REMARQUES SUR $\mathrm{End}\,(\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \overset{1-s}{\to} \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \overset{1+s}{\to} \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2)$

ARTHUR GARNIER

1. Endomorphismes de complexe

On note $\mathfrak{S}_2 := \{1, s\} = \langle s \mid s^2 = 1\rangle$ et K le complexe de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$-modules

$$K \;:\; \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \xrightarrow{1-s} \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \xrightarrow{1+s} \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$$

Pour $U \in \{\mathbb{F}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$, on note également $\mathcal{C}_U$ (resp. $\mathcal{K}_U$) la catégorie (homotopique) des complexes de $U\mathfrak{S}_2$ modules et K_U le complexe induit de $U\mathfrak{S}_2$ modules. Pour $x = a + bs \in \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$, on pose $\mathrm{tr}^+(x) := a + b \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{tr}^-(x) := a - b \in \mathbb{Z}$. On obtient deux morphismes d'algèbres $\mathrm{tr}^+, \mathrm{tr}^- : \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{End}\,(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ qui définissent donc deux structures de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$-module sur $\mathbb{Z}$. On définit la multiplication par deux : $\mathbf{2} : \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x\otimes y \mapsto 2xy$. De façon générale, si on a une k-algèbre commutative A, un A-module M, de morphisme structurel $\phi : A \to \mathrm{End}_k(M)$ et une application A-bilinéaire et associative $g : M \otimes_k M \to M$, on peut définir un produit sur $A \times M$ de la manière suivante

$$\forall (a, x), (b, y) \in A \times M,\ (a, x) \cdot_{\phi,g} (b, y) := (ab, ay + bx + g(x \otimes y)).$$

On note $A \ltimes_{\phi,g} M$ l'ensemble $A\times M$, muni de ce produit. C'est une A-algèbre commutative, d'unité $(1, 0)$. Si $g = 0$, on note $A \ltimes_\phi M := A \ltimes_{\phi,0} M$.

Proposition 1. *On a un isomorphisme de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$-algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_\mathbb{Z}}(K) \simeq (\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \ltimes_{\mathrm{tr}^+,\mathbf{2}} \mathbb{Z}) \ltimes_{\mathrm{tr}^-,\mathbf{2}} \mathbb{Z}.$$

Proof. Considérons un endomorphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "h"] \\
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

Les endomorphismes f, g, h sont dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2}(\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2)$, donc sont donnés par multiplication par des éléments de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2$. On doit avoir $(1-s)f = g(1-s)$, soit $(g-f)(1-s) = 0$ et il doit donc exister $a \in \mathbb{Z}$ tel que $g = f + a(1+s)$. De même, il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $h = g + b(1-s)$. Ainsi, on obtient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $g = f + a(1+s)$ et $h = f + a(1+s) + b(1-s)$. On obtient ainsi une application

$$\begin{array}{cccc}
\varphi & : & \mathrm{End}_{\mathcal{C}_\mathbb{Z}}(K) & \to & (\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \\
& & (f, g, h) & \mapsto & (f, a, b)
\end{array}$$

C'est une bijection, de réciproque $(f, a, b) \mapsto (f, f + a(1+s), f + a(1+s) + b(1-s))$. Comme on a

$$\begin{aligned}
(f + a(1+s)) \circ (f' + a'(1+s)) &= ff' + af'(1+s) + a'f(1+s) + aa'(1+s)^2 \\
&= ff' + (a'\mathrm{tr}\,(f) + a\mathrm{tr}\,(f') + 2aa')(1+s),
\end{aligned}$$

on peut calculer la composée

$$(f, a, b) \circ (f', a', b') = (ff', a'\mathrm{tr}^+(f) + a\mathrm{tr}^+(f') + 2aa', b\mathrm{tr}^-(f') + b'\mathrm{tr}^-(f) + 2bb')$$

Date: March 13, 2019.

