X) \leq n$ si, pour tout $r > 0$, X admet un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$ tel que

$$\text{diam} U_i \leq r,\ \forall 1 \leq i \leq k \text{ et tout } x \in X \text{ est dans au plus } n+1 \text{ des } U_i.$$

En abrégé, on parle de recouvrement d'ordre $\leq n$ et de pas $< r$, ou encore de (n, r)-recouvrement.
On dit de plus que X est de dimension n s'il est de dimension $\leq n$ et pas de dimension $\leq n - 1$. Autrement dit

$$\dim(X) = n \ \Leftrightarrow\ \dim(X) \leq n \text{ et } \dim(X) \nleq n - 1.$$

Proposition 8. *Soient (X, d) un espace métrique compact et $n \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\dim(X) \leq n$,
2. *Pour tout recouvrement ouvert $(U_1, \ldots, U_k)$ de X, il existe un recouvrement ouvert $(V_1, \ldots, V_k)$ de X, d'ordre $\leq n$, raffinant $(U_1, \ldots, U_k)$ (ie $\forall j,\ V_j \subset U_j$),*
3. *Pour tout recouvrement ouvert $(U_1, \ldots, U_{n+2})$ de X, il existe un recouvrement fermé $(F_1, \ldots, F_{n+2})$ de X, raffinant $(U_1, \ldots, U_{n+2})$ et tel que $\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j = \emptyset$.*

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ 2. Soient $U_1, \dots, U_k$ un recouvrement ouvert de X, $r > 0$, un nombre de Lebesgue associé ($\forall a \in X,\ \exists 1 \le i \le k\ ;\ B(a,r) \subset U_i$), $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert fini de X, d'ordre $\le n$, avec $\mathrm{diam} W_\alpha \le r$. Chaque W_α est inclus dans un U_i au moins car si $a \in W_\alpha$ et $B(a,r) \subset U_i$, on a $W_\alpha \subset B(a,r) \subset U_i$. Soient

$$i(\alpha) := \min\{1 \le i \le k\ ;\ W_\alpha \subset U_i\}$$

et

$$V_i := \bigcup_{i(\alpha)=i} W_\alpha.$$

Alors, $(V_1, \dots, V_k)$ répond à la question. En effet, si $I \subset \{1, \dots, k\}$ et $|I| = n+2$, on a

$$\bigcap_{i \in I} V_i = \bigcup \{W_{\alpha_1} \cap \dots \cap W_{\alpha_{n+2}}\ ;\ \{i(\alpha_1), \dots, i(\alpha_{n+2})\} = I\} = \bigcup \emptyset = \emptyset,$$

puisque de tels $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$ sont nécessairement distincts.
2. $\Rightarrow$ 3. Soit $V_1, \dots, V_{n+2}$ un recouvrement ouvert d'ordre $\le n$ raffinant $(U_1, \dots, U_{n+2})$. Alors $\bigcap_{j=1}^{n+2} V_j^c = \emptyset$. D'après le Lemme précédent, il existe donc des ouverts ω_j tels que $V_j^c \subset \omega_j$ et $\bigcap_{j=1}^{n+2} \omega_j = \emptyset$. Les fermés $F_j := \omega_j^c$ répondent à la question : en effet, $F_j \subset V_j$, et $\bigcup_{j=1}^{n+2} F_j = X$, puisque $\bigcap_{j=1}^{n+2} \omega_j = \emptyset$ et enfin $\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j \subset \bigcap_{j=1}^{n+2} V_j = \emptyset$ puisque $(V_1, \dots, V_{n+2})$ est d'ordre $\le n$.
3. $\Rightarrow$ 2. Soit $(U_1, \dots, U_k)$ un recouvrement ouvert de X. Si $k \le n+1$, ce recouvrement est déjà d'ordre $\le n$. Supposons donc $k \ge n+2$ et posons

$$X_1 := U_1, \dots, W_{n+1} := U_{n+1}, W_{n+2} := \bigcup_{n+2 \le i \le k} U_i.$$

Par hypothèse, il existe des fermés $F_1, \dots, F_{n+2}$ recouvrant X avec $F_j \subset W_j$ et $\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j = \emptyset$, on peut donc choisir des ouverts ω_j tels que $F_j \subset \omega_j$ et $\bigcap_{j=1}^{n+2} \omega_j = \emptyset$, d'après le Lemme précédent. Posons

$$B_i := \omega_i,\ \forall 1 \le i \le n+1,\ B_i := \omega_{n+2} \cap U_i,\ \forall n+2 \le i \le k,$$

alors $(B_1, \dots, B_k)$ est un recouvrement ouvert de X, car

$$B_1 \cup \cdots B_k \supset F_1 \cup \cdots \cup F_{n+1} \cup \omega_{n+2} \cap W_{n+2} \supset F_1 \cup \cdots F_{n+1} \cup F_{n+2} = X.$$

