

Espoir de construction d'une décomposition
 W -cellulaire de G/B via une stratification de $\mathbb{R}^{2\ell(w_0)}$

Arthur Garnier

6 août 2019

On prend G un groupe algébrique complexe semi-simple connexe et simplement connexe, $T^{\mathbb{C}}$ un tore maximal, B un Borel contenant T , K une forme réelle compacte de G , de tore maximal $T = K \cap B$ et on note $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$) l'algèbre de Lie de G (resp. de $T^{\mathbb{C}}$, B , K , T). On note également Φ le système de racine associé à G et $T^{\mathbb{C}}$, Φ_+ les racines positives, Π les racines simples et $W = N_G(T^{\mathbb{C}})/T^{\mathbb{C}} = N_K(T)/T$ le groupe de Weyl. On choisit ensuite un système de générateurs de Serre $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \Phi_+}$ et on pose

$$\forall \alpha \in \Phi_+, u_\alpha := \frac{e_\alpha - f_\alpha}{2}, v_\alpha := \frac{i(e_\alpha + f_\alpha)}{2}, w_\alpha := \frac{ih_\alpha}{2}.$$

pour se comprendre, on pourrait appeler cela la "base de Pauli" de $\mathfrak{k}$. On a alors les relations "quaternioniques"

$$\forall \alpha \in \Phi_+, [u_\alpha, v_\alpha] = w_\alpha, [v_\alpha, w_\alpha] = u_\alpha, [w_\alpha, u_\alpha] = v_\alpha.$$

Si l'on note $\kappa^{\mathbb{C}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et κ sa restriction à $\mathfrak{k}$, alors il est connu que, puisque K est compact, κ est définie négative sur $\mathfrak{k}$. On note alors $\langle \cdot, \cdot \rangle := -\kappa$ le produit scalaire associé sur $\mathfrak{k}$. De plus, par construction de la forme réelle compacte K , on a

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathbb{R}w_\alpha \oplus^\perp \bigoplus_{\alpha \in \Phi_+} (\mathbb{R}u_\alpha \oplus^\perp \mathbb{R}v_\alpha).$$

Exemple 1. On peut prendre $G = SL_3(\mathbb{C})$, $K = SU_3(\mathbb{C})$, et tout le toutim usuel. On a dans ce contexte $\kappa^{\mathbb{C}}(x, y) = 6\text{tr}(xy)$ et $\kappa(x, y) = 6\text{tr}(xy)$ et on note $\Phi_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$. Les vecteurs $(u_\delta)_\delta$ sont orthogonaux entre eux, ainsi que les $(v_\delta)_\delta$ et $u_\delta \perp v_\delta \perp w_\delta \perp u_\delta$. Cependant, w_α et w_β ne sont pas orthogonaux. On peut poser $w_c := \frac{w_\alpha + 2w_\beta}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas, $(u_\alpha, u_\beta, u_{\alpha+\beta}, v_\alpha, v_\beta, v_{\alpha+\beta}, w_\alpha, w_c)$ est une base orthogonale de $\mathfrak{k}$ dont tous les vecteurs sont de norme $\sqrt{3}$ (je ne normalise pas, afin de garder les relations quaternioniques).

On choisit un élément régulier $t_0 \in \mathfrak{t}$ et on définit alors une application lisse (et propre)

$$\begin{aligned} \sigma : K/T &\longrightarrow \mathfrak{k}/\mathfrak{t} \\ kT &\longmapsto \text{pr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}(\text{Ad}_k(t_0)) \end{aligned}$$

où $\text{pr}_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}/\mathfrak{t}$ désigne la projection canonique. Si l'on note $U := \text{Vect}_{\mathbb{R}}(u_\alpha, \alpha \in \Phi_+)$ et $V := \text{Vect}_{\mathbb{R}}(v_\alpha, \alpha \in \Phi_+)$, alors on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus U \oplus V$ et l'écriture en coordonnées donne alors une application lisse

$$\begin{aligned} \sigma : K/T &\longrightarrow \mathbb{R}^{2|\Phi_+|} \\ kT &\longmapsto \left((\langle t_0^k, u_\alpha \rangle)_{\alpha \in \Phi_+}, (\langle t_0^k, v_\alpha \rangle) \right) \end{aligned}$$

Remarque 2. L'application lisse

$$\begin{aligned} K/T &\longrightarrow \mathfrak{k} \\ kT &\longmapsto \text{Ad}_k(t_0) \end{aligned}$$

est un plongement, puisque $t_0 \in \mathfrak{t}_{\text{reg}}$.

