Topologie des Distributions et des Espaces de Schwartz

Arthur Garnier

2 juin 2016

Table des matières

Introduction

Le but ici est de développer quelques outils topologiques abstraits concernant les espaces vectoriels topologiques et en particulier les espaces localement convexes et les espaces de Fréchet, pour ensuite pouvoir construire une topologie sur l'espace des fonctions lisses à support compact donnant lieu aux notions de convergence et la définition des distributions que le lecteur connaît déjà et pour laquelle des exposé détaillés se trouvent dans [1], [3] ou encore [6]. Nous exploitons ensuite les résultat des deux premières parties pour décrire rapidement la topologie des espaces de Schwartz intervenant dans la théorie de la transformée de Fourier.

À cet effet, nous supposons le lecteur familier avec la topologie fondamentale, notamment sur les notions de complétude, de compacité, ainsi que sur les espaces vectoriels normés, l'extraction diagonale de Cantor, le théorème d'Ascoli, ainsi que les topologies faibles et préfaibles...

Notre exposé provient des chapitres 1, 6 et 7 de [5] et des chapitres 3, sections 1-3 et 7, sections 3-4 de [6].

Première partie

Espaces vectoriels topologiques et espaces de Fréchet

1.1 Topologie des espaces vectoriels

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou $\mathbb{C}$ des nombres complexes, muni de sa topologie euclidienne usuelle.

Définition 1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel X muni d'une topologie τ est un espace vectoriel topologique si

1. Tout singleton est fermé dans X,
2. L'addition et la multiplication par un scalaire sont continues.

Remarque 1. Dans la littérature, on impose seulement la seconde condition à un espace vectoriel pour qu'il soit dit "topologique". Cependant, dans la plupart des cas, la première condition est également vérifiée et alors ici, tout espace vectoriel topologique est séparé (voir [5], Theorem 1.12). Notons que tout espace vectoriel normé est topologique.

On fixe alors (X, τ) un espace vectoriel topologique. On observe que $E \subseteq X$ est ouvert si et seulement si $a + E$ est ouvert, pour tout $a \in X$. Ainsi, τ est entièrement déterminée par une base locale ; c'est-à-dire une base de voisinages de 0, i.e. un ensemble $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}(0),\ \exists U \in \mathcal{B}\ ;\ U \subseteq V,$$

où $\mathcal{V}(0)$ désigne l'ensemble des voisinages de 0. Alors, on a

$$\forall U \subseteq X,\ U \in \tau\ \Leftrightarrow\ \exists a_i \in X,\ \exists V_i \in \mathcal{B}\ ;\ U = \bigcup_{i \in I}(a_i + V_i).$$

Définition 2. Soient (X, τ) un espace vectoriel topologique, $B \subseteq X$ et $\mathcal{B}$ une base locale de X.

1. B est balancé si
$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \leq 1\ \Rightarrow\ \alpha B \subseteq B.$$
2. B est absorbant s'il est convexe et si
$$\forall x \in X,\ \exists t > 0\ ;\ x \in tB.$$

On définit alors la fonction de Minkowsky :

$$\forall x \in X,\ \mu_B(x) := \inf\{t > 0\ ;\ t^{-1}x \in B\}.$$

3. B est borné si
$$\forall V \in \mathcal{V}(0),\ \exists s > 0\ ;\ \forall t > s,\ B \subseteq tV.$$
4. Si (x_n) est une suite dans X, on dit qu'elle est de τ-Cauchy si
$$\forall V \in \mathcal{V}(0),\ \exists n_0 \geq 0\ ;\ \forall n, m \geq n_0,\ x_n - x_m \in V.$$
Il est clair que si τ est métrisable, de métrique compatible d, alors une suite est de d-Cauchy si et seulement si elle est de τ-Cauchy.
5. X est localement convexe s'il admet une base locale constituée d'ouverts convexes.
6. X est localement compact (resp. borné) si 0 possède un voisinage relativement compact (resp. borné).
7. X est un F-espace si τ est invariablement complètement métrisable, i.e. s'il existe une métrique compatible d complète et invariante par translation ($d(x+z, y+z) = d(x, y),\ \forall x, y, z \in X$).
8. X est un espace de Fréchet si c'est un F-espace localement convexe.

Proposition 1. *Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel X (i.e. une application sous-additive et positivement homogène $X \to \mathbb{R}$).*

a) $p(0) = 0$,
b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y),\ \forall x, y \in X$,
c) $p(x) \geq 0,\ \forall x \in X$,
d) $\{x \in X\ ;\ p(x) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* X,
e) $B := \{x \in X\ ;\ p(x) < 1\}$ *est convexe, balancé, absorbant et* $p = \mu_B$.

Démonstration. On obtient *a*) avec $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ et $\alpha = 0$.

On a
$$p(x) + p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)\ \Rightarrow\ p(x) - p(y) \leq p(x - y),$$
et en échangeant les rôles de x et y, on a $p(y) - p(x) \leq p(y - x) = p(x - y)$, d'où *b*).

Avec $y = 0$, *c*) se déduit de *b*).

Si $p(x) = p(y) = 0$, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *c*) montre que
$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0.$$

B est clairement balancé. Si $x, y \in B$ et $0 < t < 1$, on a
$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 1,$$
ce qui montre que B est convexe. Si $x \in X$ et $s > p(x)$, alors $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$, donc B est absorbant et $\mu_B(x) \leq s$, d'où $\mu_B \leq p$. Si $0 < t \leq p(x)$, on a $p(t^{-1}x) \geq 1$, donc $t^{-1}x \notin B$ et donc $p(x) \leq \mu_B(x)$. □

Définition 3. Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes sur X est séparante si on a
$$\forall x \neq 0,\ \exists p \in \mathcal{P}\ ;\ p(x) \neq 0.$$

__Théorème__ **1.** *Soient X un espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille séparante de semi-normes sur X. Pour $p \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$V(p,n) := \left\{ x \in X \ ; \ p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Soit $\mathcal{B}$ la collection des intersections finies d'ensembles $V(p,n)$. Alors, $\mathcal{B}$ est une base locale convexe balancée d'une topologie τ sur X telle que (X,τ) soit un espace vectoriel topologique localement convexe vérifiant

1. *Toute $p \in \mathcal{P}$ est continue,*
2. *$E \subseteq X$ est borné si et seulement si $p(E) \subseteq \mathbb{K}$ est borné pour tout $p \in \mathcal{P}$.*

__Remarque__ 2. Autrement dit, $\{V(p,n),\ p \in \mathcal{P},\ n \geq 1\}$ est une __prébase__ locale convexe balancée.

Démonstration.