Ce recouvrement raffine évidemment $(U_1, \dots, U_k)$ et de plus, $\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset$ car $\bigcap B_i \subset \bigcap \omega_j$.
Ecrivons les parties à $n+2$ éléments de $\{1, \dots, k\}$ comme une suite $I_1, \dots, I_l$. Soit $r < l$ et supposons construit un recouvrement ouvert $(B_1, \dots, B_k)$ de X, $B_j \subset U_j$, $\forall j$, et $\bigcap_{i \in I_u} B_i = \emptyset$ pour $1 \leq u \leq r$. Si l'on répète la construction précédente avec I_{r+1} au lieu de $\{1, \dots, n+2\}$, on obtient un recouvrement ouvert $(C_1, \dots, C_k)$, $C_j \subset B_j \subset U_j$, $\forall j$ et $\bigcap_{i \in I_{r+1}} C_i = \emptyset$, on a donc $\bigcap_{I_u} C_i = \emptyset$, $1 \leq u \leq r+1$ et par récurrence, on construit un recouvrement ouvert $(V_1, \dots, V_k)$, $V_j \subset U_j$, $\forall j$ et $\bigcap_{I_u} V_i = \emptyset$, $1 \leq u \leq l$, $(V_1, \dots, V_k)$ répond donc à la question.
2. $\Rightarrow$ 1. C'est évident. □

8 Comparaison avec la dimension de Hausdorff

Théorème 6. *Pour tout espace métrique compact X, on a*

$$\dim(X) \leq \dim_H(X).$$

Démonstration. Soit$n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq \dim(X)$. D'après la contraposée de la Proposition 8, on peut trouver des ouverts $U_1, \dots, U_{n+1}$ recouvrant X tels que pour tout recouvrement fermé $(F_1, \dots, F_{n+1})$ raffinant $(U_1, \dots, U_{n+1})$, on ait $\bigcap_{j=1}^{n+1} F_j = \emptyset$. Posons

$$d_i := d_{U_i^c},\ d = d_1 + \cdots + d_{n+1},\ \varphi := \left(\frac{d_1}{d}, dotsc, \frac{d_{n+1}}{d} \right).$$

La fonction $d \geq 0$ est continue et ne s'annule pas, donc reste supérieure à une constante $a > 0$, chaque $\frac{d_i}{d}$ est lipschitzienne car :

$$\left| \frac{d_i(x)}{d(x)} - \frac{d_i(y)}{d(y)} \right| = \left| \frac{(d_i(x) - d_i(y))d(y) + d_i(y)(d(y) - d(x))}{d(x)d(y)} \right|$$

$$\leq \frac{|d_i(x) - d_i(y)|}{d(x)} + \frac{|d(y) - d(x)|}{d(x)} \leq \frac{d(x,y)}{a} + \frac{(n+1)d(x,y)}{a} = \frac{n+2}{a} d(x,y).$$

De plus, l'application $\varphi : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ euclidien est donc lipschitzienne et il résulte de la Proposition 6-3) que :

$$\dim_H(\varphi(X)) \leq \dim_H(X).$$

On va maintenant montrer que $\varphi(X)$ contient une partie T isométrique à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, d'après les Propositions 6 et 8, il en résultera :

$$\dim_H(X) \geq \dim_H(\varphi(X)) \geq \dim_H(T) = n.$$

Le théorème 6 s'ensuivra, puisque n est un entier arbitraire $\leq \dim(X)$ (si $\dim(X) < \infty$, on fait $n = \dim(X)$, si $\dim(X) = \infty$, on trouve $\dim_H(X) = \dim(X) = \infty$).
On prend pour cela

$$T := \left\{ t = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t_i > 0, \ \forall 1 \leq i \leq n+1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

le simplexe unité ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, qui est isométrique à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement libres de $\mathbb{R}^n$ et on va voir que

$$T \subset \varphi(X) \tag{9}$$

Soient en effet $t = (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in T$ et $F_i := \left\{ x \ ; \ \frac{d_i(x)}{d(x)} \geq t_i \right\}$, $1 \leq i \leq n+1$. On a $F_i \subset U_i$ car si $x \in F_i$, on a $d_i(x) > 0$ et $x \notin U_i^c$. Si maintenant $x \in X$, on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{d_i(x)}{d(x)} - t_i \right) = 1 - 1 = 0,$$

x appartient donc à l'un des des F_i et ceux-ci, fermés, recouvrent X, par conséquent, $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i$ contient au moins un point x_0. On a

$$\frac{d_i(x_0)}{d(x_0)} - t_i \geq 0, \ \forall 1 \leq i \leq n+1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{d_i(x_0)}{d(x_0)} - t_i \right) = 0,$$

donc

$$\frac{d_i(x_0)}{d(x_0)} = t_i, \ \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } t = \varphi(x_0).$$

Ceci prouve (9) et achève la démonstration. □

Remarque 9. On peut montrer que

$$\dim(X) = \inf_{Y \simeq X} \dim_H(Y).$$

Définition 10. (B. Mandelbrojt)
On appelle objet fractal (ou simplement fractale), tout espace métrique compact X tel que

$$\dim(X) < \dim_H(X).$$

Remarque 10. Cette définition ne satisfait pas tous les experts en la matière car elle laisse passer des exemples d'objets que l'on a envie d'appeler "fractales". On s'y tiendra cependant ici...