On va maintenant construire une stratification de $\mathbb{R}^{2n}$ dont on va prendre l'image réciproque par σ .

Proposition-Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n}$. Pour une partie non vide I de $\{1, \dots, n\}$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}$, on pose

$$S_{I,\varepsilon}^R := \{x \in \mathbb{R}^{2n} ; x_1^j = 0, \forall j, x_2^k = 0, \forall k \notin I, \varepsilon(i)x_2^i > 0, \forall i \in I\}$$

et

$$S_{I,\varepsilon}^L := \{x \in \mathbb{R}^{2n} ; x_1^k = 0, \forall k \notin I, \varepsilon(i)x_1^i > 0, \forall i \in I\}.$$

On obtient alors une stratification de $\mathbb{R}^{2n}$ en $2 \cdot 3^n - 1$ strates :

$$\mathbb{R}^{2n} = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}}} (S_{I,\varepsilon}^R \sqcup S_{I,\varepsilon}^L)$$

et on a

$$\dim S_{I,\varepsilon}^R = |I|, \dim S_{I,\varepsilon}^L = n + |I|.$$

Remarque 4. Je ne suis pas sûr qu'il faille absolument cette stratification, j'en voulais juste une avec ces strates-là en dimensions 0 et 1. Si tu en vois d'autres, elles sont bienvenues.

Exemple 5. Pour $\mathbb{R}^6$, on a une strate de dimension 0, six strates de dimension 1, douze de dimension 2, huit de dimension 3, six de dimension 4, douze de dimension 5 et huit de dimension 6.

On en arrive à l'espoir ultime :

Conjecture 6. Soient $n := |\Phi_+| = \ell(w_0)$, $\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}$ et $\varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}$. Alors, $\sigma^{-1}(S_{I,\varepsilon}^R)$ (resp. $\sigma^{-1}(S_{I,\varepsilon}^L)$) est une union de cellules de dimension $|I|$ (resp. $n + |I|$) de K/T . De plus, ces cellules forment une décomposition cellulaire W -équivariante de K/T .

On va s'intéresser au type A_1 et aux 1-cellules du type A_2 et retrouver le début d'un complexe de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_3$ -modules qu'on a déjà rencontré...

$$\underline{K = SU(2)}$$

On a ici $\Phi = \{\pm\alpha\}$, $\Phi_+ = \Pi = \{\alpha\}$ et la base de Pauli

$$w_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, u_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, si $g = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$, on calcule

$$\text{Ad}_g(w_\alpha) = gw_\alpha g^{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2a\bar{b} \\ 2\bar{a}b & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sigma : \quad SU(2)/T &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} T &\longmapsto (-2\text{Im}(a\bar{b}), 2\text{Re}(a\bar{b})) \end{aligned}$$

Ensuite, la strates ci-dessus s'écrivent

$$S_1^R := S_{\{1\},+1}^R = \{(x_1^1, x_2^1) ; x_1^1 = 0, x_2^1 > 0\}, \quad S_{-1}^R := S_{\{1\},-1}^R = \{(x_1^1, x_2^1) ; x_1^1 = 0, x_2^1 < 0\},$$

$$S_1^L := S_{\{1\},+1}^L = \{(x_1^1, x_2^1) ; x_1^1 > 0\}, \quad S_{-1}^L := S_{\{1\},-1}^L = \{(x_1^1, x_2^1) ; x_1^1 < 0\}.$$

On a donc

$$\sigma^{-1}(\{0\}) = \{kT \in SU(2)/T ; a\bar{b} = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = W.$$