- Une partie $A \subseteq X$ est __ouvert__ si A est union de translatés d'éléments de $\mathcal{B}$. Ceci forme une topologie τ invariante par translation sur X. De plus, tout élément de $\mathcal{B}$ est convexe, balancé et $\mathcal{B}$ est une base locale de τ.
- Montrons que (X,τ) est un espace vectoriel topologique.
  - $*$ Si $x \in X$, $x \neq 0$ et $p(x) > 0$ pour un $p \in \mathcal{P}$. $x \notin V(p,n)$ si et seulement si $np(x) \geq 1$, donc 0 n'est pas dans $x - V(p,n) \in \mathcal{V}(x)$, donc $x \notin \{0\}$. Ainsi, $\{0\}$ est fermé et τ étant invariante par translation, tout singleton de X est fermé.
  - $*$ Soit $U \in \mathcal{V}(0)$. Alors il existe $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$ et $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}^*$ tels que

    $$\bigcap_{i=1}^{m} V(p_i, n_i) \subseteq U. \tag{1}$$

    Soit

    $$V := \bigcap_{i=1}^{m} V(p_i, 2n_i). \tag{2}$$

    Comme p est sous-additive pour tout $p \in \mathcal{P}$, $V + V \subseteq U$, donc l'addition est continue.
  - $*$ Soient $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et U, V définis comme ci-dessus. $x \in sV$ pour un certain $s > 0$. Soit $t := \frac{s}{1+|\alpha|s}$. Si $y \in x + tV$ et $|\beta - \alpha| < \frac{1}{s}$, alors

    $$\beta y - \alpha x = \beta(y-x) + (\beta - \alpha)x \in |\beta| tV + |\beta - \alpha| sV \subseteq V + V \subseteq U,$$

    puisque $|\beta| t \leq 1$ et V est balancé. On en déduit que la multiplication par un scalaire est continue.
- Ainsi, X est un espace localement convexe. Par définition de $V(p,n)$, chaque $p \in \mathcal{P}$ est continue en 0, donc continue d'après la Proposition 1, *b*).
- Si $E \subseteq X$ est borné, sois $p \in \mathcal{P}$. Comme $V(p,1) \in \mathcal{V}(0)$, $E \subseteq kV(p,1)$ pour un $k < \infty$. Alors, $p(x) < k$ pour tout $x \in E$. Donc, tout p est borné sur E.
  Réciproquement, si E borne tout $p \in \mathcal{P}$, soit $U \in \mathcal{V}(0)$, (1) est vérifiée. Il existe $M_i < \infty$ tels que $p_i < M_i$ sur E, pour tout $1 \leq i \leq m$. Si $n > M_i n_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $E \subseteq nU$ et E est donc borné.

$\square$

Remarque 3. Soit $\mathcal{P} = \{p_i,\ i \in \mathbb{N}^*\}$ une famille dénombrable de semi-normes. Le Théorème 1 montre que $\mathcal{P}$ induit une topologie τ sur X, à base locale dénombrable. Alors, τ est métrisable. En effet, une métrique invariante par translation et compatible peut être définie par

$$d(x, y) := \sup_{n \geq 1} \frac{c_n p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)},$$

avec (x_n) est une suite de réels positifs telle que $0 = \lim_{n\to\infty} c_n$. Les boules

$$B_r := \{x \in X\ ;\ d(0, x) < r\},\ r > 0$$

forment une base locale convexe balancée de τ. En effet, fixons $r > 0$. Pour presque tout $n \geq 1$, on a $c_n \leq r$ et donc $\frac{c_n p_n}{1+p_n} < r$. Ainsi, B_r est l'intersection d'un nombre fini de parties de la forme

$$\left\{x \in X\ ;\ p_n(x) < \frac{r}{c_n - r}\right\},$$

en fait ceux pour lesquels $c_n > r$. Le Théorème 1 montre que chaque p_n est continue, donc ces parties sont ouvertes. Ainsi, B_r est ouverte et la Proposition 1 implique que B_r est convexe et balancée.

Ensuite, soit $W \in \mathcal{V}(0)$. Par définition de τ, on peut choisir un nombre fini d'ensembles

$$V(p_i, \delta_i) = \{x \in X\ ;\ p_i(x) < \delta_i < 1\},\ 1 \leq i \leq k$$

tels que

$$\bigcap_{i=1}^{k} V(p_i, \delta_i) \subseteq W.$$

Si $2r < \min_{1\leq i\leq k} c_i\delta_i$ et $x \in B_r$, alors

$$\frac{c_i p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r < \frac{c_i\delta_i}{2},\ \forall 1 \leq i \leq k,$$

d'où $p_i(x) < \delta_i$ et $B_r \subseteq W$.

Ceci prouve notre assertion et montre aussi que d est compatible avec τ.