9 Exemples

9.1 Ensemble de Cantor

L'ensemble de Cantor X de rapport de dissection $r < \frac{1}{2}$ est une fractale. En effet, $\dim(X) = 0$ car X est totalement discontinu (voir Annexe) et on a vu que

$$\dim_H(X) = \frac{\log 2}{\log 1/r} > 0.$$

$\square$

De plus, il est facile de vérifier la remarque 9 sur cet exemple : soient $0 < s < \frac{1}{2}$ et Y_s l'ensemble de Cantor de rapport s. On a $Y_s \simeq X$ car tous les Cantors sont homéomorphes au Cantor abstrait $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et

$$\inf_{s>0} \dim_H(Y_s) = \lim_{s \to 0} \dim_H(Y_s) = \lim_{s \to 0} \frac{\log 2}{\log 1/s} = 0 = \dim(X).$$

$\square$

9.2 Fanion de Sierpinski

Le fanion de Sierpinski X est un objet fractal. En effet, on a

$$\dim(X) \leq \dim_H(X) = \frac{\log 3}{\log 2} < 2,$$

donc $\dim(X) = 0, 1$ et $\dim_H(X) = \frac{\log 3}{\log 2} > 1 = \dim(X)$ car X est connexe. $\square$

9.3 Eponge de Menger

L'éponge de Menger X est un objet fractal.
Considérons un cube Q dans $\mathbb{R}^3$, il a 8 sommets, 12 arêtes et il est réunion de $3^3 = 27$ cubes homothétiques de Q dans le rapport $\frac{1}{3}$. Supprimons le cube central ainsi que les six cubes centrés sur les faces et recommençons... Autrement dit, considérons les vingt homothéties de rapport $\frac{1}{3}$ centrées aux sommets de Q et aux milieux des arêtes de Q, et soit X le compact fixe associé. La condition de Moran est satisfaite avec O l'intérieur de Q, donc la dimension de Hausdorff s de X est donnée par $20 \cdot 3^{-1} = 1$, soit

$$\dim_H(X) = s = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.727\ldots.$$

On a donc nécessairement $\dim(X) < \dim_H(X)$, puisque $\dim(X) \in \mathbb{N}$, et X est fractal. $\square$

10 Application : non homéomorphismes

<u>Lemme</u> 7. *Soit X un espace métrique compact. On a*

1. *Si $Y \simeq X$, alors $\dim(Y) = \dim(X)$,*
2. *Si Y est un fermé de X, alors $\dim(Y) \leq \dim(X)$.*

Démonstration. 1. Soient $f : X \to Y$ un homéomorphisme, $n \geq \dim(X)$ et $(U_1, \dots, U_{n+2})$ un recouvrement ouvert de Y. Alors, on a que $(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_{n+2}))$ est un recouvrement ouvert de X et il existe un recouvrement fermé $F_1, \dots, F_{n+2}$ de X tel que $F_j \subset f^{-1}(U_j)$, $\forall j$ et $\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j = \emptyset$. Soit $K_j := f(F_j)$ fermé car compact, on a $K_j \subset U_j$, $\forall j$, $\bigcup_{j=1}^{n+2} K_j = f\left(\bigcup_{j=1}^{n+2} F_j\right) = f(X) = Y$ et f étant injective, $\bigcap_{j=1}^{n+2} K_j = f\left(\bigcap_{j=1}^{n+2} F_j\right) = f(\emptyset) = \emptyset$. La proposition 8 montre que $\dim(Y) \leq n$. Si donc $\dim(X) < \infty$, on fait $n = \dim(X)$ et on trouve $\dim(Y) \leq \dim(X)$. Si $\dim(X) = \infty$, on a aussi $\dim(Y) = \infty$. D'après le raisonnement précédent appliqué à f^{-1}, le 1. en découle.

2. Se démontre de même.

□

<u>Théorème</u> 7. *Soient $p \neq q \in \mathbb{N}^*$. Alors*

1.

$$[0,1]^p \not\sim [0,1]^q,$$

2.

$$\mathbb{R}^p \not\sim \mathbb{R}^q.$$

Démonstration. 1. $\mathbb{R}^N$ peut être recouvert par des ouverts de diamètre arbitrairement petit, se coupant au plus $N+1$ à $N+1$. Posons

$$J := \{]n, n+1[,\ n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } K := \{\{n\},\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour $M \in \{0, 1, \dots, N\}$ fixé, désignons par $\mathcal{C}_M$ la classe des parties C de $\mathbb{R}^N$ de la forme $C = A_1 \times \cdots \times A_N$ où exactement M des A_i sont dans J, et $N - M$ des A_i sont dans K. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme l^∞ et fixons M dans un premier temps. Alors on a

$$\text{Si } C = A_1 \times \cdots \times A_N \in \mathcal{C}_M, \text{ et si } x \in C, \text{ il existe } B(x, \varepsilon(x)),$$
$$\varepsilon(x) < \frac{1}{2} \text{ tel que } \forall D \in \mathcal{C}_M,\ D \cap B(x, \varepsilon(x)) \neq \emptyset \iff D = C. \qquad (10)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $A_i =]n_i, n_i+1[$, $\forall 1 \leq i \leq M$ et $A_i = \{n_i\}$, $\forall M+1 \leq i \leq N$. Comme $x = (x_1, \dots, x_N) \in C$, on a

$n_i < x_i < n_i + 1,\ 1 \le i \le M$ et $x_i = n_i,\ M+1 \le i \le N$.
Il existe donc $0 < \varepsilon(x) < \frac{1}{2}$ tel que

$$n_i < x_i - \varepsilon(x) < x_i + \varepsilon(x) < n_i + 1,\ \forall 1 \le i \le M.$$

Si $y = (y_1, \ldots, y_N) \in D$, avec $D \in \mathcal{C}_M$, et si $||y - x||_\infty < \varepsilon(x)$, on a $n_i < y_i < n_i + 1,\ 1 \le i \le M$. Comme y a exactement $N - M$ coordonnées entières, on a $y_i \in \mathbb{Z},\ i > M$, et l'inégalité $|y_i - x_i| \le \varepsilon(x) < \frac{1}{2}$ force $y_i = x_i = n_i,\ i > M$. Cela montre que $C = D$ et prouve (10).
Soit ensuite

$$U(C) := \bigcup_{x \in C} B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right).$$

