

POSITIVITÉ TOTALE DANS LES GROUPES RÉDUCTIFS ET LES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

ARTHUR GARNIER

ABSTRACT. Le but de ces notes est de donner un survol de la notion de positivité totale dans les groupes réductifs et, de façon plus centrale, dans leurs variétés de drapeaux, telle qu'elle fut introduite par Lusztig en 1994. Cette notion généralise aux groupes réductifs la notion de matrice totalement positive dans $GL_n(\mathbb{R})$, i.e. une matrice dont tous les mineurs sont positifs. On peut aussi parler de la partie totalement positive (resp. non-négative) $\mathcal{B}_{>0}$ (resp. $\mathcal{B}_{\geq 0}$) de la variété de drapeaux réelle déployée \mathcal{B} , formée des sous-groupes de Borel d'une forme réelle G d'un groupe réductif complexe $G_{\mathbb{C}}$. Comme d'habitude, le point de départ est la décomposition de Bruhat, qui peut être raffinée en la décomposition de Deodhar, qui s'intéresse à l'intersection de cellules de Schubert opposées. Cette décomposition fait appel à une combinatoire fine sur les expressions des éléments du groupe de Weyl, que nous allons décrire. Ces composantes admettent également des parties totalement positives, qui furent définies par Lusztig et qui, d'après les travaux de Konstanze Rietsch, Robert Marsh et Lauren Williams, sont des variétés semi-algébriques et constituent une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_{\geq 0}$. Nous verrons de plus que ces résultats se généralisent au cas des variétés de drapeaux partielles.

Dans un premier temps, après avoir rappelé les notations standard relatives aux groupes réductifs et aux variétés de drapeaux, nous définirons les notions d'expression et sous-expression dans le groupe de Weyl et le paramétrage des composantes de Deodhar qui en résulte. Nous introduirons ensuite la positivité totale dans G et \mathcal{B} , en faisant le lien avec les bases canoniques de Lusztig. Puis, nous définirons les strates de Lusztig-Rietsch dans $\mathcal{B}_{\geq 0}$, les paramètrerons via la combinatoire des expressions et étudierons la stratégie de Rietsch et Williams pour montrer qu'elles constituent une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_{\geq 0}$. Enfin, nous examinerons l'exemple simple des types A_1 et A_2 .

Part 1. Préliminaires

Considérons $G_{\mathbb{C}}$ un groupe algébrique complexe réductif connexe et simplement connexe et on en choisit une forme réelle déployée G . Puisque l'on s'intéresse aux variétés de drapeaux, on peut supposer $G_{\mathbb{C}}$ semi-simple. L'exemple standard que l'on considérera est $G = SL_n(\mathbb{R})$. On choisit aussi un tore déployé maximal T de G . On note $X(T) := \text{Hom}(T, \mathbb{G}_m(\mathbb{R}))$ le groupe des caractères de T et $\Phi \subset X(T)$ l'ensemble des racines associé. On choisit un sous-groupe de Borel $B = B^+$ contenant T . Ceci donne les ensembles Φ^+ et Φ^- des racines positives et négatives et on fixe une base Π de Φ . Le groupe de Weyl est dénoté $W = N_G(T)/T$ et on prend $w_0 \in W$ l'élément de plus grande longueur, ainsi que le sous-groupe de Borel opposé $B^- = B^{w_0} := w_0 B w_0^{-1}$. On a alors $T = B^+ \cap B^-$. On définit par ailleurs U^{\pm} le radical unipotent de B^{\pm} .

Si on indexe la base Π par un ensemble fini I et $\alpha_i \in \Pi$ est une racine simple, il existe une injection $\varphi_i : SL_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ et on pose, pour $m \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_i(m) := \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U^+ \\ y_i(m) := \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \in U^- \end{cases}$$

Date: January 14, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 20G20, 57N60, 14P25 ; Secondary 14P10, 57N80.

On a aussi

$$\forall t \in T, \alpha_i^\vee(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in T.$$

On pose enfin $U_{\alpha_i}^+ := \{x_i(m), m \in \mathbb{R}\}$ et $U_{\alpha_i}^- := \{y_i(m), m \in \mathbb{R}\}$. On dit alors que l'ensemble $\{T, B^+, B^-, (x_i, y_i)_{i \in I}\}$ est un *épinglage* de G . Dans le cas de $G = SL_n(\mathbb{R})$, le tore T est bien-entendu l'ensemble des matrices diagonales, B^+ (resp. B^-) est celui des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) et l'épinglage est bien celui auquel on pense : les morphismes φ_i sont définis par blocs. Enfin, le groupe de Weyl est $W = \mathfrak{S}_n$.

Notons $Y(T) := \text{Hom}(\mathbb{G}_m(\mathbb{R}), T)$ le groupe des cocaractères de T et considérons l'accouplement standard

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbb{Z}$$

et alors, les coefficients de la matrice de Cartan sont les $a_{i,j} = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$. Notons $s_i := s_{\alpha_i}$ la réflexion simple associée à la racine simple $\alpha_i \in \Pi$ et $S := \{s_i, i \in I\}$ l'ensemble des réflexions simples (la paire (W, S) est alors un système de Coxeter). On choisit un représentant $\dot{s}_i \in N_G(T)$ en posant

$$\dot{s}_i := \varphi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x_i(-1)y_i(1)x_i(-1)$$

et, si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_m} \in W$ est une décomposition réduite de w , alors l'élément $\cdot w := \dot{s}_{i_1} \cdots \dot{s}_{i_m} \in N_G(T)$ est indépendant de la décomposition de w choisie. Enfin, on a la relation, qui se vérifie de façon matricielle,

$$\alpha_i^\vee(t^{-1})\dot{s}_i = x_i(-t^{-1})y_i(t)x_i(-t^{-1}), \forall t \in \mathbb{R}^\times.$$

Si on a un sous-ensemble de réflexions simples $J \subset S$, on peut considérer le *sous-groupe de Coxeter parabolique* $W_J := \langle J \rangle$ engendré par J et le *sous-groupe parabolique standard* P_J , engendré par B^+ et $\{\dot{w}, w \in W_J\}$. Le groupe de Coxeter W_J possède un élément de plus grande longueur $w_J \in W_J$ et on choisit W^J un ensemble de représentants de longueurs minimales des classes de W/W_J et $W_{\max}^J := W^J w_J$. On note ensuite \mathcal{P}^J l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G conjugués à P_J . Dans ce cas, $\mathcal{B} = \mathcal{P}^\emptyset$ est l'ensemble des sous-groupes de Borel de G . Pour $g \in G$, on pose

$$g \cdot P_J := P_J^g = gP_Jg^{-1}$$

et on a une bijection naturelle

$$\begin{aligned} \phi^J &: G/P_J \rightarrow \mathcal{P}^J \\ gP_J &\mapsto g \cdot P_J \end{aligned}$$

Ceci, via la structure géométrique quotient sur G/P_J , permet de munir \mathcal{P}^J d'une structure de variété projective réelle ; et c'est en particulier le cas de $\mathcal{B} \simeq G/B$. On note enfin

$$\pi^J : \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{P}^J$$

le morphisme défini de la façon suivante : pour un sous-groupe de Borel \tilde{B} , $\pi(\tilde{B})$ est l'unique sous-groupe parabolique de type J contenant \tilde{B} .

Le point de départ de l'étude topologique de la variété de drapeaux complète G/B est la décomposition de Bruhat

$$G/B^+ = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B$$

qui, via l'isomorphisme ϕ^\emptyset , peut se réécrire

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{w \in W} (B\dot{w}) \cdot B.$$

On a aussi la décomposition opposée (parfois appelée décomposition de Birkhoff)

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{w \in W} (B^- \dot{w}) \cdot B.$$

Ces écritures constituent des décompositions cellulaires de \mathcal{B} en $|W|$ cellules, dont la plus grande est de dimension $\ell(w_0)$. On a la proposition suivante, qui sera utile dans la suite

Proposition 1. ([12], §4.1)

Si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_n} \in W$ est une écriture réduite de w , alors on peut paramétrer la cellule de Schubert $\mathring{Y}_w := B^+ \dot{w} \cdot B^+$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathring{Y}_w \\ (m_1, \dots, m_n) &\mapsto x_{i_1}(m_1)s_{i_1} \cdots x_{i_n}(m_n)s_{i_n} \cdot B^+ \end{aligned}$$

On peut s'intéresser aux intersections des cellules de Schubert, appelées *sous-variétés de Richardson*,

$$\mathcal{R}_{v,w} := B^+ \dot{w} \cdot B^+ \cap B^- \dot{v} \cdot B^+ = \mathring{Y}_v^{op} \cap \mathring{Y}_w$$

qui permettront d'obtenir une décomposition plus précise de \mathcal{B} . Kazhdan et Lusztig ont montrés (cf [7], §1) que, sur un corps algébriquement clos, $\mathcal{R}_{v,w} \neq \emptyset$ si et seulement si $v \leq w$, auquel cas il s'agit d'une variété irréductible de dimension $\ell(w) - \ell(v)$. Ces intersections seront plus simples à étudier que les cellules de Schubert, mais utiliseront une combinatoire plus fine sur le groupe de Weyl, faisant intervenir la notion d'*expression* et *sous-expression* dans W , ce que nous allons étudier maintenant.

