Introduction à la Théorie des Suites Spectrales

Arthur Garnier

18 août 2016

Table des matières

Introduction

Un des intérêts de l'Algèbre Homologique est que les groupe d'homologie peuvent souvent être calculés explicitement. Cependant, il existe des cas pour lesquels les méthodes usuelles de calcul d'homologie ne suffisent pas. Nous allons alors chercher à approcher les espaces d'homologie par des outils appelés "suites spectrales" ; qui vont converger vers ces espaces, en un sens à préciser. Cette notion fut introduite par Jean Leray alors qu'il était prisonnier lors de la Seconde Guerre Mondiale, afin de calculer des espaces d'homologie en topologie algébrique. Leur étude algébrique systématique fut effectuée pour la première fois par Jean-Louis Koszul en 1945.

L'objectif du présent travail consiste en une initiation à cette théorie, en adoptant un point de vue purement algébrique. Pour ce faire, nous suivrons majoritairement l'exposé du chapitre 5 de [11]. Aussi supposerons-nous le lecteur familier avec les notions fondamentales de l'homologie. Pour une introduction à l'homologie générale, nous renvoyons le lecteur à [3], [11] et bien-sûr [12].

Par ailleurs, nous montrons en Annexe, en suivant la méthode donnée dans [11], qu'une catégorie de modules sur une algèbre possède suffisamment d'injectifs ; fait dont nous aurons besoin à partir de la sixième partie.

Avant de commencer, illustrons un des buts des suites spectrales par un exemple tiré de la cohomologie des groupes. L'idée est de pouvoir calculer l'espace $H^1(G, A) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ à partir de $H^1(N, A)$ et $H^1({}^{G}/_{N}, A)$, pour G un groupe, N un sous-groupe distingué de G et A un G-module. Nous verrons que l'on a alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1({}^{G}/_{N}, A^N) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow H^1(N, A)^{G/N} \longrightarrow H^2({}^{G}/_{N}, A^N) \longrightarrow H^2(G, A) ,$$

où $A^G := \{a \in A \ ; \ ga = a, \ \forall g \in G\}$; cette suite provenant de la Suite Spectrale de Lyndon - Hochschild - Serre.

Première partie

Complexes doubles, complexe total

Dans un premier temps, nous introduisons ici quelques objets et notions préliminaires. Nous suivrons l'esposé de [9], section 10.1.

Nous fixons A une algèbre sur un anneau commutatif R et travaillons dans la catégorie abélienne $A - \mathfrak{Mod}$ des modules (à gauche) sur A.

Définition 1. Soit M un A-module. On dit que M est bigradué si

$$M = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} M_{p,q},$$

avec $M_{p,q}$ un A-module pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. On désignera les modules bigradués par $M_{\bullet\bullet}$.

Remarque 1. Bien entendu, on peut définir la notion d'objet bigradué dans toute catégorie abélienne.
On peut représenter un module bigradué sur un plan, avec un module $M_{p,q}$ à chaque entier de Gauß :

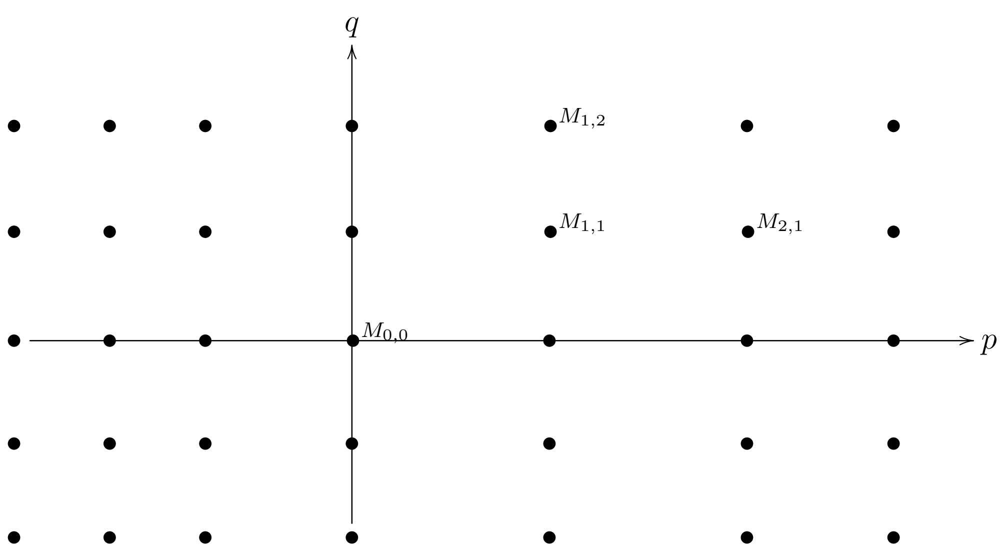


Fig.1

Définition 2. Soient $M_{\bullet\bullet}$, $N_{\bullet\bullet}$ deux modules bigradués. Un morphisme de modules bigradués $f : M \to N$ de bidegré $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est une famille $(f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+a,q+b})_{p,q\in\mathbb{Z}}$.

Lemme 1. *La classe des A-modules bigradués, munie des morphismes bigradués forme une catégorie.*

Démonstration. Si $M_{\bullet\bullet}$, $N_{\bullet\bullet}$ sont bigradués et si $f : M_{\bullet\bullet} \to N_{\bullet\bullet}$ est un morphisme de bidegré (a,b), alors on a

$$f \in \prod_{p,q\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(M_{p,q}, N_{p+a,q+b}),$$

d'où

$$\mathrm{Hom}\,(M_{\bullet\bullet}, N_{\bullet\bullet}) = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{p,q\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(M_{p,q}, N_{p+a,q+b}) \right).$$

De plus, si $f : M_{\bullet\bullet} \to N_{\bullet\bullet}$ et $g : N_{\bullet\bullet} \to P_{\bullet\bullet}$ sont de bidegré (a,b) et (a',b') respectivement, alors $g \circ f : M_{\bullet\bullet} \to P_{\bullet\bullet}$ est de bidegré $(a+a', b+b')$. Le reste consiste en une vérification immédiate. □

Remarque 2. On peut aisément définir les notions de sous-module, quotient, noyau et image dans les modules bigradués de manière naturelle.

- Si $M_{\bullet\bullet} = (M_{p,q})$ et $M'_{\bullet\bullet} = (M'_{p,q})$ sont bigradués, on dit que M' est un sous-module bigradué de M si

$$\forall p,q \in \mathbb{Z},\ M'_{p,q} \subseteq M_{p,q}$$

  et si l'inclusion $M' \hookrightarrow M$ est de bidegré $(0,0)$.
- Si $M' \subseteq M$, on définit le quotient

$$M \big/ M' := \bigoplus_{p,q} M_{p,q} \Big/ M'_{p,q}$$

  et la projection canonique $M \twoheadrightarrow M \big/ M'$ est de bidegré $(0,0)$.
- Si $f : M \to N$ est de bidegré (a,b), on définit

$$\ker f := \bigoplus_{p,q} (\ker f_{p,q}) \subseteq M,$$

  ainsi que

$$\mathrm{im}\, f := \bigoplus_{p,q} (\mathrm{im}\, f_{p-a,q-b}) \subseteq N,$$

  cette dernière définition permettant de satisfaire $(\mathrm{im}\, f_{p-a,q-b}) = (\mathrm{im}\, f)_{p,q} \subseteq N_{p,q}$.

Nous en arrivons alors à la définition de bicomplexe :

Définition 3. Un bicomplexe (ou complexe double) est un triplet ordonné $(M_{\bullet\bullet}, d^h, d^v)$ avec $M_{\bullet\bullet} = \bigoplus_{p,q} M_{p,q}$ un module bigradué, $d^h, d^v : M_{\bullet\bullet} \to M_{\bullet\bullet}$ sont des morphismes bigradués de bidegrés respectifs $(-1,0)$ et $(0,-1)$, appelés différentielles tels que

$$d^h \circ d^h = 0,$$

$$d^v \circ d^v = 0$$

et

$$d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0,$$

i.e., pour tous $p,q \in \mathbb{Z}$, on a $d^v_{p,q-1} \circ d^v_{p,q} = 0 = d^h_{p-1,q} \circ d^h_{p,q}$ et $d^h_{p,q-1} \circ d^v_{p,q} + d^v_{p-1,q} \circ d^h_{p,q} = 0$. De plus, si $M_{p,q}$ est un terme de M, son degré total est $p+q$.

Remarque 3. Dans [4], section 2.4, on remplace la troisième condition (anticommutativité) par une condition de commutativité : $d^h \circ d^v = d^v \circ d^h$.

Là aussi, on peut représenter un bicomplexe dans un repère cartésien :

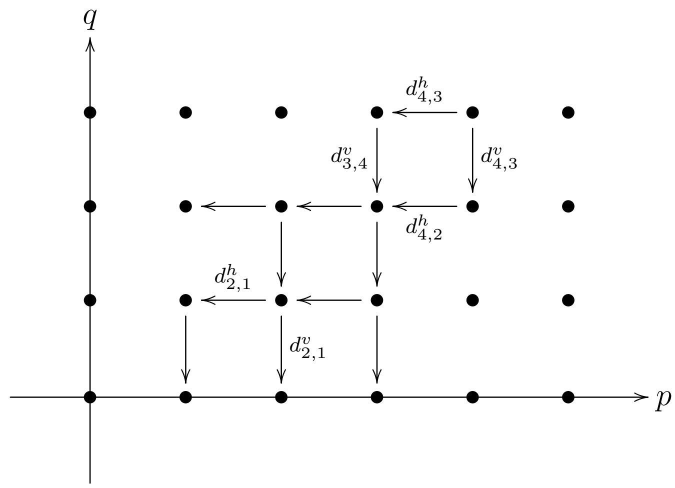


Fig.2

chaque carré étant anticommutatif, chaque ligne et chaque colonne étant un complexe (de chaînes).

Soient $M = (M_{p,q})$ un module bigradué et $d^h, d^v : M \to M$ de bidegrés $(-1,0)$ et $(0,-1)$ respectivement. Si, dans le diagramme associé (Fig. 2), les carrés commutent, on peut faire de M un bicomplexe en changeant alternativement le signe de d^v. Posons

$$\delta^v_{p,q} := (-1)^p d^v_{p,q}, \;\; p, q \in \mathbb{Z}.$$

On a toujours $\delta^v \circ \delta^v = 0$. De plus, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} d^h_{p,q-1} \circ \delta^v_{p,q} + \delta^v_{p-1,q} \circ d^h_{p,q} &= (-1)^p d^h_{p,q-1} \circ d^v_{p,q} + (-1)^{p-1} d^v_{p-1,q} \circ d^h_{p,q} \\ &= (-1)^p (d^h_{p,q-1} \circ d^v_{p,q} - d^v_{p-1,q} \circ d^h_{p,q}) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (M, d^h, δ^v) est bien un bicomplexe.

Définition 4. Si M est un bicomplexe, on définit son complexe total $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M) = (\mathrm{Tot}^{\oplus}(M), \delta^{\oplus})$, de composante homogène de degré $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$$

et de différentielle $\delta_n : \mathrm{Tot}^{\oplus}(M)_n \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(M)_{n-1}$ définie par

$$\delta^{\oplus}_n := \sum_{p+q=n} (d^h_{p,q} + d^v_{p,q}).$$

On définit de même le complexe $(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M), \delta^{\Pi})$ par

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)_n := \prod_{p+q=n} M_{p,q}$$

et

$$\delta^{\Pi}_n := \prod_{p+q=n} (d^h_{p,q} + d^v_{p,q}).$$

Remarque 4. Dans le cas où M est borné, i.e. si pour tout n, il n'existe qu'un nombre fini de termes de degré total n, par exemple si M est de premier quadrant ($M_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$) alors les deux complexes $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ et $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ coïncident et on note $\mathrm{Tot}(M)$ ce complexe commun. Par ailleurs, dans le cas général, le symbole $\mathrm{Tot}(M)$ sera employé pour désigner $(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M), \delta^{\oplus})$.

Si on travaille dans une catégorie abélienne générale $\mathcal{A}$, alors l'existence de $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ et $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ n'est pas assurée. Il faudra supposer en plus que $\mathcal{A}$ est complète et cocomplète, i.e. que les produits et coproduits quelconques existent.

Il s'agit maintenant de vérifier un fait souhaitable, mais pas tout-à-fait évident :

Lemme 2. *Si M est un bicomplexe, alors $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ et $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ sont des complexes.*

Démonstration. On ne traite que le premier cas, le second étant analogue. On a $\mathrm{im}\, d^h_{p,q} \subseteq M_{p-1,q}$ et $\mathrm{im}\, d^v_{p,q} \subseteq M_{p,q-1}$. Dans les deux cas, la somme des indices est $p+q-1 = n-1$ si $p+q = n$, d'où $\mathrm{im}\, \delta_n \subseteq \mathrm{Tot}(M)_{n-1}$. Il reste à montrer que $\delta^2 = 0$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\delta_n \circ \delta_{n+1} = \left(\sum_{p+q=n} d^h_{p,q} + d^v_{p,q} \right) \circ \left(\sum_{p+q=n+1} d^h_{p,q} + d^v_{p,q} \right)$$

$$= \sum_{p+q+1=n+1} \left(\sum_{p+q=n+1} (d^h_{p-1,q} + d^v_{p-1,q}) \circ (d^h_{p,q} + d^v_{p-1,q+1}) \right)$$

$$= \sum_{p+q+1=n+1} \left(\sum_{p+q=n+1} \underbrace{(d^h_{p-1,q} \circ d^h_{p,q})}_{0} + \underbrace{(d^h_{p-1,q} \circ d^v_{p-1,q+1} + d^v_{p-1,q} \circ d^h_{p,q})}_{0} + \underbrace{(d^v_{p-1,q} \circ d^v_{p-1,q+1})}_{0} \right)$$

$$= 0.$$

□

Exemple 1. En reprenant l'idée de la Figure 2, on peut représenter $\mathrm{Tot}(M)$ ainsi

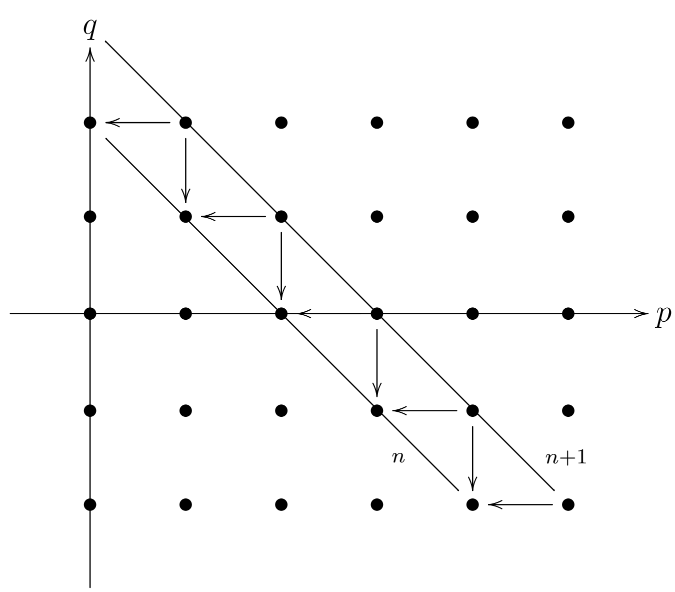


Fig.3

Terminons cette partie introductive par la notion de bifoncteur, qui nous servira succintement :

<u>Définition</u> 5. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois catégories. Une relation $T : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ est un <u>bifoncteur</u> si

1. $T(A, ?) : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ est un foncteur pour tout objet A de $\mathcal{A}$,
2. $T(?, B) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ est un foncteur pour tout objet B de $\mathcal{B}$,
3. Pour tous $f : A' \to A$ et $g : B' \to B$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} T(A',B') \arrow[r, "T(A',g)"] \arrow[d, "T(f,B')"'] & T(A',B) \arrow[d, "T(f,B)"] \\ T(A,B') \arrow[r, "T(A,g)"] & T(A,B) \end{tikzcd}$$

<u>Exemple</u> 2. Les relations

$$- \otimes_A - : \mathfrak{Mod} - A \times A - \mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ab}$$

et

$$\operatorname{Hom}_A(-,-) : A - \mathfrak{Mod} \times A - \mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ab}$$

sont des bifoncteurs.

De même, $\operatorname{Ext}^n_A(-,-)$ et $\operatorname{Tor}^A_n(-,-)$ sont des bifoncteurs.

On peut bien évidemment modifier la Définition 5 de telle sorte qu'un bifoncteur puisse être covariant ou contravariant en chacune de ses variables.

<u>Exemple</u> 3. Calculons un complexe total particulier. Soient

$$X_\bullet \ : \quad \cdots \longrightarrow X_p \xrightarrow{\delta'_p} X_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

un complexe de A-modules à droite et

$$Y_\bullet \ : \quad \cdots \longrightarrow Y_p \xrightarrow{\delta''_p} Y_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

un complexe de A-modules à gauche. Définissons, pour $p, q \in \mathbb{Z}$

$$M_{p,q} := X_p \otimes_A Y_q,$$

$$M := \bigoplus_{p,q} M_{p,q} = \bigoplus_{p,q} X_p \otimes_A Y_q,$$

$$d^h_{p,q} := \delta'_p \otimes_A 1_{Y_q},$$

$$\widetilde{d^v_{p,q}} := 1_{X_p} \otimes_A \delta''_q.$$

Puisque $- \otimes_A -$ est un bioncteur, le diagramme correspondant à M et aux morphismes $d^h_{p,q}$ et $\widetilde{d^v_{p,q}}$ commute. Introduisons

$$d^v_{p,q} := (-1)^p \widetilde{d^v_{p,q}},$$

on obtient alors un bicomplexe (M, d^h, d^v) comme dans la Remarque 3. Son complexe total est
$$\mathrm{Tot}\,(M)_n = (X \otimes_A Y)_n := \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes_A Y_q,$$
avec
$$\begin{array}{ccccc} \delta_n & : & (X \otimes_A Y)_n & \to & (X \otimes_A Y)_{n-1} \\ & & \sum_{p+q=n} x_p \otimes y_q & \mapsto & \sum_{p+q=n} \delta'_p x_p \otimes y_q + (-1)^p x_p \otimes \delta''_q y_q \end{array}$$

Deuxième partie
Filtrations et suites spectrales

Nous allons donner ici quelques premières définitions concernant les suites spectrales ; en particulier la notion de filtration, qui sera centrale par la suite. Nous exposons également une toute première notion de convergence des suites spectrales dites bornées. Nous suivons pour cela les sections 10.2 de [9], 5.2 de [11] (que nous utiliserons également dans la partie suivante) et 3.9.1 de [12].

Définition 6. Une filtration $F^\bullet M$ d'un A-module (ou même d'un objet d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$) M est une suite (disons décroissante) de sous-modules

$$\cdots \subseteq F^{p+1}M \subseteq F^pM \subseteq F^{p-1}M \subseteq \cdots \subseteq M.$$

On dit que la filtration $F^\bullet M$ est exhaustive si on a

$$\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F^pM = M,$$

et de Hausdorff si on a

$$\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F^pM = 0.$$

Remarque 5. On peut bien-sûr définir la notion de filtration croissante $F_\bullet M$, duale à celle donnée ci-dessus.

Nous verrons dans la quatrième partie qu'à une filtration d'un objet différentiel, on peut associer une "suite spectrale".

Définition 7. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Une suite spectrale homologique (démarrant en E^{r_0}, $r_0 \in \mathbb{N}$) est la donnée, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ et $r \geq r_0$:

1. d'une famille $(E^r_{p,q})$ d'objets de $\mathcal{A}$,
2. de morphismes $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ tels que $d^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = 0$, appelés différentielles,
3. d'isomorphismes $E^{r+1}_{p,q} \simeq H_{p+q}(E^r_{\bullet\bullet}, d^r)$, i.e.

$$E^{r+1}_{p,q} \simeq \ker(d^r_{p,q}) \Big/ \mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1}).$$

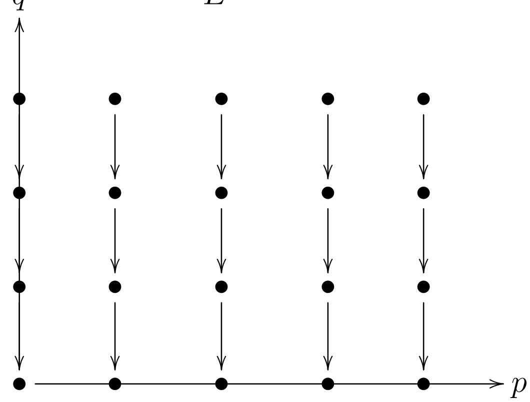
De plus, on dit que $n = p + q$ est le degré total de $E^r_{p,q}$ et la $r^{\text{ième}}$ page (ou feuille) de la suite spectrale est $E^r = (E^r_{p,q})_{p,q}$.