Alors

$$\text{Les ouverts } (U(C))_{C \in \mathcal{C}_M} \text{ sont deux à deux disjoints à } M \text{ fixé.} \tag{11}$$

Soient en effet $C, D \in \mathcal{C}_M$, si $U(C) \cap U(D) \ne \emptyset$, il existe $x \in C,\ y \in D$ tels que $B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{\varepsilon(y)}{2}\right) \ne \emptyset$ et on peut supposer $\varepsilon(y) \le \varepsilon(x)$. Alors $||y - x||_\infty < \frac{\varepsilon(x)}{2} + \frac{\varepsilon(y)}{2} \le \varepsilon(x) \ \Rightarrow\ y \in B(x, \varepsilon(x)) \cap D$. D'après (10), cela implique que $C = D$ et prouve (11).
De plus, $\mathrm{diam}(U(C)) \le 2$ pour $C \in \mathcal{C}_M$, car si $u, v \in U(C)$, il existe $x, y \in C$ tels que $||u - x||_\infty < \frac{\varepsilon(x)}{2} \le \frac{1}{2}$, $||v - y||_\infty < \frac{\varepsilon(y)}{2} \le \frac{1}{2}$, d'où

$$||v - u||_\infty \le ||u - x||_\infty + ||x - y||_\infty + ||y - v||_\infty \le \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

Soit $\mathcal{O}_M := \{U(C),\ C \in \mathcal{C}_M\}$, et soit $\mathcal{A} := \bigcup_{M=0}^N \mathcal{O}_M$. Les ouverts de $\mathcal{A}$ sont de diamètre ≤ 2, chaque point de $\mathbb{R}^N$ appartient à au plus un ouvert de $\mathcal{O}_M$, donc à au plus $N+1$ ouverts de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ recouvre $\mathbb{R}^N$ car si $x \in \mathbb{R}^N$ a exactement $N - M$ coordonnées entières avec $0 \le M \le N$, il existe $C \in \mathcal{C}_M$ tel que $x \in C$ et $x \in U(C)$ avec $U(C) \in \mathcal{A}$.
Par homothétie sur $\mathcal{A}$, on obtient des recouvrements ouverts de $\mathbb{R}^N$, d'ordre $\le N$ et de diamètre arbitrairement petit.

2. Supposons que $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ soit un homéomorphisme. Soit $C := [0,1]^p,\ h(C) \simeq C$ et le Lemme 7 montre donc que

$$\mathrm{dim}(h(C)) = \mathrm{dim}(C) \ \Rightarrow\ \mathrm{dim}(h(C)) = p.$$

D'autre part, $h(C)$ est un compact de $\mathbb{R}^q$ donc est inclus dans un cube compact $K \subset \mathbb{R}^q$. Le Lemme 7 de nouveau montre que

$$\dim(h(C)) \leq \dim(K) \;\Rightarrow\; p \leq q.$$

Utilisant h^{-1}, on a de même que $q \leq p$, d'où $p = q$, ce qui termine la preuve.

$\square$

Corollaire 2. *On a*

1. $$[0,1]^p \simeq [0,1]^q \;\Leftrightarrow\; p = q,$$

2. $$\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^q \;\Leftrightarrow\; p = q,$$

3. $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *ne sont pas homéomorphes.*

Annexe

A Nullité de la dimension topologique d'un espace métrique compact totalement discontinu

Théorème 8. *Tout espace métrique compact totalement discontinu est de dimension topologique nulle.*
En particulier, l'ensemble de Cantor est de dimension nulle.

Démonstration. Soit (X, d) un espace topologique compact métrisable totalement discontinu. On procède en plusieurs étapes :

1. X est compact, donc la composant connexe de a est l'intersection des ouverts-fermés contenant a, X étant totalement discontinu, on en déduit que $\{a\}$ est l'intersection des ouverts-fermés non vides le contenant.
2. Soit $a \in \omega$ un ouvert. Il existe un voisinage ouvert-fermé V de a avec $V \subset \omega$.
   Soit (A_i) la famille des ouvert-fermés contenant a, si la famille $(A_i \cap \omega^c)$ a la propriété de l'intersection finie, elle a une intersection non vide, ce qui est absurde puisque $\bigcap_i (A_i \cap \omega^c) = \{a\} \cap \omega^c = \emptyset$, on peut donc choisir $A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}$ tels que $V := \bigcap_{j=1}^p A_{i_j} \subset \omega$. Alors V répond à la question.
3. Pour tout $r > 0$, X admet un recouvrement ouvert fini (U_i) avec $\mathrm{diam} U_i < r$ et les U_i deux à deux disjoints.
   En effet, si $x \in X$, x possède un voisinage ouvert-fermé $V_x \subset B\left(x, \frac{r}{3}\right)$, donc $\mathrm{diam} V_x < r$. Un nombre fini de tels V_x, soit $V_{x_1}, \ldots X_{x_k}$ recouvrent X. Posons
   $$V_i := V_{x_i},\ U_1 := V_1,\ U_i := V_i \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1}),\ \forall i \geq 2.$$
   Les U_i sont ouvert puisque les V_i sont ouverts-fermés, donc $(U_1, \ldots, U_k)$ répond à la question.