Part 2. Sous-expressions dans W et décomposition de Deodhar

1. EXPRESSIONS RÉDUITES ET SOUS-EXPRESSIONS

Avant de regarder la positivité totale, il peut être éclairant de se pencher sur la *décomposition de Deodhar*, qui raffine celle de Bruhat et utilise les strates $\mathcal{R}_{v,w}$ introduites ci-dessus. Cette décomposition (dite de Deodhar), ne constitue pas une stratification de \mathcal{B} . On pourra trouver dans [4] un contre-exemple à ce dernier fait en type B_n . Pour ce qui suite, on renvoie le lecteur à [12], partie 3. Il s'agit de raffiner l'ordre de Bruhat, en tenant compte des expressions des éléments de w en termes de réflexions simples. On s'intéresse plus précisément aux différentes sous-expressions d'un élément $v \leq w$, où $w \in W$ est fixé. En type A_3 , considérons le groupe de Weyl $W = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle \simeq \langle (12), (23), (34) \rangle = \mathfrak{S}_4$ et les éléments

$$v := s_2 s_3 \leq s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 =: w$$

En termes d'expressions, on peut écrire

$$v = s_2 s_3 = (s_3 s_2)^2 = \underline{s_3 s_2} s_1 \underline{s_3 s_2} s_3$$

où les réflexions soulignées sont celle que l'on garde dans l'expression de w pour obtenir v . On représente ceci via les multi-uplets suivants

$$\mathbf{w} = (1, s_3, s_3 s_2, s_3 s_2 s_1, s_3 s_2 s_1 s_3, s_3 s_2 s_1 s_3 s_2, s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3)$$

et

$$\mathbf{v} = (1, s_3, s_3 s_2, s_3 s_2, s_3 s_2 s_3, s_2 s_3, s_2 s_3).$$

Remarque 1. *En suivant une idée qui me fut communiquée par Daniel Juteau et Leonardo Maltoni, il est plus lisible d'utiliser une autre notation. On écrit toute les réflexions simples intervenant dans l'expression \mathbf{w} de w choisie puis, pour l'expression \mathbf{v} de $v \leq w$, on écrit un 1 ou un 0 suivant que l'on prend la réflexion simple considérée et une flèche \uparrow si multiplier l'élément intermédiaire de W par la réflexion considérée augmente la longueur de cet élément, ou une flèche \downarrow si la longueur, au contraire, diminue. En reprenant l'exemple ci-dessus, on obtient*

\mathbf{w}	s_3	s_2	s_1	s_3	s_2	s_3
\mathbf{v}	$1 \uparrow$	$1 \uparrow$	$0 \uparrow$	$1 \uparrow$	$1 \downarrow$	$0 \downarrow$

Définition 1. *Une expression d'un élément $w \in W$ est un $(n+1)$ -uplet d'éléments de W*

$$\mathbf{w} = (w_{(0)}, w_{(1)}, \dots, w_{(n)})$$

tel que

$$w_{(0)} = 1, \quad w_{(n)} = w$$

et

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad w_{(j)} = \begin{cases} w_{(j-1)} & \text{ou} \\ w_{(j-1)}s_j & \text{pour un } s_j \in S \end{cases}$$

On peut aussi caractériser une telle expression par le n -uplet de ses facteurs

$$(w_{(1)}, w_{(1)}^{-1}w_{(2)}, \dots, w_{(n-1)}^{-1}w_{(n)}) \in (S \cup \{1\})^n.$$

On peut maintenant formaliser les propriétés des expressions et sous-expressions esquissées ci-dessus.

Définition 2. • *Pour une expression $\mathbf{w} = (w_{(0)}, \dots, w_{(n)})$, on pose*

$$\begin{cases} J_{\mathbf{w}}^+ = \{1 \leq k \leq n ; w_{(k-1)} < w_{(k)}\}, \\ J_{\mathbf{w}}^- = \{1 \leq k \leq n ; w_{(k-1)} > w_{(k)}\}, \\ J_{\mathbf{w}}^o = \{1 \leq k \leq n ; w_{(k-1)} = w_{(k)}\}. \end{cases}$$

- *L'expression \mathbf{w} est croissante si $J_{\mathbf{w}}^- = \emptyset$.*
- *L'expression \mathbf{w} est réduite si $J_{\mathbf{w}}^- = J_{\mathbf{w}}^o = \emptyset$.*
- *Si l'expression \mathbf{w} est de facteurs $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ et $v \leq w$ dans W , alors on dit que $\mathbf{v} = (v_{(0)}, \dots, v_{(n)})$ est une sous-expression de v dans \mathbf{w} si on a*

$$\forall j, \quad v_{(j)} \in \{v_{(j-1)}, v_{(j-1)}s_{i_j}\}.$$

- *Une sous-expression \mathbf{v} de \mathbf{w} est distinguée si on a*

$$\forall j, \quad v_{(j)} \leq v_{(j-1)}s_{i_j}$$

et on note alors $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$.

- *Une sous-expression $\mathbf{v} \subset \mathbf{w}$ est positive si elle est distinguée et croissante, i.e. si on a*

$$\forall j, \quad v_{(j-1)} < v_{(j-1)}s_{i_j}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\forall j, \quad v_{(j-1)} \leq v_{(j)} \leq v_{(j-1)}s_{i_j}.$$

Remarque 2. *En reformulant ceci avec le vocabulaire de la remarque 1, on dit qu'une sous-expression $\mathbf{v} \subset \mathbf{w}$ est distinguée si elle ne contient pas de $0 \downarrow$ et positive si elle ne contient pas de \downarrow .*

Le lemme suivant se prouve facilement par récurrence descendante :

Lemme 1. ([12], Lemma 3.5)

Soient $v, w \in W$ tels que $v \leq w$ et soit \mathbf{w} une expression réduite de w . Alors, il existe une unique sous-expression positive \mathbf{v}_+ de v dans \mathbf{w} .

Exemple 1. Prenons $w = w_0 = s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 \in \mathfrak{S}_4$ et $v = s_2 s_3 \leq w$. Alors, la seule sous-expression $\mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ est donnée par

$$\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1, 1, s_2, s_3) = (0 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \uparrow, 1 \uparrow)$$

et est positive. Si $v = s_2 \leq w$, on a quatre sous-expressions distinguées

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, s_2, s_2) = (0 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \uparrow, 0 \uparrow),$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, s_3, s_3, s_3, 1, s_2, s_2) = (1 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \downarrow, 1 \uparrow, 0 \uparrow),$$

$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, s_2, s_2, s_2 s_3, s_2 s_3, s_2) = (0 \uparrow, 1 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \downarrow),$$

$$\mathbf{v}_4 = (1, s_3, s_3 s_2, s_3 s_2, s_3 s_2 s_3, s_2 s_3, s_2) = (1 \uparrow, 1 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \uparrow, 1 \downarrow, 1 \downarrow).$$

Et, seule la première est positive.

2. POSITION RELATIVE DE SOUS-GROUPES DE BOREL ET COMPOSANTES DE DEODHAR

Le groupe algébrique G agit transitivement sur \mathcal{B} et on peut munir le produit $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ de l'action diagonale. Étant donnés deux sous-groupes de Borel $B_1 = g_1 \cdot B^+$ et $B_2 = g_2 \cdot B^+$, alors par la décomposition de Bruhat, il existe un unique $w \in W$ tel que $g_1^{-1} g_2 \cdot B^+ \in B^+ \dot{w} \cdot B^+$; autrement dit

$$\exists ! w \in W ; (B_1, B_2) \in G \cdot (B^+, \dot{w} \cdot B^+).$$

On dit que w est la *position relative* de (B_1, B_2) et on note à l'occasion $w = \text{pos}(B_1, B_2)$ et $B_1 \xrightarrow{w} B_2$. On a les propriétés suivantes

Proposition 2. ([12], §4.2)

- (1) On a $B_1 \xrightarrow{1} B_2$ si et seulement si $B_1 = B_2$.
- (2) Si $B_1 \xrightarrow{w} B_2$ et $g \in G$, alors $g \cdot B_1 \xrightarrow{w} g \cdot B_2$.
- (3) Si $B_1 \xrightarrow{s} B_2 \xrightarrow{s} B_3$ avec $s \in S$, alors $B_1 \xrightarrow{s} B_3$ ou alors $B_1 = B_3$.
- (4) Si $B_1 \xrightarrow{v} B_2 \xrightarrow{w} B_3$ et $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$, alors $B_1 \xrightarrow{vw} B_3$.
- (5) On a $B_1 \xrightarrow{w} B_2$ si et seulement si $B_2 \xrightarrow{w^{-1}} B_1$.