1.2 Structure d'espace de Fréchet des fonctions lisses

Pour des fonctions numériques (complexes) définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$, un <u>multi-indice</u> est un n-uplet d'entiers naturels

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

et on considère l'<u>ordre</u> de α : $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, ainsi que l'opérateur différentiel

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

De plus, si $|\alpha| = 0$, on pose $\partial^\alpha f = f$.
Pour un ouvert $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C}\ ;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \partial^\alpha f \in \mathcal{C}(\Omega)\}.$$

Le <u>support</u> de $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est, par définition

$$\mathrm{supp}\,(f) := \overline{\{x \in \Omega \ ; \ f(x) \neq 0\}}.$$

Si $K \subseteq \Omega$ est un compact, on définit également

$$\mathcal{D}_K := \mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ ; \ \mathrm{supp}\, f \subseteq K\}.$$

<u>Théorème</u> 2. *Il existe sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ une topologie τ_0 faisant de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ un espace de Fréchet satisfaisant la propriété de Heine-Borel et tel que, pour tout compact K de Ω, $\mathcal{D}_K$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. On peut choisir $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite exhaustive de compacts pour Ω. Pour $n \geq 1$, on définit sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ les semi-normes

$$p_n(f) := \max_{\substack{|\alpha|\leq n \\ x\in K_n}} |\partial^\alpha f(x)| = \max_{|\alpha|\leq n} \|\partial^\alpha f\|_{\infty, K_n}.$$

Le Théorème 1 et la Remarque 3 montrent que ceci définit sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ une topologie τ_0 métrisable, localement convexe. De plus, pour $x \in \Omega$, la fonctionnelle $f \overset{e_x}{\mapsto} f(x)$ est continue pour τ_0. Or, pour $K \subseteq \Omega$ compact,

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \notin K} \ker(e_x)$$

est donc fermé dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Une base locale de τ_0 est donnée par

$$V_n := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ ; \ p_n(f) < \frac{1}{n} \right\}, \ n \geq 1.$$

Soit (f_i) une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Pour n fixé, $f_i - f_j \in V_n$, pour i, j assez grands. Alors, $|\partial^\alpha f_i - \partial^\alpha f_j| < \frac{1}{n}$ sur K_n, si $|\alpha| \leq n$. Ainsi, chaque $(\partial^\alpha f_i)_i$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers un $g_\alpha \in \mathcal{C}(\Omega)$. En particulier, $\lim_{i\to\infty} f_i = g_0$ et il est clair que $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors, $f_i \to g_0$ pout τ_0 dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On en déduit que $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), \tau_0)$ est un espace de Fréchet et il en est donc de même pour $\mathcal{D}_K$, pour tout compact $K \subseteq \Omega$.

Enfin, supposons que $E \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ soit fermé et borné. D'après le Théorème 1, comme E est borné, il existe $M_N > 0$ tel que $P_N(f) \leq M_n$, pour tout $f \in E$ et tout $N \geq 1$. Les inégalités

$$|\partial^\alpha f| \leq M_n,$$

valables sur K_N, pour $|\alpha| \leq N$ montrent que la famille $\{\partial^\beta f, \ f \in E\} =: A_\beta$ est équicontinue et simplement relativement compact sur K_{n-1}, si $|\beta| \leq N-1$. D'après le théorème d'Ascoli, on a

$$\forall N \geq 1, \ \forall |\beta| \leq N-1, \ A_\beta \subset\subset \mathcal{C}(K_{n-1}).$$

Soit donc (f_n) une suite de E. Pour $N = 1$, on a $\{f_n\} \subseteq A_0 \subset\subset \mathcal{C}(K_0)$, donc il existe $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi_1(n)})$ converge uniformément sur K_0. Ensuite, pour $N = 2$, $\{\partial^\beta f_{\varphi_1(n)}\} \subseteq A_\beta \subset\subset \mathcal{C}(K_1)$, pour tout $|\beta| \leq 1$, donc il existe $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

strictement croissante telle que $(\partial^\beta f_{\varphi_2 \circ \varphi_1(n)})$ converge uniformément sur K_1. Par récurrence, en posant

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1(n) \end{array}$$

l'extraction diagonale de Cantor assure que $(\partial^\beta f_{\varphi(n)})$ converge uniformément sur tout compact $K \subseteq \Omega$. Ainsi, $(f_{\varphi(n)})$ converge pour τ_0 donc E est séquentiellement compact, donc compact puisque $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est métrisable. $\square$

Remarque 4. D'après la version lisse du lemme d'Urysohn, on a $\dim \mathcal{D}_K = \infty$ si $\mathring{K} \neq \emptyset$, donc $\dim \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \infty$ et comme $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifie la propriété de Heine-Borel, le theorem 1.23 de [5] implique que $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ n'est pas localement borné, donc non normable.

Deuxième partie

Topologie des Distributions

2.1 L'espace des fonctions tests

Fixons $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\mathcal{D}(\Omega)$ la réunion des espaces de Fréchet $\mathcal{D}_K(\Omega)$ où K parcourt les compacts de Ω. Ainsi, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\{x \in \Omega \,;\, \varphi(x) \neq 0\}$ est relativement compact dans Ω. $\mathcal{D}(\Omega)$ est clairement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Introduisons les normes

$$\|\phi\|_N := \max_{\substack{|\alpha|\leq N \\ x\in\Omega}} |\partial^\alpha \phi(x)| = \max_{|\alpha|\leq N} \|\partial^\alpha \phi\|_\infty, \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \ N \geq 1. \tag{3}$$

Proposition 2. *Les restrictions de ces normes à tout $\mathcal{D}_K \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ induisent la même topologie sur $\mathcal{D}_K$ que les semi-normes p_n.*

Démonstration. Pour $K \subseteq \Omega$ compact, il existe $N_0 \geq 1$ tel que $K \subseteq K_N$ pour tout $N \geq N_0$. Pour de tels N, on a

$$\|\phi\|_N = p_n(\phi)$$

si $\phi \in \mathcal{D}_K$. Puisqu'on a

$$\|\phi\|_N \leq \|\phi\|_{n+1} \quad \text{et} \quad p_n(\phi) \leq p_{n+1}(\phi),$$

les topologies induites par chaque suite de (semi-)normes sont identiques si N démarre à N_0 plutôt qu'à 1. Les topologies coïncident alors, et une base locale est formée par les

$$V_N = \left\{\phi \in \mathcal{D}_K \,;\, \|\phi\|_N < \frac{1}{N}\right\}, \ N \geq 1.$$