On en déduit immédiatement que $\dim(X) = 0$. □

B Compact fixe et théorème de Picard

Soit (X,d) un espace métrique complet, $Y := \mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées $X \to \mathbb{R}$, $||\cdot||$ la norme sup sur Y :

$$\forall f \in Y,\ ||f|| := \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Alors $(Y, ||\cdot||)$ est un espace de Banach. Pour $F \subset X$ un fermé, on note

$$\begin{array}{cccc} d_F & : & X & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{dist}(x,F) \end{array}$$

où $\mathrm{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} d(x,y)$. Soit encore $\mathcal{A}$ l'ensemble des compacts non vides de X.

Proposition 9. *1. $A, B \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ d_A - d_B \in Y$ et la formule*

$$h(A,B) := ||d_A - d_B||$$

définit une distance sur $\mathcal{A}$, appelée distance de Hausdorff.

2. Si $E_\varepsilon := \{x\ ;\ dist(x,E) \leq \varepsilon\}$, alors on a

$$h(A,B) = \min\{\varepsilon \geq 0\ ;\ A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\},$$

3. $(\mathcal{A}, h)$ est complet.

Démonstration. 1. Soit $x \in X$ et choisissons $b \in B$ tel que $d(x,B) = d(x,b)$ et ensuite $a \in A$ tel que $d(a,b) = d(b,A)$. On voit que

$$d(x,A) - d(x,B) = d(a,A) - d(x,b) \leq d(x,a) - d(x,b)$$

$$\leq d(a,b) \leq \sup_{y\in B} d_A(y) =: \rho(B,A).$$

On a de même

$$d(x,B) - d(x,A) \leq \rho(A,B),$$

d'où en posant

$$M := \max(\rho(A,B), \rho(B,A)), \tag{12}$$

($M < \infty$ car A et B sont compacts),

$$||d_A - d_B|| = M. \tag{13}$$

En effet, les majorations précédentes entraînent $||d_A - d_B|| \leq M$. D'autre part, $||d_A - d_B|| \geq \sup_{a \in A} |d_A(a) - d_B(a)| = \rho(A, B)$ et de même, $||d_A - d_B|| \geq \rho(B, A)$. h est donc bien définie et c'est une métrique sur $\mathcal{A}$ car

$$h(A, C) = ||d_A - d_C|| \leq ||d_A - d_B|| + ||d_B - d_C|| \leq h(A, B) + h(B, C).$$

Supposons enfin $h(A, B) = 0$, alors $d_A = d_B$ et donc $A = B$ car $A = d_A^{-1}(0)$ et $B = d_B^{-1}(0)$.

2. Désignons par I l'ensemble $\{\varepsilon \geq 0 \; ; \; A \subset B_\varepsilon, \; B \subset A_\varepsilon\}$. Par définition, on a $A \subset B_M$ et $B \subset A_M$, où M est comme dans (12), donc $M \in I$ et $\inf I \leq M$. Réciproquement, si $\varepsilon \in I$, tout $a \in A$ vérifie $d_B(a) \leq \varepsilon$, d'où $\rho(B, A) \leq \varepsilon$ et de même, $\rho(A, B) \leq \varepsilon$, autrement dit, $M \leq \varepsilon$ et par suite, $M \leq \inf I$, il en résulte via (13) que $h(A, B) = M = \inf I = \min I$.

3. Soit (A_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{A}$. On procède par étapes :
   (a) $d_{A_n} - d_{A_1}$ est de Cauchy dans Y.
   En effet, $||(d_{A_p} - d_{A_1}) - (d_{A_q} - d_{A_1})|| = h(A_p, A_q)$.
   (b) Il existe une application $\varphi : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{n\to\infty} ||d_{A_n} - \varphi|| = 0$.
   En effet, (a) et la complétude de Y entraînent l'existence de $\psi \in Y$ telle que $||d_{A_n} - d_{A_1} - \psi|| \to 0$ et $\varphi = d_{A_1} + \psi$ convient.
   Reste à voir que $\varphi = d_A$ où $A \in \mathcal{A}$.
   (c) $K = \overline{\bigcup_n A_n} \in \mathcal{A}$. Soit en effet $\varepsilon > 0$, n_0 tel que $h(A_n, A_{n_0}) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, R un ε-réseau (fini) du compact $\bigcup_{j=1}^{n_0} A_j = B$.
   (ie $R = \{r_1, \ldots, r_n\} \subset X \; ; \; \forall x \in X, \; \exists j \; ; \; d(x, r_j) \leq \varepsilon$). Par construction, $B \subset R_\varepsilon$ et $K \subset B_\varepsilon$ d'où $K \subset R_{2\varepsilon}$, donc R est un 2ε-réseau de K, donc K est précompact. De plus, comme K est un fermé de X complet, il est complet, donc compact et $K \in \mathcal{A}$.
   (d) Posons $A := \varphi^{-1}(0)$, alors $A \in \mathcal{A}$ et $\varphi \geq d_A$.
   Soient en effet $x \in X$ et, pour chaque n, $x_n \in A_n$ tel que $d_{A_n}(x) = d(x, x_n)$, (x_n) est une suite de points de compact K, donc modulo extraction, on peut supposer que (x_n) tend vers $l \in K$. La passage

à le limite dans légalité précédente donne $\varphi(x) = d(x, l)$, et celui dans l'égalité $d_{A_n}(x_n) = 0$ donne $\varphi(l) = 0$, compte-tenu de la convergence uniforme de d_{A_n} vers φ. Autrement dit, $l \in A$ et A est un fermé non vide, de plus $\varphi(x) = d(x, l) \geq d_A(x)$. Enfin, l'inégalité $d_{A_n} \geq d_K$ donne à la limite $\varphi \geq d_K$, cela implique $A \subset K$, en effet, si $x \in A$, $\varphi(x) = 0$ de sorte que $d_K(x) = 0$ et $x \in K$. A est un fermé non vide de K compact, donc $A \in \mathcal{A}$.