Supposons que $w \in W$ s'écrive $w = vv'$ avec $\ell(w) = \ell(v) + \ell(v')$, alors on a $v^{-1} \Phi^+ \cap \Phi^- \subset w^{-1} \Phi^+ \cap \Phi^-$, donc on a $B^+ \cap \dot{w} \cdot B^+ \subset B^+ \cap \dot{v} \cdot B^+$ et on peut définir le morphisme

$$\begin{aligned} \pi_v^w & : B^+ \dot{w} \cdot B^+ \rightarrow B^+ \dot{v} \cdot B^+ \\ & b \dot{w} \cdot B^+ \mapsto b \dot{v} \cdot B^+ \end{aligned}$$

Notons que, pour $B \in B^+ \dot{w} \cdot B^+$, alors $\pi_v^w(B)$ est caractérisé par la propriété

$$B^+ \xrightarrow{v} \pi_v^w(B) \xrightarrow{v^{-1}w} B.$$

Avec ce vocabulaire, on peut réécrire les sous-variétés de Richardson de la manière suivante

$$R_{v,w} = \{B \in \mathcal{B} ; B^+ \xrightarrow{w} B \xleftarrow{w_0 v} B^-\} = \{B \in \mathcal{B} ; B^+ \xrightarrow{w} B \xrightarrow{v^{-1}w_0} B^-\}.$$

On peut maintenant introduire les composantes de Deodhar. Soient $v \leq w$ et $\mathbf{w} = (w_{(0)}, w_{(1)}, \dots, w_{(n)})$ une expression réduite de w de facteurs $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$. Soit encore $B \in \mathcal{R}_{v,w}$. En posant $B_k := \pi_{w_{(k)}}^w(B)$, alors on a la suite de positions relatives

$$B^+ = B_0 \xrightarrow{s_{i_1}} B_1 \xrightarrow{s_{i_2}} \dots \xrightarrow{s_{i_n}} B_n = B.$$

Pour une sous-expression $\mathbf{v} = (v_{(0)}, \dots, v_{(n)})$ de v dans \mathbf{w} , on pose

$$\mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} := \{B \in \mathcal{R}_{v,w} ; \forall k, \pi_{w_{(k)}}^w(B) \in B^- v_{(k)} \cdot B^+\} = \{B \in \mathcal{R}_{v,w} ; \forall k, \pi_{w_{(k)}}^w(B) \in \mathcal{R}_{v_{(k)},w_{(k)}}\}.$$

On a alors le résultat fondamental dû à Vinay Deodhar suivant :

Théorème 1. ([2], Theorem 1.1 et [12], §4.4)

Soient $w \in W$, $B \in B^+ \dot{w} \cdot B^+$ et $\mathbf{w} = (w_{(0)}, \dots, w_{(n)})$ une expression réduite de w . Alors,

- (1) L'ensemble $\mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est non vide si et seulement si $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, auquel cas il s'agit d'une sous-variété localement fermée affine lisse de \mathcal{B} .
- (2) Si $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$, alors on a un isomorphisme de variétés

$$\mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \simeq (\mathbb{R}^\times)^{|J_{\mathbf{v}}^+|} \times \mathbb{R}^{|J_{\mathbf{v}}^-|}.$$

- (3) On a une décomposition

$$\mathcal{R}_{v,w} = \bigsqcup_{\tilde{\mathbf{v}}} \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{v}},\mathbf{w}},$$

où l'union s'étend sur les sous-expressions distinguées de v dans \mathbf{w} .

Si \mathbf{w} est une expression réduite de $w \geq v$ et $\mathbf{v}_+ \preceq \mathbf{w}$ est la sous-expression positive de v dans \mathbf{w} , alors on a $\dim(\mathcal{R}_{\mathbf{v}_+,\mathbf{w}}) = \ell(w) - \ell(v)$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{v}_+,\mathbf{w}}$ est ouvert dense dans $\mathcal{R}_{v,w}$ pour la topologie usuelle. De plus, si l'on fixe une expression réduite \mathbf{w}_0 de $w_0 \in W$, alors pour tout $w \in W$, on note $\hat{\mathbf{w}}_+$ la sous-expression positive de w dans \mathbf{w}_0 . Alors, on a

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{w \in W} \left(\bigsqcup_{\mathbf{v} \preceq \hat{\mathbf{w}}_+} \mathcal{R}_{\mathbf{v},\hat{\mathbf{w}}_+} \right).$$

On peut aussi définir $\mathcal{R}_{v,w}$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ sur \mathbb{F}_q et les utiliser pour calculer les polynômes de Kazhdan-Lusztig (voir [1], §1.3 et [12], Remark 4.3). Rappelons que les polynômes de Kazhdan-Lusztig sont définis par le résultat suivant :

Théorème 2. Il existe une unique famille de polynômes $(P_{u,v}(q))_{u,v \in W}$ dans $\mathbb{Z}[q]$ telle que

- (a) $P_{u,v}(q) = 0$ si $u \not\leq v$,
- (b) $P_{u,u}(q) = 1$,
- (c) $\deg(P_{u,v}(q)) \leq \frac{\ell(v) - \ell(u)}{2}$ si $u < v$,
- (d) Si $u \leq v$, alors on a la relation

$$q^{\ell(v) - \ell(u)} P_{u,v} \left(\frac{1}{q} \right) = \sum_{u \leq a \leq v} R_{u,a}(q) P_{a,v}(q),$$

où les $R_{u,a}$ sont les R-polynômes.

Les R-polynômes utilisés ci-dessus sont eux donnés par le résultat suivant :

Théorème 3. Il existe une unique famille $(R_{u,v}(q))_{u,v \in W}$ dans $\mathbb{Z}[q]$ telle que

- (a) $R_{u,v}(q) = 0$ si $u \not\leq v$,
- (b) $R_{u,u}(q) = 1$,
- (c) Si $s \in D(v) := \{\tilde{s} \in S ; \ell(v\tilde{s}) < \ell(v)\}$, alors on a

$$R_{u,v}(q) = \begin{cases} R_{us,vs}(q) & \text{si } s \in D(u) \\ qR_{us,vs}(q) + (q-1)R_{u,vs}(q) & \text{si } s \notin D(u) \end{cases}$$

Alors, pour un nombre primaire q , on peut calculer les polynômes de Kazhdan-Lusztig via

$$R_{v,w}(q) = |\mathcal{R}_{v,w}(\mathbb{F}_q)|$$

et ce nombre se calcule en utilisant les strates de Deodhar

$$\mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbb{F}_q) \simeq (\mathbb{F}_q^\times)^{|J_{\mathbf{v}}^o|} \times \mathbb{F}_q^{|J_{\mathbf{v}}^-|}.$$

3. PARAMÉTRAGE ET MINEURS

On va voir ici que l'on peut paramétrer les composantes de Deodhar grâce à la combinatoire des expressions dans W . On va aussi voir que l'on peut définir une notion de mineurs généralisés qui permet de caractériser les éléments des composantes de Deodhar, mais donnent aussi un nouveau paramétrage desdites composantes.

Soit \mathbf{w} une décomposition réduite de $w \in W$, de facteurs $(s_{i_1}, \dots, s_{i_n})$ et soit $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$ une sous-expression distinguée.

On pose

$$G_{\mathbf{v},\mathbf{w}} := \left\{ g = g_1 \cdots g_n \left| \begin{array}{ll} g_k = x_{i_k}(m_k) s_{i_k}^{-1} & \text{si } k \in J_{\mathbf{v}}^- \\ g_k = y_{i_k}(t_k) & \text{si } k \in J_{\mathbf{v}}^o \\ g_k = s_{i_k} & \text{si } k \in J_{\mathbf{v}}^+ \end{array} \right. , m_k \in \mathbb{R}, t_k \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

et on a un morphisme canonique

$$(\mathbb{R}^\times)^{|J_{\mathbf{v}}^o|} \times \mathbb{R}^{|J_{\mathbf{v}}^-|} \rightarrow G_{\mathbf{v},\mathbf{w}}.$$

Proposition 3. *Ceci est un isomorphisme. De plus, on a un isomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbf{v},\mathbf{w}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \\ g & \mapsto & g \cdot B^+ \end{array}$$

Considérons, pour un poids dominant $\lambda \in X(T)_+$, le G -module (rationnel) irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids λ (on peut le construire comme espace des sections globales d'un fibré en droites sur \mathcal{B} , voir [6], Part II, §2.13). Soient $\xi_\lambda \in V(\lambda)$ un vecteur primitif, $V(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in X(T)} V(\lambda)_\mu$ la décomposition de $V(\lambda)$ en sous-espaces de poids et $pr_\mu : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)_\mu$ la projection canonique. Remarquons qu'alors, $\dot{w}\xi_\lambda$ engendre $V(\lambda)_{w\lambda}$. Remarquons également que, si w fixe λ , alors w fixe aussi ξ_λ (ceci résulte du fait que le stabilisateur de λ est un sous-groupe parabolique de W , voir [12], partie 6).

Définition 3. (Mineurs généralisés, voir [12], Definition 6.2)

- Si $\eta \in V(\lambda)$, on définit $\langle \eta, \dot{w}\xi_\lambda \rangle \in \mathbb{R}$ par

$$pr_{w\lambda}(\eta) = \langle \eta, \dot{w}\xi_\lambda \rangle \dot{w}\xi_\lambda.$$

- On définit ensuite le mineur

$$\Delta_{w'\lambda}^{w\lambda}(g) := \langle g\dot{w}'\xi_\lambda, \dot{w}\xi_\lambda \rangle.$$

- L'application $\Delta_{w'\lambda}^{w\lambda} : G \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière.

Exemple 2. Si on prend $G = SL_n(\mathbb{R})$ avec l'épinglage standard, alors $\Delta_{w'\omega_i}^{w\omega_i}$ est le mineur de taille $i \times i$ standard, avec $w\omega_i$ l'ensemble des lignes et $w'\omega_i$ celui des colonnes.