Remarque 6. On peut former la catégorie des suites spectrales homologiques, en disant que $f : (E^r_{p,q}) \to (\widetilde{E^r_{p,q}})$ est un morphisme de suites spectrales si on a une famille de morphismes

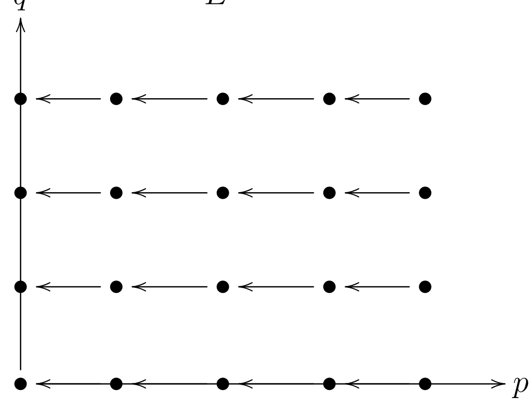
$f_{p,q}^r : E_{p,q}^r \to \widetilde{E_{p,q}^r}$ (pour r assez grand), tels que $f^r \circ d^r = d^r \circ f^r$ et $f_{p,q}^{r+1} = H(f_{p,q}^r)$.

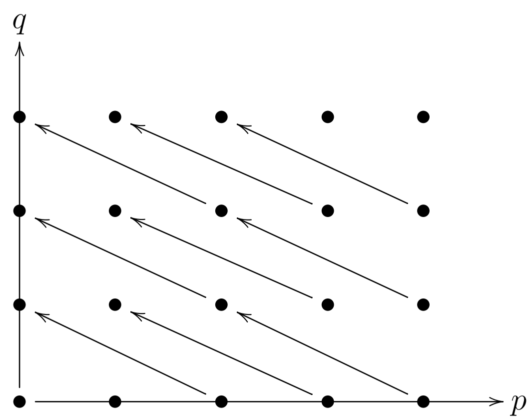
On peut représenter une suite spectrale $(E_{p,q}^r)$ par ses différentes pages :

E^0

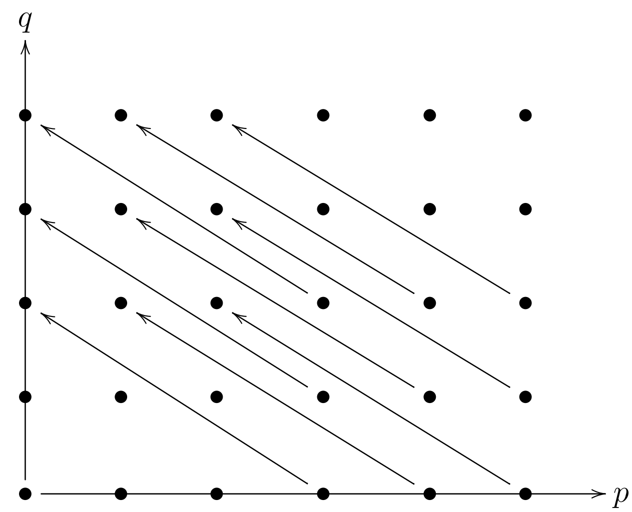


E^1





E^2



E^3

On dit ici que les différentielles "partent vers la gauche".

On peut aussi définir les <u>suites spectrales cohomologiques</u> de façon duale : C'est une famille $(E_r^{p,q})$, munie de morphismes $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ tels que $d_r^2 = 0$ et d'isomorphismes $E_{r+1}^{p,q} \simeq H^{p+q}(E_r^{\bullet\bullet}, d_r)$. Notons qu'une suite spectrale homologique $(E_{p,q}^r)$ donne lieu à une suite spectrale cohomologique $(E_r^{p,q})$ via une réindexation $E_r^{p,q} := E_{-p,-q}^r$. Dans ce cas, les diagrammes duaux à ceux de la figure ci-dessus montrent que les différentielles "partent vers la droite".

<u>Lemme</u> 3. *Soit $f : (E_{p,q}^r) \to (F_{p,q}^r)$ un morphisme de suites spectrales tel que pour un r_0, on ait des isomorphismes*

$$f^{r_0} : E_{p,q}^{r_0} \to F_{p,q}^{r_0},$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. Alors, $f_{p,q}^r$ est un isomorphisme pour tout $r \geq r_0$ et tous $p, q \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur $r \geq r_0$. Fixons $p, q \in \mathbb{Z}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E^r_{p+r,q-r+1} \arrow[r, "d^{r,E}_{p+r,q-r+1}"] \arrow[d, "f^r_{p+r,q-r+1}", "\sim"'] & E^r_{p,q} \arrow[r, "d^{r,E}_{p,q}"] \arrow[d, "f^r_{p,q}", "\sim"'] & E^r_{p-r,q+r-1} \arrow[d, "f^r_{p-r,q+r-1}", "\sim"'] \\
F^r_{p+r,q-r+1} \arrow[r, "d^{r,F}_{p+r,q-r+1}"'] & F^r_{p,q} \arrow[r, "d^{r,F}_{p,q}"'] & F^r_{p-r,q+r-1}
\end{tikzcd}$$

donc $f^r_{p,q} : \ker(d^{r,E}_{p,q}) \to \ker(d^{r,F}_{p,q})$ et $f^r_{p,q} : \operatorname{im}(d^{r,E}_{p+r,q-r+1}) \to \operatorname{im}(d^{r,F}_{p+r,q-r+1})$ sont des isomorphismes puisque $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to F^r_{p,q}$ est un isomorphisme et on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & & E^{r+1}_{p,q} \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}(d^{r,E}_{p+r,q-r+1}) \arrow[r] \arrow[d, "f^r_{p,q}", "\sim"'] & \ker(d^{r,E}_{p,q}) \arrow[r] \arrow[d, "f^r_{p,q}", "\sim"'] & H(E^r_{p,q}) \arrow[r] \arrow[d, "H(f^r_{p,q})=f^{r+1}_{p,q}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}(d^{r,F}_{p+r,q-r+1}) \arrow[r] & \ker(d^{r,F}_{p,q}) \arrow[r] & H(F^r_{p,q}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & F^{r+1}_{p,q} &
\end{tikzcd}$$

et le lemme des trois ([3], Corollaire 8) implique que $f^{r+1}_{p,q} : E^{r+1}_{p,q} \to F^{r+1}_{p,q}$ soit un isomorphisme. □

Remarque 7. Une suite spectrale de premier quadrant est une suite spectrale telle que $E^r_{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$. On voit que si cette condition est vraie pour un certain r_0, alors elle l'est pour tout $r \geq r_0$. Si p, q sont fixés, alors $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ pour $r > \max\{q+1, p\}$. En effet, on a alors

$$q - r + 1 < 0 \;\Rightarrow\; E^r_{p+r,q-r+1} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) = 0$$

et

$$p - r < 0 \;\Rightarrow\; E^r_{p-r,q+r-1} = 0 \;\Rightarrow\; \ker(d^r_{p,q}) = E^r_{p,q}$$

et on en déduit que

$$E^{r+1}_{p,q} = H(E^r_{p,q}) = \ker(d^r_{p,q}) \Big/ \operatorname{im}(d^r_{p+r,q-r+1}) \simeq E^r_{p,q}.$$

Pour $r > \max\{p, q+1\}$, on note $E^\infty_{p,q} := E^r_{p,q} = E^s_{p,q}$ pour $s \geq r$.

Définition 8. 1. Une suite spectrale $(E^r_{p,q})_{r \geq a}$ est dite bornée si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il n'existe qu'un nombre fini de termes non nuls de degré total n dans la première page $E^a_{\bullet\bullet}$. Comme dans la Remarque 7, pour tous p, q, il existe r_0 tel que $E^{r+1}_{p,q} = E^r_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$ pour tout $r \geq r_0$. On note alors $E^\infty_{p,q} := E^{r_0}_{p,q}$ cette valeur stable.

2. Une suite spectrale bornée converge vers $H_\bullet$ si on s'est donné une famille $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'objets de $\mathcal{A}$, chacun admettant une filtration finie

$$0 = F_sH_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq F_tH_n = H_n$$

et si on a des isomorphismes

$$E^\infty_{p,q} \simeq F_pH_{p+q} \Big/ F_{p-1}H_{p+q}.$$

Dans un tel cas, on écrit la convergence comme suit :

$$E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}.$$

3. Par dualité, une suite spectrale cohomologique est bornée si presque tous les termes de degré total n de la première page sont nuls pour tout n. On écrit alors $E^{p,q}_\infty := E^{p,q}_r$ la valeur stable.
4. On dit qu'une suite spectrale cohomologique converge vers $H^\bullet$ s'il existe, pour tout n, une filtration finie

$$0 = F^tH^n \subseteq \cdots \subseteq F^{p+1}H^n \subseteq F^pH^n \subseteq F^{p-1}H^n \subseteq \cdots \subseteq F^sH^n = H^n$$

telle que

$$E^{p,q}_\infty \simeq F^pH^{p+q} / F^{p+1}H^{p+q}$$

et on note également

$$E^{p,q}_a \Longrightarrow H^{p+q}.$$

Remarque 8. Si une suite spectrale homologique de premier quadrant converge vers $H_\bullet$, alors chaque H_n a une filtration finie de taille $n+1$:

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n.$$

On a que $F_0H_n = E^\infty_{0,n}$ se trouve sur l'axe des ordonnées et le quotient $H_n \big/ F_{n-1}H_n = E^\infty_{n,0}$ se trouve sur l'axe des abscisses. Notons que chaque flèche arrivant sur l'axe des abscisses est nulle et chaque flèche partant de l'axe des ordonnées aussi. Ainsi, chaque $E^\infty_{n,0}$ est un sous-objet de $E^a_{n,0}$ et chaque $E^\infty_{0,n}$ est un quotient de $E^a_{0,n}$. Les flèches résultantes

$$E^a_{0,n} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,n} \subseteq H_n$$

et

$$H_n \twoheadrightarrow E^\infty_{n,0} \subseteq E^a_{n,0}$$

sont appelées les morphismes extrêmes de la suite spectrale, pour des raisons visuelles évidentes.

De même, si une suite spectrale cohomologique de premier quadrant converge vers $H^\bullet$, alors H^n a une filtration finie

$$0 = F^{n+1}H^n \subseteq F^nH^n \subseteq \cdots \subseteq F^1H^n \subseteq F^0H^n = H^n.$$

Dans ce cas, $F^nH^n \simeq E^{n,0}_\infty$ est sur l'axe des abscisses et $H^n / F^1H^n \simeq E^{0,n}_\infty$ est sur celui des ordonnées. Les morphismes extrêmes sont alors

$$E^{n,0}_a \twoheadrightarrow E^{n,0}_\infty \subseteq H^n$$

et

$$H^n \twoheadrightarrow E^{0,n}_\infty \subseteq E^{0,n}_a.$$

<u>Définition</u> 9. Une suite spectrale (homologique) <u>s'effondre en E^r</u> (avec $r \geq a$) s'il existe exactement une ligne ou colonne non nulle dans la page E^r.

<u>Remarque</u> 9. Si une suite spectrale effondrée converge vers $H_\bullet$, alors H_n est l'unique terme non nul $E^r_{p,q}$ avec $p+q=n$. En effet, comme $E^{r+1}_{p,q} = H(E^r_{p,q})$, pour $s \geq r$, on a $E^s_{p,q} = E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q}$ et si p_0 est la seule colonne non nulle de $(E^r_{\bullet\bullet})$ alors pour $p \neq p_0$ et pour tout q, $E^r_{p,q} = 0 = E^\infty_{p,q}$; donc, pour $p \neq p_0$, on a

$$0 = E^\infty_{p,n-p} = F_pH_n \Big/ F_{p-1}H_n,$$

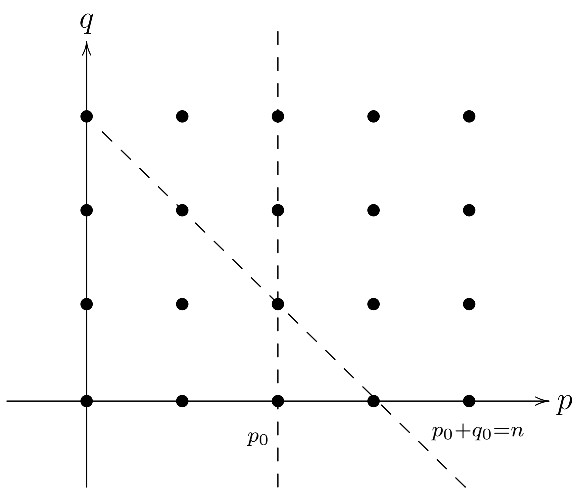
donc la filtration $F_\bullet H_n$ est triviale :

$$0 \subseteq H_n,$$

et donc, si $q_0 := n - p_0$, on a

$$E^r_{p_0,q_0} = E^\infty_{p_0,q_0} = F_{p_0}H_n \Big/ F_{p_0-1}H_n \simeq H_n$$

On visualise la situation ainsi :



On voit qu'en particulier, une suite spectrale effondrée converge. La majeurs partie des suites spectrale que nous considérerons s'effondreront en E^1 ou E^2.

<u>Définition</u> 10. Une suite spectrale $(E^r_{p,q})_{r\geq a}$ <u>dégénère à la page r_0</u> si on a

$$d^r_{\bullet\bullet} = 0, \ \forall r \geq r_0.$$

Ceci implique clairement que $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$.

<u>Lemme</u> 4. *(Lemme des deux colonnes) ([1], Lemma 1.8)*
Si une suite spectrale bornée converge vers $H_\bullet$ et si $E^2_{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$, alors on a, pour tout n, une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{1,n-1} \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit $s \geq 2$. Comme $d^s_{p,q} : E^s_{p,q} \to E^s_{p-s,q+s-1}$, on a $d^s_{p,q} = 0$ et $(E^r_{p,q})$ dégénère donc en seconde page et alors on a

$$E^\infty_{p,q} = E^2_{p,q}, \ \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

Fixons s. Par définition de la convergence, on a

$$0 = E^\infty_{p,n-p} \simeq {F_pH_n} \Big/ {F_{p-1}H_n} \ \Rightarrow \ F_pH_n = F_{p-1}H_n, \ \forall p \neq 0, 1,$$

ce qui implique que

$$F_{-1}H_n = F_{-2}H_n = \cdots = 0 \tag{1}$$

et

$$F_1H_n = F_2H_n = \cdots = H_n,$$

donc $E^\infty_{0,n} = F_0H_n$. On en déduit que

$$E^\infty_{1,n-1} \simeq {F_1H_n} \big/ {F_0H_n} \simeq {H_n} \Big/ {E^\infty_{0,n}}.$$

Posons

$$\begin{tikzcd} E^2_{0,n} \arrow[rr, "f:=i\circ\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"', "\sim"] & & H_n \\ & E^\infty_{0,n} \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

ainsi que

$$\begin{tikzcd} H_n \arrow[rr, "g:=\psi\circ p"] \arrow[dr, "p"'] & & E^2_{1,n-1} \\ & E^\infty_{1,n-1} \arrow[ur, "\psi", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

et par (1), la suite

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \xrightarrow{f} H_n \xrightarrow{g} E^2_{1,n-1} \longrightarrow 0$$

est bien exacte. $\square$

<u>Lemme</u> 5. *(Lemme des deux lignes)*
Supposons que $(E^r_{p,q})_{r\geq 2}$ soit une suite spectrale qui converge vers $H_\bullet$ et telle que $E^2_{p,q} = 0$ si $q \neq 0, 1$. Alors, on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1} \longrightarrow E^2_{n+1,0} \xrightarrow{d} E^2_{n-1,1} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{n,0} \xrightarrow{d} E^2_{n-2,1} \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. Fixons n. On a $0 \neq d^2_{p,q} : E^2_{p,q} \to E^2_{p-2,q+1}$ si et seulement si $q = 0$. De plus, $d^s_{\bullet\bullet} = 0$ si $s \geq 3$ et donc

$$E^\infty_{p,q} = E^3_{p,q} = H(E^2_{p,q})$$

puisque $(E^r_{p,q})$ dégénère à la troisième page. Ensuite, par hypothèse, on a

$$q \neq 0, 1 \ \Rightarrow \ E^\infty_{p,q} = 0,$$

et comme

$$F_{n-q}H_n \Big/ F_{n-(q+1)}H_n = E^{\infty}_{n-q,q}$$

pour tout q, on en déduit que

$$F_nH_n = F_{n+1}H_n = \cdots = H_n$$

et

$$F_{n-2}H_n = F_{n-3}H_n = \cdots = 0,$$

ainsi que

$$F_{n-1}H_n = {F_{n-1}H_n} \big/ {F_{n-2}H_n} = E^{\infty}_{n-1,1} = E^{3}_{n-1,1} = H(E^2_{n-1,1}).$$

Par ailleurs, il vient

$$H_n \Big/ H(E^2_{n-1,1}) \simeq {F_nH_n} \big/ {F_{n-1}H_n} = E^{\infty}_{n,0} = H(E^2_{n,0})$$

et on en déduit l'existence d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H(E^2_{n-1,1}) \xrightarrow{i} H_n \xrightarrow{p} H(E^2_{n,0}) \longrightarrow 0\ .$$

Or, on a

$$H(E^2_{n,0}) = \ker(d^2_{n,0}) \Big/ \mathrm{im}\,(d^2_{n+2,-1}) = \ker(d^2_{n,0})$$

et

$$H(E^2_{n-1,1}) = \ker(d^2_{n-1,1}) \Big/ \mathrm{im}\,(d^2_{n+1,0}) \simeq E^2_{n-1,1} \Big/ \mathrm{im}\,(d^2_{n+1,0})$$

et on en tire l'exactitude de la suite supérieure du diagramme

$$\begin{tikzcd}
E^2_{n+1,0} \arrow[r, "d^2_{n+1,0}"] & E^2_{n-1,1} \arrow[rr, "f:=i\circ\pi"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & H_n \arrow[rr, "g:=j\circ p"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & E^2_{n,0} \arrow[r, "d^2_{n,0}"] & E^2_{n-2,1} \\
& & E^2_{n-1,1} \Big/ \mathrm{im}\,(d^2_{n+1,0}) \arrow[ur, hook, "i"'] & & \ker(d^2_{n,0}) \arrow[ur, hook, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

d'où le résultat. $\square$

Troisième partie
Régularité et convergence faible

Soit $(E^r_{p,q})_{r\geq a}$ une suite spectrale. Alors, $E^{r+1}_{p,q} = H(E^r_{p,q})$ est un sous-quotient de $E^r_{p,q}$. On va construire par récurrence une tour

$$0 = B^a_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{p,q} \subseteq B^{r+1}_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^{r+1}_{p,q} \subseteq Z^r_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^a_{p,q} = E^a_{p,q}$$

telle que

$$E^r_{p,q} \simeq Z^r_{p,q} \Big/ B^r_{p,q}.$$

Pour $r = a$, $B^a_{p,q} = 0$ et $Z^a_{p,q} = E^a_{p,q}$ conviennent. Soit donc $r \geq a$ et supposons $B^r_{p,q}$ et $Z^r_{p,q}$ construits. Soit

$$\pi : Z^r_{p,q} \twoheadrightarrow Z^r_{p,q} \Big/ B^r_{p,q} \simeq E^r_{p,q}$$

l'épimorphisme canonique et posons

$$Z^{r+1}_{p,q} := \pi^{-1}(\ker(d^r_{p,q})) \quad \text{et} \quad B^{r+1}_{p,q} := \pi^{-1}(\mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1})).$$

Alors, on a $Z^{r+1}_{p,q} \subseteq Z^r_{p,q}$, $B^r_{p,q} = \pi^{-1}(0) \subseteq \pi^{-1}(\mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1})) = B^{r+1}_{p,q}$ et $\mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1}) \subseteq \ker(d^r_{p,q})$, d'où $B^{r+1}_{p,q} \subseteq Z^{r+1}_{p,q}$.

Ensuite, si dans une catégorie abélienne, on a un épimorphisme $\pi : Y \to X$ et $U \hookrightarrow V \hookrightarrow X$, alors

$$\pi^{-1}(V) \Big/ \pi^{-1}(U) \simeq V \big/ U.$$

De plus, si $f : X \to Y$ est un morphisme tel que $\ker f \subseteq U$, alors on a

$$V \big/ U \simeq f(V) \Big/ f(U).$$

En effet, quitte à utiliser le théorème de Freyd-Mitchell, on peut supposer que l'on travaillle dans une catégorie de modules, dans laquelle ces résultats sont clairs.

On en déduit que

$$Z^{r+1}_{p,q} \Big/ B^{r+1}_{p,q} \simeq \pi^{-1}(\ker(d^r_{p,q})) \Big/ \pi^{-1}(\mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1})) \simeq \ker(d^r_{p,q}) \Big/ \mathrm{im}\,(d^r_{p+r,q-r+1}) \simeq E^{r+1}_{p,q}.$$

Si l'on suppose que $\mathcal{A} = A - \mathfrak{Mod}$, ou plus généralement que $\mathcal{A}$ vérifie

AB_4) $\mathcal{A}$ est cocomplète (i.e. les coproduits existent) et la somme directe de monomorphismes est un monomorphisme,

AB_4^*) $\mathcal{A}$ est complète (i.e. les produits existent) et le produit d'épimorphismes est un épimorphisme,

alors on peut introduire les objets

$$Z^\infty_{p,q} := \bigcap_{r\geq a} Z^r_{p,q} \quad \text{et} \quad B^\infty_{p,q} := \bigcup_{r\geq a} B^r_{p,q}$$

et définir

$$E^\infty_{p,q} := Z^\infty_{p,q} \Big/ B^\infty_{p,q}.$$

Dans le cas où $\mathcal{A} = A - \mathfrak{Mod}$, les éléments de $Z^\infty_{p,q}$ sont appelés les <u>cycle survivants</u> et ceux de $B^\infty_{p,q}$ sont les <u>bords éventuels</u>.