□

Remarque 5. Les normes (3) permettent de définir sur $\mathcal{D}(\Omega)$ une topologie localement convexe et métrisable, mais non complète. En effet, si $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp} \phi \subseteq [0, 1]$, $\phi > 0$ au moins sur un ouvert non vide de $[0, 1]$ et si l'on pose

$$\psi_m(x) := \phi(x-1) + \frac{1}{2}\phi(x-2) + \cdots + \frac{1}{m}\phi(x-m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\phi(x-i),$$

alors, (ψ_m) est de Cauchy pour cette topologie. En effet, si $n > m > \lfloor M\|\phi\|_M - 1\rfloor$, alors

$$\|\psi_n - \psi_m\|_M = \max_{k\leq M} \left\| \frac{1}{m+1}\phi^{(k)}(x-m-1) + \cdots + \frac{1}{n}\phi^{(k)}(x-n) \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{m+1}\|\phi\|_M < \frac{1}{M} \ \Rightarrow \ \psi_n - \psi_m \in V_M.$$

Cependant, $\lim_{m\to\infty} \psi_m$ n'est pas à support compact, donc $\lim \psi_m \notin \mathcal{D}(\Omega)$. Il nous faut donc définir une autre topologie, complète, localement convexe τ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (elle ne sera pas métrisable, mais ce n'est qu'un inconvénient mineur, comme nous allons le voir).

Définition 4. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour un compact $K \subseteq \Omega$, τ_K désigne la topologie d'espace de Fréchet de $\mathcal{D}_K$ décrite plus haut.
2. On note β l'ensemble des parties convexes balancées $W \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$.
3. On note aussi τ l'ensemble des unions d'ensembles de la forme $\phi + W$ pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $W \in \beta$.

Remarque 6. Si (x_m) est une suite dans Ω, sans valeur d'adhérence et si (c_m) est une suite de réels strictement positifs, alors l'ensemble

$$W := \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \ |\phi(x_m)| < c_m, \ \forall m \geq 1\}$$

est dans β. En effet, W est clairement convexe et balancé. Si $\{x_m\} \cap K = \emptyset$, alors $\mathcal{D}_K \cap W = \mathcal{D}_K \in \tau_K$. Sinon, $\{x_m\} \cap K$ ne peut être infini car, K étant compact, $\{x_m\} \cap K$ aurait des points d'accumulation et (x_m) aurait donc une valeur d'adhérence. Donc, $\{x_m\} \cap K$ est fini, quitte à réordonner, on peut supposer que $\{x_m\} \cap K = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\}$. Alors, on a

$$\mathcal{D}_K \cap W = \{\phi \in \mathcal{D}_K \ ; \ |\phi(x_i)| < c_i, \ \forall 1 \leq i \leq n_0\} = \mathcal{D}_K \cap \bigcap_{i=1}^{n_0} e_{x_i}^{-1}(]-c_i, c_i[) \in \tau_K.$$

Ainsi, $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ pour tout compact K et donc $W \in \beta$. W est alors un τ-voisinage de 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est ce fait (voir le théorème 3) qui force une partie τ-bornée à être concentrée sur un compact $K \subseteq \Omega$ et les τ-suites de Cauchy sont donc convergentes.

Théorème 3. *a) τ est une topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, dont β est une base locale.*
b) τ fait de $\mathcal{D}(\Omega)$ un espace vectoriel topologique localement convexe.

Démonstration. Supposons que $V_1, V_2 \in \tau$ et $\phi \in V_1 \cap V_2$. Pour montrer a), il suffit de montrer que

$$\phi + W \subset V_1 \cap V_2 \tag{4}$$

pour un certain $W \in \beta$. La définition de τ montre qu'il existe $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $W_i \in \beta$ tels que

$$\phi \in \phi_i + W_i \subset V_i, \ \forall i = 1, 2.$$

Choisissons K tel que $\mathcal{D}_K$ contienne ϕ, ϕ_1 et ϕ_2. Puisque $\mathcal{D}_K \cap W_i$ est ouvert dans $\mathcal{D}_K$, on a

$$\phi - \phi_i \in (1 - \delta_i) W_i,$$

pour un certain $\delta_i > 0$. La convexité de W_i implique que

$$\phi - \phi_i + \delta_i W_i \subset (1 - \delta_i) W_i + \delta_i W_i = W_i$$

et donc

$$\phi + \delta_i W_i \subset \phi_i + W_i \subset V_i, \ i = 1, 2.$$

Ainsi, (4) est vérifiée avec $W := \delta_1 W_i \cap \delta_2 W_2$ et a) est prouvé.

Ensuite, supposons que $\phi_1 \neq \phi_2$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et posons

$$W := \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ ; \ \|\phi\|_0 < \|\phi_1 - \phi_2\|_0\}$$

avec $\|\phi\|_0 = \|\phi\|_{\infty,\Omega}$. Alors, $W \in \beta$ et $\phi_1 \notin \phi_2 + W$. Il s'ensuit que $\{\phi_1\}$ est fermé pour τ. L'addition est continue puisque la convexité de chaque $W \in \beta$ implique que

$$\left(\psi_1 + \frac{1}{2}W\right) + \left(\psi_2 + \frac{1}{2}W\right) = (\psi_1 + \psi_2) + W$$

pour tous $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour montrer que la multiplication par un scalaire est continue, soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors,

$$\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 = \alpha(\phi - \phi_0) + (\alpha - \alpha_0)\phi_0.$$

Si $W \in \beta$, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta\phi_0 \in \frac{1}{2}W$. Comme W est convexe et balancé, si $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ et $\phi - \phi_0 \in W$ avec $2c(|\alpha_0| + \delta) = 1$, alors

$$\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 = \alpha(\phi - \phi_0) + (\alpha - \alpha_0)\phi_0 \in \alpha cW + \frac{\alpha - \alpha_0}{2\delta}W \subset \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}W = W,$$

d'où le résultat. $\square$

Théorème 4. *a) Une partie convexe balancée $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est ouverte si et seulement $V \in \beta$.*

b) Sur tout $\mathcal{D}_K$, la topologie τ_K coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{D}(\Omega)$.