(e) $\varphi = d_A$ et $h(A_n, A) \to 0$.
Soient en effet $x \in X$ et $a \in A$ tels que $d(a, x) = d_A(x)$. Passons à la limite dans l'inégalité $|d_{A_n}(x) - d_{A_n}(a)| \leq d(x, a)$ pour obtenir $\varphi(x) \leq d_A(x)$, d'où $\varphi = d_A$ via (d). La conclusion est maintenant facile : $h(A_n, A) = ||d_{A_n} - d_A|| = ||d_{A_n} - \varphi|| \to 0$, d'après (b).

□

<u>Théorème</u> 9. *Soient $f_1, \ldots, f_p : X \to X$ des λ-contractions, avec $0 \leq \lambda < 1$. On pose*

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & & A & \mapsto & \bigcup_{j=1}^{p} f_j(A) \end{array}$$

Alors

1. $$\exists! K \in \mathcal{A} \ ; \ T(K) = K,$$

2. *Pour tout $L \in \mathcal{A}$, la suite (K_n) définie par*

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0 = L \\ K_{n+1} = T(K_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

converge vers K pour la distance de Hausdorff. Plus précisément :

$$h(K_n, K) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} h(K_1, K_0).$$

Démonstration. Comme $(\mathcal{A}, h)$ est complet, il suffit de montrer que T est λ-contractante d'après le théorème de Picard (que l'on rappellera en fin de section). On a

$$A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ h\left(\bigcup_{j=1}^{p} A_j, \bigcup_{j=1}^{p} B_j\right) \leq \max_{1 \leq j \leq p} h(A_j, B_j) \quad (14)$$

En effet, posons $\varepsilon := \max_{1\leq j\leq p} h(A_j, B_j),\ A := \bigcup_{j=1}^p A_j,\ B := \bigcup_{j=1}^p B_j$. On a, par définition de ε,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{p} (B_j)_\varepsilon = \left(\bigcup_{j=1}^{p} B_j\right)_\varepsilon = B_\varepsilon,$$

de même, on a

$$B \subset A_\varepsilon,$$

d'où $h(A, B) \leq \varepsilon$.

$$h(f(A), f(B)) \leq \lambda h(A, B) \text{ pour } f : X \to X \text{ une } \lambda-\text{contraction} \tag{15}$$

En effet, posons $\varepsilon := h(A, B),\ A' := f(A),\ B' := f(B)$, si $a' = f(a) \in A'$, soit $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq \varepsilon$. Alors on a

$$d(a', b') \leq d(a', f(b)) = d(f(a), f(b)) \leq \lambda d(a, b) \leq \lambda\varepsilon,$$

d'où $A' \subset B'_{\lambda\varepsilon}$, de même, $B' \subset A'_{\lambda\varepsilon}$, d'où l'inégalité demandée. On combine (14) et (15) :

$$\begin{aligned} h(T(A), T(B)) = h\left(\bigcup_{j=1}^{p} f_j(A), \bigcup_{j=1}^{p} f_j(B)\right) &\leq \max_{1\leq j\leq p} h(f(j(A), f_j(B)) \\ &\leq \max_{1\leq j\leq p} \lambda h(A, B) = \lambda h(A, B). \end{aligned}$$

□

<u>Théorème</u> 10. *(Théorème de Picard)*
Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une k-contraction. Alors

1. *f possède un unique point fixe $a \in X$.*
2. *Pour tout $y \in X$ la suite (x_n) définie par*

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers a et on a

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Démonstration. Si f admet deux points fixes $u, v \in X$, on a

$$d(u,v) = d(f(u), f(v)) \leq k(d(u,v) \;\Rightarrow\; (1-k)d(u,v) = 0.$$

Or, $1 - k > 0$ donc $d(u,v) = 0$ et $u = v$, d'où l'unicité.
On a, par récurrence, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. La série $\sum k^n$ converge, donc (x_n) est de Cauchy dans X qui est complet. En effet, on a alors, pour $q > p$:

$$d(x_q, x_p) \leq \sum_{j=p}^{q-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=p}^{q-1} k^j d(x_1, x_0) \leq \sum_{j=p}^{\infty} k^j d(x_1, x_0) = \frac{k^p d(x_1, x_0)}{1-k}.$$

Elle est donc convergente vers un certain $a \in X$. f étant continue, le passage à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$ donne donc $f(a) = a$. De plus,

$$d(x_n, x_p) \leq \sum_{j=n}^{p-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=n}^{\infty} k^j d(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0),$$

d'où le résultat en faisant tendre p vers ∞. □

C Théorèmes de Tychonov

Définition 11. (Rappel)
Soit$(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, $X := \prod_{i\in I} X_i$ leur produit cartésien et, pour $i \in I$, la projection canonique $p_i : X \twoheadrightarrow X_i$. On appelle topologie produit sur X la topologie initiale $\mathcal{T}$ associée aux $(p_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire la topologie la moins fine sur X rendant les p_i continues. Elle est de base

$$\Sigma := \left\{ \bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(\omega_i),\ J \subset I \text{ finie},\ \omega_i \in \mathcal{T}_i \right\} = \left\{ \prod_{i\in J} p_i^{-1}(\omega_i) \times \prod_{i\in I\setminus J} X_i \right\}.$$