Remarque 10. Si $(E^r_{p,q})$ est bornée, les intersections et unions ci-dessus sont finies, donc

$$\begin{cases} B^\infty_{p,q} = B^r_{p,q} \\ Z^\infty_{p,q} = Z^r_{p,q} \end{cases}$$

pour r assez grand. On retrouve alors que, pour r assez grand, on a $E^\infty_{p,q} = E^r_{p,q}$.

Définition 11. Une suite spectrale homologique $(E^r_{p,q})_{r\geq a}$ est minorée si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $s = s(n) \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{Z} \; ; \; p+q = n, \; p < s \;\Rightarrow\; E^a_{p,q} = 0.$$

De plus, $(E^r_{p,q})$ est régulière si pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, on a $d^r_{p,q} = 0$ pour r suffisamment grand.

Exemple 4.
- Une suite spectrale bornée est minorée.
- Une suite spectrale concentrée au demi-plan droit est minorée mais non bornée.
- Par dualité, une suite spectrale cohomologique est minorée si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; \exists s \in \mathbb{Z} \; ; \; \forall p, q \in \mathbb{Z} \; ; \; p+q = n, \; p > s \;\Rightarrow\; E_a^{p,q} = 0.$$

- Une suite spectrale minorée est régulière.
- Dire qu'une suite spectrale est régulière est équivalent à imposer que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, $Z^\infty_{p,q} = Z^r_{p,q}$ pour r assez grand.

Lemme 6. *Soit $f : (E^r_{p,q}) \to (E'^r_{p,q})$ un morphisme entre suites spectrales régulières tel que pour un certain r (et donc pour tout $s \geq r$ par le Lemme 3) on ait un isomorphisme*

$$f^r : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. Alors, on a un isomorphisme

$$f^\infty : E^\infty_{p,q} \to E'^\infty_{p,q}$$

pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ et r', r'' tels que $Z^{r'+1}_{p,q} = Z^{r'}_{p,q}$ et $Z'^{r''+1}_{p,q} = Z'^{r''}_{p,q}$ et $\widetilde{r} := \max\{r', r''\}$. Soit encore $r_0 := \max\{r, \widetilde{r}\}$. Si $s \geq r_0$, on a

$$E^{s+1}_{p,q} = Z^{s+1}_{p,q} \Big/ B^{s+1}_{p,q} = Z^s_{p,q} \Big/ B^{s+1}_{p,q} \simeq \left(Z^s_{p,q} \Big/ B^s_{p,q}\right) \Big/ \left(B^{s+1}_{p,q} \Big/ B^s_{p,q}\right),$$

d'où des épimorphismes

$$E^s_{p,q} \twoheadrightarrow E^{s+1}_{p,q} \twoheadrightarrow E^{s+2}_{p,q} \twoheadrightarrow \cdots$$

et

$$E'^s_{p,q} \twoheadrightarrow E'^{s+1}_{p,q} \twoheadrightarrow E'^{s+2}_{p,q} \twoheadrightarrow \cdots$$

et on a

$$E^\infty_{p,q} = \varinjlim_{s\geq r_0} E^s_{p,q} \quad \text{ainsi que} \quad E'^\infty_{p,q} = \varinjlim_{s\geq r_0} E'^s_{p,q}.$$

De plus, pour $s \geq r_0$, $f^s_{p,q}$ est un isomorphisme et donc $f^\infty = \varinjlim f^s$ est un isomorphisme puisque $\varinjlim$ est un foncteur. $\square$

Remarque 11. On peut montrer que le résultat reste vrai sans l'hypothèse de régularité, mais ce cas particulier nous suffira.

On en arrive donc à la définition de la convergence :

Définition 12. Soient $(E^r_{p,q})_{r\geq a}$ une suite spectrale et $H_\bullet = (H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'objets de $\mathcal{A}$. On dit que

1. $(E^r_{p,q})$ converge faiblement vers $H_\bullet$ si chaque H_n possède une filtration
$$\cdots \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq H_n$$
et si on a des isomorphismes
$$\beta_{p,q} = E^\infty_{p,q} \xrightarrow{\sim} F_pH_{p+q} \Big/ F_{p-1}H_{p+q},$$
pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on note
$$E^a_{p,q} \overset{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}.$$
2. $(E^r_{p,q})$ approche $H_\bullet$ si $E^a_{p,q} \overset{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}$ et si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la filtration $F_\bullet H_n$ est exhaustive et de Hausdorff.
3. $(E^r_{p,q})$ converge vers $H_\bullet$ si elle approche $H_\bullet$, si elle est régulière et si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$H_n \simeq \varprojlim_p H_n \Big/ F_pH_n.$$

Remarque 12. La convergence faible ne détecte pas les éléments de $\cap_{p\in\mathbb{Z}} F_pH_n$ ni ceux de $H_n \setminus \left(\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pH_n\right)$.

Toute suite spectrale faiblement convergente approche $\bigcup_p F_pH_\bullet \Big/ \bigcap_p F_pH_\bullet$.

Une suite spectrale homologique minorée qui approche $H_\bullet$ converge vers $H_\bullet$ car l'isomorphisme dans 3. est automatique pour une suite minorée.

Définition 13. Si $E^a_{p,q} \overset{*}{\Longrightarrow} H_\bullet$, $E'^a_{p,q} \overset{*}{\Longrightarrow} H'_\bullet$ et si $\left(E^r_{p,q}\right)$ et $\left(E'^r_{p,q}\right)$ sont régulières, on dit que $h : H_\bullet \to H'_\bullet$ est compatible avec $f : (E^r_{p,q}) \to (E'^r_{p,q})$ si h envoie F_pH_n sur $F_pH'_n$ et si le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F_pH_n \Big/ F_{p-1}H_n \arrow[r, "\bar{h}"] & F_pH'_n \Big/ F_{p-1}H'_n \\
E^\infty_{p,n-p} \arrow[u, "\beta_{p,n-p}"] \arrow[r, "f^\infty_{p,n-p}"'] & E'^\infty_{p,q} \arrow[u, "\beta'_{p,n-p}"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 1. *(Théorème de Comparaison)*
Supposons que
$$\begin{cases} E^a_{p,q} \Longrightarrow H_\bullet \\ E'^a_{p,q} \Longrightarrow H'_\bullet \end{cases}$$
Si $h : H_\bullet \to H'_\bullet$ est compatible avec $f : (E^a_{p,q}) \to (E'^a_{p,q})$ et si $f^r : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ est un isomorphisme pour un certain r, alors h est aussi un isomorphisme.

Démonstration. La convergence faible donne un diagramme (avec $q := n - p$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{p-1}H_n \arrow[r] \arrow[d] & F_pH_n \arrow[r] \arrow[d] & E^{\infty}_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{p-1}H'_n \arrow[r] & F_pH'_n \arrow[r] & E'^{\infty}_{p,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fixons s. Par récurrence sur p, le lemme des trois montre que

$$F_pH_n \big/ F_sH_n \simeq F_pH'_n \Big/ F_sH'_n .$$

Puisque $H_n = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_pH_n = \bigcup_{p\geq s} F_pH_n$, ceci implique que

$$H_n \big/ F_sH_n = \bigcup_{p\geq s} \left(F_pH_n \big/ F_sH_n\right) \simeq \bigcup_{p\geq s} \left(F_pH'_n \Big/ F_sH'_n\right) = H'_n \Big/ F_sH'_n$$

et ce pour tout s. On en déduit que

$$H_n \simeq \varprojlim \left(H_n \big/ F_sH_n\right) \simeq \varprojlim \left(H'_n \Big/ F_sH'_n\right) \simeq H'_n,$$

d'où le résultat. $\square$

<u>Théorème</u> 2. *(Suite exacte homologique à cinq termes) ([9], Theorem 10.31)*
Soit $(E^r_{p,q})_{r\geq 2}$ une suite spectrale de premier quadrant telle que

$$E^2_{p,q} \Longrightarrow H_\bullet .$$

Alors, on a une suite exacte :

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d} E^2_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^2_{1,0} \longrightarrow 0 .$$

Démonstration. Tout d'abord, chaque H_n a une filtration finie

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n$$

avec $F_0H_n = E^{\infty}_{0,n}$, $H_n \big/ F_{n-1}H_n \simeq E^{\infty}_{n,0}$ et $F_pH_n \Big/ F_{p-1}H_n \simeq E^{\infty}_{p,n-p}$ pour $0 \leq p \leq n$. La différentielle $d^2_{2,0}$ donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(d^2_{2,0}) \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2_{2,0}} E^2_{0,1} \longrightarrow \operatorname{coker}(d^2_{2,0}) \longrightarrow 0 .$$

Ensuite, on a

$$\ker(d^2_{2,0}) = \ker(d^2_{2,0}) \Big/ \operatorname{im}(d^2_{4,-1}) \simeq E^3_{2,0},$$

d'où, par récurrence $\ker(d^2_{2,0}) \simeq E^r_{2,0}$ pour $r \geq 3$ et donc $\ker(d^2_{2,0}) \simeq E^{\infty}_{2,0}$. De même, puisque

$$\operatorname{coker}(d^2_{2,0}) = E^2_{0,1} \Big/ \operatorname{im}(d^2_{2,0}) = \ker(d^2_{0,1}) \Big/ \operatorname{im}(d^2_{2,0}) = E^3_{0,1}$$

on obtient coker $(d^2_{2,0}) = E^\infty_{0,1}$. Ainsi, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^\infty_{2,0} \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d} E^2_{0,1} \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow 0\ .$$

On a une surjection

$$H_2 = F_2H_2 \twoheadrightarrow {F_2H_2}\big/{F_1H_2} \xrightarrow{\sim} E^\infty_{2,0},$$

qui, composée avec l'injection $E^\infty_{2,0} \hookrightarrow E^2_{2,0}$, donne une suite exacte

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d} E^2_{0,1} \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow 0\ . \tag{2}$$

Ensuite, on a

$$H_1 \Big/ E^\infty_{0,1} = {F_1H_1}\big/{F_0H_1} = E^\infty_{1,0},$$

d'où une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow H_1 \longrightarrow E^\infty_{1,0} \longrightarrow 0\ . \tag{3}$$

Si α désigne la composée $\alpha : E^2_{0,1} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,1} \hookrightarrow H_1$, alors (2) et (3) se combinent pour donner une suite exacte

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d} E^2_{0,1} \xrightarrow{\alpha} H_1 \longrightarrow E^\infty_{1,0} \longrightarrow 0\ . \tag{4}$$

Enfin, on a

$$E^3_{1,0} = \ker(d^2_{1,0}) \Big/ \mathrm{im}\,(d^2_{3,-1}) = \ker(d^2_{1,0}) = E^2_{1,0}$$

car $0 = d^2_{1,0} : E^2_{1,0} \to \underbrace{E^2_{-1,1}}_{0}$ et donc $E^\infty_{1,0} \simeq E^2_{1,0}$. En injectant ceci dans (4), il vient finalement la suite exacte désirée

$$H_2 \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d} E^2_{0,1} \xrightarrow{\alpha} H_1 \longrightarrow E^2_{1,0} \longrightarrow 0\ .$$

$\square$

Par dualité, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1. *(Suite exacte cohomologique à cinq termes)*
Si une suite spectrale cohomologique de premier quadrant $(E_r^{p,q})_{r\geq 2}$ converge vers $H^\bullet$, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2\ .$$

Quatrième partie

Suite spectrale d'une filtration

En nous inspirant de la section 5.4 de [11], nous allons associer à une filtration d'un complexe, une suite spectrale qui va converger vers l'homologie de ce complexe, sous certaines conditions. C'est là un des grands intérêts de la théorie. Comme à notre habitude, on se donne une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition 14. Soit $(X_\bullet, d)$ un complexe d'objets de $\mathcal{A}$. On dit que $F_\bullet X_\bullet$ est une filtration si on a une suite (croissante) de sous-complexes

$$\cdots \subseteq F_{p-1}X_\bullet \subseteq F_pX_\bullet \subseteq F_{p+1}X_\bullet \subseteq \cdots$$

compatible avec la différentielle, en ce sens que $d(F_pX_\bullet) \subseteq F_pX_\bullet$ pour tout p.

Nous allons tout d'abord démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. *(Théorème de Construction)*
Une filtration F d'un complexe X détermine une suite spectrale homologique de premiers termes

$$E^0_{p,q} := F_pX_{p+q} \Big/ F_{p-1}X_{p+q},$$

et

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^0_{p,\bullet}) = H_{p+q}\left(F_pX \Big/ F_{p-1}X\right).$$

Définition 15.

1. Une filtration F d'un complexe X est bornée si, pour tout n, il existe $s < t$ tels que
$$\begin{cases} F_sX_n = 0 \\ F_tX_n = X_n \end{cases}$$
2. F est minorée si pour tout n, il existe s tel que $F_sX_n = 0$ et est majorée si pour tout n, il existe t tel que $F_tX_n = X_n$.
3. F est canoniquement bornée si, pour tout n, on a
$$\begin{cases} F_{-1}X_n = 0 \\ F_nX_n = X_n \end{cases}$$

Remarque 13. Si F est bornée, alors elle est majorée et minorée.

Si F est canoniquement bornée (resp. bornée, minorée) alors la suite $(E^r_{p,q})$ ci-dessus est de premier quadrant (resp. bornée, minorée).

On peut construire $(E^r_{p,q})$ et ainsi prouver le théorème 3 :

Par soucis de lisibilité, nous abandonnons l'indice q et on note η_p l'épimorphisme

$$\eta_p : F_pX \twoheadrightarrow F_pX \Big/ F_{p-1}X = E^0_p.$$

Définissons

$$A_p^r := \{x \in F_pX \ ; \ dx \in F_{p-r}X\},$$

les éléments de F_pX qui sont des cycles modulo $F_{p-r}X$ (appelés cycles approximatifs), ainsi que

$$Z_p^r := \eta_p(A_p^r) \subseteq E_p^0,$$

$$B_{p-r}^{r+1} := \eta_{p-r}(d(A_p^r)) \subseteq E_{p-r}^0.$$

L'indexation est choisie de telle sorte que Z_p^r et B_p^r soient des sous-objets de E_p^0. Posons

$$Z_p^\infty := \bigcap_{r\geq 1} Z_p^r$$

et

$$B_p^\infty := \bigcup_{r\geq 1} B_p^r.$$

On obtient ainsi une tour de sous-objets

$$0 = B_p^0 \subseteq B_p^1 \subseteq \cdots \subseteq B_p^r \subseteq \cdots \subseteq B_p^\infty \subseteq Z_p^\infty \subseteq \cdots \subseteq Z_p^r \subseteq \cdots \subseteq Z_p^1 \subseteq Z_p^0 = E_p^0.$$

Notons que $A_p^r \cap F_{p-1}X = A_{p-1}^{r-1}$, d'où

$$Z_p^r \simeq A_p^r \Big/ A_{p-1}^{r-1}.$$

Soit

$$E_p^r := Z_p^r \Big/ B_p^r = \frac{A_p^r + F_{p-1}X}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + F_{p-1}X} \simeq \frac{A_p^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}},$$

et soit $d_p^r : E_p^r \to E_{p-r}^r$ la différentielle induite par d. Il nous reste à montrer que

$$E^{r+1} \simeq H_\bullet(E^r).$$

Lemme 7. *La différentielle d induite un isomorphisme*

$$Z_p^r \Big/ Z_p^{r+1} \xrightarrow[\sim]{d} B_{p-r}^{r+1} \Big/ B_{p-r}^r.$$

Démonstration. Tout d'abord, on a $d(A_p^r) \cap F_{p-r-1}X = d(A_p^{r+1})$, d'où

$$d(A_p^r) \Big/ d(A_p^{r+1}) = d(A_p^r) \Big/ (d(A_p^r) \cap F_{p-r-1}X) \simeq \frac{d(A_p^r) + F_{p-r-1}X}{F_{p-r-1}X} = \eta_{p-r}(d(A_p^r)) = B_{p-r}^{r+1},$$

et on a un isomorphisme

$$B_{p-r}^{r+1} \Big/ B_{p-r}^r \simeq d(A_p^r) \Big/ d(A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1}).$$

De même, on a un isomorphisme

$$Z_p^r \Big/ Z_p^{r+1} \simeq A_p^r \Big/ (A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1}).$$

Comme le noyau de $d : A_p^r \to F_{p-r}X$ est contenu dans A_p^{r+1}, on a le résultat. $\square$

Retournons à la construction de (E_p^r). On a

$$\ker(d_p^r) = \frac{\{z \in A_p^r \ ; \ dz \in d(A_{p-1}^{r-1}) + A_{p-r-1}^{r-1}\}}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}} = \frac{A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1}}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}}$$

et, puisque le noyau de $\eta_p : A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1} \to E_p^0$ est contenu dans A_{p-1}^{r-1}, on obtient

$$\ker(d_p^r) \simeq \frac{\eta_p(A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1})}{\eta_p(d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1})} \simeq Z_p^{r+1} \Big/ B_p^r.$$

Par le Lemme 7, d_p^r se factorise à travers

$$E_p^r = Z_p^r \Big/ B_p^r \to Z_p^r \Big/ Z_p^{r+1} \simeq B_{p-r}^{r+1} \Big/ B_{p-r}^r \hookrightarrow Z_{p-r}^r \Big/ B_{p-r}^r = E_{p-r}^r.$$

On voit alors que $\mathrm{im}\,(d_p^r) = B_{p-r}^{r+1} \Big/ B_{p-r}^r$ et en remplaçant p par $p+r$, on a alors $\mathrm{im}\,(d_{p+r}^r) \simeq B_p^{r+1} \Big/ B_p^r$, d'où un isomorphisme

$$E_p^{r+1} = Z_p^{r+1} \Big/ B_p^{r+1} \simeq \ker(d_p^r) \Big/ \mathrm{im}\,(d_{p+r}^r) = H_\bullet(E_p^r),$$

comme requis pour que (E_p^r) soit une suite spectrale.

Étudions maintenant la convergence de la suite (E_p^r). On suppose ici que $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome

AB_5) $\mathcal{A}$ est cocomplète et la colimite filtrée de suites exactes est exacte.

(Cette dernière condition peut se reformuler en imposant à toute famille $(A_i)_i$ et tout B de vérifier $\sum_i (A_i \cap B) = B \cap (\sum_i A_i)$).

Remarque 14. Une filtration d'un complexe induit une filtration sur son homologie ; $F_pH_n(X)$ est l'image de $H_n(F_pX) \to H_n(X)$, i.e. $F_pH_n(X) = \mathrm{im}\, i_*^p$, avec $i^p : F_pX \hookrightarrow X$ est l'inclusion canonique. Si F est exhaustive (resp. minorée), alors FH est exhaustive (resp. minorée), car chaque élément de H_n est représenté par un élément x d'un certain F_pX_n tel que $dx = 0$ (resp. car $F_pX = 0$ implique $F_pH_n(X) = 0$).

Venons-en au théorème principal :

Théorème 4. *(Théorème de Convergence Classique)*

1. *Supposons F bornée. Alors la suite spectrale homologique associée est bornée et converge vers $H_\bullet(X)$:*
$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}\left(F_pX \Big/ F_{p-1}X\right) \Longrightarrow H_{p+q}(X).$$
2. *Supposons F exhaustive et minorée. Alors, la suite spectrale est minorée et converge aussi vers $H_\bullet(X)$.*

De plus, la convergence est naturelle en ce sens que si $f : X \to X'$ est un morphisme de complexes filtrés, alors $f_\bullet : H_\bullet(X) \to H_\bullet(X')$ est compatible avec le morphisme de suites spectrales associé.

Remarque 15. La première assertion du théorème précédent reste, comme nous le verrons dans la preuve, valable sans imposer que $\mathcal{A}$ vérifie AB_5).

Démonstration. Supposons F exhaustive et minorée (resp. bornée). Alors, $FH_\bullet$ est exhaustive et minorée (resp. bornée), donc $(E^r_{p,q})$ est minorée (resp. bornée), donc $(E^r_{p,q})$ est régulière et si

$$E^r_{p,q} \overset{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}(X),$$

alors $(E^r_{p,q})$ approche $H_\bullet(X)$ et donc on aura

$$E^r_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(X).$$

Il reste donc à montrer que $(E^r_{p,q})$ converge faiblement vers $H_\bullet(X)$.