Le principal intérêt de cette construction réside dans les deux résultats suivants :

Théorème 4. ([12], Corollary 6.6)

Soient \mathbf{w} une expression réduite de $w \in W$ et $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$ une sous-expression distinguée. Notons ω_i le poids fondamental associé à $\alpha_i \in \Pi$. Alors, on a

$$\mathcal{R}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} = \left\{ z\dot{w} \cdot B^+ \mid z \in U^+, \begin{array}{l} \Delta_{w^{(k)}\omega_{i_k}}^{v^{(k-1)}\omega_{i_k}}(z) = 0, \forall k \in J_{\mathbf{v}}^+ \\ \Delta_{w^{(k)}\omega_{i_k}}^{v^{(k)}\omega_{i_k}}(z) \neq 0, \forall k \in J_{\mathbf{v}}^- \end{array} \right\}$$

Théorème 5. ([12], Proposition 8.1)

Avec les mêmes notations que dans le résultat précédent, on a un isomorphisme de variétés

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}} &\rightarrow (\mathbb{R}^\times)^{|J_{\mathbf{v}}^+|} \times \mathbb{R}^{|J_{\mathbf{v}}^-|} \\ z\dot{w} \cdot B^+ &\mapsto \left(\left(\Delta_{w^{(j)}\omega_{i_j}}^{v^{(j)}\omega_{i_j}}(z) \right)_{j \in J_{\mathbf{v}}^+}, \left(\Delta_{w^{(j)}\omega_{i_j}}^{v^{(j-1)}\omega_{i_j}}(z) \right)_{j \in J_{\mathbf{v}}^-} \right) \end{aligned}$$

Part 3. Positivité totale dans G et G/B

1. DANS LE GROUPE RÉDUCTIF G

Nous allons maintenant pouvoir définir la positivité totale, tout d'abord dans le cadre des groupes réductifs, tel que Lusztig l'a introduite en 1994. D'après un théorème d'Anne-Marie Whitney, dans l'exemple $G = GL_n(\mathbb{R})$, la partie totalement positive est bien constituée des matrices totalement positives, c'est-à-dire les matrices dont tous les mineurs sont (strictement) positifs. On peut de même s'intéresser aux matrices dont les mineurs sont non-négatifs, ce qu'on appelle la partie totalement non-négative. Pour l'exposé qui suit, on se base sur [11], [12] et [15].

Pour une racine simple $\alpha_i \in \Pi$, on pose

$$U_{\alpha_i, >0}^+ := \{x_i(m), m \in \mathbb{R}_{>0}\} = \{x_i(m), m > 0\}.$$

On définit de même $U_{\alpha_i, >0}^- := \{y_i(m), m > 0\}$, ainsi que

$$T_{>0} := \{t \in T; \forall \chi \in X(T), \chi(t) > 0\}.$$

On considère enfin $G_{\geq 0}$ le semi-groupe engendré par $T_{>0}$ et $U_{\alpha_i}^\pm$ pour $i \in I$. On définit aussi

$$U_{\geq 0}^\pm := G_{\geq 0} \cap U^\pm.$$

Ensuite, si $w = s_{i_1} \cdots s_{i_m} \in W$ est une écriture réduite, alors on pose

$$\begin{cases} U^+(w) := \{x_{i_1}(t_1) \cdots x_{i_m}(t_m), t_i \in \mathbb{R}_{>0}\} = U_{\geq 0}^+ \cap B^- \dot{w} B^- \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}^{\ell(w)}, \\ U^-(w) := \{y_{i_1}(t_1) \cdots y_{i_m}(t_m), t_i \in \mathbb{R}_{>0}\} = U_{\geq 0}^- \cap B^+ \dot{w} B^+ \simeq \mathbb{R}_{>0}^{\ell(w)}. \end{cases}$$

On a alors l'identité

$$U_{\geq 0}^\pm = \bigsqcup_{w \in W} U^\pm(w),$$

ainsi que

$$\overline{U^\pm(w)} = \bigsqcup_{v \leq w} U^\pm(v).$$

En particulier, il vient

$$\overline{U^\pm(w_0)} = U_{\geq 0}^\pm$$

et il est alors naturel de poser $U_{>0}^\pm := U^\pm(w_0)$. On définit enfin

$$G_{>0} := U_{>0}^\pm T_{>0} U^\mp$$

et on a (voir [11], Lemma 2.3) $G_{\geq 0} = U_{\geq 0}^\pm T_{>0} U_{\geq 0}^\mp = \overline{G_{>0}}$. Dans [9], Lusztig nous fait également remarquer que $U_{\geq 0}^\pm$ et $G_{\geq 0}$ sont contractiles, ce qui est un premier indice nous indiquant que les parties totalement non-négatives sont nettement plus aisées à étudier.

2. DANS LA VARIÉTÉ DE DRAPEAUX G/B

Avant toute chose, signalons que ce que l'on appellera *stratification* désignera le concept suivant :

Définition 4. *On appelle stratification d'une variété algébrique X toute famille finie $(X_s)_{s \in \mathcal{S}}$ de sous-variétés localement fermées lisses et connexes de X , appelées strates, telle que l'on ait*

$$X = \bigsqcup_{s \in \mathcal{S}} X_s$$

et

$$\forall s, t \in \mathcal{S}, \overline{X_s} \cap X_t \in \{\emptyset, X_t\}.$$

Nous allons définir ici ce que nous appelons les *strates de Lusztig-Rietsch* (ou *strates positives de Richardson*). On renvoie à [10] et [15] pour des références.

Posons

$$\mathcal{B}_{>0} := \{y \cdot B^+, y \in U_{>0}^-\} = \{x \cdot B^+, x \in U_{>0}^+\},$$

l'égalité affirmée ci-dessus provient du théorème 8.7 de [11]. On pose également

$$\mathcal{B}_{\geq 0} := \overline{\mathcal{B}_{>0}},$$

l'adhérence étant entendue au sens de Zariski. Enfin, on définit les *strates*

$$\mathcal{R}_{v,w}^{>0} := \mathcal{B}_{\geq 0} \cap \mathcal{R}_{v,w}.$$

Lusztig conjecture dans [11] que les $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ sont semi-algébriques, ce qui fut prouvé par Konstanze Rietsch dans [13].

On reprend les notations de la partie 2. Posons

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}} : (\mathbb{C}^\times)^{|J_{\mathbf{v}_+}^o|} &\rightarrow \mathcal{R}_{v,w} \\ (t_r)_{r \in J_{\mathbf{v}_+}^o} &\mapsto g_1 \cdots g_m \cdot B^+ \end{aligned}$$

où

$$g_r = \begin{cases} s_{i_r} & \text{si } r \in J_{\mathbf{v}_+}^+ \\ y_{i_r}(t_r) & \text{si } r \in J_{\mathbf{v}_+}^o \end{cases}$$

On a vu que $\phi_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}$ est un plongement, d'image $\mathcal{R}_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}$, la strate de Deodhar.

Théorème 6. ([12], Theorem 11.3)

On a un isomorphisme d'ensemble semi-algébriques

$$\phi_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{>0} : (\mathbb{R}_{>0})^{|J_{\mathbf{v}_+}^o|} \rightarrow \mathcal{R}_{v,w}^{>0}.$$

Notons qu'on a aussi la relation de Rietsch, de type Bruhat (voir [14], Theorem 4.1) :

$$\overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}} = \bigsqcup_{v \leq v' \leq w' \leq w} \mathcal{R}_{v',w'}^{>0}.$$

3. LIEN AVEC LES BASES CANONIQUES DE LUSZTIG

Dans cette section, on suppose que G est *simplement lacé*, c'est-à-dire que le diagramme de Dynkin de G ne contient pas d'arête double (essentiellement, ceci concerne les groupes de type A , D et E , nous y reviendrons).

Soit $V(\lambda)$ un module irréductible de plus haut poids $\lambda \in X(T)_+$. On a que $x_i(a)$ agit sur $V(\lambda)$ par

$$\exp(ae_i) : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$$

et $y_i(a)$ agit par

$$\exp(af_i) : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda),$$

où $\{e_i, f_i, h_i, i \in I\}$ est un système de générateurs de Serre de $\mathbb{U} := \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G . Si $\xi_\lambda \in V(\lambda)$ est un vecteur primitif, alors on a $x_i(a)\xi_\lambda = \xi_\lambda$ et $t\xi_\lambda = \lambda(t)\xi_\lambda$, pour tout $t \in T$.

On va faire une petite parenthèse sur les bases canoniques de Lusztig, dont on pourra trouver un traitement dans [16]. Notons $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ la $\mathbb{Q}(q)$ -algèbre engendré par les symboles E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} , pour $i \in I$, sujets aux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i K_i^{-1} = 1 \\ K_i K_j = K_j K_i \\ K_i E_j = q a_{i,j} E_j K_i \\ K_i K_j = q^{-a_{i,j}} F_j K_i \\ E_i F_j - F_j E_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \\ E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \\ E_i E_j = E_j E_i \text{ si } a_{i,j} = 0 \\ F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \text{ si } a_{i,j} = -1 \\ F_i F_j = F_j F_i \text{ si } a_{i,j} = 0 \end{array} \right.$$

où $(a_{i,j})$ est la matrice de Cartan de \mathfrak{g} . Il s'agit donc d'une déformation de l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} . On définit aussi

$$\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}_q(\mathfrak{n}^-) := \langle E_i, i \in I \rangle \leq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}),$$

où $\mathfrak{n}^- = \text{Lie}(U^-) = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha$. On note alors \mathbb{B} la base canonique de Lusztig de $\mathcal{U}_q^-(\mathfrak{g})$. Une propriété fondamentale de \mathbb{B} est que, si $\lambda \in X(T)_+$, alors l'ensemble $\mathcal{B}(\lambda) := \{b\xi_\lambda, b \in \mathbb{B}\}$ est une base de $V(\lambda)$ contenant ξ_λ . Un point crucial dans l'approche de Rietsch ([13]) est le résultat fondamental de positivité suivant :

Théorème 7. ([11], Proposition 8.17)

Si G est simplement lacé et $B \in \mathcal{B}$, alors $B \in \mathcal{B}_{\geq 0}$ si et seulement si l'unique droite B -stable de $V(\lambda)$ est engendrée par un vecteur $v \in V(\lambda)_{\geq 0} := \sum_{b \in \mathcal{B}(\lambda)} \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot b$.

