Encore : Série de Hilbert-Poincaré de l'algèbre de cohomologie équivariante d'un tore compact

Arthur Garnier

21 mai 2018

Définition 1. Si $M = \bigoplus_{j \geq 0} M_j$ est un A -module gradué, avec A une algèbre graduée sur un corps $\mathbb{F}$, alors on définit sa *série de Hilbert-Poincaré* par

$$\text{HPS}(M, t) := \sum_{j \geq 0} (\dim_{\mathbb{F}} M_j) t^j \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Rappelons que si G est un groupe de réflexions complexe agissant sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V , alors par le théorème de Shephard-Todd-Chevalley ([2], Theorem 3.20), l'algèbre des invariants $\text{Sym}(V^*)^G$ est une algèbre polynômiale. Si $f_1, \dots, f_n$ est un système minimal de générateurs homogènes de $\text{Sym}(V^*)$, alors les *degrés* de G sont par définition les $d_i := \deg(f_i)$.

Théorème 2. (Chevalley-Solomon), [3], Theorem 1.1

Si W est un groupe de réflexions agissant sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel V et si $S := \text{Sym}(V^*)$, alors on a

$$\sum_{w \in W} q^{l(w)} = \prod_{i=1}^r \frac{1 - q^{d_i}}{1 - q} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{1 \leq i \leq r} [d_i]_q = \frac{\text{HPS}(S, q)}{\text{HPS}(S^W, q)}.$$

Idée de démonstration. On a un système de Coxeter $\langle W, S \rangle$ où $S = S_{\Pi}$ et si $J \subset S$, alors $\langle W_J := \langle J \rangle, J \rangle$ est un système de Coxeter à son tour. Soit W^J un ensemble de représentants de longueur minimal des classes à gauche de W_J dans W . Si $w \in W$, on a

$$w \in W^J \Leftrightarrow D_R(w) := \{s \in S ; l(xs) < l(x)\} \subset S \setminus J,$$

ainsi que $W = W^J W_J$ et si $W \ni w = xy \in W^J W_J$, alors on a $l(w) = l(x) + l(y)$. Pour un système de Coxeter $\langle V, \Sigma \rangle$, on définit $V(q) := \sum_{v \in V} q^{l(v)} \in \mathbb{Z}[q]$. Ici, on a

$$W(q) = W^J(q) W_J(q) \Rightarrow W^J(q) = \sum_{w \in W^J ; D_R(w) \subset S \setminus J} q^{l(w)} = \frac{W(q)}{W_J(q)}.$$

Par le principe d'inclusion-exclusion (formule du crible de Poincaré), il vient alors

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \frac{W(q)}{W_J(q)} = \sum_{w \in W ; D_R(w) = S} q^{l(w)} = \begin{cases} q^{l(w_0)} & \text{si } |W| < \infty \\ 0 & \text{si } |W| = \infty \end{cases}$$

En divisant par $W(q)$ et isolant le terme $J = S$, on obtient

$$\sum_{J \subsetneq S} \frac{(-1)^{|J|}}{W_J(q)} = \frac{f(q)}{W(q)}, \quad \text{où } f(q) := \begin{cases} q^{l(w_0)} - (-1)^{|S|} & \text{si } |W| < \infty \\ (-1)^{|S|-1} & \text{si } |W| = \infty \end{cases} \quad (1)$$

Par ailleurs, si W agit de par automorphismes simpliciaux sur un complexe simplicial Δ , alors on a la *formule de la trace de Hopf* :

$$\sum_i (-1)^i C_i(\Delta, \mathbb{C}) = \sum_i (-1)^i H_i(\Delta, \mathbb{C})$$

et ceci est une égalité entre caractères virtuels de W . On a aussi le *complexe de Coxeter* $\Delta = \Delta(W, S)$. Celui-ci admet deux descriptions données par

1. la décomposition simpliciale de $\mathbb{S}^{r-1} \subset V$ induite par les hyperplans de réflexions de W ,
2. le complexe simplicial abstrait de faces les wW_J (pour $J \subset S$ et $w \in W$), avec inclusion des faces donnée par l'inclusion inverse des classes à gauche. Une face wW_J est de stabilisateur (qui est aussi son stabilisateur ponctuel) $wW_Jw^{-1} = {}^wW_J$.

Ainsi, la première description montre que $H_{r-1}(\Delta, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ avec W -action donnée par le déterminant $\det : W \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et la seconde que $C_i(\Delta)$ est une somme directe de représentations $\text{Ind}_{W_J}^W(1) = 1 \uparrow_{W_J}^W$, pour des W_J tels que $|J| = r - 1 - i$. D'après la formule de Hopf, on a un entrelacement

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} 1 \uparrow_{W_J}^W \simeq \det. \quad (2)$$