Comme F est minorée, si on fixe n et p, les objets $A^r_p = \{x \in F_pX_n \ ; \ dx \in F_{p-r}X_{n-1}\}$ se stabilisent pour r assez grand. Notons A^∞_p cette valeur stable. On observe que comme $Z^r_p = \eta_p(A^r_p)$, il vient

$$Z^\infty_p = \eta_p(A^\infty_p),$$

et A^∞_p est le noyau de $d : F_pX_n \to F_pX_{n-1}$. Ensuite, on vérifie que

$$dX \cap F_pX = \bigcup_{r=1}^{\infty} d(A^r_{p+r})$$

et que

$$A^\infty_{p-1} = \ker\left(\eta_p : A^\infty_p \to E^0_{p,q} = F_pX_{p+q} \Big/ F_{p-1}X_{p+q}\right).$$

Enfin, rappelons que $F_pH_n(X) = \operatorname{im} i^p_*$, avec $i^p_* : H_n(F_pX) \to H_n(X)$ provenant de $i^p : F_pX \hookrightarrow X$. Comme $\ker d^{F_pX} = \ker d \cap F_pX$ et comme $\operatorname{im} d^{F_pX} \subseteq \operatorname{im} d \cap F_pX$, on a $\ker i^p_* = (\operatorname{im} d \cap F_pX) / \operatorname{im} d^{F_pX}$ et on en déduit que

$$F_pH_n(X) \simeq H_n(F_pX) \Big/ \ker i^p_* \simeq \left(\frac{\ker d^{F_pX}}{\operatorname{im} d^{F_pX}}\right) \Big/ \left(\frac{\operatorname{im} d \cap F_pX}{\operatorname{im} d^{F_pX}}\right)$$

$$\simeq (\ker d \cap F_pX) \Big/ (dX \cap F_pX) \simeq A^\infty_p \Big/ (dX \cap F_pX).$$

On obtient alors

$$F_pH_n(X) \Big/ F_{p-1}H_n(X) \simeq \left(\frac{A^\infty_p}{dX \cap F_pX}\right) \Big/ \left(\frac{A^\infty_{p-1}}{dX \cap F_{p-1}X}\right) \simeq \frac{A^\infty_p}{A^\infty_{p-1} + (dX \cap F_pX)}$$

$$\simeq \frac{A^\infty_p}{A^\infty_{p-1} + \bigcup_{r \geq 1} d(A^r_{p+r})} \simeq \eta_p(A^\infty_p) \Big/ \eta_p\left(\bigcup_{r \geq 1} d(A^r_{p+r})\right)$$

$$\simeq \eta_p(A^\infty_p) \Big/ \bigcup_{r \geq 2} \eta_p(d(A^{r-1}_{p+r-1})) \simeq Z^\infty_p \Big/ \bigcup_{r \geq 1} B^r_p \simeq Z^\infty_p \Big/ B^\infty_p = E^\infty_p.$$

□

Cinquième partie
Suite spectrale d'un complexe double

Étant donné un bicomplexe, nous allons exhiber deux filtrations naturelles qui lui sont liées ; et qui donneront naissance à deux suites spectrales qui convergeront - sous certaines hypothèses - vers l'homologie du complexe total associé. Aussi suivrons-nous les exposés de la partie 3 de [1] et de la section 5.6 de [11].

On se donne $X_{\bullet\bullet}$ un bicomplexe dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

<u>Définition</u> 16. (Filtration par colonnes)
On peut filtrer le complexe total $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X)$ (ou $\mathrm{Tot}^{\Pi}(X)$) par les colonnes de X de la manière suivante :
Dénotons par ${}^{I}F_n\mathrm{Tot}\,(X) := \mathrm{Tot}\,\left({}^{I}\tau_{\leq n}X\right)$ le complexe total du sous-complexe double de X défini par

$$\left({}^{I}\tau_{\leq n}X\right)_{p,q} := \left\{ \begin{array}{cc} X_{p,q} & \text{si} \quad p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc|cc} \cdots & * & * & 0 & 0 \\ & & & & \\ \cdots & * & * & 0 & 0 \\ & & & & \\ \cdots & * & * & 0 & 0 \\ & & & & \\ \cdots & * & * & 0 & 0 \end{array}$$

Ceci définit, par le Théorème de Construction (Théorème 3), une suite spectrale $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ dont le premier terme est

$${}^{I}E^{0}_{p,q} = \frac{{}^{I}F_p\mathrm{Tot}\,(X)_{p+q}}{{}^{I}F_{p-1}\mathrm{Tot}\,(X)_{p+q}} = \frac{\bigoplus_{k+l=p+q}\left({}^{I}\tau_{\leq p}X\right)_{k,l}}{\bigoplus_{k+l=p+q}\left({}^{I}\tau_{\leq p-1}X\right)_{k,l}} = \frac{\bigoplus_{k\leq p} X_{k,p+q-k}}{\bigoplus_{k\leq p-1} X_{k,p+q-k}} \simeq X_{p,q}.$$

Les différentielles $d^0_{p,q} : E^0_{p,q} \to E^0_{p,q-1}$ (donc $d^0_{p,q} : X_{p,q} \to X_{p,q-1}$) sont simplement les différentielles verticales $d^v_{p,q}$ de $X_{\bullet\bullet}$. Ainsi, on a

$${}^{I}E^{1}_{p,q} = H^v_q(X_{p,\bullet}).$$

Ensuite, les différentielles $d^1 : H^v_q(X_{p,\bullet}) \to H^v_q(X_{p-1,\bullet})$ sont induites sur l'homologie par les différentielles horizontales d^h de $X_{\bullet\bullet}$. On peut donc (employer une notation suggestive et) écrire

$${}^{I}E^{2}_{p,q} = H^h_p H^v_q(X_{\bullet\bullet}).$$

On en déduit que si X est un complexe double de premier quadrant, la filtration ${}^{I}F\mathrm{Tot}\,(X)$ est canoniquement bornée et le Théorème de Convergencce Classique (Théorème 4) assure la convergencce de la suite spectrale :

$$ {}^{I}E^{2}_{p,q} = H^{h}_{p}H^{v}_{q}(X) \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(X)). $$

Remarque 16. Si X est de second quadrant (ou plus généralement si $X_{p,q} = 0$ dans le quatrième quadrant), la filtration de $\mathrm{Tot}^{\Pi}(X)$ est minorée mais non exhaustive, alors que la filtration de $\mathrm{Tot}^{\oplus}(X)$ est minorée et exhaustive et le Théorème 4 implique que $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ converge vers $H_{\bullet}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(X))$ mais pas vers $H_{\bullet}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(X))$. En fait, en examinant la preuve du Théorème 4, on voit que $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ converge tout-de-même faiblement vers cette dernière homologie.

Définition 17. (Filtration par lignes)
On peut également filtrer le complexe $\mathrm{Tot}\,(X)$ par les lignes de X :
Écrivons ${}^{II}F_{n}\mathrm{Tot}\,(X) := \mathrm{Tot}\,\left({}^{II}\tau_{\leq n}X\right)$ pour désigner le complexe total du sous-bicomplexe

$$ \left({}^{II}\tau_{\leq n}X\right)_{p,q} := \begin{cases} X_{p,q} & \text{si } \; q \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} $$

$$ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} $$

Dans ce cas, la suite spectrale associée est de premier terme

$$ {}^{II}E^{0}_{p,q} = \frac{{}^{II}F_{p}\mathrm{Tot}\,(X)_{p+q}}{{}^{II}F_{p-1}\mathrm{Tot}\,(X)_{p+q}} = \frac{\bigoplus_{k\leq p} X_{p+q-k,k}}{\bigoplus_{k\leq p-1} X_{p+q-k,k}} \simeq X_{q,p}. $$

Les différentielles d^{0} sont simplement les différentielles horizontales d^{h} de X et on a

$$ {}^{II}E^{1}_{p,q} = H^{h}_{q}(X_{\bullet,p}). $$

De plus, les morphismes d^{1} dont induits par les différentielles verticales d^{v} de X, d'où

$$ {}^{II}E^{2}_{p,q} = H^{v}_{p}H^{h}_{q}(X). $$

Remarque 17. Notons qu'interchanger p et q transforme la filtration par lignes en filtration par colonnes et de fait, échange également $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ et $\left({}^{II}E^{r}_{p,q}\right)$.

Comme précédemment, si X est un complexe double de premier quadrant, cette filtration est canoniquement bornée et on a la convergence

$$^{II}E^{2}_{p,q} = H^{v}_{p}H^{h}_{q}(X) \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(X)).$$

Si X est un complexe double de second quadrant (ou plus généralement, si $X_{p,q} = 0$ dans le quatrième quadrant), alors

$$^{II}E^{2}_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(X)).$$

De plus, si X est de quatrième quadrant (ou si X est nul dans le second quadrant), on a aussi

$$^{II}E^{2}_{p,q} \stackrel{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(X)).$$

On peut donc synthétiser ces considérations par le théorème (non exhaustif) suivant :

Théorème 5. *Soit X un bicomplexe. Alors, il existe deux suites spectrales $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ et $\left({}^{II}E^{r}_{p,q}\right)$ associées à X, de premiers termes*

$$^{I}E^{2}_{p,q} = H^{h}_{p}H^{v}_{q}(X)$$

et

$$^{II}E^{2}_{p,q} = H^{v}_{p}H^{h}_{q}(X),$$

telles que

1. *Si X est nul dans le quatrième quadrant, alors on a*

$$^{I}E^{2}_{p,q}, {}^{II}E^{2}_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(X)),$$

et

$$^{I}E^{2}_{p,q} \stackrel{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(X)).$$

2. *Si X est nul dans le second quadrant, alors*

$$^{II}E^{2}_{p,q} \stackrel{*}{\Longrightarrow} H_{p+q}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(X)).$$

3. *Si X est de premier quadrant, alors on a la convergence commune*

$$^{I}E^{2}_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(X)),$$

$$^{II}E^{2}_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}\,(X)).$$

Notons que l'on doit supposer que $\mathcal{A}$ vérifie $AB_4)$, $AB_4^*)$ et $AB_5)$ pour que les deux premières assertions précédentes soient vraies. On voit alors que les complexes doubles de premier quadrant sont fort confortables puisqu'ils donnent lieu à deux suites spectrales qui convergent toutes deux vers $H_\bullet(\mathrm{Tot}\,(X))$. Nous allons voir ici quelques applications (stupéfiantes) de ces faits.

Sixième partie

Applications : Formules de Künneth, Coefficients Universels

Nous allons ici tenter de montrer à quel point la théorie des suites spectrales peut être puissante et élégante, au travers de quelques résultats utiles, notamment les formules de Künneth et les théorèmes des Coefficients Universels. Nous redémontrerons également quelques résultats de "chasse dans les diagrammes" (aussi appelé "diagram chasing" en langue anglaise), grâce aux suites spectrales.

Avant toute chose, établissons quelques lemmes élémentaires mais utiles, ainsi que la notion de module plat :

Lemme 8. *([1], Lemma 3.2)*
Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur covariant et exact ; ainsi que (X, ∂) un complexe de (co)chaînes dans $\mathcal{A}$. Alors, on a respectivement

$$H_\bullet(F(X)) \simeq F(H_\bullet(X)),$$

$$H^\bullet(F(X)) \simeq F(H^\bullet(X)).$$

Démonstration. Traitons le cas des cochaînes, l'autre étant dual. Comme F est exact, les suites

$$0 \longrightarrow F(\ker f) \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

et

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(\operatorname{im} f) \longrightarrow 0$$

sont exactes pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$ et tout $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, d'où

$$\ker(F(f)) \simeq F(\ker f)$$

et

$$\operatorname{im}(F(f)) \simeq F(\operatorname{im} f).$$

On en déduit que, pour tout n,

$$H^n(F(X)) = \ker(F(\partial_n)) \Big/ \operatorname{im}(F(\partial_{n-1})) \simeq F(\ker \partial_n) \Big/ F(\operatorname{im} \partial_{n-1}).$$

La suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} \partial_{n-1} \longrightarrow \ker \partial_n \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow 0$$

donne

$$F(H^n(X)) \simeq F(\ker \partial_n) \Big/ F(\operatorname{im} \partial_{n-1}),$$

ce qui conclut. □

<u>Définition</u> 18. Soient A une algèbre et M un A-module à gauche (resp. à droite). On dit que M est <u>plat</u> si $- \otimes_A M$ (resp. $M \otimes_A -$) est un foncteur exact.

On dispose de la caractérisation suivante :

<u>Proposition</u> 1. *([11], Exercise 3.2.1)*
Soit M un A-module à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) M *est plat,*

ii) $\mathrm{Tor}_n^A(X, M) = 0$ *pour tout A-module X et tout $n \neq 0$,*

iii) $\mathrm{Tor}_1^A(X, M) = 0$ *pour tout A-module X.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} M \text{ plat } &\Rightarrow\ - \otimes_A M \text{ exact } \Rightarrow\ \mathrm{Tor}_n^A(X, M) = 0 \text{ pour tous } X \text{ et } n \neq 0 \\ &\Rightarrow\ - \otimes_A M \text{ exact } \Rightarrow\ M \text{ plat,} \end{aligned}$$

d'où $i) \Leftrightarrow ii)$.
Ensuite, on a clairement $ii) \Rightarrow iii)$.
Il reste à montrer que $iii) \Rightarrow i)$. Soit donc une suite exacte courte de A-modules à droite :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0\,.$$

La suite exacte longue de $\mathrm{Tor}_\bullet^A$ associée est, en vertu de $iii)$

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2^A(Z, M) \arrow[dll, rounded corners] & & \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[dll, rounded corners] & \\ X \otimes M \arrow[r] & Y \otimes M \arrow[r] & Z \otimes M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donc la suite courte

$$0 \longrightarrow X \otimes M \longrightarrow Y \otimes M \longrightarrow Z \otimes M \longrightarrow 0$$

est exacte, donc $- \otimes M$ est exact et M est plat. $\square$

<u>Lemme</u> 9. *([12], Remark 3.8.4)*
Tout module projectif est plat.

Démonstration. Tout d'abord, un module libre $F \simeq A^n$ est plat, puisque pour tout module M, on a alors

$$M \otimes F \simeq M \otimes A^n \simeq M^n,$$

donc $\mathrm{Tor}_1^A(M, F) = 0$. Maintenant, si P est projectif, il existe Q tel que $P \oplus Q$ soit libre. De plus, pour tout M, on a

$$M \otimes (P \oplus Q) \simeq (M \otimes P) \oplus (M \otimes Q),$$

d'où

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(M, P \oplus Q) \simeq \mathrm{Tor}_1^A(M, P) \oplus \mathrm{Tor}_1^A(M, Q)$$

et donc $\mathrm{Tor}_1^A(M, P) = 0$, comme souhaité. $\square$

Lemme 10. *([5], Lemme 16.3.3 et Proposition 16.3.4)*
Si

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte et si Y et Z sont plats, alors X aussi.

Démonstration. Nous donnons ici la preuve élémentaire de [5]. Montrons d'abord que, pour tout A-module à gauche M, la suite

$$0 \longrightarrow X \otimes M \longrightarrow Y \otimes M \longrightarrow Z \otimes M \longrightarrow 0$$

est exacte. Considérons M comme quotient d'un module libre (donc projectif, donc plat par le Lemme 9) P par une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0\ .$$

On a alors un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & X \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & Z \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \otimes P \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes P \arrow[r] \arrow[d] & Z \otimes P & \\
 & X \otimes M \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes M \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où le 0 du haut (resp. de gauche) vient du fait que Z (resp. P) est plat. Le lemme du Serpent ([3], Théorème 7) montre alors que la suite

$$0 \longrightarrow X \otimes M \longrightarrow Y \otimes M$$

est exacte, comme voulu.

Ensuite, soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$ une injection. On a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \otimes M' \arrow[r] \arrow[d] & Y \otimes M' \arrow[r] \arrow[d] & Z \otimes M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \otimes M \arrow[r] & Y \otimes M \arrow[r] & Z \otimes M &
\end{tikzcd}$$

le premier (resp. second) 0 du haut provenant de fait que Y (resp. Z) est plat et les 0 de gauche, de la première partie de la preuve. Comme la carré de gauche commute, on a l'exactitude de

$$0 \longrightarrow X \otimes M' \longrightarrow X \otimes M$$

donc $X \otimes -$ est exact et X est plat. □

Dans ce qui suit, nous aurons besoin des foncteurs dérivés qui, pour un foncteur F, seront notés R^nF (resp. L_nF). Pour une définition de ceux-ci, on renvoie à la section 4.3 de [3]. Il nous reste à établir un petit résultat très commode :

Lemme 11. *Soient $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur covariant exact à gauche, A un objet de $\mathcal{A}$ et $A \to J^\bullet$ une résolution F-acyclique de A (i.e. constituée d'objets annulant les R^nF pour $n \neq 0$). Alors $R^iF(A)$ est isomorphe à la $i^{\text{ème}}$ cohomologie du complexe $0 \to FJ^\bullet$.*

Démonstration. Pour $i \geq 1$, posons $K^i := \ker d^i = \operatorname{im} d^{i-1}$ avec $d^i : J^i \to J^{i+1}$. On scinde la résolution

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & J^0 \arrow[r, "d^0"] & J^1 \arrow[r, "d^1"] & J^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots \\
& A \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

en les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow J^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow K^i \longrightarrow J^i \longrightarrow K^{i+1} \longrightarrow 0\ ,\ \ i \geq 1.$$

Les suites exactes longues associées à $R^\bullet F$ s'écrivent alors, en vertu de la Proposition 31 de [3],

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & F(J^0) \arrow[r] & F(K^1) \arrow[dll, rounded corners] \\
& R^1F(A) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R^1F(K^1) \arrow[dll, rounded corners] \\
& R^2F(A) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

et, pour $i \geq 1$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(K^i) \arrow[r] & F(J^i) \arrow[r] & F(K^{i+1}) \arrow[dll, rounded corners] \\
& R^1F(K^i) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R^1F(K^{i+1}) \arrow[dll, rounded corners] \\
& R^2F(K^i) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

en raison de la F-acyclicité des J^i. Soit $n \geq 0$. On a alors

$$R^nF(A) = R^{n-1}F(K^1) = R^{n-2}F(K^2) = \cdots = R^1F(K^{n-1}).$$

De plus, F est exact à gauche, d'où

$$R^nF(A) = R^1F(K^{n-1}) = F(K^n) \big/ \ker(F(K^n) \to R^1F(K^{n-1}))$$

$$= F(K^n) \big/ \operatorname{im}(F(J^{n-1}) \to F(K^n)) = \operatorname{coker}(F(J^{n-1}) \to F(K^n))$$

$$= \operatorname{coker}\left(F(J^{n-1}) \to \ker(F(J^n) \to F(J^{n+1}))\right) = \frac{\ker(F(J^n) \to F(J^{n+1}))}{\operatorname{im}(F(J^{n-1}) \to F(J^n))}$$

$$= \ker F(d^n) \Big/ \operatorname{im} F(d^{n-1}) = H^n(F(J^\bullet)).$$

□

Ceci étant établi, revenons aux applications des suites spectrales :

Proposition 2. *Soient A une algèbre, M un A-module à droite et N un A-module à gauche. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$L_n(M \otimes_A -)(N) \simeq L_n(- \otimes_A N)(M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_n^A(M, N).$$

Autrement dit, on peut calculer $\operatorname{Tor}_\bullet^A(M,N)$ à l'aide d'une résolution projective $P \to M$ ou d'une résolution projective $Q \to N$.