Ensuite,

$$\sigma^{-1}(S_1^R) = \{kT \in SU(2)/T ; a\bar{b} > 0\}, \quad \sigma^{-1}(S_{-1}^R) = \{kT \in SU(2)/T ; a\bar{b} < 0\}$$

$$\sigma^{-1}(S_1^L) = \{kT \in SU(2)/T ; \text{Im}(a\bar{b}) < 0\}, \quad \sigma^{-1}(S_{-1}^L) = \{kT \in SU(2)/T ; \text{Im}(a\bar{b}) > 0\}$$

Par ailleurs, via la projection stéréographique équatoriale, puisqu'on a le difféomorphisme

$$SL_2(\mathbb{C})/B \longrightarrow \mathbb{CP}^1$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} B \longmapsto [a : b]$$

on obtient un difféomorphisme

$$\phi : \quad SU(2)/T \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$$

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} T \longmapsto \left(\frac{2\text{Re}(\bar{a}b)}{|b|^2+|a|^2}, \frac{2\text{Im}(\bar{a}b)}{|b|^2+|a|^2}, \frac{|b|^2-|a|^2}{|b|^2+|a|^2} \right)$$

Et, grâce à cette identification, on a

$$\phi(\sigma^{-1}(S_1^R)) = \{(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2 ; x > 0\}, \quad \phi(\sigma^{-1}(S_{-1}^R)) = \{(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2 ; x < 0\}$$

$$\phi(\sigma^{-1}(S_1^L)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 ; y > 0\}, \quad \phi(\sigma^{-1}(S_{-1}^L)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 ; y < 0\}$$

et

$$\phi(\sigma^{-1}(\{0\})) = \{(0, 0, \pm 1)\}.$$

Cela dit, on reconnaît bien là une décomposition cellulaire équivariante de $SU(2)/T = \mathbb{S}^2$.

$$\underline{K = SU(3)}$$

On va maintenant examiner le cas des $\sigma^{-1}(S)$ où $S \subset \mathbb{R}^6$ est une strate de dimension 1. Tout d'abord, on a $\Phi_+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ et la "base de Pauli"

$$u_\alpha := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_\alpha := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_\alpha := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_\beta := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_\beta := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad w_\beta := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$u_{\alpha+\beta} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\alpha+\beta} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{\alpha+\beta} = w_\alpha + w_\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a des représentants pour le groupe de Weyl

$$W = \mathfrak{S}_3 = \{1, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On prend ensuite $t_0 := w_\alpha$ et, pour $g = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} \in SU(3)$, on a

$$\text{Ad}_g(t_0) = gw_\alpha g^{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} |a|^2 - |d|^2 & a\bar{b} - d\bar{e} & a\bar{c} - d\bar{f} \\ \bar{a}b - \bar{d}e & |b|^2 - |e|^2 & b\bar{c} - e\bar{f} \\ \bar{a}c - \bar{d}f & \bar{b}c - \bar{e}f & |c|^2 - |f|^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(3)$$

D'après l'exemple 1, on peut prendre pour produit scalaire $\langle x, y \rangle = -\text{tr}(xy)$. On a l'application lisse

$$\begin{aligned} \sigma : SU(3)/T &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ kT &\longmapsto (\langle w_\alpha^k, u_\alpha \rangle, \langle w_\alpha^k, u_\beta \rangle, \langle w_\alpha^k, u_{\alpha+\beta} \rangle, \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle, \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle, \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle) \end{aligned}$$

On a d'abord clairement

$$\sigma^{-1}(\{0\}) = \{kT \in SU(3)/T ; w_\alpha^k \in \mathfrak{t}\} = W.$$

Considérons ensuite les strates de dimension 1 de $\mathbb{R}^6$. On notera $E_{I,\varepsilon}^{R,L} := \sigma^{-1}(S_{I,\varepsilon}^{R,L})$. On a par exemple

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(S_{\{3\},+1}^R) &= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \langle w_\alpha^k, u_\delta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle = 0, \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle > 0\} \\ &= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \text{tr}(w_\alpha^k u_\delta) = \text{tr}(w_\alpha^k v_\alpha) = \text{tr}(w_\alpha^k v_\beta) = 0, \text{tr}(w_\alpha^k v_{\alpha+\beta}) < 0\}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$E_{\{3\},+1}^R = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} T \in SU(3)/T ; a\bar{b} - d\bar{e} = b\bar{c} - e\bar{f} = 0, a\bar{c} - d\bar{f} > 0 \right\}.$$

