

Sept Théorèmes de Géométrie Algébrique

Arthur Garnier

1^{er} septembre 2017

Théorème 1. (Grothendieck)

La dimension cohomologique d'un espace noethérien est au plus égale à sa dimension combinatoire.

Plus précisément, soit X un espace topologique noethérien, de dimension $n \geq 0$. Alors, pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X , on a

$$\forall i > n, H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. Nous allons procéder par réductions successives des différents cas possibles. Tout d'abord, on rappelle que si $Y \subset X$ est un fermé et si $U := X \setminus Y$, en notant les injections $j : Y \hookrightarrow X$ et $i : U \hookrightarrow X$, ainsi que $\mathcal{F}_Y := j_*(\mathcal{F}|_Y)$ et $\mathcal{F}_U := i_!(\mathcal{F}|_U)$, on a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0. \quad (1)$$

On raisonne par récurrence sur $n = \dim X$.

Tout d'abord, on peut supposer X irréductible. En effet, si X est réductible, considérons Y une de ses composantes irréductibles (Y est fermé) et soit $U := X \setminus Y$. Pour un faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X , la suite exacte courte (1) donne une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(X, \mathcal{F}_Y) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}_U) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{F}_Y) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(X, \mathcal{F}_U) \longrightarrow \dots$$

et il suffit alors de montrer que

$$H^i(X, \mathcal{F}_U) = 0 = H^i(X, \mathcal{F}_Y), \quad \forall i > n.$$

Mais, comme Y est un fermé irréductible, on a

$$H^i(X, \mathcal{F}_Y) = H^i(X, j_*(\mathcal{F}|_Y)) = H^i(Y, \mathcal{F}|_Y) = 0.$$

Montrons ensuite qu'en notant temporairement $U \xrightarrow{k} \overline{U} \xrightarrow{i} X$ et $j := i \circ k$, on a

$$i_*k_!\mathcal{F}|_U \simeq j_!\mathcal{F}|_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_U.$$

Posons $\mathcal{G} := \mathcal{F}|_U$. Alors, $\mathcal{F}_U = j_!\mathcal{G} = \mathcal{H}^+$. Pour un ouvert $V \subseteq U$, soit le morphisme naturel $\tilde{\eta}_V : \mathcal{G}(V) \rightarrow \Gamma(V, k_!\mathcal{G})$. Ceci induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} j_!\mathcal{G} & \xrightarrow{\eta} & i_*k_!\mathcal{G} \\ \text{can.} \uparrow & \nearrow \tilde{\eta} & \\ \mathcal{H} & & \end{array}$$

Montrons que $\eta : \mathcal{F}_U \rightarrow i_*k_!\mathcal{G}$ est un isomorphisme en raisonnant sur les fibres. Soit donc $x \in X$. Si $x \notin \overline{U}$, alors $(j_!\mathcal{G})_x = 0 = (i_*k_!\mathcal{G})_x$ et η_x est trivialement un isomorphisme. De même, si $x \in \overline{U} \setminus U$, les fibres sont nulles. Si $x \in U$, on a $(j_!\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_x$ et $(i_*k_!\mathcal{G})_x \simeq (k_!\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_x$ et sous ces isomorphismes, η_x correspond à l'identité, donc η_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$ et donc η est un isomorphisme de faisceaux. On en tire

$$H^i(X, \mathcal{F}_U) = H^i(X, i_*k_!\mathcal{F}|_U) \simeq H^i(\overline{U}, k_!\mathcal{F}|_U).$$

Or, $\overline{U}$ possède une composante irréductible de moins que X et donc, quitte à faire une récurrence sur le nombre de composantes irréductibles, on peut supposer ce dernier groupe de

cohomologie nul, et on obtient alors le résultat pour X .

Supposons donc X irréductible et de dimension 0 dans un premier temps. Alors, la topologie sur X est grossière car sinon, X contiendrait un fermé propre et on aurait $\dim X \geq 1$. On a donc une équivalence de catégories abéliennes

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ab}(X) & \rightarrow & \mathfrak{Ab} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \Gamma(X, \mathcal{F}) \end{array}$$

et en particulier, $\Gamma(X, ?)$ est exact et donc

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall i > 0, \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X).$$

Supposons X irréductible de dimension $n \geq 1$ et supposons le résultat vrai pour les espaces de dimension $< n$. Soit aussi $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . Posons $B := \bigcup_{U \subseteq X} \Gamma(U, \mathcal{F})$ et soit A l'ensemble des parties finies de B . Si $\alpha \in A$, on note $\mathcal{F}_\alpha$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ engendré par les sections dans α . Alors, A est un système codirect et on a