On a aussi

Théorème 8. ([15], Theorem 3.3 & Remark 3.4)

Les coefficients des matrices de $x_i(a)$ et $y_i(a) : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$ dans la base $\mathcal{B}(\lambda)$ sont des polynômes à coefficients positifs en a . En particulier, si $g \in G_{\geq 0}$, alors les coefficients de la matrice dans $\mathcal{B}(\lambda)$ de $g : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$ sont dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Ces faits permettront de montrer que les $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ forment une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_{\geq 0}$ (voir [15]).

Remarque 3. Rappelons que ce qui précède n'est valable que dans les conditions d'application du théorème 7, i.e. si G est simplement lacé. Dans ce qui suit, pour traiter le cas général, on peut se ramener au cas simplement lacé et utiliser les résultats précédents de la façon suivante :

Il existe un groupe simplement lacé \hat{G} , un automorphisme réel τ de \hat{G} et un épinglage $\{\hat{T}, \hat{B}^+, \hat{B}^-, (x_i, y_i)_{i \in \hat{I}}\}$ de \hat{G} vérifiant les propriétés suivante :

- (1) Il existe une permutation σ de \hat{I} préservant les composantes connexes du diagramme de Dynkin de \hat{G} telle que, si j et j' sont dans la même orbite sous σ , alors ils ne sont pas reliés par une arête.
- (2) L'automorphisme τ est déterminé par $\tau(\hat{T}) = \hat{T}$ et par $\tau(x_i(m)) = x_{\sigma(i)}(m)$ et $\tau(y_i(m)) = y_{\sigma(i)}(m)$.

Si on note \bar{I} l'ensemble des orbites sous l'action de σ et si $\bar{i} \in \bar{I}$, alors on pose

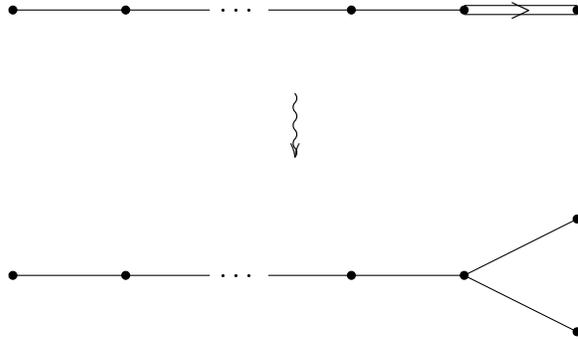
$$x_{\bar{i}}(m) := \prod_{i \in \bar{i}} x_i(m), \quad y_{\bar{i}}(m) := \prod_{i \in \bar{i}} y_i(m)$$

et on a

$$\hat{G}^\tau \stackrel{\mathbb{R}}{\simeq} G.$$

La plus simple manière de voir qu'un tel couple (\hat{G}, τ) existe est de supposer G semi-simple et le décomposer en produit de groupes simples. On regarde ensuite le cas d'un groupe simple, type par type. L'idée est de "déplier" le diagramme de Dynkin de G .

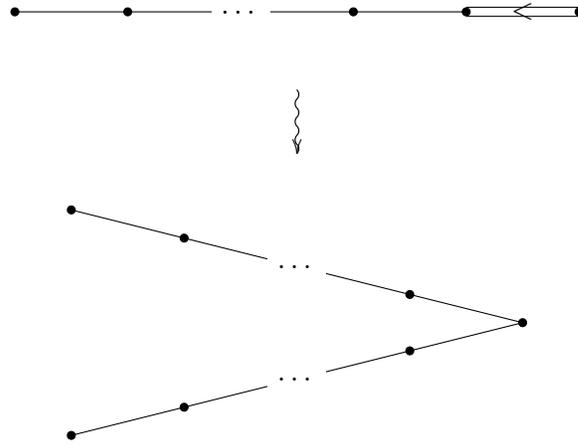
En type B_n :



Ce qui s'écrit de manière synthétique

$$B_n = D_{n+1}^\tau.$$

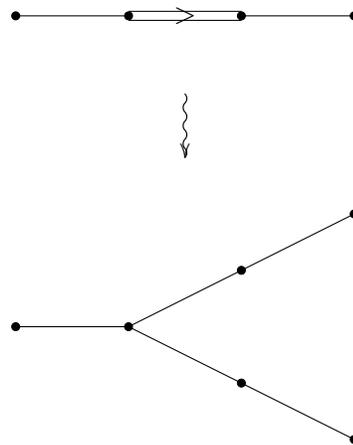
En type C_n :



Ce qui s'écrit

$$C_n = A_{2n-1}^\tau.$$

En type F_4 :



Ce qui s'écrit

$$F_4 = E_6^\tau.$$

En type G_2 :



Ce qui s'écrit

$$G_2 = D_4^\tau.$$

Exemple 3. De façon plus explicite, en type C_n : Considérons la matrice de taille $2n \times 2n$

$$S := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

et posons

$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R}) := \{x \in \mathfrak{gl}_n ; {}^t x S + S x = 0\}.$$

Définissons

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{sl}_{2n} &\rightarrow \mathfrak{sl}_{2n} \\ x &\mapsto S^{-1}(-{}^t x)S \end{aligned}$$

Alors, $\tau \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}_{2n})$ et on a

$$\mathfrak{sp}_{2n} = \mathfrak{sl}_{2n}^\tau.$$

Part 4. Paramétrage des strates de Lusztig-Rietsch et décomposition cellulaire de $(G/B)_{\geq 0}$

1. VARIÉTÉS TORIQUES

Pour montrer que les $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ forment une décomposition cellulaire de $\mathcal{B}_{\geq 0}$ et préciser les applications d'attachement, la stratégie de Rietsch et Williams consiste à construire des *variétés toriques* à l'aide de la combinatoire des expressions dans W et à appliquer une recette standard permettant de produire des variétés toriques à partir d'un réseau. Pour ce qui suit, on pourra consulter le §4 de [15].

Définition 5. Dans la suite, ce que nous appellerons une variété torique sera une variété algébrique complexe irréductible contenant un ouvert de Zariski U isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^n$ et tel que l'action naturelle $(\mathbb{C}^\times)^n \curvearrowright U$ s'étende en une action algébrique $(\mathbb{C}^\times)^n \curvearrowright X$.

Construction : Soit $S := \{m_i, i = 1, \dots, \ell\} \subset \mathbb{Z}^n$, où l'on voit \mathbb{Z}^n comme le groupe des caractères du tore $(\mathbb{C}^\times)^n$. Pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ et $\underline{m}_i = (m_{i_1}, \dots, m_{i_n}) \in \mathbb{Z}^n$, on pose $\underline{x}^{m_i} := x_1^{m_{i_1}} x_2^{m_{i_2}} \dots x_n^{m_{i_n}} \in \mathbb{C}^\times$ et soit

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{C}^\times)^n &\rightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}(\mathbb{C}) \\ \underline{x} &\mapsto [\underline{x}^{m_1} : \dots : \underline{x}^{m_\ell}] \end{aligned}$$

On considère alors la variété torique $X_S := \overline{\text{im } \phi}$ (l'adhérence est entendue au sens de Zariski). On note également $X_S(\mathbb{R}) := X_S \cap \mathbb{P}^{\ell-1}(\mathbb{R})$, $X_S^{>0} := \phi(\mathbb{R}_{>0}^n)$ et $X_S^{\geq 0} := \overline{X_S^{>0}}$, l'adhérence étant prise dans $X_S(\mathbb{R})$.

Exemple 4. Si on prend pour S l'ensemble des sommets du simplexe standard, alors on a $X_S^{>0} = (\mathbb{P}^{\ell-1}(\mathbb{R}))_{>0}$ et $X_S^{\geq 0} = (\mathbb{P}^{\ell-1}(\mathbb{R}))_{\geq 0}$.

Remarque 4. Si on note $P := \text{Conv}(S)$ l'enveloppe convexe de S , alors on a un homéomorphisme

$$\phi|_{X_S^{\geq 0}} : X_S^{\geq 0} \xrightarrow{\sim} P$$

et en particulier, $X_S^{\geq 0}$ est homéomorphe à une boule fermée.

2. VARIÉTÉ TORIQUE ASSOCIÉE AU PARAMÉTRAGE D'UNE CELLULE ET DÉCOMPOSITION

On suit encore [15]. Le point-clef réside dans la proposition suivante :

Proposition 4. ([15], Proposition 5.1)

Il existe un plongement $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ préservant la positivité et telle que la composée

$$i \circ \phi_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{>0} : (\mathbb{R}_{>0})^{J_{\mathbf{v}_+}^0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{v,w}^{>0} \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$$

soit de la forme

$$\underline{t} = (t_r)_{r \in J_{\mathbf{v}_+}^0} \mapsto [p_1(\underline{t}) : \dots : p_{N+1}(\underline{t})],$$

où les p_j sont des polynômes à coefficients positifs.

Remarque 5. Pour la preuve, on commence par se ramener au cas où G est simplement lacé et, pour ce cas, on peut utiliser la base canonique de Lusztig et les théorèmes 7 et 8, dans le cas où $\lambda = \rho$ est la demi-somme des racines positives.

De ceci, on tire le

Théorème 9. (Rietsch-Williams, 2008, voir [15], Corollary 5.2)

- Il existe une application continue $\tau_{>0} : X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{>0} \rightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ qui s'étend continûment à l'adhérence pour donner

$$\tau_{\geq 0} : X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0} \rightarrow \overline{\tau_{>0}(X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{>0})}$$

et on a

$$\overline{\tau_{>0}(X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{>0})} = i(\overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}}) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}}.$$

- La résultante

$$X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0} \rightarrow \overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}}$$

est surjective, un isomorphisme sur les parties positives et envoie le bord de $X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0}$ sur celui de $\overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}}$.