Soit donc un représentant $k := \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} \in SU(3)$ d'une classe de $E_{\{3\},+1}^R$. Notons $\lambda :=$

$a\bar{c} - d\bar{f} \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque $k \in SU(3)$, on a $g\bar{h} + d\bar{e} + a\bar{b} = 0$ et, puisque $a\bar{b} = d\bar{e}$, ceci devient $g\bar{h} = -2d\bar{e}$ et de même, $h\bar{j} = -2e\bar{f}$. En multipliant ces deux équations, on obtient $g\bar{j}|h|^2 = 4d\bar{f}|e|^2$, soit encore, en utilisant le fait que $g\bar{j} + d\bar{f} + a\bar{c} = 0$:

$$\mathbb{R}_- \ni -\lambda|h|^2 = 2d\bar{f}(2|e|^2 + |h|^2). \quad (1)$$

Distinguons plusieurs cas :

1. Si $e \neq 0$, $h \neq 0$, alors l'équation ci-dessus entraîne que $d\bar{f} \in \mathbb{R}_-^*$ et $g\bar{j} \in \mathbb{R}_-^*$. Ces deux dernières conditions, couplées au fait que $a\bar{c} + d\bar{f} + g\bar{j} = 0$ donnent $a\bar{c} \in \mathbb{R}_+^*$. Ensuite, puisque $d\bar{f} \in \mathbb{R}_-^*$, on a aussi $d\bar{f}|e|^2 \in \mathbb{R}_-^*$, mais $d\bar{f}e\bar{e} = db\bar{c}\bar{e} = b\bar{c}d\bar{e} = b\bar{c}a\bar{b} = a\bar{c}|b|^2$ et donc $a\bar{c}|b|^2 = d\bar{f}|e|^2 \in \mathbb{R}_-^*$, d'où $a\bar{c} \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*$; une contradiction.

2. Si $e \neq 0$, $h = 0$, l'équation 1 donne $d\bar{f} = 0$. Si $d = 0$, alors $a\bar{b} = 0$ et, puisque $a\bar{c} \in \mathbb{R}_+^*$, on doit avoir $b = 0$, ce qui entraîne encore, via le fait que $b\bar{c} = e\bar{f}$, que $f = 0$. Dans tous les cas, on a $b = d = f = h = 0$, donc $|e| = 1$ et k est donc de la forme $k = \begin{pmatrix} a & 0 & g \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & j \end{pmatrix}$ qui, modulo T , est égale à une matrice de la forme

$$k = \begin{pmatrix} a & 0 & -\bar{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $a\bar{b} > 0$.

3. Si $e = 0$, $h \neq 0$, alors $g\bar{j} = 0$. On a donc $a\bar{c} + d\bar{f} = 0$, soit encore $-2d\bar{f} = \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier, on doit avoir $d \neq 0$ et $f \neq 0$. De plus, on a $a\bar{b} = d\bar{e} = 0$ et $b\bar{c} = \bar{f}e = 0$. Ceci entraîne que $b = 0$, donc $|h| = 1$ et de plus, $g = j = 0$. La matrice k est donc, modulo T , de la forme

$$k = \begin{pmatrix} a & \bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $a\bar{b} > 0$.

4. Enfin, si $e = h = 0$, alors $|f| = 1$ et ceci donne $a = c = 0$. La matrice k est donc, modulo T , de la forme

$$k = \begin{pmatrix} 0 & a & \bar{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -\bar{a} \end{pmatrix}.$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $a\bar{b} < 0$.

Par ailleurs, de façon analogue au cas de $SU(2)$, on voit facilement qu'une partie de $SU(3)/T$ de la forme $\left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} T ; a\bar{b} > 0 \right\}$ est bien homéomorphe à une 1-cellule. On a donc obtenu une décomposition cellulaire

$$\begin{aligned} E_{\{3\},+1}^R &= \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} T ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -\bar{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \bar{a} \end{pmatrix} T ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & \bar{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -\bar{a} \end{pmatrix} T ; a\bar{b} < 0 \right\} \\ &=: e_{11}^{w_0,3} \cup e_{11}^{w_0,2} \cup e_{11}^{w_0,1}. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut calculer que