On fait agir graduellement W sur $R = \text{Sym}(V^*)$. Si M est un $\mathbb{C}W$ -module, on a par réciprocity de Frobenius, $\text{Hom}_{\mathbb{C}W}(1 \uparrow_{W_J}^W, M) \simeq W^{W_J}$ et $\text{Hom}_{\mathbb{C}W}(\det, M) \simeq M^{W, \det} = \{m \in M ; \forall w \in W, w(m) = \det(w)m\}$. En appliquant à (2) la fonction $\text{ch}(W) \rightarrow \mathbb{Z}[q]$ définie :

$$\chi \mapsto \sum_{d \geq 0} \langle \chi, R_d \rangle q^d,$$

il vient

$$\sum_{J \subset S} (-1)^{|J|} \text{HPS}(R^{W_J}, q) = \text{HPS}(R^{W, \det}, q) = q^{l(w_0)} \text{HPS}(R^W, q). \quad (3)$$

La dernière égalité ci-dessus vient du fait que $R^{W, \det}$ est un sous- R^W -module libre de R de rang 1, formé des éléments de R divisibles par le jacobien $j_W := \prod_H \ell_H$, où les ℓ_H sont des formes linéaires définissant les hyperplans de réflexion H de W , avec $\deg(j_W) = l(w_0) = |\{\text{réflexions de } W\}|$. On divise (3) par $\text{HPS}(R, q)$, on isole le terme $J = S$ et on en tire

$$\sum_{J \subsetneq S} (-1)^{|J|} \frac{\text{HPS}(R^{W_J}, q)}{\text{HPS}(R, q)} = f(q) \frac{\text{HPS}(R^W, q)}{\text{HPS}(R, q)}. \quad (4)$$

En comparant (1) et (4), on a que $\frac{1}{W(q)}$ et $\frac{\text{HPS}(R^W, q)}{\text{HPS}(R, q)}$ satisfont la même formule de récurrence sur S et comme ces deux expressions valent 1 pour $S = \emptyset$, on obtient finalement que

$$W(q) = \frac{\text{HPS}(R, q)}{\text{HPS}(R^W, q)},$$

d'où le résultat. □

De plus, si $T = (\mathbb{S}^1)^r$ est un tore maximal d'un groupe de Lie K , d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, alors par le théorème de Chern-Weil, on a un isomorphisme d'algèbres

$$H^*(B_T) \simeq \text{Sym}(\mathfrak{t}^*).$$

Dans ce cas, le groupe de Weyl W de T est un groupe de réflexions qui agit sur $\mathfrak{t}$.

Corollaire 3. *Si K est un groupe de Lie compact connexe de rang r , T un tore maximal, W le groupe de Weyl associé, de degrés $d_1, \dots, d_r$. Alors, le polynôme de Poincaré de la variété de drapeaux K/T est donné par*

$$P_{K/T}(q) = \text{HPS}(H^*(K/T), q) = \frac{\text{HPS}(R, q^2)}{\text{HPS}(R^W, q^2)} = \sum_{w \in W} q^{2l(w)} = \prod_{1 \leq i \leq r} [d_i]_{q^2}.$$

Remarque 4. ([1], §3.16-3.19)

Soit $w_c := s_1 \cdots s_r = \prod_{\alpha \in \Pi} s_\alpha$ un *élément de Coxeter*, i.e. un produit des toutes les réflexions simples. Tous les tels éléments sont conjugués, donc le *nombre de Coxeter* $h := o(w_c)$ est bien défini. On a $h = \frac{2|\Phi^+|}{r} = \frac{2l(w_0)}{r} = \frac{|\Phi|}{r}$. De plus, si ζ désigne une racine primitive $h^{\text{ème}}$ de l'unité, alors $\text{Sp}(w_c) \subset \mu_h = \{\zeta^m, 0 \leq m < h\}$ et les *exposants* de W sont les $m_1 \leq \cdots \leq m_r$ tels que les ζ^{m_i} forment le spectre de w_c . On a $m_1 = 1$ et $m_r = h - 1$ et de plus

$$\sum_{i=1}^r m_i = \frac{rh}{2}.$$

On a aussi l'important résultat suivant

$$m_i = d_i - 1.$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \sum_i m_i = \sum_i (d_i - 1) = l(w_0) = |\Phi^+| \\ \prod_i d_i = \prod_i (m_i + 1) = |W| \end{cases}$$

En fait, ces considérations valent pour tout groupe de Coxeter irréductible W .

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\text{HPS}(H_T^*(\text{pt}), q)}{\text{HPS}(H_T^*(\text{pt})^W, q)} &= \sum_{w \in W} q^{l(w)} = \prod_{i=1}^r [d_i]_q \\ &= \prod_{i=1}^r \frac{1 - q^{d_i}}{1 - q} = \prod_{i=1}^r [m_i + 1]_q = \prod_{i=1}^r (1 + q + \cdots + q^{m_i}). \end{aligned}$$

Références

- [1] James E. Humphreys, REFLECTION GROUPS AND COXETER GROUPS, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 29, Cambridge University Press, 1990.
- [2] Gustav I. Lehrer & Donald E. Taylor, UNITARY REFLECTION GROUPS, Australian Mathematical Society Lecture Series, No. 20, Cambridge University Press, 2009.
- [3] Victor Reiner, *Notes on Poincaré series of finite and affine Coxeter groups*, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, USA.