et ceci montre qu'en faisant agir $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \ltimes_{\mathrm{tr}^+,\mathbf{2}} \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ en ne faisant agir que le premier facteur par tr^-, on obtient que

$$\varphi : \mathrm{End}_{\mathcal{C}_\mathbb{Z}}(K) \to (\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \ltimes_{\mathrm{tr}^+,\mathbf{2}} \mathbb{Z}) \ltimes_{\mathrm{tr}^-,\mathbf{2}} \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme d'algèbres. □

Remarque 1. *Le même argument marche sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{F}_2$ et on obtient*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_\mathbb{Q}}(K_\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Q}\mathfrak{S}_2 \ltimes_{\mathrm{tr}^+,\mathbf{2}} \mathbb{Q}) \ltimes_{\mathrm{tr}^-,\mathbf{2}} \mathbb{Q}$$
$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}_{\mathbb{F}_2}}(K_{\mathbb{F}_2}) \simeq (\mathbb{F}_2\mathfrak{S}_2 \ltimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{F}_2) \ltimes_{\mathrm{tr}} \mathbb{F}_2.$$

2. Modulo homotopie

Proposition 2. *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{K}_\mathbb{Z}}(K) \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2.$$

Proof. Montrons d'abord que tout morphisme (f, a, b) est homotope à $(f, 0, b)$. Pour cela, il suffit de montrer que tout endomorphisme $(f, f+a(1+s), f+a(1+s)+b(1-s))$ est homotope à $(f, f, f + b(1-s))$; ce qui revient à montrer que $(0, a(1+s), a(1+s))$ est homotope à l'endomorphisme nul. Il suffit donc de montrer que $(0, 1+s, 1+s)$ est homotope à 0. Or, on a un diagramme d'homotopie

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"] \arrow[d, "1+s"] \arrow[dl, "0"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "1+s"] \arrow[dl, "1"'] \\
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

Ensuite, montrons que tout endomorphisme $(f, 0, b)$ est homotope à $(f + b(1-s), 0, 0)$. Ceci revient à montrer que le morphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "1-s"] \\
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

et le morphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"] \arrow[d, "1-s"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"] \arrow[d, "1-s"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "1-s"] \\
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

sont homotopes. Or, on a une homotopie

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"] \arrow[d, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"] \arrow[d, "1-s"] \arrow[dl, "1"] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "1-s"] \\
\mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1-s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \arrow[r, "1+s"'] & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2
\end{tikzcd}$$

Ainsi, tout endomorphisme (f, a, b) est homotope à $(f + b(1-s), 0, 0)$ avec $b \in \mathbb{Z}$. On peut donc définir le morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{cccc}
\varphi & : & \mathrm{End}_{\mathcal{K}_\mathbb{Z}}(K) & \to & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 \\
& & (f, a, b) & \mapsto & f + b(1-s)
\end{array}$$

ainsi que le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{Z}\mathfrak{S}_2 & \to & \mathrm{End}_{\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}}(K) \\ & & g & \mapsto & (g,0,0) \end{array}$$

et on voit alors que φ et ψ sont inverses l'un de l'autre. □

Corollaire 1. *On a des isomorphismes d'algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}}(K_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$$

et

$$\mathrm{End}_{\mathcal{K}_{\mathbb{F}_2}}(K_{\mathbb{F}_2}) \simeq \mathbb{F}_2\mathfrak{S}_2.$$

Remarque 2. *Comme l'algèbre $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$ est semi-simple, tout complexe de $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$-modules est homotopiquement équivalent à sa cohomologie et donc l'algèbre de ses endomorphismes à homotopie près est isomorphe à celle de sa cohomologie. Comme ici on a (sans tenir compte de la graduation) $H^*(K_{\mathbb{Q}}) = H^*(SL_2/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$ et $H^1(K_{\mathbb{Q}}) = 0$, on a $\mathrm{End}_{\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}}(H^*(K_{\mathbb{Q}})) \simeq \mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$ et on doit donc avoir $\mathrm{End}_{\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}}(K_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathbb{Q}\mathfrak{S}_2$.*