$$\begin{aligned} E_{\{3\},-1}^R &= \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} T ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -\bar{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \bar{a} \end{pmatrix} T ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & \bar{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -\bar{a} \end{pmatrix} T ; a\bar{b} > 0 \right\} \\ &=: e_{12}^{w_0,3} \cup e_{12}^{w_0,2} \cup e_{12}^{w_0,1}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les représentants de $\mathfrak{S}_3$ dans $SU(3)$, et en notant $e_1^{w_0} := e_{12}^{w_0,2}$, on calcule

$$e_{11}^{w_0,1} = e_1^{w_0} \cdot s_\alpha, \quad e_{11}^{w_0,2} = e_1^{w_0} \cdot w_0, \quad e_{11}^{w_0,3} = e_1^{w_0} \cdot s_\beta s_\alpha, \quad e_{12}^{w_0,1} = e_1^{w_0} \cdot s_\alpha s_\beta, \quad e_{12}^{w_0,3} = e_1^{w_0} \cdot s_\beta.$$

Ainsi, en notant $E_1^{\alpha+\beta} := \{e_{1,i}^{w_0,j}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$, on a un isomorphisme de $\mathfrak{S}_3$ -modules

$$\mathbb{Z}E_{\{3\}}^R \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3 \langle e_1^{w_0} \rangle \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3.$$

Ensuite, on a immédiatement

$$\overline{e_1^{w_0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & -\bar{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, a\bar{b} \leq 0 \right\} = e_1^{w_0} \cup \{1, w_0\}$$

d'où

$$\partial e_1^{w_0} = \{1, w_0\} \leq W.$$

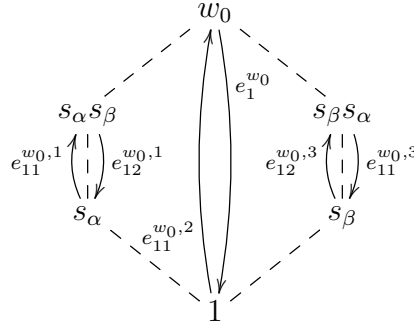
En notant

$$d_1 : C_1(K/T, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(K/T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3$$

la différentielle dans le complexe W -cellulaire (hypothétique) de K/T , on obtient que

$$d_1(e_1^{w_0}) = 1 - w_0.$$

On peut représenter la situation par une sorte de "sous-graphe GKM" :



En utilisant la même méthode que ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} E_{\{2\},+1}^R &:= \sigma^{-1}(S_{\{2\},+1}^R) \\ &= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \langle w_\alpha^k, u_\delta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle = \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle = 0, \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle > 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} T \in SU(3)/T ; a\bar{b} - d\bar{e} = a\bar{c} - d\bar{f} = 0, b\bar{c} - e\bar{f} > 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -\bar{b} & 0 \\ b & \bar{a} & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & \bar{b} \\ b & 0 & -\bar{a} \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -\bar{b} \\ 0 & b & \bar{a} \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \\ &=: e_{11}^{s_\beta,3} \cup e_{11}^{s_\beta,2} \cup e_{11}^{s_\beta,1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E_{\{2\},-1}^R &:= \sigma^{-1}(S_{\{2\},-1}^R) \\ &= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \langle w_\alpha^k, u_\delta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle = \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle = 0, \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle < 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} T \in SU(3)/T ; a\bar{b} - d\bar{e} = a\bar{c} - d\bar{f} = 0, b\bar{c} - e\bar{f} < 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -\bar{b} & 0 \\ b & \bar{a} & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & \bar{b} \\ b & 0 & -\bar{a} \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -\bar{b} \\ 0 & b & \bar{a} \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \\
&=: e_{12}^{s_\beta,3} \cup e_{12}^{s_\beta,2} \cup e_{12}^{s_\beta,1}.
\end{aligned}$$