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha.$$

En effet, pour $\alpha \subseteq \beta$, posons $\iota_{\alpha, \beta} : \mathcal{F}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{F}_\beta$ l'injection canonique et soit $\mathcal{G}$ un faisceau, muni de morphismes $\varphi_\alpha : \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}$ vérifiant la condition de compatibilité de la limite inductive. Soient U un ouvert de X et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. Si $s \in \alpha$, soit $\chi_U(s) := \varphi_\alpha(s)$. Ceci est bien défini car si $s \in \alpha \cap \beta$, on a $\iota_{\alpha \cap \beta, \beta}(s) = s = \iota_{\alpha \cap \beta, \alpha}(s)$, d'où $\varphi_\alpha(s) = \varphi_{\alpha \cap \beta}(s) = \varphi_\beta(s)$. Cela induit un morphisme de faisceaux $\chi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ rendant commutatif le diagramme suivant, pour tout $\alpha \in A$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{G} \\ \uparrow & \nearrow \varphi_\alpha & \\ \mathcal{F}_\alpha & & \end{array}$$

et χ dit être ainsi défini pour avoir la commutativité ci-dessus. Ainsi, $\mathcal{F}$ possède la propriété universelle de la limite inductive et donc $\mathcal{F} \simeq \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$. On a de plus, par exactitude du foncteur $\varinjlim$,

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha) \simeq \varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha)$$

et il suffit donc de montrer que le résultat est vrai pour les faisceaux de type fini (engendrés par un nombre fini de sections). Ensuite, si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha$ pour $\alpha \in A$, soit $\mu(\mathcal{F})$ le nombre minimal t de générateurs de $\mathcal{F}$. Si $t \geq 2$, on écrit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{s_1, \dots, s_t\}}$ et soit $\mathcal{F}' := \mathcal{F}_{\{s_1\}}$. Alors, $\mathcal{F}'' := \mathcal{F} / \mathcal{F}'$ est engendré par les images de $s_2, \dots, s_t$ dans le quotient, donc $\mu(\mathcal{F}') = 1$, $\mu(\mathcal{F}'') \leq t - 1$ et la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

montre que, quitte à effectuer une récurrence sur le nombre minimal de sections engendrant $\mathcal{F}$, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est engendré par une seule section $s \in \mathcal{F}(U)$ pour un certain ouvert U de X . On a alors un épimorphisme $\mathbb{Z}_U \twoheadrightarrow \mathcal{F}$. En effet, on a $\mathbb{Z}_U = (\mathbb{Z}_U^-)^+$, où $\mathbb{Z}_U^-(V) = \mathbb{Z}(V)$ si $V \subseteq U$ et $\mathbb{Z}_U^-(V) = 0$ autrement. On considère alors $\chi(V) : \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathcal{F}^- \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}_{\{s\}}$, défini par $\chi_V = 0$ si V n'est pas inclus dans U et si $V \subset U$, avec $\sigma \in \mathbb{Z}_U^-(V) = \mathbb{Z}(V) = \mathbb{Z}$ (V est connexe), alors $\chi_V(\sigma) := \sigma s|_V \in \mathcal{F}^-(V)$ et ceci induit bien un morphisme $\bar{\chi} : \mathbb{Z}_U \rightarrow \mathcal{F}$. Il

est clair que $\bar{\chi}_x$ est surjectif pour tout $x \in X$, donc $\bar{\chi}$ est surjectif et si $\mathcal{R} := \ker \bar{\chi}$, on a une suite exacte courte de faisceaux abéliens

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

et par la suite exacte longue de cohomologie, il suffit de montrer que

$$H^i(X, \mathcal{R}) = 0 = H^i(X, \mathbb{Z}_U), \quad \forall i > n.$$

Soient donc $U \subseteq X$ un ouvert et $\mathcal{R}$ un sous-faisceau de $\mathbb{Z}_U$. On va montrer la double égalité ci-dessus. Si $\mathcal{R} = 0$, voir l'étape suivante. Sinon, $\Gamma(V_0, \mathcal{R}) \neq 0$ pour un certain ouvert $V_0 \subseteq U$. Le monomorphisme $\mathcal{R}|_U \hookrightarrow \mathbb{Z}_U|_U \simeq \mathbb{Z}_U$ permet d'identifier $\mathcal{R}|_U$ avec un sous-faisceau $\mathcal{J}$ de $\mathbb{Z}_U$. Considérons