- Puisque $X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0}$ est homéomorphe à une boule fermée, ceci donne une application de recollement pour la cellule $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ de $\mathcal{B}_{\geq 0}$.

Corollaire 1. ([15], Theorem 1.1)

La partie totalement positive $\mathcal{B}_{\geq 0}$ est un CW-complexe, de cellules $\mathcal{R}_{v,w}^{>0}$ et dont les applications d'attachement sont induites par les $\tau_{\geq 0} : X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0} \rightarrow \overline{\mathcal{R}_{v,w}^{>0}}$.

3. CAS DES VARIÉTÉS PARTIELLES G/P

On peut généraliser la notion de positivité totale aux variétés partielles $\mathcal{P}^J \simeq G/P_J$, ainsi que la décomposition cellulaire qui lui est liée. On pourra consulter [14] et [15]. Fixons

$J \subset S$ et considérons la variété partielle \mathcal{P}^J . Ici aussi, il nous faut utiliser des outils combinatoires fins sur le groupe de Weyl. Pour $x, u, w \in W$ avec $x \in W_{\max}^J$, $w \in W^J$ et $u \in W_J$. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{x,u,w}^J &:= \{P \in \mathcal{P}^J ; \exists B_L, B_R \in \mathcal{B} ; B_L, B_R \leq P, B^+ \xrightarrow{w} B_L \xrightarrow{u} B_R \xrightarrow{x^{-1}w_0} B^-\} \\ &= \pi^J(\mathcal{R}_{x,wu}) = \pi^J(\mathcal{R}_{xu^{-1},w}). \end{aligned}$$

En particulier, on a $\mathcal{P}_{x,u,w}^J \neq \emptyset$ si et seulement si $x \leq wu$ et dans ce cas, $\mathcal{P}_{x,u,w}^J$ est lisse et de dimension $\ell(w) + \ell(u) - \ell(x)$. Soit aussi

$$Q^J := \{(x, u, w) \in W_{\max}^J \times W_J \times W^J ; x \leq wu\}$$

et définissons la relation binaire \leq par

$$(x', u', w') \leq (x, u, w) \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \exists u'_1, u'_2 \in W_J ; u' = u'_1 u'_2, \ell(u') = \ell(u'_1) + \ell(u'_2) \\ \text{et} \\ xu^{-1} \leq x' u'^{-1} \leq w' u'_1 \leq w \end{cases}$$

On pose encore

$$\mathcal{P}_{>0}^J := \pi^J(\mathcal{B}_{>0}), \quad \mathcal{P}_{\geq 0}^J := \pi^J(\mathcal{B}_{\geq 0}) = \overline{\mathcal{P}_{>0}^J},$$

la dernière égalité résultant du fait que π^J est fermée. On pose enfin

$$\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J := \mathcal{P}_{x,u,w}^J \cap \mathcal{P}_{\geq 0}^J = \pi^J(\mathcal{R}_{x,wu}^{>0}) = \pi^J(\mathcal{R}_{xu^{-1},w}^{>0}) \simeq \mathcal{R}_{x,wu}^{>0} \simeq \mathbb{R}_{>0}^{\ell(w)+\ell(u)-\ell(x)}.$$

De par leur définition, les $\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J$ sont des cellules et sont les candidats de la décomposition recherchée.

Théorème 10. (Rietsch, 2005, voir [14], Theorem 6.1)

On a la relation de type Bruhat

$$\overline{\mathcal{P}_{x,u,w}^J} = \bigsqcup_{(x',u',w') \leq (x,u,w)} \mathcal{P}_{x',u',w'}^J$$

et on a aussi

$$\mathcal{P}^J = \bigsqcup_{(x,u,w) \in Q^J} \mathcal{P}_{x,u,w}^J.$$

Par ailleurs, les relations analogues sont vraies pour les parties totalement positives

$$\overline{\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J} = \bigsqcup_{(x',u',w') \leq (x,u,w)} \mathcal{P}_{x',u',w';>0}^J$$

et, en particulier

$$\mathcal{P}_{\geq 0}^J = \bigsqcup_{(x,u,w) \in Q^J} \mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J.$$

Ici, on peut construire une application d'attachement pour la cellule $\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J$ dans $\mathcal{P}_{\geq 0}^J$ via

$$\pi^J \circ \tau_{\geq 0} : X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0} \rightarrow \overline{\mathcal{R}_{x,wu}^{>0}} \rightarrow \overline{\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J}$$

et ce, car on a un homéomorphisme $\pi^J : \mathcal{R}_{x,wu}^{>0} \rightarrow \mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J$ et on obtient le

Théorème 11. (Rietsch-Williams, 2008, voir [15])

La variété partielle $\mathcal{P}_{\geq 0}^J$ est un CW-complexe dont les cellules sont les $\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J$ et dont les applications d'attachement sont induites par les $\pi^J \circ \tau_{\geq 0} : X_{\mathbf{v}_+, \mathbf{w}}^{\geq 0} \rightarrow \overline{\mathcal{P}_{x,u,w;>0}^J}$.

Part 5. Exemples en petits types A

Nous allons ici décrire explicitement les parties totalement positives, les ensembles qui y sont liés et donner les décompositions cellulaires considérées ci-dessus en types A_1 et A_2 . Ceci nous permettra d'illustrer les idées mises en jeu par Lusztig et Rietsch.

1. LE TYPE A_1

Considérons le groupe $G = SL_2(\mathbb{R})$. La seule racine positive est notée α :

$$\begin{array}{ccc} & -\alpha & \\ & \longleftarrow \bullet \longrightarrow & \\ & \alpha & \end{array}$$

Le groupe de Weyl est $W = \{1, s_\alpha\} \simeq \mathfrak{S}_2$ et on munit G de l'épinglage standard $\varphi_\alpha = id$:

$SL_2 \xrightarrow{\sim} G$. On a aussi

$$U_\alpha^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, U_\alpha^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ainsi que

$$U_{\alpha, > 0}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t > 0 \right\}$$

et de même avec $U_{\alpha, > 0}^-$. Enfin, on a

$$T_{> 0} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, t > 0 \right\}.$$

Le semi-groupe $G_{\geq 0}$ est engendré par $U_{\alpha, > 0}^\pm$ et $T_{> 0}$; autrement dit

$$G_{\geq 0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) ; a, b, c, d \geq 0 \right\}$$

et on a

$$U_{\geq 0}^+ = G_{\geq 0} \cap U^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \geq 0 \right\}.$$

Par ailleurs, on retrouve bien le fait que

$$U_{\alpha, > 0}^+ = U^+(s_\alpha) = U_{\geq 0}^+ \cap B^- \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B^- \text{ et } U_{\geq 0}^+ = \overline{U^+(s_\alpha)}.$$

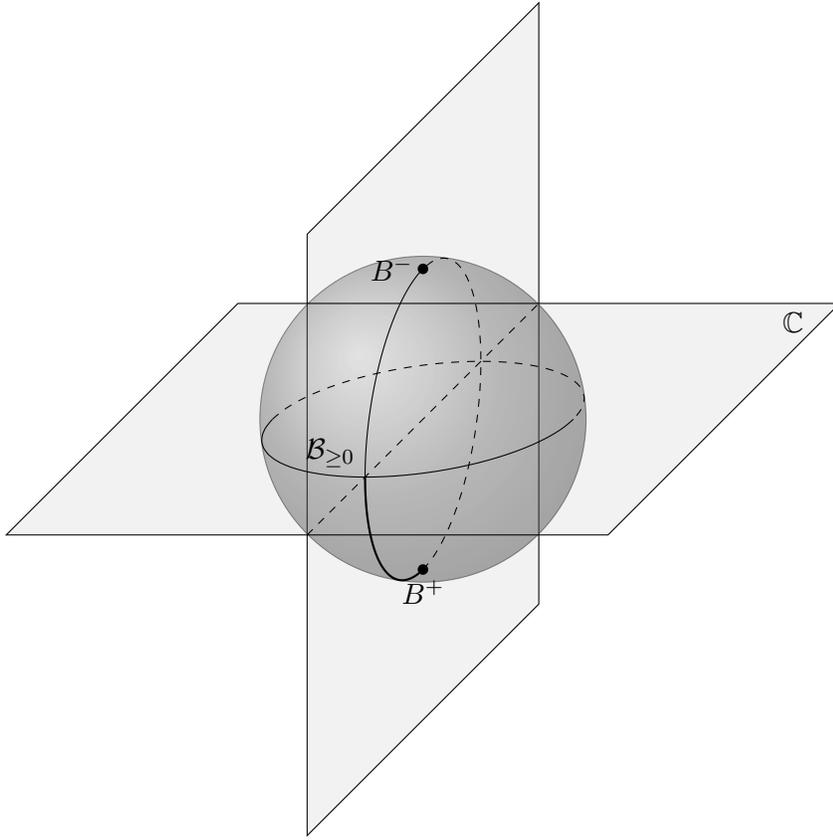
On a $\mathcal{B}_{> 0} = \{y \cdot B^+, y \in U_{> 0}^-\}$ et on rappelle qu'on a l'identification

$$\begin{aligned} (SL_2(\mathbb{C})/B) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B &\mapsto [a : c] \end{aligned}$$

De même, on a l'identification

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

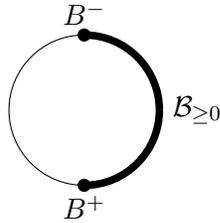
Sous cette identification, on a $\mathcal{B}_{> 0} = \{[1 : t], t > 0\}$. En utilisant la projection stéréographique, on identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à la sphère \mathbb{S}^2 . Via cette identification, la variété de drapeaux $SL_2(\mathbb{C})/B$ se représente comme suit :