c) Si $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est borné, $E \subset \mathcal{D}_K$ pour un compact $K \subseteq \Omega$ et il existe $M_N > 0$ tels que

$$\forall \phi \in E,\ \|\phi\|_N \leq M_N,\ \forall N \geq 0.$$

d) $\mathcal{D}(\Omega)$ vérifie la propriété de Heine-Borel.

e) Si (ϕ_i) est de Cauchy dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $\{\phi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ pour un K compact et on a

$$\lim_{i,j\to\infty} \|\phi_i - \phi_j\|_N = 0,\ \forall N \geq 0.$$

f) Si (ϕ_i) converge vers 0 pour τ, il existe $K \subseteq \Omega$ compact tel que $\operatorname{supp}\phi_i \subset K$ et $(\partial^\alpha\phi_i)$ converge vers 0, uniformément et pour tout α.

g) Dans $\mathcal{D}(\Omega)$, toute suite de Cauchy converge.

Démonstration. a) Supposons que $V \in \beta$. Si $\mathcal{D}_K \cap V = \emptyset$, il n'y a rien à montrer. Sinon, choisissons $\phi \in \mathcal{D}_K \cap V$. D'après le Théorème 3, il existe $W \in \beta$ tel que $\phi + W \subset V$. Ainsi,

$$\phi + (\mathcal{D}_K \cap W) \subset \mathcal{D}_K \cap V.$$

Puisque $\mathcal{D}_K \cap W$ est ouvert dans $\mathcal{D}_K$, on a montré que

$$\mathcal{D}_K \cap V \in \tau_K, \quad \text{si} \quad V \in \beta \quad \text{et} \quad K \subseteq \Omega. \tag{5}$$

a) est donc conséquence de (5) car $\beta \subset \tau$.

b) (5) montre déjà que $\tau_{|\mathcal{D}_K} \subset \tau_K$. Soit donc $E \in \tau_K$. Il nous suffi de montrer que $E = \mathcal{D}_K \cap V$ pour un certain $V \in \tau$. La définition de τ_K implique que pour chaque $\phi \in E$, il existe N et $\delta > 0$ tels que

$$\{\psi \in \mathcal{D}_K\ ;\ \|\psi - \phi\|_N < \delta\} \subset E.$$

Posons $W_\phi := \{\psi \in \mathcal{D}_K\ ;\ \|\psi\|_N < \delta\}$. Alors, $W_\phi \in \beta$ et

$$\mathcal{D}_K \cap (\phi + W_\phi) = \phi + (\mathcal{D}_K \cap W_\phi) \subset E.$$

Donc, si $V := \bigcup_{\phi\in E}(\phi + W_\phi)$, alors, $V \in \tau$ et $E = \mathcal{D}_K \cap V$.

c) Considérons $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ inclus dans aucun $\mathcal{D}_K$. Soit $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts pour Ω. Comme $E \nsubseteq \mathcal{D}_{K_1}$, on peut choisir $\phi_1 \in E \setminus \mathcal{D}_{K_1}$ et $x_1 \notin K_1$ tels que $\phi_1(x_1) \neq 0$. On peut supposer que $x_1 \in K_2$ car s'il n'y a pas de tels ϕ_1 et x_1, alors $E \subset \mathcal{D}_{K_2}$, ce qui est exclus. On voit alors que l'on peut choisir récursivement $\phi_m \in E$ et $x_m \in \Omega$, (x_m) étant sans valeur d'adhérence, tels que $\phi_m(x_m) \neq 0$, pour tout $m \geq 1$. Posons

$$W := \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \; ; \; |\phi(x_m)| < \frac{|\phi_m(x_m)|}{m}, \; \forall m \geq 1 \right\}.$$

Comme nous l'avons vu dans la Remarque 6, chaque compact K ne contient qu'un nombre fini des x_m, et donc

$$\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K.$$

Ainsi, $W \in \beta$. Puisque $\phi_m \notin mW$, aucun multiple de W ne contient E. Ceci montre que E n'est pas borné. Il s'ensuit que chaque partie bornée E de $\mathcal{D}(\Omega)$ est contenue dans un $\mathcal{D}_K$. Par *b*), E est alors une partie bornée de $\mathcal{D}_K$. Par conséquent, d'après le Théorème 1, on a

$$\sup_{\phi \in E} \|\phi\|_N < \infty, \; \forall N \geq 0.$$

Ceci montre *c*).

d) Ceci provient de *c*) et du fait que $\mathcal{D}_K$ vérifie la propriété de Heine-Borel.

e) Puisqu'une suite de Cauchy est bornée, *c*) implique que chaque suite de Cauchy de $\mathcal{D}(\Omega)$ est contenue dans un $\mathcal{D}_K$. Par *b*), une telle suite est aussi de Cauchy pour τ_K et ceci prouve *e*).

f) C'est une conséquence immédiate de *e*).

g) Ceci découle de *b*), *e*) et de la complétude de $\mathcal{D}_K$, cette dernière provenant du fait que $(\mathcal{D}_K, \tau_K)$ est un espace de Fréchet.