Remarque 11. Notons que le produit d'espace séparés est séparé.
En effet, reprenons les notations de la définition 11, et supposons que tout $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est séparé. Soient donc $x, y \in X$ distincts. On écrit $x = (x_i)_{i\in I}$ et $y = (y_i)_{i\in I}$ avec $x_i, y_i \in X_i$. Comme $x \neq y$, il existe $k \in I$ tel que $x_k \neq y_k$. Comme X_k est séparé, il existe $\omega_x, \omega_y \in \mathcal{T}_k$ tels que $x \in \omega_x,\ y \in \omega_y$ et $\omega_x \cap \omega_y = \emptyset$. Posons alors

$$U := p_k^{-1}(\omega_x) = \omega_x \times \prod_{i\neq k} X_i \text{ et } V := p_k^{-1}(\omega_y) = \omega_y \times \prod_{i\neq k} X_i.$$

Par définition de la topologie produit, $U, V \in \mathcal{T}$ et on a

$$x \in U,\ y \in V \text{ et } U \cap V = \emptyset,$$

donc $(X, \mathcal{T})$ est séparé.

Théorème 11. *Si X et Y sont deux espaces compacts, alors $X \times Y$ est compact.*

Démonstration. Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Pour tout $z = (x, y) \in X \times Y$, il existe $i_z \in I$; $x \in \omega_{i_z}$ et donc il existe des voisinages ouverts V_z, W_z de x et y tels que $V_z \times W_z \subset \omega_{i_z}$. Fixons d'abord $y \in Y$ et soit $A := X \times \{y\}$. Les $(V_z)_{z\in A}$ recouvrent X, donc il existe une partie finie $J(y)$ de A telle que

$$X = \bigcup_{z\in J(y)} V_z. \tag{16}$$

Posons $B_y := \bigcap_{z\in J(y)} W_z$. B_y est un ouvert contenant y. Faisons varier y, les $(B_y)_{y\in Y}$ recouvrent Y, donc il existe une partie finie K de Y telle que

$$Y = \bigcup_{y\in K} B_y. \tag{17}$$

Soit $J := \bigcup_{y\in K} J(y)$. (16) et (17) montrent que

$$X \times Y = \bigcup_{j\in J} (V_z \times W_z). \tag{18}$$

Soit en effet $c = (a, b) \in X \times Y$. Il existe $y \in K$ tel que $b \in B_y$, puis il existe $z \in J(y)$ tel que $a \in V_z$, d'où $z \in J$ et $c \in V_z \times W_z$, mais si (18) a lieu, a fortiori,

$$X \times Y = \bigcup_{z\in J} \omega_{i_z}.$$

$\square$

<u>Corollaire</u> 3. *Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{1\leq i\leq n}$ sont des espaces topologiques, et si $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est muni de la topologie produit, alors X est compact si et seulement si X_i est compact pour tout $1 \leq i \leq n$.*

Démonstration. Si X_1, X_2 sont compacts, alors le Théorème précédent implique que $X_1 \times X_2$ est compact. Réciproquement, si $X_1 \times X_2$ est compact, alors $X_i = p_i(X_1 \times X_2)$ est compact pour $i = 1, 2$ comme image continue d'un compact. Un récurrence donne alors le résultat. $\square$

<u>Théorème</u> 12. *(Tychonov dénombrable)*
Soient $(X_n, d_n)_{n\geq 1}$ une suite d'espaces métriques compacts et $(X, \mathcal{T})$ leur produit topologique. Alors $(X, \mathcal{T})$ est métrisable et compact.

Démonstration. Quitte à remplacer d_n par la distance équivalente $\frac{d_n}{1+d_n}$, on peut supposer $d_n \leq 1$. Posons

$$\forall x = (x_n), y = (y_n) \in X, \ d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n). \tag{19}$$

On vérifie aisément que

$$d \text{ définit le topologie } \mathcal{T}, \tag{20}$$

$$(X, d) \text{ est complet.} \tag{21}$$

Soit en effet $i : (X, \mathcal{T}) \to (X, d)$ l'identité.
i est continue. Soient en effet $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$ et $(V_1, \ldots, V_N) \in \mathcal{V}(x_{0,1}) \times \cdots \times \mathcal{V}(x_{0,N})$ tels que

$$\forall 1 \leq n \leq N, \ x_n \in V_n \ \Rightarrow \ d_n(x_n, x_{0,n}) \leq \varepsilon.$$