 FIGURE 1. La variété SL_2/B , contenant \mathcal{B}

Dans cette figure, le plan vertical, intersecté avec la sphère, donne la variété réelle \mathcal{B} , qui s'identifie donc bien à la droite projective réelle. La seule composante de Deodhar non triviale est $\mathcal{R}_{1,s_\alpha} \simeq \mathbb{R}^\times$ qui se représente comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, privée des pôles et la décomposition de Deodhar s'écrit

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_2} \left(\bigsqcup_{v \preceq \widehat{w}_+} \mathcal{R}_{v, \widehat{w}_+} \right) = \{B^+\} \sqcup \{B^-\} \sqcup \mathcal{R}_{1,s_\alpha} = \{B^+\} \sqcup \{B^-\} \sqcup \mathbb{R}^\times.$$

D'autre part, on a la partie totalement positive. La décomposition de Lusztig-Rietsch est


 FIGURE 2. La partie totalement non-négative $\mathcal{B}_{\ge 0}$

donnée par

$$\mathcal{B}_{\ge 0} = \{B^+\} \sqcup \{B^-\} \sqcup \mathcal{R}_{1,s_\alpha}^{>0}$$

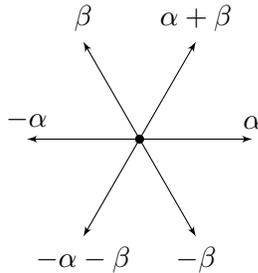
et on a le paramétrage

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{>0} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{1,s_\alpha}^{>0} \\ t &\mapsto y_\alpha(t) \cdot B^+ \end{aligned}$$

Remarque 6. Dans ce cas très simple, les polynômes de Kazhdan-Lustig sont très facile à calculer à partir des R -polynômes, qui sont tous identiquement égaux à 0 ou 1 excepté $R_{1,s_\alpha}(q) = q-1$. Cette dernière identité se trouve avec $R_{1,s_\alpha}(q) = |\mathcal{R}_{1,s_\alpha}(\mathbb{F}_q)|$ et $\mathcal{R}_{1,s_\alpha}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{F}_q^\times$. De plus, la décomposition $\mathcal{B}_{\mathbb{F}_q} = \{B^+\} \sqcup \{B^-\} \sqcup \mathcal{R}_{1,s_\alpha}(\mathbb{F}_q) = pt \sqcup pt \sqcup \mathbb{F}_q^\times$ redonne $|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{B}_{\mathbb{F}_q}| = 1 + 1 + (q-1) = q+1$.

2. LE TYPE A_2

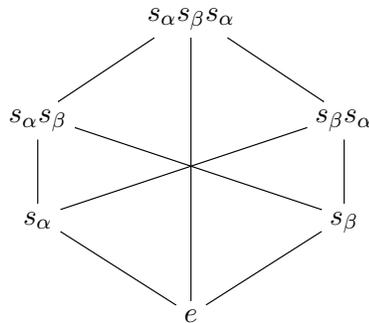
Examinons à présent le cas de $G = SL_3(\mathbb{R})$. Ici, le système de racine est représenté par



Le groupe de Weyl est donné par

$$W = \langle s_\alpha, s_\beta \mid s_\alpha^2 = s_\beta^2 = 1, s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$$

et on a $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta$. Un outil combinatoire important qui réapparaîtra dans la décomposition de Lusztig-Rietsch et le graphe GKM (pour Goresky-Kottwitz-MacPherson), qui occupe déjà une place de choix dans l'étude de la cohomologie T -équivariante de G/B (voir [5]). Nous ne rappellerons pas sa définition ici (consulter la partie 3 de [5]) ; signalons simplement qu'il est donné par



On choisit encore l'épinglage standard : par exemple

$$\varphi_\alpha : \begin{array}{ccc} SL_2 & \hookrightarrow & G \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Et ensuite, on a

$$U_{\geq 0}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \geq 0, xz \geq y \right\},$$

ainsi que

$$U_{>0}^+ = U^+(w_0) = \{x_\alpha(t_1)x_\beta(t_2)x_\alpha(t_3), t_j > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t_1 + t_3 & t_1 t_2 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t_j > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z > 0, xz > y \right\}$$

et on vérifie par calculs directs que $U^+(w_0) = U_{\geq 0}^+ \cap B^- w_0 B^-$. On a encore

$$U^+(s_\alpha s_\beta) = \{x_\alpha(t_1)x_\beta(t_2), t_j > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y > 0 \right\},$$

$$U^+(s_\beta s_\alpha) = \{x_\beta(t_1)x_\alpha(t_2), t_j > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y > 0 \right\},$$

$$U^+(s_\alpha) = \{x_\alpha(t), t > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t > 0 \right\},$$

$$U^+(s_\beta) = \{x_\beta(t), t > 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t > 0 \right\}$$

et on peut déterminer de même les $U^-(w)$.

Nous allons maintenant déterminer les strates de Lusztig-Rietsch et les inspecter de près, afin de savoir comment elles s'organisent au sein de $\mathcal{B}_{\geq 0}$. Commençons par trouver les représentants w des éléments du groupe de Weyl. Vu l'épinglage choisi on trouve, par calculs directs,

$$s_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, s_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_\alpha s_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_\beta s_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer que

$$i \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} = B^+, s_\alpha \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}, s_\beta \cdot B^+, s_\beta \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\},$$

$$s_\alpha s_\beta \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \right\}, s_\beta s_\alpha \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}, w_0 \cdot B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} = B^-.$$

Déterminons maintenant quelques paramétrages des strates de Lusztig-Rietsch. On fixe l'expression réduite de w_0 suivante

$$\mathbf{w}_0 = (1, s_\alpha, s_\alpha s_\beta, s_\alpha s_\beta s_\alpha).$$

- Si $v = s_\alpha$, on considère la sous-expression positive $\mathbf{s}_\alpha = (1, 1, 1, s_\alpha) = (0 \uparrow, 0 \uparrow, 1 \uparrow)$ et alors $|J_{\mathbf{s}_\alpha}^o| = 2$. On a de plus

$$\phi_{\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{w}_0}^{>0} : (\mathbb{R}_{>0})^2 \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{s}_\alpha, w_0}^{>0}$$

$$(t, t') \mapsto y_\alpha(t)y_\beta(t')s_\alpha \cdot B^+$$

soit,

$$\phi_{\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{w}_0}^{>0}(t, t') = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -t & 0 \\ t' & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^+.$$

- Si $v' = s_\beta s_\alpha$, on prend la sous-expression positive $\mathbf{v}' = (1, 1, s_\beta, s_\beta s_\alpha) = (0 \uparrow, 1 \uparrow, 1 \uparrow)$ et on a

$$\phi_{\mathbf{v}', \mathbf{w}_0}^{>0} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{R}_{s_\beta s_\alpha, w_0}^{>0} \\ t \mapsto y_\alpha(t) \dot{s}_\beta \dot{s}_\alpha \cdot B^+$$

soit

$$\phi_{\mathbf{v}', \mathbf{w}_0}^{>0}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -t & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B^+.$$

- Pour la sous-expression triviale $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1) = (0 \uparrow, 0 \uparrow, 0 \uparrow)$, on a

$$\phi_{\mathbf{1}, \mathbf{w}_0}^{>0} : \mathbb{R}_{>0}^3 \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbf{1}, w_0}^{>0} \\ (x, y, z) \mapsto y_\alpha(x) y_\beta(y) y_\alpha(z) \cdot B^+$$

soit

$$\phi_{\mathbf{1}, \mathbf{w}_0}^{>0}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ xy & y & 1 \end{pmatrix} \cdot B^+.$$

- Un autre exemple : en prenant $\mathbf{w} := (1, s_\alpha, s_\alpha s_\beta)$ et $v = s_\alpha \leq w$, on considère la sous-expression positive $\mathbf{v} := (1, s_\alpha, s_\alpha) = (1 \uparrow, 0 \uparrow)$ et on a

$$\phi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^{>0} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{R}_{s_\alpha, s_\alpha s_\beta}^{>0} \\ t \mapsto \dot{s}_\alpha y_\beta(t) \cdot B^+$$

soit

$$\phi_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}^{>0}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \cdot B^+.$$

On peut continuer ces calculs et faire varier les paramètres pour trouver le bord d'une strate et ainsi trouver comment elles s'organisent entre elles. On obtient dans un premier temps la figure suivante, dans laquelle les cellules de dimension 0 (resp. 1, 2) sont représentées par des points (resp. par des segments, des surfaces délimitées par des segments). Les notations encadrées désignent les 2-cellules et les deux 1-cellules en pointillés sont censées être recollées. Remarquons que l'on retrouve une copie du graphe de GKM dans cette figure, ce qui n'est certainement pas anodin. Mentionnons également que, même s'il présente moins d'intérêt, on avait aussi une copie du graphe de GKM de type A_1 dans le cas précédent.