□

Remarque 7. Par *b*), les conditions nécessaires de *c*), *e*) et *f*) sont aussi suffisantes. Par exemple, si $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ et $\|\phi\|_N \leq M_N < \infty$ pour tout $\phi \in E$, E est borné dans $\mathcal{D}_K$ par le Théorème 1 et *b*) montre que E est alors borné dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

2.2 Dual topologique et distributions

Commençons par trois résultats techniques :

Lemme 1. *a) Si d est une métrique invariante sur un espace vectoriel X, alors*

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0), \; \forall n \geq 1, \; \forall x \in X.$$

b) Si (x_n) est une suite dans un espace vectoriel topologique métrisable M et si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, alors il existe une suite de scalaires (γ_n) tels que

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \gamma_n = +\infty \\ \lim_{n\to\infty} \gamma_n x_n = 0 \end{cases}$$

Démonstration. 1. Ceci découle de l'équation

$$d(nx, 0) \leq \sum_{k=1}^{n} d(kx, (k-1)x) = nd(x, 0).$$

2. Soit d une métrique comme en a), compatible avec la topologie de X. Comme $d(x_n, 0) \to 0$, il existe une suite croissante d'entiers positifs n_k telle que $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \geq n_k$. Posons $\gamma_n = 1$ si $n < n_1$ et $\gamma_n = k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$. Pour $n \geq n_k$, on a

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < \frac{1}{k}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n x_n = 0$, d'où le résultat.

□

Lemme 2. *Soit $E \subseteq X$ une partie d'un espace vectoriel topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) E est borné.

ii) Si (x_n) est une suite dans E et (α_n) est une suite de scalaire telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$.

Démonstration. Suposons E borné et soit V un voisinage balancé de 0 dans X. Alors $E \subset tV$ pour un t. Si $x_n \in E$ et (α_n) de limite nulle, il existe N tel que $|\alpha_n|t < 1$ pour tout $n > N$. Comme $t^{-1}E \subset V$ et V est balancé, $\alpha_n x_n \in V$ pour tout $n > N$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = 0$. En effet, si $U \in \mathcal{V}(0)$ et comme la multiplication par un scalaire est continue, il existe $\delta > 0$ et il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ tels que $\alpha V \subseteq U$ pour $|\alpha| < \delta$. Soit $W := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$. Alors, $W \in \mathcal{V}(0)$ est balancé et $W \subset U$. Donc, tout voisinage de 0 contient un voisinage balancé de 0.

Réciproquement, si E n'est pas borné, il existe un voisinage V de 0 et une suite (r_n) tendant vers l'infini telle qu'aucun $r_n V$ ne contienne E. Choisissons $x_n \in E$ tel que $x_n \notin r_n V$. Alors, aucun $r_n^{-1} x_n$ n'est dans V et $(r_n^{-1} x_n)$ ne converge donc pas vers 0. □

Proposition 3. *Soient X, Y deux espace vectoriels topologiques et $f : X \to Y$ une application linéaire. Parmis les quatre propriétés de f suivantes, les implications*

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c)$$

sont vérifiées. Si X est de plus métrisable, on a aussi

$$c) \Rightarrow d) \Rightarrow a).$$

i) f est continue,

ii) f est bornée,

iii) Si (x_n) tend vers 0, l'ensemble $\{f(x_n),\ n \geq 1\}$ est borné,

iv) Si (x_n) tend vers 0, alors $(f(x_n))$ tend vers 0.

Démonstration. • Supposons i) et soit $E \subseteq X$ borné et soit W un voisinage de 0 dans Y. Puisque f est continue (et $f(0) = 0$), il existe un voisinage V de 0 dans X tel que $f(v) \subset W$. Puisque E est borné, $E \subset tV$ pour t assez grand, de telle sorte que

$$f(E) \subset f(tV) = tf(V) \subset tW.$$

Ceci montre que $f(E)$ est borné dans Y. Ainsi, i) implique ii) et comme toute suite convergente est bornée, ii) implique iii).

- Supposons X métrisable, que f vérifie iii) et que (x_n) tend vers 0. Par le Lemme 1, il existe une suite de scalaires positifs (γ_n) tendant vers l'infini telle que $(\gamma_n x_n)$ tende vers 0. Ainsi, $(f(\gamma_n x_n))$ est bornée dans Y et le Lemme 2 implique que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\gamma_n x_n)}{\gamma_n} = 0.$$

Finalement, supposons i) faux. Il existe un voisinage W de 0 dans E tel que $f^{-1}(W)$ ne contienne aucun voisinage de 0 dans X. Si X possède une base locale dénombrable, il existe alors une suite (x_n) dans X telle que $\lim_n x_n = 0$, mais $f(x_n) \notin W$. Ainsi, iv) est faux.

□

<u>Théorème</u> 5. *Soient Y un espace localement convexe et $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linéaire. Les propriétés suivantes s'équivalent :*

i) Λ est continue,

ii) Λ est bornée,

iii) Si (ϕ_i) converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $(\Lambda\phi_i)$ converge vers 0 dans Y,

iv) La restriction de Λ à chaque $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est continue.

Démonstration. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ provient de la Proposition 3.

Supposons que Λ soit bornée et soit (ϕ_i) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers 0. D'après le Théorème 4, (ϕ_i) converge vers 0 dans un certain $\mathcal{D}_K$ et la restriction de Λ à ce $\mathcal{D}_K$ est bornée. La Proposition 3 appliquée à $\Lambda : \mathcal{D}_K \to Y$ montre que $(\Lambda\phi_i)$ tend vers 0 dans Y. Ainsi, $ii) \Rightarrow iii)$.

Supposons iii), soit (ϕ_i) une suite de $\mathcal{D}_K$ convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}_K$. D'après le ii) du Théorème 4, (ϕ_i) tend vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, iii) implique que $(\Lambda\phi_i)$ tend vers 0 dans Y et puisque $\mathcal{D}_K$ est métrisable, iv) s'ensuit.