Démonstration. Soient donc $P \to M$ et $Q \to N$ deux résolutions projectives. Rappelons que nous avons défini $\operatorname{Tot}(P \otimes Q)$ dans l'Exemple 3 ; et notons par abus $H_\bullet(P \otimes Q) := H_\bullet(\operatorname{Tot}(P \otimes Q))$. Puisque P_p est projectif (donc plat), par le Lemme 8, on a

$$H_q^v(P_p \otimes Q) \simeq P_p \otimes H_q(Q) = \begin{cases} P_p \otimes N & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$${}^I E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p^h(P \otimes N) \overset{\text{def}}{=} L_p(- \otimes N)(M) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et cette suite spectrale s'effondre en ${}^I E^2$ pour donner

$$H_p(P \otimes Q) = L_p(- \otimes N)(M).$$

Ainsi, par le Théorème 5, $\left({}^{II}E^r_{p,q}\right)$ converge aussi vers $L_p(- \otimes N)(M)$. Comme on a

$$H_q^h(P \otimes Q_n) = H_q(P) \otimes Q_n = \begin{cases} M \otimes Q_n & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

il vient

$${}^{II} E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p^v(M \otimes Q) = L_p(M \otimes -)(N) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\left({}^{II}E^r_{p,q}\right)$ s'effondre et donne

$$H_p(P \otimes Q) = L_p(M \otimes -)(N),$$

d'où le résultat. □

Remarque 18. Par dualité, on voit que si M et N sont deux A-modules, alors on a

$$R^n(\operatorname{Hom}_A(M, -))(N) \simeq R^n(\operatorname{Hom}_A(-, N))(M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}_A^n(M, N), \ \forall n \geq 0.$$

Corollaire 2. *Sous les mêmes hypothèse, on a*

$$\operatorname{Tor}_\bullet^A(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_\bullet^{A^{op}}(N,M)$$

et en particulier, si A est commutative,

$$\operatorname{Tor}_\bullet^A(M,N) \simeq \operatorname{Tor}_\bullet^A(N,M).$$

Théorème 6. *(Suite spectrale homologique de Künneth)*
Soit P un complexe minoré de chaînes de A-modules plats et M un A-module. Il existe alors une suite spectrale bornée, convergente, de demi-plan droit

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}_p^A(H_q(P), M) \Longrightarrow H_{p+q}(P \otimes_A M).$$

Démonstration. Soit $Q \to M$ une résolution projective et considérons le complexe double de demi-plan supérieur $P \otimes Q$. Puisque P_p est plat, on a

$$H^v_q(P_p \otimes Q) = \left\{ \begin{array}{cc} P_p \otimes M & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} = P_p \otimes H_q(Q)$$

donc la première suite spectrale s'effondre en ${}^IE^2$:

$${}^IE^2_{p,q} = \left\{ \begin{array}{cc} H_p(P \otimes M) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

et donne

$$H_p(P \otimes Q) = H_p(P \otimes M).$$

Comme Q_n est plat, on a

$$H^v_q(P \otimes Q_n) = H_q(P) \otimes Q_n$$

et la seconde suite spectrale a le premier terme

$${}^{II}E^2_{p,q} = H_p(H_q(P) \otimes Q) = \operatorname{Tor}_p^A(H_q(P), M),$$

la dernière égalité étant conséquence de la Proposition 2. □

Corollaire 3. *(Formule homologique de Künneth)*
Soient P un complexe de chaînes de A-modules plats tels que tout sous-module $d(P_k)$ de P_{k-1} est aussi plat et M un A-module. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_n(P) \otimes_A M \longrightarrow H_n(P \otimes_A M) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. On utilise la suite spectrale homologique de Künneth. Soit $Z_k := \ker d_k$. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_k \longrightarrow P_k \longrightarrow d(P_k) \longrightarrow 0$$

et P_k, $d(P_k)$ étant plats, le Lemme 10 implique que Z_k soit plat et alors

$$0 \longrightarrow d(P_{k+1}) \longrightarrow Z_k \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow 0$$

est une résolution plate de $H_k(P)$. Ainsi, par le Lemme 11, il vient

$$\mathrm{Tor}\,_p^A(H_q(P), M) = 0, \ \forall p \neq 0, 1.$$

D'après le Lemme des deux colonnes (Lemme 4), on a donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \longrightarrow H_n(P \otimes M) \longrightarrow E^2_{1,n-1} \longrightarrow 0$$

qui, par substitution, s'écrit encore

$$0 \longrightarrow H_n(P) \otimes M \longrightarrow H_n(P \otimes M) \longrightarrow \mathrm{Tor}\,_1^A(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow 0\ .$$

$\square$

Corollaire 4. *(Théorème des Coefficients Universels pour l'Homologie)*
Soient P un complexe de chaînes de A-modules plats tel que $d(P_k)$ soit un sous-module projectif de P_{k-1} et M un A-module. Alors, pour tout n, on a

$$H_n(P \otimes_A M) \simeq (H_n(P) \otimes_A M) \oplus \mathrm{Tor}\,_1^A(H_{n-1}(P), M).$$

Démonstration. Puisque $d(P_n)$ est projectif, la surjection $P_n \to d(P_n)$ est scindée, donc

$$P_n \simeq Z_n \oplus d(P_n),$$

avec $Z_n := \ker(P_n \to d(P_n))$. Appliquant $- \otimes M$, on voit que $Z_n \otimes M$ est facteur direct de $P_n \otimes M$, ainsi, $Z_n \otimes M$ est facteur direct du groupe intermédiaire $\ker(d_n \otimes 1 : P_n \otimes M \to P_{n-1} \otimes M)$. En quotientant $Z_n \otimes M$ et $\ker(d_n \otimes 1)$ par $\mathrm{im}\,(d_{n+1} \otimes 1)$, on obtient que $H_n(P) \otimes M$ est facteur direct de $H_n(P \otimes M)$. Comme P_n et $d(P_n)$ sont plats, la formule de Künneth indique que le facteur direct résiduel est $\mathrm{Tor}\,_1^A(H_{n-1}(P), M)$. $\square$

On peut mentionner ici le cas particulier des groupes abéliens libres :

Corollaire 5. *Soient P un complexe de chaînes de groupes abéliens libres et M un groupe abélien. Alors, pour tout n, on a*

$$H_n(P \otimes M) \simeq (H_n(P) \otimes M) \oplus \mathrm{Tor}\,_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(P), M).$$

Écrivons encore les variantes cohomologiques :

Théorème 7. *(Suite spectrale cohomologique de Künneth)*
Soient P un complexe minoré de A-modules projectifs et M un A-module. Alors, il existe une suite spectrale cohomologique bornée de demi-plan droit convergente :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}\,_A^p(H_q(P), M) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{Hom}\,_A(P, M)).$$

Démonstration. Soit $M \to I$ une résolution injective et considérons le complexe de cochaînes double de demi-plan supérieur $\mathrm{Hom}_A(P, I)$, de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P^{-p+1}, I^{q+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P^{-p}, I^{q+1}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P^{-p+1}, I^{q}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P^{-p}, I^{q}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

avec la convention $P^{-p} := P_p$. La filtration par colonnes est exhaustive et majorée (car P est minoré) et les conditions du Théorème de Convergence Classique sont vérifiées. De plus, on a

$${}^I E_1^{p,q} = H^q(\mathrm{Hom}_A(P^{-p}, I)) \simeq \mathrm{Hom}_A(P^{-p}, H^q(I))$$

puisque P^{-p} est projectif et d'après le Lemme 8. Ainsi,

$${}^I E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathrm{Hom}_A(P, M)) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la suite spectrale $\left({}^I E_2^{p,q}\right)$ s'effondre en ${}^I E_2$ et donc

$$H^p(\mathrm{Hom}_A(P, M)) \simeq H^p(\mathrm{Hom}_A(P, I)).$$

La seconde filtration est minorée et exhaustive pour $\mathrm{Tot}^{\oplus}(\mathrm{Hom}_A(P, I))$. Comme I^p est injectif, l'analogue du Lemme 8 dans le cas contravariant donne

$${}^{II} E_1^{p,q} = H^q(\mathrm{Hom}_A(P, I^p)) \simeq \mathrm{Hom}_A(H_q(P), I^p)$$

et donc

$${}^{II} E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Hom}_A(H_q(P), I)) = \mathrm{Ext}_A^p(H_q(P), M),$$

d'où le résultat. $\square$

<u>Corollaire</u> 6. *(Formule cohomologique de Künneth)*
Soient P un complexe de chaînes de A-modules projectifs tel que chaque $d(P_k)$ soit projectif et M un A-module. Alors, pour tout n, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_A(P, M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(H_n(P), M) \longrightarrow 0\,.$$

Démonstration. Puisque $d(P_n)$ est projectif, la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow P_n \longrightarrow d(P_n) \longrightarrow 0$$

est scindée et on a

$$P_n \simeq Z_n \oplus d(P_n),$$

donc Z_n est projectif également. Ainsi, la suite

$$0 \longrightarrow d(P_{q+1}) \longrightarrow Z_q \longrightarrow H_q(P) \longrightarrow 0$$

est une résolution projective de $H_q(P)$. Donc, pour tout $p \neq 0, 1$, on a $E_2^{p,q} = 0$ et $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Le Lemme des deux colonnes (Lemme 4) indique que la suite exacte liée à la suite spectrale cohomologique du Théorème 7 est

$$0 \longrightarrow E_2^{1,n-1} \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_A(P, M)) \longrightarrow E_2^{0,n} \longrightarrow 0\ ,$$

soit encore

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(H_{n-1}(P), M) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_A(P, M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(H_n(P), M) \longrightarrow 0\ .$$

□

Corollaire 7. *(Théorème des Coefficients Universels pour la Cohomologie)*
Si P est un complexe de chaînes de A-modules projectifs tel que chaque $d(P_k)$ soit également projectif et si M est un A-module, alors, pour tout n, on a

$$H^n(\mathrm{Hom}_A(P, M)) \simeq \mathrm{Hom}_A(H_n(P), M) \oplus \mathrm{Ext}_A^1(H_{n-1}(P), M).$$

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve du Corollaire 4. □

Voyons encore deux résultats sur le changement de l'anneau de base dans le calcul de Tor et Ext.

Théorème 8. *(Changement de l'anneau de base pour* Tor*)*
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Il existe alors une suite spectrale homologique de premier quadrant

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^B(\mathrm{Tor}_q^A(M, B), N) \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^A(M, N),$$

pour M (resp. N) un A-module à droite (resp. un B-module à gauche).

Démonstration. Soient $P \to M$ une A-résolution projective et $Q \to N$ une B-résolution projective. On forme alors le complexe double de premier quadrant $P \otimes_A Q$ et on écrit comme à l'ordinaire $H_\bullet(P \otimes Q) := H_\bullet(\mathrm{Tot}\,(P \otimes_A Q))$. Puisque $P_p \otimes_A -$ est exact, la $p^{\text{ème}}$ colonne de $P \otimes Q$ est une résolution de $P_p \otimes N$. Ainsi, la suite spectrale $\left({}^I E_{p,q}^r\right)$ s'effondre en ${}^I E_{p,q}^1 = H_q^v(P_p \otimes Q)$ et converge vers $H_\bullet(P \otimes Q) = H_\bullet(P \otimes N) = \mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N)$. Ainsi, la seconde suite spectrale converge vers $\mathrm{Tor}_\bullet^A(M, N)$ et on a

$${}^{II} E_{p,q}^1 = H_q(P \otimes_A Q_p) = H_q((P \otimes_A B) \otimes_B Q_p)$$

qui, par le Lemme 8 est égal à

$$H_q(P \otimes_A B) \otimes_B Q_p = \mathrm{Tor}_q^A(M, B) \otimes_B Q_p$$

et donc

$${}^{II} E_{p,q}^2 = H_p\left({}^{II} E_{p,q}^1\right) = \mathrm{Tor}_p^B(\mathrm{Tor}_q^A(M, B), N).$$

□

Théorème 9. *(Changement de l'anneau de base pour* Ext *)*
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors, il existe une suite spectrale cohomologique de premier quadrant

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}_B^p(M, \operatorname{Ext}_A^q(B, N)) \Longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{p+q}(M, N),$$

pour tous B-module M et A-module N.

Démonstration. Soient $P \to M$ une B-résolution projective et $N \to I$ une A-résolution injective. Le complexe double $\operatorname{Hom}_A(P, I)$ est de premier quadrant. Comme P^p est projectif, $\operatorname{Hom}_A(P^p, -)$ est exact, donc la $p^{\text{ème}}$ colonne de $\operatorname{Hom}_A(P, I)$ est une résolution de $\operatorname{Hom}_A(P^p, N)$. On a

$${}^{II}E_1^{p,q} = H^q(\operatorname{Hom}_A(P, I^p)) = \operatorname{Hom}_A(H^q(P), I^p) = \left\{ \begin{array}{cc} \operatorname{Hom}_A(M, I^p) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Donc $\left({}^{II}E_r^{p,q}\right)$ s'effondre en ${}^{II}E_1$ et il vient

$${}^{II}E_2^{p,q} = \left\{ \begin{array}{cc} H^p(\operatorname{Hom}_A(M, I)) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \operatorname{Ext}_A^p(M, N) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

et donc

$${}^{II}E_2^{p,q} \Longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{p+q}(M, N).$$

On en déduit que

$${}^{I}E_2^{p,q} \Longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{p+q}(M, N).$$

Or, on calcule que

$$\begin{aligned} {}^{I}E_1^{p,q} &= H^q(\operatorname{Hom}_A(P^p, I)) = H^q(\operatorname{Hom}_B(P^p, \operatorname{Hom}_A(B, I))) \\ &= \operatorname{Hom}_B(P^p, H^q(\operatorname{Hom}_A(B, I))) = \operatorname{Hom}_B(P^p, \operatorname{Ext}_A^q(B, N)) \end{aligned}$$

et donc

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(\operatorname{Hom}_B(P, \operatorname{Ext}_A^q(B, N))) = \operatorname{Ext}_B^p(M, \operatorname{Ext}_A^q(B, N)).$$

□

Terminons cette partie par les preuves du lemme des cinq, du lemme du serpent et de la suite exacte longue d'homologie, grâce aux suites spectrales. Pour cela, on fixe $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Tous les diagrammes et morphismes considérés seront dans $\mathcal{A}$.

Proposition 3. *(Lemme des cinq) ([10], 4.1)*
Soit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r, "g'"'] & E' \end{tikzcd}$$

1. *Si β, δ sont des monomorphismes et si α est un épimorphisme, alors γ est un monomorphisme.*

2. Si β, δ sont des épimorphismes et si ε est un monomorphisme, alors γ est un épimorphisme.

3. En particulier, si β, δ sont des isomorphismes, si α est un épimorphisme et si ε est un monomorphisme, alors γ est un isomorphisme.

Démonstration. La seconde assertion est duale à la première et les deux premières assertions impliquent clairement la troisième. Il suffit alors de montrer le premier point.

Afin d'obtenir un bicomplexe, retournons le diagramme, insérons-y les noyaux et conoyaux à gauche et à droite, et remplissons le reste avec des 0 :

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\operatorname{coker} g \arrow[d] & E \arrow[l] \arrow[d] & D \arrow[l] \arrow[d] & C \arrow[l] \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d] & \ker f \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\operatorname{coker} g' & E' \arrow[l] & D' \arrow[l] & C' \arrow[l] & B' \arrow[l] & A' \arrow[l] & \ker f' \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On voit alors que la première page ${}^{II}E^1$ de $\left({}^{II}E^r_{p,q}\right)$ est constituée de zéros, car c'est l'homologie horizontale, qui est nulle puisque les lignes sont exactes. Ainsi, $\left({}^{II}E^r_{p,q}\right)$ converge vers 0, donc la suite $\left({}^{I}E^r_{p,q}\right)$ converge aussi vers 0. En prenant l'homologie verticale, on obtient la première page de $\left({}^{I}E^r_{p,q}\right)$:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
* & \ker\varepsilon \arrow[l] & \ker\delta \arrow[l] & \ker\gamma \arrow[l] & \ker\beta \arrow[l] & \ker\alpha \arrow[l] & * \arrow[l] \\
* & \operatorname{coker}\varepsilon \arrow[l] & \operatorname{coker}\delta \arrow[l] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[l] & \operatorname{coker}\beta \arrow[l] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[l] & * \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, on a $\ker\delta = \ker\beta = \operatorname{coker}\alpha = 0$. Ainsi, en prenant à nouveau l'homologie, on obtient la seconde page :

$$\begin{tikzcd}
* & 0 & * & * & * & * & * \\
* & * & * \arrow[ull] & \ker\gamma \arrow[ull] & * \arrow[ull] & * \arrow[ull] & * \arrow[ull] \\
* & * & * \arrow[ull] & * \arrow[ull] & * \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & * \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

Comme la suite spectrale converge vers 0, la page ${}^{I}E^\infty_{p,q}$ est triviale et est atteinte en un nombre fini d'étapes car la suite est bornée. Mais dans ce cas, $\ker\gamma$ doit être trivial car autrement, il ne pourrait disparaître dans les pages suivantes. $\square$

Proposition 4. *(Lemme du Serpent) ([10], 4.2)*
Soit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' &
\end{tikzcd}$$

Alors, il existe un morphisme "de connection" $\delta : \ker \gamma \to \operatorname{coker} \alpha$ *et une suite exacte*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & \ker \alpha \arrow[r] & \ker \beta \arrow[r] & \ker \gamma \arrow[dlll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & \operatorname{coker} \alpha \arrow[r] & \operatorname{coker} \beta \arrow[r] & \operatorname{coker} \gamma \arrow[r] & \operatorname{coker} g' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le diagramme du Serpent s'écrit alors

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & \ker \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \ker \beta \arrow[r] \arrow[d] & \ker \gamma \arrow[d] \arrow[ddll, rounded corners, "\delta"] & & \\
 & & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
 & & \operatorname{coker} \alpha \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} \beta \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} \gamma \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker} g' \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Comme précédemment, on construit le bicomplexe

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & C \arrow[l] \arrow[d] & B \arrow[l] \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d] & \ker f \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & 0 \arrow[l] & \operatorname{coker} g' \arrow[l] & C' \arrow[l] & B' \arrow[l] & A' \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Comme les lignes sont exactes, l'homologie horizontale est nulle et à nouveau, les deux suites spectrales $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$ et $\left({}^{II}E^{r}_{p,q}\right)$ convergent vers 0. Prenant maintenant l'homologie verticale, on obtient la première page de $\left({}^{I}E^{r}_{p,q}\right)$:

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & 0 \arrow[l] & \ker\gamma \arrow[l] & \ker\beta \arrow[l, "\varphi"'] & \ker\alpha \arrow[l] & \ker f \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
0 & \operatorname{coker} g' \arrow[l] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[l] & \operatorname{coker}\beta \arrow[l] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[l, "\psi"'] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

On voit alors apparaître une partie de la suite exacte annoncée, et on prouve qu'elle est exact par des arguments standards. Enfin, on prend l'homologie horizontale pour obtenir la page ${}^{I}E^{2}$:

$$\begin{tikzcd}
0 & \operatorname{coker}\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \arrow[ull] & \ker\psi \arrow[ull] & 0 \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

et comme ${}^{I}E^{\infty}$ est triviale, ce morphisme résiduel doit être un isomorphisme. On peut alors, en l'inversant, obtenir l'homomorphisme de connection désiré δ par composition et obtenir la suite

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & & 0 \\
\ker f \arrow[d] & & & & & \operatorname{coker} g' \arrow[u] \\
\ker\alpha \arrow[r] & \ker\beta \arrow[r] & \ker\gamma \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[u] \\
& & \operatorname{coker}\varphi & \ker\psi \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

dont on montre, par des arguments simples, qu'elle est exacte. $\square$

Proposition 5. *(Suite exacte longue d'homologie) ([1], Proposition 3.5)*
Soit

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de complexes de chaînes. Alors, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

Démonstration. En considérant la filtration par lignes, on voit que la première page ${}^{II}E^{1}$

associée au complexe double

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & Z_n \arrow[l] \arrow[d] & Y_n \arrow[l, "g_n"'] \arrow[d] & X_n \arrow[l, "f_n"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[l] \arrow[d] & Y_{n-1} \arrow[l, "g_{n-1}"] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[l, "f_{n-1}"] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

est nulle, donc la suite spectrale $\left({}^IE^r_{p,q}\right)$ converge vers 0 (la filtration est bornée). Pour la filtration par colonnes, la page ${}^IE^1$ est de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & H_n(Z) \arrow[l] \arrow[d] & H_n(Y) \arrow[l, "H_n(g)"'] \arrow[d] & H_n(X) \arrow[l, "H_n(f)"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & 0 \arrow[l] \arrow[d] & H_{n-1}(Z) \arrow[l] \arrow[d] & H_{n-1}(Y) \arrow[l, "H_{n-1}(g)"] \arrow[d] & H_{n-1}(X) \arrow[l, "H_{n-1}(f)"] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Alors, la seconde page ${}^IE^2$ est de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & ** & & & & \\
0 & 0 & ** \arrow[ull] & * \arrow[ull] & ** \arrow[ull] & 0 & 0 \\
0 & 0 & ** \arrow[ull] & * \arrow[ull] & ** \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] \\
 & & & & ** \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $* \to 0$ et $0 \to *$ sont stables et la suite spectrale convergeant vers 0, on en déduit que les étoiles sont nulles. Ainsi, les suites

$$H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(Z)$$

sont exactes.

Après la troisième page, les termes en double-étoile se stabilisent également. Par la convergence vers 0, les morphismes dans ${}^IE^2_{p,q}$ entre les étoiles doubles sont des isomorphismes, dont on note les inverses

$$\operatorname{coker}\left(H_n(g)\right) \xrightarrow{\varphi_n} \ker(H_{n-1}(f))\ .$$

On peut alors définir

$$\begin{array}{rcccc} \delta_n & : & H_n(Z) & \to & H_{n-1}(X) \\ & & x & \mapsto & \varphi_n([x]) \end{array}$$

et on peut conclure car

$$\ker \delta_n = \{x \in \ker d_n^Z \ ; \ [x] = 0 \in \operatorname{coker}(H_n(g))\} = \operatorname{im}(H_n(g))$$

et

$$\operatorname{im} \delta_n = \operatorname{im} \varphi_n = \ker(H_{n-1}(f)).$$

□

Septième partie

Hyperhomologie et foncteurs hyperdérivés

Dans la section 4.3 de [3], le lecteur pourra trouver une première introduction à la théorie des foncteurs dérivés. Ici, nous allons aller un peu plus loin en introduisant la théorie des foncteurs hyperdérivés. En fait, si on construit le foncteur dérivé à partir de la valeur de ce foncteur en un objet, le foncteur hyperdérivé sera défini à partir de sa valeur sur un complexe. Comme de raison, il va nous falloir une notion analogue à celle de résolution projective pour un objet, à savoir une "résolution projective d'un complexe" - qui sera donc un bicomplexe - que nous appellerons résolution de Cartan-Eilenberg. Nous donnerons quelques propriétés élémentaires des foncteurs hyperdérivés, et nous verrons comment on peut les calculer à l'aide des suites spectrales. Nous nous inspirons ici des présentations de la section 5.7 de [11] et du chapitre XVII de [2].

<u>Définition</u> 19. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets projectifs. On appelle <u>résolution de Cartan-Eilenberg à gauche</u> $P_{\bullet\bullet}$ d'un complexe $A_\bullet$ tout complexe double de demi-plan supérieur constitué d'objets projectifs, muni d'un morphisme "d'augmentation"

$$P_{\bullet,0} \xrightarrow{\varepsilon} A_\bullet$$

tels que, pour tout p on ait :

1. Si $A_p = 0$, alors $P_{p,\bullet} = 0$,
2. Les morphismes suivants

$$B_p(\varepsilon) : B_p(P, d^h) \to B_p(A),$$
$$Z_p(\varepsilon) : Z_p(P, d^h) \to Z_p(A),$$
$$H_p(\varepsilon) : H_p(P, d^h) \to H_p(A),$$
$$\varepsilon_p : P_{p,\bullet} \to A_p$$

sont des résolutions projectives dans $\mathcal{A}$. Ici, on a noté $B_p(P, d^h)$ pour désigner les bords horizontaux au point (p, q), i.e. le complexe de chaînes dont le $q^{\text{ème}}$ terme est $d^h(P_{p+1,q})$. Les complexes $Z_p(P, d^h)$ et $H_p(P, d^h) = Z_p(P, d^h) \big/ B_p(P, d^h)$ sont définis de manière analogue.