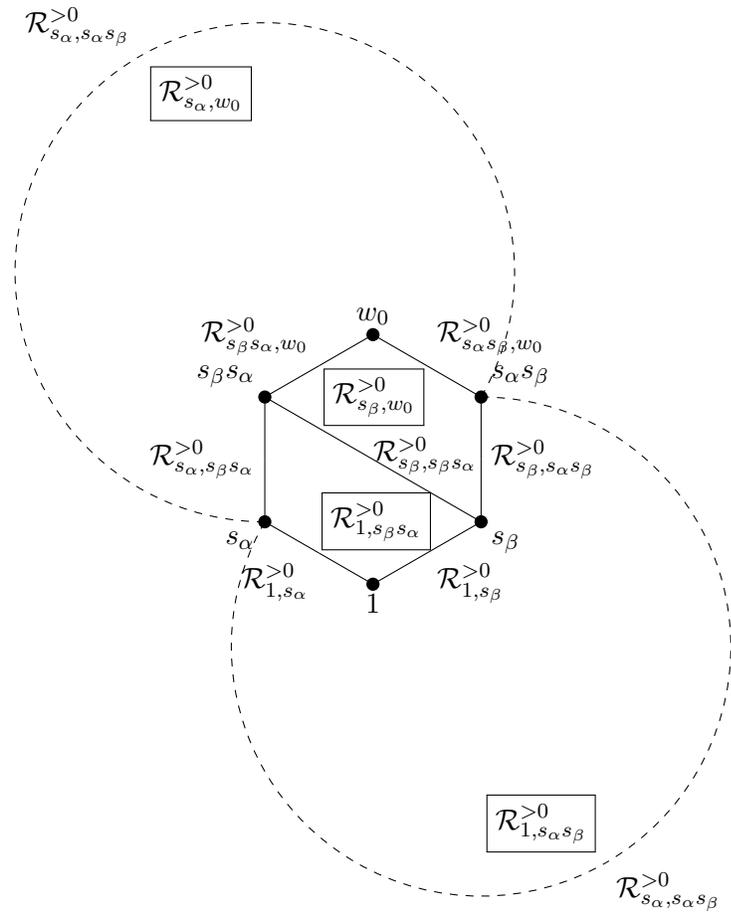


FIGURE 3. Représentation plane de $(SL_3(\mathbb{R})/B)_{\geq 0}$

On peut représenter ceci de façon plus élégante et concise et dans laquelle l'unique 3-cellule est également visible.

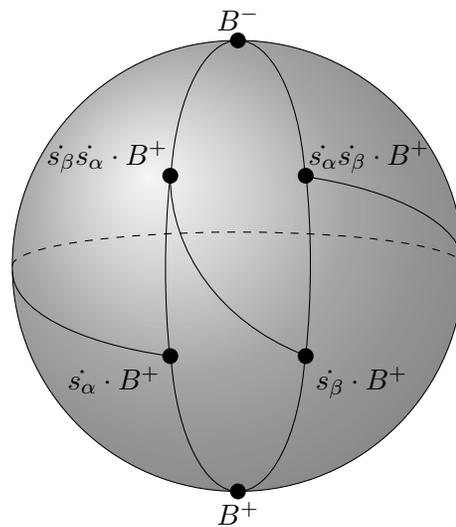


FIGURE 4. Décomposition cellulaire de $(SL_3(\mathbb{R})/B)_{\geq 0}$ (voir [14], figure 1)

3. CAS DE LA VARIÉTÉ INCOMPLÈTE $\mathcal{P}^{\{s_\alpha\}}$ EN TYPE A_2

Considérons à nouveau le cas de $G = SL_3(\mathbb{R})$. On pose $J_\alpha := \{s_\alpha\} \subset \{s_\alpha, s_\beta\} =: S$. On a alors $W_{J_\alpha} = \{1, s_\alpha\} \simeq \mathfrak{S}_2$, $W^{J_\alpha} = \{1, s_\beta, s_\alpha s_\beta\}$ et $W_{\max}^{J_\alpha} = \{s_\alpha, s_\beta s_\alpha, w_0\}$ et alors

$$Q^{J_\alpha} = \{(x, u, w) \in W_{\max}^{J_\alpha} \times W_{J_\alpha} \times W^{J_\alpha} ; x \leq wu\}$$

$$= \{(s_\alpha, 1, s_\alpha s_\beta), (s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\alpha s_\beta), (s_\alpha, s_\alpha, 1), (s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\beta), (s_\alpha, s_\alpha, s_\beta), (w_0, s_\alpha, s_\alpha s_\beta), (s_\alpha, s_\alpha, s_\alpha s_\beta)\}.$$

On a donc sept strates, dont trois de dimension 0, trois de dimension 1 et une de dimension 2. De plus, on a

$$\mathcal{P}^{J_\alpha} \simeq G/P_{J_\alpha}$$

où

$$P_{J_\alpha} = \langle B^+, s_\alpha \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R}) \right\}.$$

On en déduit que l'on a une interprétation en termes de grassmanniennes réelles

$$\mathcal{P}^{J_\alpha} \simeq \text{Gr}_{\mathbb{R}}(2, 3) \simeq \text{Gr}_{\mathbb{R}}(1, 3) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Dans cette situation, on a les parties totalement positives et non-négatives

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})_{>0} = \{[a : b : c], a, b, c > 0\} = \{[1 : b : c], b, c > 0\} \simeq \mathbb{R}_{>0}^2$$

et

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})_{\geq 0} = \overline{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})_{>0}} = \{[1 : b : c], b, c \geq 0\} \sqcup \{[0 : 1 : c], c \geq 0\} \sqcup \{[0 : 0 : 1]\} \sqcup \{[0 : 1 : 0]\}.$$

En fait, cette décomposition s'identifie à la décomposition de Lusztig-Rietsch de \mathcal{P}^{J_α} . On a les relations de type Bruhat

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{P}_{s_\alpha, 1, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha}} = \mathcal{P}_{w_0, s_\alpha, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\alpha, s_\alpha, 1; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\alpha, 1, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \\ \overline{\mathcal{P}_{s_\alpha, s_\alpha, s_\beta; > 0}^{J_\alpha}} = \mathcal{P}_{s_\alpha, s_\alpha, 1; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\alpha, s_\alpha, s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \\ \overline{\mathcal{P}_{s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha}} = \mathcal{P}_{w_0, s_\alpha, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \sqcup \mathcal{P}_{s_\beta s_\alpha, s_\alpha, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha} \\ \overline{\mathcal{P}_{s_\alpha, s_\alpha, s_\alpha s_\beta; > 0}^{J_\alpha}} = \bigsqcup_{(x, u, w) \in Q^{J_\alpha}} \mathcal{P}_{x, u, w; > 0}^{J_\alpha} = \mathcal{P}_{\geq 0}^{J_\alpha} \end{array} \right.$$

Ceci permet de déterminer comment les strates s'organisent les unes par rapport aux autres et on obtient alors la représentation suivante de $\mathcal{P}_{\geq 0}^{J_\alpha}$:

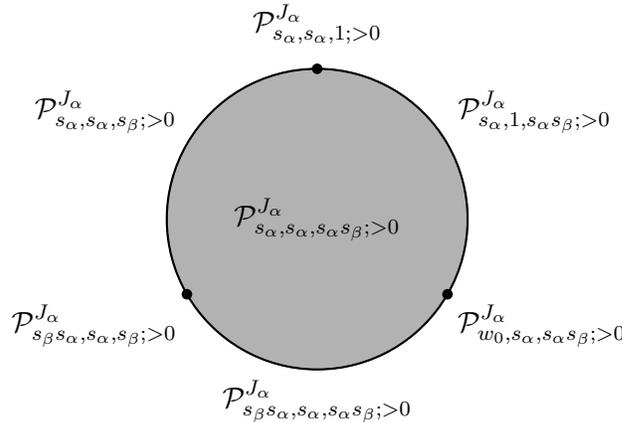


FIGURE 5. Décomposition cellulaire de $\mathcal{P}_{\geq 0}^{J_\alpha}$

REFERENCES

- [1] F. Brenti, *Kazhdan-Lusztig polynomials : History, Problems and combinatorial invariants*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 49 (2003), Article B49b.
- [2] V. V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat ordering. I. A finer decomposition of Bruhat cells*, Invent. math. 99, 499-511 (1985).
- [3] V. V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat ordering. II. The parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of Algebra 111, 483-506 (1987).
- [4] O. Dudas, *Note on the Deodhar decomposition of a double Schubert cell*, 8 pages. 2008. [jhal- 00296594j](#)
- [5] A. Garnier, *Cohomologie équivariante des groupes topologiques - cas des groupes de Lie et de leur variété de drapeaux*, Mémoire de Master 2 (version abrégée), Université de Picardie Jules Verne, 2018.
- [6] J. C. Jantzen, REPRESENTATIONS OF ALGEBRAIC GROUPS, Academic Press, Inc (1987).
- [7] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. math. 53, 165-184 (1979).
- [8] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized Lie algebras*, Journal of the AMS, Vol. 3, Nr. 2, April 1990.
- [9] G. Lusztig, *Introduction to total positivity*.
- [10] G. Lusztig, *Total positivity in partial flag manifolds*, Representation theory : An electronic journal of the AMS, Vol.2 , pp. 70-78 (March 13, 1998).
- [11] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups in LIE THEORY AND GEOMETRY*, edited by J-L. & R Brylinski, V. Guillemin, V. Kac, 531-568, Birkhäuser, 1994.
- [12] R. J. Marsh, K. Rietsch, *Parametrizations of flag varieties*, 2004, <https://arxiv.org/abs/math/0307017v2>.
- [13] K. Rietsch, *An algebraic cell decomposition of the nonnegative part of a flag variety*, 1997, <https://arxiv.org/abs/alg-geom/9709035v1>.
- [14] K. Rietsch, *Closure relations for totally nonnegative cells in G/P* , 2005, <https://arxiv.org/abs/math/0509137v2>.
- [15] K. Rietsch, L. Williams, *The totally nonnegative part of G/P is a CW-complex*, 2008, <https://arxiv.org/abs/0802.0889v1>.
- [16] P. Tingley, *Elementary construction of Lusztig's canonical bases (in finite type)*, 2016, <https://arxiv.org/abs/1602.04895>.