Pour montrer que iv) implique i), soit U un voisinage convexe balancé de 0 dans Y et voit $V := \Lambda^{-1}(U)$. Alors, V est convexe et balancé. Par le a) du Théorème 4, V est ouvert dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si $\mathcal{D}_K \cap V$ est ouvert dans $\mathcal{D}_K$, et ce pour tout $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Ceci prouve que i) et iv) sont équivalents. En effet, tout voisinage de 0 contient un voisinage convexe de 0 et tout voisinage convexe de 0 contient un voisinage convexe balancé de 0. Ce premier point découle du fait que Y est localement convexe et pour montrer le second, soit U un voisinage convexe de 0 dans Y. Posons $A := \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$. Comme la multiplication par un scalaire est continue, il existe $\delta > 0$ et $V \in \mathcal{V}(0)$ tels que $\alpha V \subset U$ si $|\alpha| < \delta$. Soit $W := \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$. Comme W est balancé, $\alpha^{-1}W = W$ pout $|\alpha| = 1$, d'où $W \subset \alpha U$. Ainsi, $W \subset A$ donc $\mathring{A}$ est un voisinage de 0. Clairement, $\mathring{A} \subset U$, A est convexe comme intersection de convexes, donc

$\mathring{A}$ aussi. Il reste à montrer que $\mathring{A}$ est balancé et il suffit donc de montrer que A est balancé. Choisissons r, β tels que $0 \leq r \leq 1$ et $|\beta| = 1$. Alors, on a

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Puisque αU est un convexe contenant 0, on a $r\alpha U \subset \alpha U$. Ainsi, $r\beta A \subset A$, et ceci termine la preuve. $\square$

Corollaire 1. *Tout opérateur différentielle*

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$$

est continue.

Démonstration. Puisque $\|\partial^\alpha \phi\|_N \leq \|\phi\|_{N+|\alpha|}$ pour $N \geq 0$, ∂^α est continu sur chaque $\mathcal{D}_K$ et on conclut avec le Théorème 5. $\square$

Théorème 6. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On a alors équivalence entre*

i) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

ii) Pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_K, \ |\langle T, \phi \rangle| \leq C\|\phi\|_n,$$

iii) Pour tout suite (ϕ_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \langle T, \phi \rangle = 0.$$

Démonstration. L'équivalence entre *i*) et *iii*) est l'équivalence *i*) $\Leftrightarrow$ *iii*) du Théorème 5.

L'équivalence entre *i*) et *ii*) est l'équivalence *i*) $\Leftrightarrow$ *iv*) du Théorème 5, combinée avec la description de la topologie de $\mathcal{D}_K$ en termes des semi-normes $\| \cdot \|_N$. $\square$

Définition 5.
1. Une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (pour τ) est appelée une distribution sur Ω.
2. S'il existe n tel que *ii*) soit vérifié pour tout K, le plus petit d'entre eux est l'ordre de la distribution. S'il n'existe pas de tel n, on dit que la distribution est d'ordre infini.

Remarque 8. Chaque $x \in \Omega$ détermine une fonctionnelle δ_x sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \langle \delta_x, \phi \rangle := \phi(x).$$

Le Théorème 6 montre que δ_x est une distribution d'ordre 0. Si $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \delta_0$ est appelé la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $K \subseteq \Omega$ compact, on a

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \notin K} \delta_x^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{x \notin K} \ker(\delta_x),$$

donc chaque $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ est fermé. Il est clair que $\mathcal{D}_K$ est d'intérieur vide dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Puisqu'il existe une suite exhaustive de compacts (K_n) pour Ω, on a

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{D}_{K_n}.$$

Comme les suites de Cauchy de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergent, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas métrisable car autrement, ceci contredirait le théorème de Baire.

Exemple 1. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (i.e. pour tout compact $K \subseteq \Omega$, on a $f \in L^1(K)$). Posons

$$\langle T_f, \phi\rangle := \int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f\phi \, d\lambda, \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Puisqu'on a

$$|\langle T_f, \phi\rangle| \leq \|f\|_1 \|\phi\|_\infty,$$

le Théorème 6 montre que $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et est d'ordre 0.

On peut alors instaurer la théorie des distributions de manière usuelle et ne retenir que la notion de convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Terminons cette section par une digression sur les dérivées des distributions et sur leur convergence.

Proposition-Définition 1. *Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose*

$$\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi\rangle, \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors, $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est la dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ de T.

Démonstration. $\partial^\alpha T$ est clairement une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. De plus, si

$$|\langle T, \phi\rangle| \leq C\|\phi\|_n, \ \forall \phi \in \mathcal{D}_K,$$

alors

$$|\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle| = |(-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi\rangle| \leq C\|\partial^\alpha \phi\|_n \leq C\|\phi\|_{n+|\alpha|},$$

donc $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'après le Théorème 6. $\square$

Exemple 2. Si $f \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, on a donc

$$\forall |\alpha| \leq n, \ \partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

Il suffit d'effectuer une intégration par parties standard pour le voir.

Définissons, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'évaluation

$$\begin{array}{rcccc} \widetilde{\phi} & : & \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ & & T & \mapsto & \langle T, \phi\rangle \end{array}$$

La topologie préfaible (ou faible-$*$) sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ est la topologie initiale associée aux $\widetilde{\phi}$ où ϕ parcourt $\mathcal{D}(\Omega)$. Elle est également associée à la famille de semi-normes $\|T\|_\phi := |\langle T, \phi\rangle|$ et fait de $\mathcal{D}'(\Omega)$ un espace localement convexe (voir [5], sections 3.14 et 6.16).

Si $(T_n)_{n\geq 0}$ est une suite de distributions sur Ω, l'assertion

$$T_n \to T \quad \text{au sens des distributions}$$

signifie alors

$$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$$

i.e.

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle\,,$$

c'est-à-dire que (T_n) converge préfaiblement vers T. Par exemple, si (f_n) est une suite d'éléments de $L^1_{loc}(\Omega)$, on dit que $f_n \to T$ au sens des distributions si $T_{f_n} \overset{*}{\rightharpoonup} T$, i.e. si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \phi \, d\lambda = \langle T, \phi\rangle\,,\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ceci donne bien lieu au confort usuel de la théorie des distributions. Toujours à titre d'exemple, on a le

Théorème 7. *Si (T_n) est une suite de distributions et si, pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le limite*

$$\langle T, \phi\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \phi\rangle \tag{6}$$

existe, alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et, pour tout multi-indice α, on a

$$\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T,$$

au sens des distributions.