En notant $e_1^{s_\beta} := e_{11}^{s_\beta,1}$, il vient

$$e_{11}^{s_\beta,2} = e_1^{s_\beta} \cdot s_\beta s_\alpha, \quad e_{11}^{s_\beta,3} = e_1^{s_\beta} \cdot w_0, \quad e_{12}^{s_\beta,1} = e_1^{s_\beta} \cdot s_\beta, \quad e_{12}^{s_\beta,2} = e_1^{s_\beta} \cdot s_\alpha, \quad e_{12}^{s_\beta,3} = e_1^{s_\beta} \cdot s_\alpha s_\beta,$$

d'où, avec $E_1^\beta := \{e_{1,i}^{s_\beta,j}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$,

$$\mathbb{Z}E_{\{2\}}^R \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3 \langle e_1^{s_\beta} \rangle \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3.$$

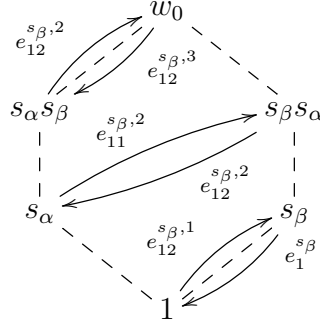
On a ensuite

$$\partial e_1^{s_\beta} = \{1, s_\beta\}$$

et

$$d_1(e_1^{s_\beta}) = 1 - s_\beta.$$

En termes de graphe GKM, cela donne



Enfin, on peut calculer

$$\begin{aligned}
&E_{\{1\},+1}^R := \sigma^{-1}(S_{\{1\},+1}^R) \\
&= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \langle w_\alpha^k, u_\delta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle = 0, \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle > 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} T \in SU(3)/T ; b\bar{c} - e\bar{f} = a\bar{c} - d\bar{f} = 0, a\bar{b} - d\bar{e} > 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} & 0 \\ b & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & \bar{b} \\ b & 0 & -\bar{a} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & -\bar{b} \\ 0 & b & \bar{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \\
&=: e_{11}^{s_\alpha,3} \cup e_{11}^{s_\alpha,2} \cup e_{11}^{s_\alpha,1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&E_{\{1\},-1}^R := \sigma^{-1}(S_{\{1\},-1}^R) \\
&= \{kT \in SU(3)/T ; \forall \delta \in \Phi_+, \langle w_\alpha^k, u_\delta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_\beta \rangle = \langle w_\alpha^k, v_{\alpha+\beta} \rangle = 0, \langle w_\alpha^k, v_\alpha \rangle < 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix} T \in SU(3)/T ; b\bar{c} - e\bar{f} = a\bar{c} - d\bar{f} = 0, a\bar{b} - d\bar{e} < 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} & 0 \\ b & \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & \bar{b} \\ b & 0 & -\bar{a} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} < 0 \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & -\bar{b} \\ 0 & b & \bar{a} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a\bar{b} > 0 \right\} \\
&=: e_{12}^{s_\alpha,3} \cup e_{12}^{s_\alpha,2} \cup e_{12}^{s_\alpha,1}.
\end{aligned}$$

Puis, avec $e_1^{s_\alpha} := e_{12}^{s_\alpha,3}$, on obtient

$$e_{11}^{s_\alpha,1} = e_1^{s_\alpha} \cdot s_\beta s_\alpha, \quad e_{11}^{s_\alpha,2} = e_1^{s_\alpha} \cdot s_\alpha s_\beta, \quad e_{11}^{s_\alpha,3} = e_1^{s_\alpha} \cdot s_\alpha, \quad e_{12}^{s_\alpha,1} = e_1^{s_\alpha} \cdot w_0, \quad e_{12}^{s_\alpha,2} = e_1^{s_\alpha} \cdot s_\beta,$$

et donc, si $E_1^\alpha := \{e_{1,i}^{s_\alpha,j}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$,

$$\mathbb{Z}E_{\{1\}}^R \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3 \langle e_1^{s_\alpha} \rangle \simeq \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3.$$