<u>*Remarque*</u> 19. Nous avons adopté ici la définition donnée dans [2], dont le système d'axiomes n'est pas minimal. En effet, si l'on impose seulement que $B_p(\varepsilon)$ et $H_p(\varepsilon)$ sont des résolutions projectives, alors $Z_p(\varepsilon)$ et ε_p le sont également. Pour le voir, considérons, pour p et q fixés les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow B_p(P_{\bullet,q}, d^h) \longrightarrow Z_p(P_{\bullet,q}, d^h) \longrightarrow H_p(P_{\bullet,q}, d^h) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Z_p(P_{\bullet,q}, d^h) \longrightarrow P_{p,q} \longrightarrow B_{p-1}(P_{\bullet,q}, d^h) \longrightarrow 0\ ,$$

qui sont scindées puisque $H_p(P_{\bullet,q}, d^h)$ et $B_{p-1}(P_{\bullet,q}, d^h)$ sont projectifs. On en déduit que $Z_p(P_{\bullet,q}, d^h)$ et $P_{p,q}$ sont projectifs. Ensuite, par exactitude de la première suite, et par la suite exacte longue d'homologie associée (Proposition 5), comme $B_p(P, d^h) \to B_p(A)$ et $H_p(P, d^h) \to H_p(A)$ sont des résolutions projectives, leurs homologies verticales sont nulles, donc il en est de même de celle de $Z_p(P, d^h) \to Z_p(A)$. Le même argument appliqué à la seconde suite montre que $P_{p,\bullet} \to A_p$ est aussi une résolution projective.

On peut représenter une résolution de Cartan-Eilenberg $P_{\bullet\bullet} \to A_\bullet$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots & P_{n-2,2} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n-1,2} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n,2} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n+1,2} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n+2,2} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & P_{n-2,1} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n-1,1} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n,1} \arrow[l] \arrow[d, "d^v_{n,1}"'] & P_{n+1,1} \arrow[l] \arrow[d] & P_{n+2,1} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & P_{n-2,0} \arrow[l] \arrow[d, "\varepsilon_{n-2}"'] & P_{n-1,0} \arrow[l] \arrow[d, "\varepsilon_{n-1}"'] & P_{n,0} \arrow[l, "d^h_{n,0}"'] \arrow[d, "\varepsilon_n"'] & P_{n+1,0} \arrow[l, "d^h_{n+1,0}"'] \arrow[d, "\varepsilon_{n+1}"'] & P_{n+2,0} \arrow[l] \arrow[d, "\varepsilon_{n+2}"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & A_{n-2} \arrow[l] \arrow[d] & A_{n-1} \arrow[l, "\partial_{n-1}"] \arrow[d] & A_n \arrow[l, "\partial_n"] \arrow[d] & A_{n+1} \arrow[l, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] & A_{n+2} \arrow[l, "\partial_{n+2}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Proposition 6. *Tout complexe de chaînes dans $\mathcal{A}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg (à gauche).*

Démonstration. Pour chaque p, choisissons des résolutions projectives $P^B_{p,\bullet}$ de $B_p(A)$ et $P^H_{p,\bullet}$ de $H_p(A)$. Par le lemme du Fer à Cheval ([3], Lemme 44), il existe une résolution projective $P^Z_{p,\bullet}$ de $Z_p(A)$ telle que

$$0 \longrightarrow P^B_{p,\bullet} \longrightarrow P^Z_{p,\bullet} \longrightarrow P^H_{p,\bullet} \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte courte de complexes au-dessus de

$$0 \longrightarrow B_p(A) \longrightarrow Z_p(A) \longrightarrow H_p(A) \longrightarrow 0\ .$$

En appliquant à nouveau le lemme du Fer à Cheval, on trouve une résolution projective $P^A_{p,\bullet}$ de A_p s'insérant dans une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P^Z_{p,\bullet} \longrightarrow P^A_{p,\bullet} \longrightarrow P^B_{p-1,\bullet} \longrightarrow 0\ .$$

Soit donc $P_{\bullet\bullet}$ le complexe double dont la $p^{\text{ème}}$ colonne est $P^A_{p,\bullet}$ et dont les différentielles verticales sont $(-1)^p d_{P^A_{p,\bullet}}$; les différentielles horizontales étant les composées

$$P^A_{p+1,\bullet} \twoheadrightarrow P^B_{p,\bullet} \hookrightarrow P^Z_{p,\bullet} \hookrightarrow P^A_{p,\bullet}\ .$$

La construction assure que les $\varepsilon_p : P_{p,0} \to A_p$ s'assemblent et donnent un morphisme ε et chaque $Z_p(\varepsilon)$, $B_p(\varepsilon)$, $H_p(\varepsilon)$ et ε_p sont des résolutions projectives. $\square$

Afin d'assurer la cohérence de la construction des foncteurs hyperdérivés, nous aurons besoin de deux lemmes et d'une définition ; celle d'homotopie généralisée aux bicomplexes.

Définition 20. Soient $f, g : D \to E$ deux morphismes de bicomplexes. Une homotopie de f à g consiste en des morphismes $s^h_{p,q} : D_{p,q} \to E_{p+1,q}$ et $s^v_{p,q} : D_{p,q} \to E_{p,q+1}$ tels que

$$f - g = (d^h s^h + s^h d^h) + (d^v s^v + s^v d^v),$$

$$s^v d^h + d^h s^v = s^h d^v + d^v s^h = 0.$$

Dans ce cas, $(s^h + s^v : \mathrm{Tot}\,(D)_n \to \mathrm{Tot}\,(E)_{n+1})$ forment une homotopie (au sens classique) entre les morphisme $\mathrm{Tot}\,(f), \mathrm{Tot}\,(g) : \mathrm{Tot}^{\oplus}(D) \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(E)$.

Énonçons dès maintenant les lemmes que nous utiliserons.

Lemme 12. *Si $f : A \to C$ est un morphisme de complexes et si $P \to A$, $Q \to C$ sont des résolutions de Cartan-Eilenberg, alors il existe un morphisme de complexes doubles $\widetilde{f} : P \to Q$ au-dessus de f (i.e. tel que $\varepsilon_C \circ \widetilde{f} = f \circ \varepsilon_A$).*

Lemme 13.

1. *Si $f, g : A \to C$ sont homotopes et $\widetilde{f}, \widetilde{g} : P \to Q$ sont les morphismes induits par le lemme 12 sur les résolutions de Cartan-Eilenberg, alors $\widetilde{f}$ est homotope (au sens de la définition 20) à $\widetilde{g}$.*
2. *Si $A \simeq C$ dans la catégorie homotopique, alors P et Q sont homotopes.*
3. *En particulier, deux résolutions de Cartan-Eilenberg P, Q de A sont homotopes. On en déduit que pour tout foncteur additif F, les complexes $\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(P))$ et $\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(Q))$ sont homotopes.*

Pour les démonstrations, reprenons le résultat suivant de [2], dont nous abrègerons la preuve, les méthodes employées étant essentiellement les mêmes que pour les lemmes 27 et 28 de [3].

Lemme 14. *([2], Chapter V, Proposition 2.3)*
Soient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\psi^*"'] & B \arrow[r, "\varphi^*"'] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{5}$$

un diagrame commutatif de modules à lignes exactes et

$$0 \longrightarrow X' \xrightarrow{\Psi} X \xrightarrow{\Phi} X'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\Psi^*} Y \xrightarrow{\Phi^*} Y'' \longrightarrow 0$$

des suites exactes normales de complexes (i.e. telles que, pour tout n, les suites courtes $0 \longrightarrow X'_n \xrightarrow{\Psi_n} X_n \xrightarrow{\Phi_n} X''_n \longrightarrow 0$ soient exactes) au-dessus des lignes de (5) telles que X'' soit projectif (i.e. tous les X''_n sont projectifs) et Y' acyclique.

1. *Si $F' : X' \to Y'$ et $F'' : X'' \to Y''$ sont des prolongements de f' et f'', alors il existe $F : X \to Y$ prolongeant f et tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "F'"] & X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "F''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Y \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commute.

2. *Si (G', G, G'') est un autre triplet de morphismes prolongeant (f', f, f'') avec la même propriété, et si $s' : F' \sim G'$ et $s'' : F'' \sim G''$ sont des homotopies, alors il existe une homotopie $s : F \sim G$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X'_n \arrow[r] \arrow[d, "s'_n"] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "s_n"] & X''_n \arrow[r] \arrow[d, "s''_n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y'_{n+1} \arrow[r] & Y_{n+1} \arrow[r] & Y''_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Comme la suite $0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$ est normale, on peut écrire $X_n \simeq X'_n \oplus X''_n$ et supposer que

$$\Psi_n(x'_n) = (x'_n, 0) \text{ et } \Phi_n(x'_n, x''_n) = x''_n.$$

On a alors

$$\begin{cases} d_n(x'_n, x''_n) = (d'_n x'_n + \Theta_n x''_n, d''_n x''_n) \\ \varepsilon(x'_0, x''_0) = \psi \circ \varepsilon' x'_0 + \sigma x''_0 \end{cases}$$

avec $\sigma : X''_0 \to A$ et $\Theta_n : X''_n \to X'_{n-1}$ pour $n > 0$ vérifiant

$$\begin{cases} \varepsilon'' = \varphi \circ \sigma \\ \psi \circ \varepsilon' \circ \Theta_1 + \sigma \circ d''_1 = 0 \\ d'_{n-1} \circ \Theta_n + \Theta_{n-1} \circ d''_n = 0, \ n > 1 \end{cases}$$

(σ provient de la projectivité de X''_0 et celle de Θ_n de celle de X''_n, cf [2], Chapter V, Section 2). Ces dernières relations sont simplement les traductions des équations

$$\begin{cases} \varepsilon'' \circ \Phi_0 = \varphi \circ \varepsilon \\ \varepsilon \circ d_1 = 0 \\ d_{n-1} \circ d_n = 0 \end{cases}$$

Notons ici σ^X, Θ^X_n, σ^Y, Θ^Y_n pour X et Y respectivement. $F : X \to Y$ doit être de la forme

$$F_n(x'_n, x''_n) = (F'_n x'_n + \gamma_n x''_n, F''_n x''_n)$$

avec $\gamma_n : X''_n \to Y'_n$ vérifiant

$$\begin{cases} \psi^* \circ \varepsilon' \circ \gamma_0 + \sigma^Y \circ F''_0 = f \circ \sigma^X \\ d'_n \circ \gamma_n - \gamma_{n-1} \circ d''_n = F'_{n-1} \circ \Theta^X_n - \Theta^Y_n \circ F''_n, \ n > 0 \end{cases} \tag{6}$$

qui sont les traductions des conditions

$$\begin{cases} \varepsilon^Y \circ F_0 = f \circ \varepsilon^X \\ d^Y_n \circ F_n = F_{n-1} \circ d^X_n, \ n > 0 \end{cases}$$

et (6) permet alors de définir γ_n par récurrence, en utilisant la projectivité des X''_n.

Pour la deuxième assertion, $s : F \sim G$ doit avoir la forme

$$s_n(x'_n, x''_n) = (s'_n x'_n + t_n x''_n, s''_n x''_n)$$

avec $t_n : X''_n \to Y'_{n+1}$. L'équation $d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = G_n - F_n$ devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} d'_1 \circ t_0 + \Theta^Y_1 \circ s''_0 = \gamma^G_0 - \gamma^F_0 \\ d'_{n+1} \circ t_n + t_{n-1} \circ d''_n + \Theta^Y_{n+1} \circ s''_n + s'_{n-1} \circ \Theta^X_n = \gamma^G_n - \gamma^F_n, \ n > 0 \end{array} \right.$$

et ces équations sont là encore résolues par la projectivité des X''_n et par récurrence. $\square$

Nous pouvons à présent démontrer les Lemmes 12 et 13 :

Démonstration. (*du lemme 12*) (cf [2], Chapter XVII, Proposition 1.2)

Considérons les morphismes $f_{p,B} : B_p(A) \to B_p(C)$, $f_{p,Z} : Z_p(A) \to Z_p(C)$ et $f_{p,H} : H_p(A) \to H_p(C)$ induits par f. Par le lemme 27 de [3], il existe $\widetilde{f_{p,B}} : B_{p,\bullet}(P) \to B_{p,\bullet}(Q)$ et $\widetilde{f_{p,H}} : H_{p,\bullet}(P) \to H_{p,\bullet}(Q)$ prolongeant $f_{p,B}$ et $f_{p,H}$. Par le premier point du Lemme 14, il existe

$$\widetilde{f_{p,Z}} : Z_{p,\bullet}(P) \to Z_{p,\bullet}(Q)$$

au-dessus de $f_{p,Z}$ rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_{p,\bullet}(P) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{p,\bullet}(P) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p,\bullet}(P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_{p,\bullet}(Q) \arrow[r] & Z_{p,\bullet}(Q) \arrow[r] & H_{p,\bullet}(Q) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Appliquant à nouveau le Lemme 14, on trouve

$$\widetilde{f_{p,\bullet}} : P_{p,\bullet} \to Q_{p,\bullet}$$

au-dessus de f_p et tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_{p,\bullet}(P) \arrow[r] \arrow[d] & P_{p,\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & B_{p-1,\bullet}(P) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_{p,\bullet}(Q) \arrow[r] & Q_{p,\bullet} \arrow[r] & B_{p-1,\bullet}(Q) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutent. Il s'ensuit que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} P_{p,\bullet} \arrow[r, "d^h"] \arrow[d, "\widetilde{f_{p,\bullet}}"] & P_{p-1,\bullet} \arrow[d, "\widetilde{f_{p-1,\bullet}}"] \\ Q_{p,\bullet} \arrow[r, "d^h"'] & Q_{p-1,\bullet} \end{tikzcd}$$

commutent. Donc, les $\widetilde{f_{p,\bullet}}$ donnent un morphisme $\widetilde{f} : P \to Q$ au-dessus de f, comme voulu. $\square$

Démonstration. (*du lemme 13*) (cf [2], Chapter XVII, Proposition 1.2)

1. Soient donc $\widetilde{f}, \widetilde{g} : P \to Q$ et soit $s : f \sim g$ une homotopie. Par le lemme 28 de [3], il existe $S_{p,\bullet} : P_{p,\bullet} \to Q_{p+1,\bullet}$ prolongeant $s_p : A_p \to C_{p+1}$. Les morphismes $S_{p,q}$ donnent un morphisme $S : P \to Q$ de bidegré $(1,0)$ qui commute avec les augmentations ε et anticommute avec les différentielles verticales. Posant

$$J := \widetilde{f} + d^h \circ S + S \circ d^h$$

on trouve que $J : P \to Q$ est un morphisme au-dessus de g, puisqu'on a

$$\varepsilon_C \circ J = \varepsilon_C \circ \widetilde{f} + \varepsilon_C \circ d^h \circ S + \varepsilon_C \circ S \circ d^h = f \circ \varepsilon_A - d_C \circ \varepsilon_C \circ S + s \circ \varepsilon_A \circ d^h$$
$$= f \circ \varepsilon_A - d_C \circ \varepsilon_C \circ S - s \circ d_A \circ \varepsilon_A = f \circ \varepsilon_A - (d_C \circ s + s \circ d_A) \circ \varepsilon_A = g \circ \varepsilon_A$$

et que $(S, 0)$ est une homotopie $\widetilde{f} \sim J$. Il reste à montrer que $\widetilde{g}$ et J sont homotopes. Sur chaque colonne $P_{p,\bullet}$, $Q_{p,\bullet}$, $B_{p,\bullet}(P)$, ..., on considère les différentielles $(-1)^p d^v$. D'après le Corollaire 11 de [3], on peut choisir des homotopies

$$T_{p,B} : J_{p,B} \sim \widetilde{g_{p,B}} \quad \text{et} \quad T_{p,H} : J_{p,H} \sim \widetilde{g_{p,H}}$$

et le second point du Lemme 14 donne une homotopie

$$T_{p,Z} : J_{p,Z} \sim \widetilde{g_{p,Z}}$$

qui "commute" avec les deux premières. En appliquant à nouveau le Lemme 14, on obtient des homotopies

$$T_{p,\bullet} : J_{p,\bullet} \sim \widetilde{g_{p,\bullet}}.$$

Les morphismes $(-1)^p T_{p,\bullet}$ donnent un morphisme $T : P \to Q$ de bidegré $(0,1)$ tel que

$$d^h \circ T + T \circ d^h = 0 \quad \text{et} \quad d^v \circ T + T \circ d^v = g - J$$

et donc $(0, T)$ est une homotopie $J \sim \widetilde{g}$.

2. Ceci provient de 1. et de la définition d'homotopie pour les bicomplexes. En effet, si $\varphi : A \to C$ et $\psi : C \to A$ sont des morphismes tels que $\varphi \circ \psi \sim id_C$ et $\psi \circ \varphi \sim id_A$, alors $\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}$ est homotope à id_Q d'après la premier point et la Définition 20. De même, $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ est homotope à id_P, donc P et Q sont bien homotopes.

□

Après ces considérations techniques, nous pouvons construire les foncteurs hyperdérivés :

<u>Définition</u> 21. • Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à droite et supposons que $\mathcal{A}$ ait assez de projectifs. Si A est un complexe dans $\mathcal{A}$, et si $P \to A$ est une résolution de Cartan-Eilenberg, on pose, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{L}_n F(A) := H_n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(P))).$$

Le Lemme 13 montre que $\mathbb{L}_n F(A)$ ne dépend pas de P.

• Si $f : A \to C$ est un morphisme de complexes et $\widetilde{f} : P \to Q$ est induit par f sur les résolutions de Cartan-Eilenberg (Lemme 12), définissons

$$\mathbb{L}_n F(f) := H_n(\mathrm{Tot}\,(\widetilde{f})) : \mathbb{L}_n F(A) \to \mathbb{L}_n F(B).$$

Le Lemme 13 montre que $\mathbb{L}_n F : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ est un foncteur, au moins si $\mathcal{B}$ est cocomplète (i.e. elle admet des colimites). Les $\mathbb{L}_n F$ sont les <u>foncteurs hyperdérivés à gauche</u> de F.