$V := \bigcap_{k=1}^{N} p_k^{-1}(V_k)$ est un voisinage de x_0 ; si $x \in V$, (19) et les inégalités précédentes montrent que

$$d(x, x_0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} d_n(x_n, x_{0,n}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

i^{-1} est continue. Soient en effet $a \in X$ et ω un ouvert contenant a, $J \subset \mathbb{N}^*$ finie et $r > 0$ tels que $x \in \omega$ dès que $d_j(x_j, a_j) \leq r$, $\forall j \in J$. Posons $N := \max J$ et prenons x tel que $d(a, x) \leq 2^{-N} r$, alors $2^{-j} d_j(x_j, a_j) \leq 2^{-N} r$ si $j \in J$, d'où $d_j(x_j, a_j) \leq r$ et $x \in \omega$. i est donc un homéomorphisme, ce qui prouve (20). (21) est vraie sous l'hypothèse plus générale que tout (X_n, d_n) est complet et s'établit coordonnée par coordonnée. Montrons que

$$(X, d) \text{ est précompact.} \tag{22}$$

C'est vrai sous l'hypothèse plus générale que chaque (X_n, d_n) est précompact. Soient en effet $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$, $R_1, \ldots, R_n$ des ε-réseaux de $X_1, \ldots, X_N$ et $R := \prod_{k=1}^{N} R_k \times \prod_{n=N+1}^{\infty} \{a_n\}$, où $a_n \in X_n$ est fixé. $|R| = \prod_{k=1}^{N} |R_k| < \infty$ et R est un 2ε-réseau de (X, d). En effet, soit $x = (x_n) \in X$, $r_n \in R_n$ tels que $d_n(r_n, x_n) \leq \varepsilon$, $\forall 1 \leq n \leq N$, $r := (r_1, \ldots, r_N, a_{N+1}, \ldots) \in R$. On a

$$d(x, r) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} d_n(r_n, x_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} d_n(r_n, x_n) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq 2\varepsilon.$$

(X, d) est donc précompact et complet : il est compact, d'où le résultat. $\square$

On fixe à présent une famille d'espaces topologiques $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ non vides et $X := \prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit. Nous allons démontrer le théorème de Tychonov.

Définition 12.
1. On dit qu'une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ a (P) (propriété de l'intersection finie) si toute intersection finie de parties de $\mathcal{A}$ est non vide.
2. De plus, une famille $\mathcal{A}$ est dite maximal si elle a (P) et si toute famille $\mathcal{B}$ ayant (P) et contenant $\mathcal{A}$ est égale à $\mathcal{A}$.

Lemme 8. *Soient $\mathcal{A}$ une famille maximale et $B \subset X$ tel que*

$$B \cap A = \emptyset, \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Alors

1. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.*
2. *$B \in \mathcal{A}$.*

Démonstration.
1. S $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{A}$ et $A := A_1 \cap \cdots \cap A_p$. Soit $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cup \{A\}$, $\mathcal{B}$ a (P) et $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, donc $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ et donc $A \in \mathcal{A}$.
2. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{B\}$, $\mathcal{B}$ a (P) par ce qui précède et on conclut de même que $B \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est maximale.

□

<u>Théorème</u> 13. *(Tychonov)*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *X_i est compact pour tout $i \in I$,*
2. *X est compact.*

Démonstration. 2. $\Rightarrow$ 1. Si X est compact, $X_i = p_i(X)$ est compact car p_i est continue.
1. $\Rightarrow$ 2. Montrons que X est compact. Soit $\mathcal{A}$ une famille de fermés de X ayant (P), il s'agit de montrer que

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset. \tag{23}$$

En effet, si $(\omega_j)_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de X, alors $\mathcal{A} := (\omega_j^c)_{j \in J}$ est une famille de fermés de X telle que $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$, donc $\mathcal{A}$ n'a pas (P) et il existe une partie finie $J \subset K$ telle que $\bigcap_{j \in K} \omega_j^c = \emptyset$, autrement dit $X = \bigcup_{j \in K} \omega_j$ et X est compact.
Or, l'ensemble des familles ayant (P), ordonné par l'inclusion, est clairement inductif, donc on peut choisir une famille maximale $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}$ d'après le lemme de Zorn. Pour tout $i \in I$, la famille $(\overline{p_i(B)})_{B \in \mathcal{B}}$ a (P) dans X_i (soient $B_1, \ldots, B_p \in \mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap \cdots \cap B_p$, alors $p_i(x) \in \overline{p_i(B_1)} \cap \cdots \cap \overline{p_i(B_p)}$), X_i étant compact et les $\overline{p_i(B)}$ fermés, ils ont une intersection non vide :

$$\exists x_i \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{p_i(B)}. \tag{24}$$

Soient alors $x = (x_i)_{i \in I}$ et ω un ouvert élémentaire ($\omega \in \Sigma$) contenant x : $\omega = \prod \omega_i$, avec ω_i ouvert et $\omega_i = X_i$ pour $i \notin J$, $J \subset I$ finie. Fixons $i \in J$, $B \in \mathcal{B}$. (24) montre que $\omega_i \cap p_i(B) \neq \emptyset$, soit $p_i^{-1}(\omega_i) \cap B \neq \emptyset$. Le Lemme 8 entraîne à la fois $p_i^{-1}(\omega_i) \in \mathcal{B}$ et $\bigcap_{i \in J} p_i^{-1}(\omega_i) \in \mathcal{B}$, ie $\omega \in \mathcal{B}$. En particulier, $A \in \mathcal{A}$ entraîne $\omega \cap A \neq \emptyset$ car $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et puisque $\mathcal{B}$ a (P). ω étant arbitraire, cela montre que $x \in \overline{A}$, A étant fermé, $x \in A$. Finalement :

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset,$$

ce qui achève la démonstration. □

Références

[1] H. Queffélec, *Topologie.* Dunod, 1998.

[2] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, 1969.

[3] R. Engelking, "Dimension theory," 1977.

[4] G. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry.* Springer, 2000.

[5] R. Carles, "Dimension de hausdorff."