Démonstration. Soit $K \subseteq \Omega$ un compact. Puisqu'on a (6) pour tout $\phi \in \mathcal{D}_K$ et puisque $\mathcal{D}_K$ est un espace de Fréchet, le théorème de Banach-Steinhaus montre que la restriction de T à $\mathcal{D}_K$ est continue. Il s'ensuit, par le Théorème 5, que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Par conséquent, (6) implique que

$$\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n\to\infty}\langle T_n, \partial^\alpha\phi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \partial^\alpha T_n, \phi\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \partial^\alpha T_n, \phi\right\rangle$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha T_n = \partial^\alpha T.$$

□

2.3 Espaces de Schwartz

On définit le $n^{\text{ième}}$ l'espace de Schwartz comme l'espace des fonctions "à décroissance rapide" :

$$\mathcal{S}_n := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\ ;\ \sup_{|\alpha|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^N |\partial^\alpha f(x)| < \infty,\ \forall N \in \mathbb{N}\},$$

et, pour $f \in \mathcal{S}_n$, on définit les semi-normes

$$\mathcal{N}_N(f) := \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^N |\partial^\alpha f(x)|, \ N \geq 0.$$

En d'autres termes, pour que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ soit dans $\mathcal{S}_n$, il faut et il suffit que $P \cdot \partial^\alpha f$ soit bornée sur $\mathbb{R}^n$, pour tout polynôme P et tout multi-indice α. Puisque c'est vrai avec $(1 + \|x\|^2)^N P(x)$ à la place de $P(x)$, tout $P \cdot \partial^\alpha f$ est élément de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ces fonctions forment un espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe définie par les $\mathcal{N}_N$, comme décrit dans le Théorème 1. De plus, il est clair de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$.

<u>Théorème</u> 8. *$\mathcal{S}_n$ est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{S}_n$ est un espace invariablement métrisable et localement convexe. Il reste donc à montrer que $\mathcal{S}_n$ est complet. Soit donc (f_i) une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}_n$. Pour chaque pair (α, β) de multi-indices, les fonctions $x^\beta \partial^\alpha f_i(x)$ convergent alors (uniformément sur $\mathbb{R}^n$) vers une fonction bornée $g_{\alpha,\beta}$. Il s'ensuit que

$$g_{\alpha,\beta}(x) = x^\beta \partial^\alpha g_{0,0}(x)$$

et ainsi, $f_i \to g_{0,0}$ dans $\mathcal{S}_n$, d'où le résultat. □

<u>Théorème</u> 9. *a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}_n$.*

b) L'injection canonique

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}_n$$

est continue.

Démonstration. a) Choisissons $f \in \mathcal{S}_n$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = 1$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (lemme d'Urysohn lisse) et posons

$$f_r(x) := f(x)\psi(rx), \ x \in \mathbb{R}^n, \ r > 0.$$

Alors, $f_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si P est un polynôme et α un multi-indice, alors

$$P(x)\partial^\alpha(f - f_r)(x) = P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(x) r^{|\beta|} \partial^\beta (1 - \psi)(rx).$$

Notre choix de ψ montre que $\partial^\beta(1 - \psi)(rx) = 0$ pour tout multi-indice β et pout $\|x\| \leq \frac{1}{r}$. Puisque $f \in \mathcal{S}_n$, on a $P \cdot \partial^{\alpha-\beta} f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ et ce pour tout $\beta \leq \alpha$. Il s'ensuit que la somme ci-dessus tend vers 0, uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $r \to 0$. Ainsi, $f_r \to f$ dans $\mathcal{S}_n$, et on en déduit *a*).

b) Si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est un compact, la topologie induite sur $\mathcal{D}_K$ par $\mathcal{S}_n$ est clairement la même que celle des τ_K, puisque chaque $(1 + \|x\|^2)^N$ est borné sur K. L'injection $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{S}_n$ est donc continue et donc *b*) provient du Théorème 5.

□

Si $\iota : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}_n$ est l'injection canonique et si L est une fonctionnelle continue sur $\mathcal{S}_n$, alors soit

$$u_L := L \circ \iota \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

La densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}_n$ montre que deux L distincts ne peuvent donner naissance au même u. Ainsi, (7) décrit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre le dual $\mathcal{S}_n'$ de $\mathcal{S}_n$ et un certain espace de distributions. De telles distributions sont dites tempérées. Les distributions tempérées sont donc exactement les élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ qui s'étendent continuement à $\mathcal{S}_n$. Si on identifie u_L avec L dans (7), les distributions tempérées sont donc exactement les éléments de $\mathcal{S}_n'$. Laurent Schwartz qualifiait ces distributions de "sphériques", car elle s'étendent sur la sphère unité (voir [6], chapitre 7, section 4). Ceci explique l'utilisation de la lettre $\mathcal{S}$ par Schwartz lui-même.

Fort de ces considérations topologiques, le lecteur peut alors pleinement apréhender la théorie des distributions et de la transformée de Fourier, qui motive l'introduction des espaces de Schwartz, puisqu'elle définit un opérateur continue $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ et, une fois étendue au dual $\mathcal{S}_n'$ par la méthode usuelle (i.e. $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle := \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$), fournit un opérateur linéaire de période 4 qui est un homéomorphisme $\mathcal{F} : \mathcal{S}_n' \to \mathcal{S}_n'$.

Références

[1] Jean-Michel Bony, Cours d'Analyse : Théorie des distributions et analyse de Fourier, Les éditions de l'École Polytechnique, 2011.

[2] Haïm Brezis, Analyse Fonctionnelle, Dunod, 1999.

[3] Olivier Goubet, *Théorie des Distributions*, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne, France, 2015.

[4] Alain Rivière, *Analyse Fonctionnelle Approfondie*, Cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne, France, 2016.

[5] Walter Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill Education, 1991.

[6] Laurent Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, 1966.