Remarque 20. Si $\mathcal{B}$ n'est pas cocomplète, $\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(P))$ peut ne pas exister et il faut alors se restreindre à $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, catégorie des complexes de chaînes minorés A de $\mathcal{A}$, en ce sens que

$$\exists p_0 \ ; \ \forall p < p_0, \ A_p = 0.$$

Puisque dans ce cas, $P_{p,q} = 0$ dès que $p < p_0$ ou $q < 0$, $\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(P))$ existe dans $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ et $\mathbb{L}_n F$ est alors un foncteur

$$\mathbb{L}_n F : \mathcal{C}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}.$$

Exemple 5. Si X est un objet de $\mathcal{A}$, et si A_X est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

alors, en prenant $P_{\bullet\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg de A_X :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{0,0} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

on voit alors que $P_{0,\bullet}$ est une résolution projective de X. Ainsi, si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur exact à droite, alors pour tout $n \geq 0$, on a, comme on peut s'y attendre

$$\mathbb{L}_n F(A_X) = H_n(\mathrm{Tot}^{\oplus}(F(P))) = H_n(F(P_{0,\bullet})) \stackrel{\text{def}}{=} L_n F(X).$$

Remarque 21. On peut montrer ([11], Lemma 5.7.5) que si

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes minorés, alors on a une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{L}_{n+1}F(C) \xrightarrow{\delta} \mathbb{L}_n F(A) \longrightarrow \mathbb{L}_n F(B) \longrightarrow \mathbb{L}_n F(C) \xrightarrow{\delta} \mathbb{L}_{n-1}F(A) \longrightarrow \cdots.$$

Proposition 7. *Il existe toujours une suite spectrale*

$$^{II}E^2_{p,q} = L_p F(H_q(A)) \Longrightarrow \mathbb{L}_{p+q}F(A).$$

Si A est minoré, il existe une suite spectrale

$$^{I}E^2_{p,q} = H_p(L_q F(A)) \Longrightarrow \mathbb{L}_{p+q}F(A).$$

Démonstration. Il s'agit tout simplement des suite spectrales homologiques associées au complexe double de demi-plan supérieur $F(P)$, avec $P \to A$ une résolution de Cartan-Eilenberg de A. En effet, on a alors $H_\bullet(\mathrm{Tot}\,(F(P))) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_\bullet(F(A))$, ainsi que

$$^{I}E^2_{p,q} = H^h_p(H^v_q(F(P)) = H^h_p(L_q(F(A)) = H_p(L_qF(A)).$$

Fixons ensuite p et notons que pour tout q, on a $^{I}E^0_{p,q} = F(P_{q,p})$. Puisque P est une résolution de Cartan-Eilenberg, les objets $H_{q,p}(P,d^h)$ et $B_{q-1,p}(P,d^h)$ sont projectifs, donc les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow Z_{q,p}(P,d^h) \longrightarrow P_{q,p} \longrightarrow B_{q-1,p}(P,d^h) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow B_{q,p}(P,d^h) \longrightarrow Z_{q,p}(P,d^h) \longrightarrow H_{q,p}(P,d^h) \longrightarrow 0$$

sont scindées. Donc, en appliquant F, on obtient deux autres suites courtes scindées (donc exactes) :

$$0 \longrightarrow F(Z_{q,p}(P,d^h)) \longrightarrow F(P_{q,p}) \longrightarrow F(B_{q-1,p}(P,d^h)) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

$$0 \longrightarrow F(B_{q,p}(P,d^h)) \longrightarrow F(Z_{q,p}(P,d^h)) \longrightarrow F(H_{q,p}(P,d^h)) \longrightarrow 0 \tag{8}$$

On en déduit, en utilisant respectivement les suites (7) et (8), l'isomorphisme

$$H^h_q(F(P_{\bullet,p})) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(F(d^h_{q,p})) \Big/ \mathrm{im}\,(F(d^h_{q+1,p}))$$

$$\simeq F(Z_{q,p}(P,d^h)) \Big/ F(B_{q,p}(P,d^h)) \simeq F(H_{q,p}(P,d^h)) \stackrel{\text{def}}{=} F(H^h_q(P_{\bullet,p})).$$

Il vient donc finalement

$$^{II}E^2_{p,q} = H^v_p(H^h_q(F(P))) = H^v_p(F(H^h_q(P))) = L_pF(H_q(A)),$$

et le résultat suit. □

Corollaire 8. *1. Si A est exact, on a $\mathbb{L}_nF(A) = 0$ pour tout n.*

2. Tout quasi-isomorphisme $f : A \to B$ induit des isomorphismes

$$\mathbb{L}_\bullet F(A) \simeq \mathbb{L}_\bullet F(B).$$

3. Si chaque A_p est F-acyclique (i.e. $L_qF(A_p) = 0$ pour tout $q \neq 0$) et si A est minoré, alors

$$\mathbb{L}_pF(A) = H_p(F(A)),\ \forall p \geq 0.$$

Exemple 6. (Hypertor)

Soient R un anneau et B un R-module à gauche. Les groupes hypertor $\mathbf{Tor}^R_n(A_\bullet, B)$ d'un complexe de R-modules à droite $A_\bullet$ sont par définition les foncteurs hyperdérivés $\mathbb{L}_nF(A_\bullet)$ pour $F = - \otimes_R B$. Ceci étend la définition usuelle des Tor^R_n et si $A_\bullet$ est minoré et constitué de modules plats, alors

$$\mathbf{Tor}^R_n(A_\bullet, B) = H_n(A_\bullet \otimes_R B),\ \forall n \geq 0.$$

Les suites spectrales venant de la Proposition 7 s'écrivent

$$^{II}E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}^R_p(H_q(A), B) \Longrightarrow \mathbf{Tor}^R_{p+q}(A_\bullet, B)$$

et (lorsque $A_\bullet$ est minoré),

$$^{I}E^2_{p,q} = H_p(\operatorname{Tor}^R_q(A_\bullet, B)) \Longrightarrow \mathbf{Tor}^R_{p+q}(A_\bullet, B).$$

On peut même aller plus loin et si $B_\bullet$ est un complexe, on peut définir l'hypertor du bifoncteur $A \otimes_R B$ comme étant

$$\mathbf{Tor}^R_n(A_\bullet, B_\bullet) := H_n(\operatorname{Tot}^{\oplus}(P \otimes_R Q)),$$

avec $P \to A$ et $Q \to B$ des résolutions de Cartan-Eilenberg. Si B est un module, considéré comme un complexe, ceci coïncide avec la première définition ; et ceci vaut également pour A. On peut montrer que les suites spectrales associées sont

$$^{II}E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+l=q} \operatorname{Tor}^R_p(H_k(A_\bullet), H_l(B_\bullet)) \Longrightarrow \mathbf{Tor}^R_{p+q}(A_\bullet, B_\bullet)$$

et si $A_\bullet$ et $B_\bullet$ sont minorés,

$$^{I}E^2_{p,q} = H_p(\operatorname{Tot}^{\oplus}(\operatorname{Tor}^R_q(A_\bullet, B_\bullet))) \Longrightarrow \mathbf{Tor}^R_{p+q}(A_\bullet, B_\bullet).$$

On dispose bien-sûr d'une variante cohomologique :

Définition 22. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets injectifs. Pour un complexe de cochaînes $A^\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, on dit qu'un bicomplexe de demi-plan supérieur constitué d'objets injectifs $I^{\bullet\bullet}$ est une résolution de Cartan-Eilenberg à droite de $A^\bullet$ si $I^{p,\bullet} = 0$ dès que $A^p = 0$ et si on a un morphisme d'augmentation $A^\bullet \to I^{\bullet,0}$ tel que les morphismes induits sur $B^p(A)$, $Z^p(A)$, $H^p(A)$ et sur A^p sont des résolutions injectives pour tout p.

Proposition 8. *Tout complexe de cochaînes dans $\mathcal{A}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg à droite.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 6, en passant de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}^{op}$. □

Par dualité, les Lemmes 12 et 13 restent vrais en cohomologie et on en arrive à la définition suivante

Définition 23. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est exact à gauche, on définit, pour un complexe $A^\bullet$ et $n \geq 0$,

$$\mathbb{R}^n F(A) := H^n(\operatorname{Tot}^{\Pi}(F(I))),$$

avec I une résolution de Cartan-Eilenberg à droite de A, au moins si $\operatorname{Tot}^{\Pi}(F(I))$ existe dans $\mathcal{B}$, ce qui est le cas si $\mathcal{B}$ est complète ou si A est minoré. Il s'agit de foncteurs $\mathbb{R}^n F : \mathcal{C}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ (ou $\mathbb{R}^n F : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est complète). Pour le voir, il suffit de considérer $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$. Les $\mathbb{R}^n F$ sont les foncteurs hyperdérivés à droite de F.

Proposition 9. *Soit $A^\bullet$ un complexe dans $\mathcal{A}$. On a une suite spectrale cohomologique*

$$^{II}E_2^{p,q} = R^pF(H^q(A)) \overset{*}{\Longrightarrow} \mathbb{R}^{p+q}F(A).$$

De plus, si A est minoré, on a

$$^{I}E_2^{p,q} = H^p(R^qF(A)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(A),$$

ainsi que

$$^{II}E_2^{p,q} = R^pF(H^q(A)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(A).$$

Démonstration. C'est un argument de dualité ; mais détaillons tout-de-même un peu :

Soit $A \to I$ une résolution de Cartan-Eilenberg (à droite) de A. On a

$$H^\bullet(\mathrm{Tot}^{\Pi}(F(I))) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^\bullet F(A).$$

De plus, il vient

$$^{I}E_1^{p,q} = H_h^p(H_v^q(F(I))) = H^p(R^qF(A)).$$

Ensuite, comme $Z^{q,p}(I,d^h)$ et $B^{q,p}(I,d^h)$ sont injectifs, les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow Z^{q,p}(I,d^h) \longrightarrow I^{q,p} \longrightarrow B^{q+1,p}(I,d^h) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow B^{q,p}(I,d^h) \longrightarrow Z^{q,p}(I,d^h) \longrightarrow H^{q,p}(I,d^h) \longrightarrow 0$$

sont scindées, il en est donc de même de leurs images par F, qui sont donc exactes. Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} H_h^q(F(I^{\bullet,p})) &= \ker(F(d^h_{q,p})) \Big/ \mathrm{im}\,(F(d^h_{q-1,p})) \\ &\simeq F(Z^{q,p}(I,d^h)) \Big/ F(B^{q,p}(I,d^h)) \simeq F(H^{q,p}(I,d^h)), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$^{II}E_2^{p,q} = H_v^p(H_h^q(F(I))) = H^p(F(H^{q,\bullet}(I,d^h))) = R^pF(H^q(A)).$$

Enfin, les considérations sur la convergence proviennent du Théorème 5. □

Corollaire 9. *$\mathbb{R}^\bullet F$ s'annule sur les complexes exacts et envoie un quasi-isomorphisme sur un isomorphisme.*

Exemple 7. (Hyperext)

Soient A un R-module et $B^\bullet$ un complexe de cochaînes de R-modules. On définit l'hyperext :

$$\mathbf{Ext}_R^n(A,B^\bullet) := \mathbb{R}^nF(B^\bullet),$$

où $F = \mathrm{Hom}_R(A,-)$. Les propriétés sont duales à celles des hypertor et on a les suites spectrales

$$^{II}E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_R^p(A,H^q(B^\bullet)) \Longrightarrow \mathbf{Ext}_R^{p+q}(A,B^\bullet)$$

et, si $B^\bullet$ est minoré,

$$^{I}E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Ext}_R^q(A,B^\bullet)) \Longrightarrow \mathbf{Ext}_R^{p+q}(A,B^\bullet).$$

On peut enfin définir

$$\mathbf{Ext}_R^n(A^\bullet,B^\bullet) := H^n(\mathrm{Tot}^{\Pi}(\mathrm{Hom}_R(I,J))),$$

avec $A \to I$ et $B \to J$ des résolutions de Cartan-Eilenberg à droite.

Huitième partie
Suites spectrales de Grothendieck

Nous allons voir ici un résultat (et sa variante homologique) dû à Grothendieck (cf [4], Théorème 2.4.1 [1]) donnant une suite spectrale convergeant vers le foncteur dérivé du composé de deux foncteurs. Ce résultat donne les suites spectrales de Leray-Serre (cf [11], 5.3) et de Lyndon-Hochschild-Serre, que nous étudierons. Ce théorème est devenu un principe fondamentale de l'Algèbre Homologique.

Théorème 10. *(Suite spectrale cohomologique de Grothendieck)*

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possédant suffisamment d'injectifs et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ des foncteurs exacts à gauche, tels que F envoie les injectifs de $\mathcal{A}$ sur des G-acycliques. Alors, il existe une suite spectrale cohomologique de premier quadrant, convergeant vers $R^\bullet GF(X)$, pour tout objet X de $\mathcal{A}$:

$$E_2^{p,q} = R^pG(R^qF(X)) \Longrightarrow R^{p+q}GF(X).$$

Démonstration. Choisissons une résolution injective $X \to I$ de X et appliquons F pour obtenir un complexe de cochaînes $F(I)$ dans $\mathcal{B}$. À l'aide d'une résolution de Cartan-Eilenberg $F(I) \to J$, formons les foncteurs hyperdérivés :

$$\mathbb{R}^nG(F(I)) \stackrel{\text{def}}{=} H^n(\operatorname{Tot}^{\Pi}(G(J))) = H^n(\operatorname{Tot}^{\oplus}(G(J))),\ n \geq 0.$$

La première suite spectrale est alors

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(R^qG(FI)) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}G(FI).$$

Par hypothèse, chaque $F(I^p)$ est G-acyclique, i.e.

$$R^qG(F(I^p)) = 0,\ \forall q \neq 0,$$

donc la suite spectrale s'effondre et donne

$$\mathbb{R}^pG(FI) \simeq H^p(GF(I)) = R^pGF(X).$$

La seconde suite spectrale est alors

$${}^{II}E_2^{p,q} = R^pG(H^q(F(I))) \Longrightarrow R^{p+q}GF(X)$$

et puisque $H^q(F(I)) = R^qF(X)$, on a le résultat. $\square$

---

1. Rappelons ici l'énoncé originel dudit résultat, tel que l'on le trouve dans [4] :

Théorème 2.4.1 *Soient C, C', C'' trois catégories abéliennes, on suppose que tout objet de C ou C' est isomorphe à un sous-truc d'un objet injectif. Considérons des foncteurs covariants $F : C \to C'$ et $G : C' \to C''$, on suppose que G est exact à gauche et que F transforme objets injectifs en objets G-acycliques (i.e. annulés par les R^qG, $q > 0$). Alors il existe un foncteur spectral cohomologique sur C, à valeurs dans C'', aboutissant au foncteur dérivé à droite $\mathfrak{R}(GF)$ de GF, (convenablement filtré), et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(A) = R^pG(R^qF(A)).$$

Remarque 22. Dans la suite spectrale du Théorème 10, les morphismes extrêmaux sont les morphismes naturels

$$R^pG(F(X)) \to R^pGF(X) \text{ et } R^qGF(X) \to G(R^qF(X)).$$

De plus, la suite exacte à cinq termes associée est

$$0 \longrightarrow R^1G(F(X)) \longrightarrow R^1GF(X) \longrightarrow G(R^1F(X)) \longrightarrow R^2G(F(X)) \longrightarrow R^2GF(X)\ .$$

On peut donner une preuve (peut-être) un peu plus détaillée (mais moins élégante) et suivant le même schéma, sans utiliser explicitement les foncteurs hyperdérivés et ceci permet d'éviter les considérations techniques des Lemmes 12 et 13. Cette démonstration est tirée de [5], Théorème 20.9.6.

Démonstration. Soit un objet X dans $\mathcal{A}$. On peut, par hypothèse, choisir une résolution injective $X \to I^\bullet$. En appliquant F, on obtient un complexe $F(I^\bullet)$, pour lequel on peut choisir $F(I^\bullet) \to J^{\bullet\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg décrite dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & J^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & J^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & J^{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & J^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & J^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & J^{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & F(I^0) \arrow[r] \arrow[u] & F(I^1) \arrow[r] \arrow[u] & F(I^2) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$G(J^{\bullet\bullet})$ est alors un complexe double, pour lequel on peut considérer $\mathrm{Tot}^{\oplus}(G(J^{\bullet\bullet}))$ et ceci donne lieu à deux suites spectrales $\left({}^{I}E_r^{p,q}\right)$ et $\left({}^{II}E_r^{p,q}\right)$.

Fixons p. On a une résolution injective $F(I^p) \to J^{p,\bullet}$ et il vient

$${}^{I}E_1^{p,q} = H_v^q(G(J^{p,\bullet})) \overset{\text{def}}{=} R^qG(F(I^p)) = \begin{cases} GF(I^p) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par hypothèse. Ainsi, $\left({}^{I}E_r^{p,q}\right)$ s'effondre en ${}^{I}E_2$ et on a

$${}^{I}E_2^{p,q} = \left\{ \begin{array}{cc} H_h^p(GF(I^\bullet)) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} R^pGF(X) & \text{si } q=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$${}^{I}E_2^{p,q} \Longrightarrow R^{p+q}GF(X) \simeq H^{p+q}(\mathrm{Tot}\,(G(J^{\bullet\bullet})))$$

ce qui entraîne que

$${}^{II}E_2^{p,q} \Longrightarrow R^{p+q}GF(X).$$

Ensuite, $Z^p(F(I)) \to Z^{p,\bullet}(J,d^h)$, $B^p(F(I)) \to B^{p,\bullet}(J,d^h)$ et $H^p(F(I)) \to H^{p,\bullet}(J,d^h)$ sont des résolutions injectives et on a des suites exactes courtes, scindées par injectivité des termes

$$0 \longrightarrow Z^{q,p}(J,d^h) \longrightarrow J^{q,p} \longrightarrow B^{q+1,p}(J,d^h) \longrightarrow 0\ .$$

ainsi que

$$0 \longrightarrow B^{q,p}(J, d^h) \longrightarrow Z^{q,p}(J, d^h) \longrightarrow H^{q,p}(J, d^h) \longrightarrow 0$$

Ensuite, comme G envoie une suite exacte courte scindée sur une suite exacte courte scindée, on a, par la première et la seconde suite exacte respectivement :

$$H_h^q(G(J^{\bullet,p})) = G(Z^{q,p}(J, d^h)) \Big/ G(B^{q,p}(J, d^h)) = G(H^{q,p}(J, d^h)),$$

d'où

$${}^{II}E_2^{p,q} = H_v^p(H_h^q(G(J^{\bullet\bullet}))) = H_v^p(G(H^{q,\bullet}(J, d^h))) = R^pG(H^q(F(I^\bullet))) = R^pG(R^qF(X)),$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

<u>Corollaire</u> 10. *(Suite spectrale homologique de Grothendieck)*
Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes telles que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ aient assez de projectifs et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ des foncteurs exacts à droite tels que F envoie les projectifs de $\mathcal{A}$ sur des G-acycliques. Il existe alors une suite spectrale homologique de premier quadrant pour tout objet X de $\mathcal{A}$:

$$E_{p,q}^2 = L_pG(L_qF(X)) \Longrightarrow L_{p+q}GF(X).$$

De plus, la suite exacte à cinq termes associée est alors

$$L_2GF(X) \longrightarrow L_2G(F(X)) \longrightarrow G(L_1F(X)) \longrightarrow L_1GF(X) \longrightarrow L_1G(F(X)) \longrightarrow 0\ .$$

Démonstration. On peut considérer $F^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$ et $G^{op} : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{C}^{op}$ et le résultat découle directement du Théorème 10, en utilisant $L_pF = R^pF^{op}$, etc. $\square$

<u>Exemple</u> 8. Soient R, S des anneaux commutatifs, $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux et A un S-module. Les foncteurs

$$R - \mathfrak{Mod} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(S,-)} S - \mathfrak{Mod} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_S(A,-)} \mathfrak{Ab} = \mathbb{Z} - \mathfrak{Mod}$$

satisfont les hypothèses du Théorème précédent, comme on le vérifie aisément à l'aide du lemme 31 de [3], de [11], Exercise 2.3.5 et Proposition 2.3.10 et on a

$$GF = \mathrm{Hom}_S(A, \mathrm{Hom}_R(S, -)) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, -).$$

La suite spectrale de Grothendieck est alors de la forme

$$\mathrm{Ext}_S^p(A, \mathrm{Ext}_R^q(S, B)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{p+q}(A, B).$$

De même, si B est un S-module, en appliquant le Corollaire 10 à

$$\mathfrak{Mod} - R \xrightarrow{-\otimes_R S} \mathfrak{Mod} - S \xrightarrow{-\otimes_S B} \mathfrak{Ab}$$

on obtient la suite spectrale

$$\mathrm{Tor}_p^S(\mathrm{Tor}_q^R(A, S), B) \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^R(A, B).$$

Neuvième partie

Application à la cohomologie des groupes : Suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre

Nous terminons notre étude des suites spectrales par une application fondamentale en cohomologie des groupes. Nous allons plus particulièrement appliquer le Théorème de Grothendieck et exposer ce que l'on appelle la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. Nous supposerons ici connus les fondements de la cohomologie des groupes, tels que présentés par exemple dans [3].

Nous commençons par une petite digression sur la notion de "foncteurs adjoints" :

Définition 24. ([12], Definition 3.2.1)

Soient $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs entre catégories abéliennes. On dit que G (resp. F) est adjoint à droite (resp. à gauche) à F (resp. à G) si on a un isomorphisme de foncteurs

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, ?) \simeq \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G?).$$

On dit alors que (F, G) est une paire adjointe.

Autrement dit, pour tout objet fixé " $-$ ", les foncteurs en la variable "?" sont équivalents et pour tout objet fixé "?", les foncteurs en la variable " $-$ " sont équivalents.

Exemple 9. Pour tous anneaux R, S, si M est un R-S-bimodule, on a, en vertu du point 4 du lemme 2 de l'Annexe de [3], une paire adjointe

$$(M \otimes_S -, \operatorname{Hom}_R(M, -)).$$

Lemme 15. *(F, G) est une paire adjointe si et seulement si pour tous objets C de $\mathcal{C}$ et D de $\mathcal{D}$, on a une bijection*

$$\tau = \tau_{CD} : \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

telle que pour tous $f : C \to C'$ et $g : D \to D'$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C'), D) \arrow[r, "\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(f),D)"] \arrow[d, "\tau_{C'D}"] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \arrow[r, "\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C),g)"] \arrow[d, "\tau_{CD}"] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C), D') \arrow[d, "\tau_{CD'}"] \\
\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C', G(D)) \arrow[r, "\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G(D))"'] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \arrow[r, "\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C,G(g))"'] & \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(C, G(D'))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. C'est une simple traduction de la Définition 24, en développant ce que l'on entend par "isomorphisme fonctoriel". □

Lemme 16. *1. Si un foncteur additif $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est adjoint à droite à un foncteur exact $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et si I est un injectif de $\mathcal{D}$, alors $G(I)$ est un injectif de $\mathcal{C}$. On dit alors que G préserve les injectifs.*

2. Si un foncteur additif $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est adjoint à gauche à un foncteur exact $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et si P est un projectif de $\mathcal{C}$, alors $F(P)$ est un projectif de $\mathcal{D}$. On dit dans ce cas que F préserve les projectifs.

Démonstration. Il suffit de traiter le premier cas, le second étant dual. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G(I))$ est exact. Soit une injection $f : C \to C'$ dans $\mathcal{C}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C'), I) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(f),I)"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(C), I) \arrow[d, "\tau"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C', G(I)) \arrow[r, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,G(I))"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C, G(I)) \end{tikzcd}$$

commute par le Lemme 15. Comme F est exact et I injectif, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F(f), I)$ est surjectif, donc $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f, G(I))$ est surjectif et donc $G(I)$ est bien injectif. □

Ceci étant dit, revenons à la cohomologie des groupes et fixons G un groupe.

Lemme 17. *Soient A un G-module et $\mathbb{Z}$, considéré comme G-module trivial. Alors, on a*

$$A_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A$$

et

$$A^G \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

Démonstration. A_G est le plus grand quotient de A qui soit un G-module trivial. On en conclut que le foncteur $-_G$ est adjoint à gauche au foncteur trivial $\mathfrak{Ab} \to G - \mathfrak{Mod}$. Ainsi, $-_G$ est un foncteur exact à droite. De même, A^G est le sous-module trivial maximal de A, donc $-^G$ est adjoint à droite au foncteur trivial $\mathfrak{Ab} \to G - \mathfrak{Mod}$. Ainsi, $-^G$ est exact à gauche.