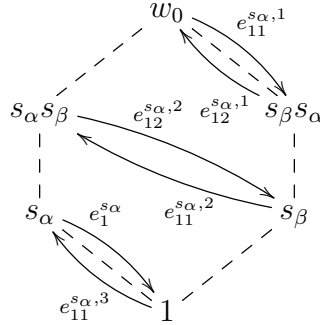
On a finalement

$$\partial e_1^{s_\alpha} = \{1, s_\alpha\},$$

et

$$d_1(e_1^{s_\alpha}) = 1 - s_\alpha.$$

La partie du graphe GKM s'écrit ici évidemment



Cela étant, vue la stratification de $\mathbb{R}^6$ donné par la Proposition-Définition 3 et le fait que

la topologie de $SU(3)/T$ est la topologie quotient de $SU(3)$, l'image réciproque de cette stratification par l'application propre $\sigma : SU(3)/T \rightarrow \mathbb{R}^6$ donne une stratification de $SU(3)/T$:

$$SU(3)/T = W \sqcup \bigsqcup_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,3\} \\ \varepsilon: I \rightarrow \{\pm 1\}}} (E_{I,\varepsilon}^R \sqcup E_{I,\varepsilon}^L),$$

où l'on a noté $E_{I,\varepsilon}^{R,L} := \sigma^{-1}(S_{I,\varepsilon}^{R,L})$. On a donc finalement obtenu la

Proposition 7. *Il existe une stratification de la variété de drapeaux :*

$$SU(3)/T = W \sqcup \bigsqcup_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,3\} \\ \varepsilon: I \rightarrow \{\pm 1\}}} (E_{I,\varepsilon}^R \sqcup E_{I,\varepsilon}^L)$$

dont les strates sont de dimensions

$$\dim E_{I,\varepsilon}^R = |I|, \quad \dim E_{I,\varepsilon}^L = |I| + 3$$

et telle que les six strates de dimension 1 (données par les $E_{\{i\}, \pm 1}^R$, avec $i = 1, 2, 3$) soient des unions de 1-cellules. Si l'on note $E_1 := E_1^\alpha \cup E_1^\beta \cup E_1^{\alpha+\beta}$ l'ensemble de ces 1-cellules, alors $\mathfrak{S}_3$ agit librement à droite sur E_1 et l'on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_3$ -modules à droite

$$\mathbb{Z}E_1 \simeq (\mathbb{Z}\mathfrak{S}_3)^3.$$

Enfin, l'application "bord"

$$d_1 : \mathbb{Z}E_1 \rightarrow \mathbb{Z}\mathfrak{S}_3$$

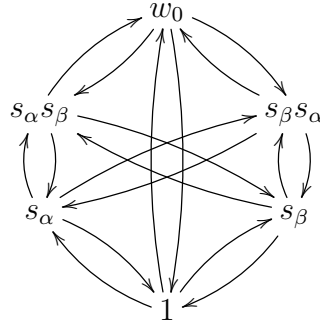
et donnée par multiplication à gauche par la matrice ligne

$$(1 - s_\alpha \quad 1 - s_\beta \quad 1 - w_0)$$

et, en particulier, on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}\mathfrak{S}_3$ -modules à droite

$$\text{coker}(d_1) \simeq H_0(SU(3)/T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Remarque 8. On peut représenter les 1-cellules ci-dessus dans le graphe GKM :



On voit immédiatement que l'argument permettant de montrer que σ donne bien une stratification de $SU(3)/T$ fonctionne encore dans le cas général :

Proposition 9. *La stratification de la Proposition-Définition 3 induit, via l'application propre $\sigma : K/T \rightarrow \mathbb{R}^{2\ell(w_0)}$, une stratification de K/T en $2 \cdot 3^{\ell(w_0)} - 1$ strates*

$$K/T = W \sqcup \bigsqcup_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, \ell(w_0)\} \\ \varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}}} (E_{I, \varepsilon}^R \sqcup E_{I, \varepsilon}^L),$$

dont les dimensions sont données par

$$\dim E_{I, \varepsilon}^R = |I| \quad \text{et} \quad \dim E_{I, \varepsilon}^L = |I| + \ell(w_0).$$

Rappelons enfin l'espoir derrière tout cela :

Conjecture 10. *Chaque strate E de la décomposition*

$$K/T = W \sqcup \bigsqcup_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, \ell(w_0)\} \\ \varepsilon : I \rightarrow \{\pm 1\}}} (E_{I, \varepsilon}^R \sqcup E_{I, \varepsilon}^L)$$

est une union de cellules de dimension $\dim E$ et ces dernières fournissent une décomposition cellulaire W -équivariante de K/T .