Considérant $\mathbb{Z}$ comme un $\mathbb{Z}$-$\mathbb{Z}[G]$-module, le foncteur trivial $\mathbb{Z} - \mathfrak{Mod} \to \mathbb{Z}[G] - \mathfrak{Mod}$ est le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, -)$. D'après l'Exemple 9, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} -$ est son adjoint à gauche. On doit donc avoir $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} - \simeq -_G$. Pour la seconde assertion, on utilise

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}}(\mathbb{Z}, A^G) \simeq A^G.$$

□

Proposition 10. *Soit A un G-module. Alors*

$$H_\bullet(G, A) = L_\bullet(-_G)(A),$$

$$H^\bullet(G, A) = R^\bullet(-^G)(A).$$

En particulier, on retrouve bien

$$H_0(G, A) = A_G \quad \textit{et} \quad H^0(G, A) = A^G.$$

Démonstration. Par définition et par le Lemme 17, il vient

$$H_\bullet(G,A) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = L_\bullet(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} -)(A) = L_\bullet(-_G)(A),$$

ainsi que

$$H^\bullet(G,A) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^\bullet(\mathbb{Z},A) = R^\bullet(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},-))(A) = R^\bullet(-^G)(A).$$

□

Soient H un autre groupe, A un G-module (i.e. un module sur $\mathbb{Z}[G]$) et un morphisme de groupes $\rho : H \to G$. Le foncteur d'oubli associé $\rho^\sharp : G - \mathfrak{Mod} \to H - \mathfrak{Mod}$ est exact. On définit les <u>invariants</u> et <u>coinvariants</u> respectivement par

$$A^G := \{a \in A \ ; \ ga = a, \ \forall g \in G\},$$

et

$$A_G := {}^{A}/_{S},$$

où S est le sous-G-module engendré par $\{ga - a, \ g \in G, \ a \in A\}$. On a alors une surjection naturelle

$$(\rho^\sharp A)_H \twoheadrightarrow A_G$$

ainsi qu'une injection naturelle

$$A^G \hookrightarrow (\rho^\sharp A)^H.$$

Ces deux morphismes s'étendent de manière unique en deux morphismes $\rho_* =: \operatorname{cor}_H^G$ appelé <u>corestriction</u> et $\rho^* =: \operatorname{res}_H^G$ appelé <u>restriction</u> :

$$\operatorname{cor}_H^G : H_\bullet(H,\rho^\sharp A) \to H_\bullet(G,A)$$

et

$$\operatorname{res}_H^G : H^\bullet(G,A) \to H^\bullet(H,\rho^\sharp A).$$

On peut le voir à l'aide de la résolution libre

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\otimes 3} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(avec $\mathbb{Z}[G]^{\otimes n} := \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{Z}[G]$) permettant de calculer $H_\bullet$ et $H^\bullet$ (cf [3], 4.2). Alors, $H^n(G,A)$ peut par exemple être vu comme l'ensemble des classes de certaines fonctions $f : \prod_{i=1}^n G \to A$.

Un cas particulier important et donnant leur légitimité aux noms "restriction" et "corestriction", est celui où $H \hookrightarrow G$ est un sous-group de G. Dans ce cas, $\mathbb{Z}[G]$ est un $\mathbb{Z}[H]$-module libre, pour lequel tout ensemble de représentants des classes à gauche modulo H est une base. Ainsi, tout G-module projectif est un H-module projectif et on peut utiliser n'importe quelle G-résolution projective $P \to \mathbb{Z}$ pour calculer l'homologie et la cohomologie de H.

<u>*Remarque*</u> 23. Si A est un G-module, on a $\operatorname{cor}_H^G = H_\bullet(\alpha)$ et $\operatorname{res}_H^G = H^\bullet(\beta)$, avec $\alpha : P\otimes_H A \to P\otimes_G A$ et $\beta : \operatorname{Hom}_G(P,A) \to \operatorname{Hom}_H(P,A)$.

On peut aller un peu plus loin, et définir rapidement l'hyper(co)homologie des groupes, en utilisant la Partie 7 :

Si $A_\bullet$ est un complexe de chaînes de G-modules, les foncteurs hyperdérivés $\mathbb{L}_n(-_G)(A_\bullet)$ forment l'hyperhomologie de G à coefficients dans $A_\bullet$:

$$\mathbb{H}_n(G, A_\bullet) := \mathbb{L}_n(-_G)(A_\bullet),\ n \geq 0.$$

De même, si $A^\bullet$ est un complexe de cochaînes de G-modules, on écrit

$$\mathbb{H}^n(G, A^\bullet) := \mathbb{R}^n(-^G)(A^\bullet),\ n \geq 0,$$

c'est l'hypercohomologie de G à coefficients dans $A^\bullet$.

Par les Propositions 7 et 9, on a des suites spectrales

$${}^{II}E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(A_\bullet)) \Longrightarrow \mathbb{H}_{p+q}(G, A_\bullet),$$

$${}^{I}E^2_{p,q} = H_p(H_q(G, A_\bullet)) \Longrightarrow \mathbb{H}_{p+q}(G, A_\bullet),$$

si $A_\bullet$ est minoré ; ainsi que

$${}^{II}E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(A^\bullet)) \overset{*}{\Longrightarrow} \mathbb{H}^{p+q}(G, A^\bullet),$$

et

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(H^q(G, A^\bullet)) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}(G, A^\bullet),$$

si $A^\bullet$ est minoré.

Revenons à la cohomologie classique des groupes :

Soit $N \trianglelefteq G$ et soit A un G-module. On définit l'inflation :

$$\inf : H^\bullet\left({}^{G}/_{N}, A^N\right) \overset{\text{res}}{\to} H^\bullet(G, A^N) \to H^\bullet(G, A)$$

ainsi que la coinflation :

$$\text{coinf} : H_\bullet(G, A) \to H_\bullet(G, A_N) \overset{\text{cor}}{\to} H_\bullet\left({}^{G}/_{N}, A_N\right).$$

Proposition 11. *Pour $n \neq 0$, les composées*

$$H^n\left({}^{G}/_{N}, A^N\right) \xrightarrow{\inf} H^n(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^n(N, A)$$

et

$$H_n(N, A) \xrightarrow{\text{cor}} H_n(G, A) \xrightarrow{\text{coinf}} H_n\left({}^{G}/_{N}, A_N\right)$$

sont nulles.

Démonstration. On ne traite que le premier cas, le second étant dual. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n\left({}^{G}/_{N}, A^N\right) \arrow[rr, "\inf"] \arrow[dr, "\widetilde{\text{res}}"'] & & H^n(G, A) \arrow[r, "\text{res}"] & H^n(N, A) \\
& H^n(G, A^N) \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Un élément de $H^n\left({}^G/_N, A^N\right)$ peut se voir, en considérant la résolution standard

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\otimes 3} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\ ,$$

comme la classe $\overline{f}$ d'une certaine fonction

$$f : \prod_{i=1}^{n} {}^G/_N \to A^N.$$

En notant $\pi : G \twoheadrightarrow {}^G/_N$ et $\iota : N \hookrightarrow G$, on a alors

$$\widetilde{\mathrm{res}}(f) :\ \prod_{i=1}^n G \overset{\pi^n}{\twoheadrightarrow} \prod_{i=1}^n {}^G/_N \xrightarrow{f} A^N$$

$$\varphi(\widetilde{\mathrm{res}}(f)) :\ \prod_{i=1}^n G \overset{\pi^n}{\twoheadrightarrow} \prod_{i=1}^n {}^G/_N \xrightarrow{f} A^N \hookrightarrow A$$

$$\mathrm{res}(\varphi(\widetilde{\mathrm{res}}(f))) :\ \prod_{i=1}^n N \overset{\iota^n}{\hookrightarrow} \prod_{i=1}^n G \overset{\pi^n}{\twoheadrightarrow} \prod_{i=1}^n {}^G/_N \xrightarrow{f} A^N \hookrightarrow A$$

et $\pi^n \circ \iota^n = 0$, donc $\mathrm{res}(\inf(\overline{f})) = \mathrm{res}(\varphi(\widetilde{\mathrm{res}}(f))) = 0$, d'où le résultat. □

Établissons un lemme, avant l'étude de la suite de Lyndon-Hochschild-Serre :

Lemme 18. *Si $N \trianglelefteq G$ et A est un G-module, alors A_N et A^N sont des ${}^G/_N$-modules. De plus, le foncteur d'oubli $\rho^\sharp : {}^G/_N - \mathfrak{Mod} \to G - \mathfrak{Mod}$ admet $-_N$ pour adjoint à gauche et $-^N$ pour adjoint à droite.*

Démonstration. Un ${}^G/_N$-module est un G-module sur lequel N agit trivialement. Ainsi, par construction, A_N et A^N sont bien des ${}^G/_N$-modules. Les propriétés universelles de $A^N \hookrightarrow A$ et $A \twoheadrightarrow A_N$ se traduisent par des isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}_G(A, \rho^\sharp B) \simeq \mathrm{Hom}_{G/N}(A_N, B)$$

et

$$\mathrm{Hom}_G(\rho^\sharp B, A) \simeq \mathrm{Hom}_{G/N}(B, A^N),$$

d'où les adjonctions souhaitées. □

On en vient finalement au résultat annoncé :

Théorème 11. *(Suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre)*

Pour tout sous-groupe distingué N d'un groupe G et tout G-module A, il existe des suites spectrales de premier quadrant convergentes

$$\begin{cases} E^2_{p,q} = H_p\left({}^G/_N, H_q(N,A)\right) \Longrightarrow H_{p+q}(G,A) \\ \\ E_2^{p,q} = H^p\left({}^G/_N, H^q(N,A)\right) \Longrightarrow H^{p+q}(G,A). \end{cases}$$

De plus, les morphismes extrêmaux $H_\bullet(G,A) \to H_\bullet\left({}^G/_N, A_N\right)$ et $H_\bullet(N,A)_{G/N} \to H_\bullet(G,A)$ (resp. $H^\bullet\left({}^G/_N, A^N\right) \to H^\bullet(G,A)$ et $H^\bullet(G,A) \to H^\bullet(N,A)^{G/N}$) sont ceux induits par la coinflation et la corestriction (resp. l'inflation et la restriction).

Démonstration. Tout d'abord, les foncteurs $-_G$ et $-^G$ se factorisent à travers la catégorie ${}^G/_N - \mathfrak{Mod}$ comme suit :

$$\begin{tikzcd} G - \mathfrak{Mod} \arrow[rr, "-_N"] \arrow[dr, "-_G"'] & & {}^G/_N - \mathfrak{Mod} \arrow[dl, "-_{G/N}"] \\ & \mathfrak{Ab} & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} G - \mathfrak{Mod} \arrow[rr, "-^N"] \arrow[dr, "-^G"'] & & {}^G/_N - \mathfrak{Mod} \arrow[dl, "-^{G/N}"] \\ & \mathfrak{Ab} & \end{tikzcd}$$

En effet, si A est un G-module, alors A^N et A_N sont des ${}^G/_N$-modules. Le groupe abélien $(A_N)_{G/N}$ est obtenu à partir de A en quotientant d'abord par les relations $na - a$, $n \in N$ et ensuite par les relations $\overline{g}a - a$, $\overline{g} \in {}^G/_N$. Si $\overline{g}$ est la classe de $g \in G$, alors $\overline{g}a - a \equiv ga - a$, donc on a

$$(A_N)_{G/N} \simeq {}^A\Big/_{I(\mathbb{Z}G)A} = A_G$$

avec $I(\mathbb{Z}G) = \ker(\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$. De même, $(A^N)^{G/N}$ est obtenu à partir de A en restreignant d'abord à $\{a \in A \ ; \ na = a, \ \forall n \in N\}$ puis en restreignant ensuite à $\{a \in A \ ; \ \overline{g}a = a, \ \forall \overline{g} \in G/N\}$. Si $\overline{g}$ est la classe de $g \in G$, alors $\overline{g}a \equiv ga$ et donc

$$(A^N)^{G/N} = A^G.$$

Ensuite, d'après le Lemme 18, $-_N$ est adjoint à gauche à un foncteur exact et $-^N$ est adjoint à droite à un foncteur exact. D'après le Lemme 16, ceci implique que $-_N$ préserve les projectifs et que $-^N$ préserve les injectifs. On peut donc appliquer les Théorèmes de Grothendieck (Théorème 10 et Corollaire 10) et le résultat en découle alors immédiatement. $\square$

Remarque 24. Dans la première suite spectrale, la différentielle de seconde page

$$d^2_{2,0} : E^2_{2,0} = H_2\left({}^G/_N, A_N\right) \to H_1(N, A)_{G/N} = E^2_{0,1}$$

est appelée cotransgression ; on la note $d^2_{2,0} =:$ ctg. De même, dans la seconde suite spectrale, la différentielle

$$d_2^{0,1} : E_2^{0,1} = H^1(N, A)^{G/N} \to H^2\left({}^G/_N, A^N\right) = E_2^{2,0}$$

est appelée transgression et on la note $d_2^{0,1} =:$ tg.

En appliquant le Théorème 2 et le Corollaire 1, on en déduit alors :

Corollaire 11. *(Suites exactes à cinq termes)*

Si G est un groupe, A un G-module et $N \trianglelefteq G$, alors on a deux suites exactes à cinq termes :

$$H_2(G, A) \xrightarrow{\text{coinf}} H_2\left({}^G/_N, A_N\right) \xrightarrow{\text{ctg}} H_1(N, A)_{G/N} \xrightarrow{\text{cor}} H_1(G, A) \xrightarrow{\text{coinf}} H_1\left({}^G/_N, A_N\right) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow H^1\left({}^G/_N, A^N\right) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^1(N, A)^{G/N} \xrightarrow{\text{tg}} H^2\left({}^G/_N, A^N\right) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G, A)\,.$$

Annexe

Nous allons ici montrer que, pour une R-algèbre A, la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$ possède assez d'objets injectifs, de telle sorte que l'on peut choisir une résolution injective pour tout A-module.

Nous commençons par établir un critère pratique pour savoir quand un module est injectif :

Lemme 1. *(Critère de Baer)*
Un A-module à droite M est injectif si et seulement si, pour tout idéal à droite J de A, tout morphisme $J \to M$ peut être prolongé en un morphisme $A \to M$.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, par définition d'un module injectif.

Réciproquement, soient un morphisme injectif de modules $i : P \hookrightarrow Q$, ainsi qu'un morphisme $f : P \to M$. Soit aussi $\mathcal{E}$ l'ensemble partiellement ordonné des morphismes $f' : P' \to M$ prolongeant f, avec $P \hookrightarrow P' \hookrightarrow Q$, l'ordre étant : $f' \leq f''$ si f'' prolonge f'. Il est alors clair que $\mathcal{E}$ est inductif et par le lemme de Zorn, il existe un prolongement maximal $\widetilde{f} : \widetilde{P} \to M$ dans $\mathcal{E}$. Il nous reste à montrer que $\widetilde{P} = Q$. Supposons qu'il existe $q \in Q$ avec $q \notin \widetilde{P}$. L'ensemble $J := \{a \in A \ ; \ qa \in \widetilde{P}\}$ est un idéal à droite de A. Par hypothèse, le morphisme $J \xrightarrow{q} \widetilde{P} \xrightarrow{\widetilde{f}} M$ se prolonge en un morphisme $\varphi : A \to M$. Soit $\widehat{P}$ le sous-module $\widetilde{P} + qA$ de Q et posons

$$\begin{array}{cccc} \widehat{f} & : & \widehat{P} & \to & M \\ & & p + qa & \mapsto & \widetilde{f}(p) + \varphi(a) \end{array}$$

Ceci est bien défini car $\widetilde{f}(qa) = \varphi(a)$, pour tout $qa \in \widetilde{P} \cap qA$, et $\widehat{f}$ prolonge (strictement) $\widetilde{f}$, ce qui est absurde. $\square$

Corollaire 1. *Un groupe abélien M est injectif si et seulement s'il est divisible (i.e. si pour tout $r \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$ et tout $m \in M$, il existe $n \in M$ tel que $m = nr$). En particulier, le groupe abélien ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ est injectif.*

Démonstration. Si M est injectif, soient $0 \neq r \in \mathbb{Z}$ et $m \in M$. Définissons $f : r\mathbb{Z} \to M$ telle que $f(r) = m$. On peut prolonger f en $\widetilde{f} : \mathbb{Z} \to M$ et soit $n := \widetilde{f}(1)$. Alors $nr = \widetilde{f}(1)r = \widetilde{f}(r) = f(r) = m$, donc M est divisible.

Réciproquement, soit $J = r\mathbb{Z}$ un idéal de $\mathbb{Z}$ et $f : J \to M$ un morphisme. Si $r = 0$, l'existence du prolongement est évidente. Sinon, comme $f(r) \in M$, il existe $n \in M$ tel que $f(r) = nr$. On définit alors $\widetilde{f} : \mathbb{Z} \to M$ par $\widetilde{f}(1) := n$. Alors, si $x \in r\mathbb{Z}$, $x = ry$ avec $y \in \mathbb{Z}$, on a $\widetilde{f}(x) = ry\widetilde{f}(1) = ryn = yf(r) = f(ry) = f(x)$, donc M est injectif.

Enfin, si $0 \neq r \in \mathbb{Z}$ et $a \in {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$, en écrivant $a = \left[\frac{p}{q}\right]$ et en posant $n := \left[\frac{p}{qr}\right]$, il vient $nr = r\left[\frac{p}{qr}\right] = \left[\frac{p}{q}\right] = a$, donc ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ est divisible, donc injectif par la première partie de la preuve. $\square$

Lemme 2. *Le A-module*

$$I_0 := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}}\left(A, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\right)$$

est non trivial et injectif.

Démonstration. Considérons le morphisme de groupes $\gamma : \mathbb{Z} \to A$ défini par $\gamma(1) = 1$. On distingue deux cas :

1. Soit $\ker\gamma \simeq r\mathbb{Z},\ r \geq 2$,
2. Soit γ est injectif.

Si γ n'est pas injectif, on dispose d'une injection ${}^{\mathbb{Z}}/_{r\mathbb{Z}} \hookrightarrow A$. Considérons à présent le diagramme

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} & \\ {}^{\mathbb{Z}}/_{r\mathbb{Z}} \arrow[u, "1\mapsto\left[\frac{1}{r}\right]"] \arrow[r, hook] & A \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

L'injectivité de ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ assure l'existence de la flèche en pointillés. On a alors un morphisme non trivial $A \to {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

Si γ est injectif, un morphisme non trivial $\mathbb{Z} \to {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ peut, comme précédemment, être prolongé à A. Dans les deux cas, il existe un morphisme non trivial $A \to {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$, donc $I_0 \neq 0$.

Enfin, l'injectivité de I_0 provient de celle de ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ et du Lemme 16. □

Pour un A-module M, définissons maintenant

$$I(M) := \prod_{\mathrm{Hom}_A(M, I_0)} I_0.$$

Alors, $I(M)$ est injectif, comme produit d'injectifs et on dispose d'un morphisme canonique

$$\begin{array}{cccc} e_M & : & M & \to & I(M) \\ & & x & \mapsto & (f(x))_{f\in\mathrm{Hom}_A(M,I_0)} \end{array}$$

Il reste à montrer que e_M est injectif, et le résultat sera alors acquis.

Proposition 1. *Le morphisme $e_M : M \to I(M)$ est injectif.*

Démonstration. Soit $0 \neq m \in M$. Considérons le morphisme de groupes $\mathbb{Z} \to M$ donné par $1 \mapsto m$. Par injectivité de ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} & \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "0\neq"] \arrow[r, hook] & M \arrow[ul, "g\neq 0"'] \end{tikzcd}$$

Alors, $g(m) \neq 0$ et comme on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}}\left(M, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\right) \simeq \mathrm{Hom}_A\left(M, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ab}}\left(A, {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, I_0)$$

g induit un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(M, I_0)$ tel que $f(m) \neq 0$. Alors $e_M(m) \neq 0$ et e_M est bien injectif. □

Références

[1] Frederik Caenepeel, *Spectral Sequences : An Introduction*, Universiteit Antwerpen.

[2] Henri Cartan - Samuel Eilenberg, HOMOLOGICAL ALGEBRA, Princeton University Press, 1956.

[3] Arthur Garnier, *Théorie de l'Homologie Générale - Cohomologies des Groupes et de Hochschild*, Université de Picardie Jules Verne, 2016.

[4] Alexander Grothendieck, *Sur quelques points d'Algèbre Homologique*, Tôhoku Mathematical Journal, 1957.

[5] Serge Lang, ALGÈBRE, Dunod, 2004.

[6] Serge Lang, TOPICS IN COHOMOLOGY OF GROUPS, Springer, 1996.

[7] Saunders MacLane, HOMOLOGY, Springer, 1975.

[8] Julia Pevstsova, *Group Cohomology Lecture Notes*, University of Washington, 2014.

[9] Joseph J. Rotman, AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Springer, 2009.

[10] Miriam Schwab - Michael Fütterer, *Spectral Sequences*, Universität Heidelberg, 2013.

[11] Charles A. Weibel, AN INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA, Cambridge University Press, 1994.

[12] Alexander Zimmermann, REPRESENTATION THEORY : A HOMOLOGICAL ALGEBRA POINT OF VIEW, Springer, 2014.