$$d := \min\{k \in \mathbb{N}^* ; \exists W \subseteq U ; k \in \Gamma(W, \mathcal{J})\} = \min_{W \subseteq U} (\Gamma(W, \mathcal{J}) \cap \mathbb{N}^*)$$

et soit $V \subseteq U$ un ouvert tel que $d \in \Gamma(V, \mathcal{J})$. d correspond à l'élément $m \in \Gamma(V, \mathcal{R}) = \Gamma(V, \mathcal{R}|_U)$ et soit $\mathbb{Z}_V \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R}$ le monomorphisme défini par

$$W \subseteq V \Rightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_V^-(W) = \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{R}(W) \\ 1 & \mapsto & m|_W \end{array}$$

et considérons le monomorphisme induit $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}_{V|V} \hookrightarrow \mathcal{R}|_V$. Soit $x \in V$ et considérons

$$\tilde{\varphi}_x : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_{|V})_x & \hookrightarrow & (\mathcal{R}|_V)_x = \mathcal{R}_x \\ 1 & \mapsto & m_x \end{array}$$

Soit $s_x \in \mathcal{R}_x$, que l'on écrit $s_x = [\mathcal{R}(W), s]$, avec $s \in \mathcal{R}(W)$ et $x \in W \subset V \subset U$. À s correspond $\delta \in \Gamma(W, \mathcal{J})$. On écrit la division euclidienne $\delta = qd + r$ avec $r < d$. Si $r \neq 0$, alors $r \in \Gamma(W, \mathcal{J})$ et ceci contredirait la minimalité de d . Donc $r = 0$ et donc $s_x = \tilde{\varphi}_x(q)$ et donc $\tilde{\varphi}_x$ est un isomorphisme pour tout $x \in V$ et donc $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}_{V|V} \rightarrow \mathcal{R}|_V$ est un isomorphisme. Ainsi, on a trouvé un ouvert $V \subseteq U$ et un monomorphisme $\mathbb{Z}_V \rightarrow \mathcal{R}$ induisant un isomorphisme sur V . Si $V = X$, on est ramené à l'étape suivante. Sinon, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_V \xrightarrow{\varphi} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V \longrightarrow 0.$$

Soient $Z := X \setminus V$ et $\mathcal{G} := \mathcal{R}/\mathbb{Z}_V$, ainsi que l'injection $\iota : Z \hookrightarrow X$. Alors, Z est un fermé propre de X , donc $\dim Z < n$ et donc le résultat est vrai pour Z . Comme $\mathcal{G}|_V = 0$, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_Z$ et il vient alors

$$H^i(X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G}_Z) = H^i(X, \iota_{*}\iota^{-1}\mathcal{G}) \simeq H^i(Z, \iota^{-1}\mathcal{G}) = H^i(Z, \mathcal{G}|_Z)$$

et en utilisant l'étape suivante et la suite exacte longue de cohomologie, on obtient le résultat : $H^i(X, \mathcal{R}) = 0$.

On est alors ramené à prouver le résultat suivant : Si $U \subseteq X$ est un ouvert, alors $H^i(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ pour $i > n = \dim X$. Si $U = \emptyset$, ceci est évident. Sinon, soit le fermé propre $Y := X \setminus U$. On a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0.$$

Si U est propre, alors Y est un fermé propre non vide de X et donc $\dim Y < n$ et on a le résultat pour Y , d'où

$$H^i(X, \mathbb{Z}_Y) = H^i(X, i_* \mathbb{Z}_{|Y}) = H^i(Y, \mathbb{Z}_{|Y}) = 0, \quad \forall i \geq n$$

et par la suite exacte longue de cohomologie, il suffit de montrer que $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$. On est aussi ramené à ce cas si $U = X$ puisque dans ce cas $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_U$. Mais on a le résultat, puisque par irréductibilité de X , le faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur X est flasque et ceci achève la démonstration. $\square$

Théorème 2. (*Suite spectrale de Leray*)

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Alors, pour tout faisceau abélien $\mathcal{F}$ sur X , on a une suite spectrale cohomologique de premier quadrant convergente

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \implies H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Les catégories abéliennes $\mathfrak{Ab}(X)$ et $\mathfrak{Ab}(Y)$ possèdent assez d'objets injectifs. Ensuite, si $\mathcal{J} \in \mathfrak{Ab}(X)$ est un faisceau injectif, alors $\mathcal{J}$ est flasque, donc $f_* \mathcal{J}$ est aussi flasque. Ainsi, le foncteur $f_* : \mathfrak{Ab}(X) \rightarrow \mathfrak{Ab}(Y)$ envoie les injectifs sur des flasques, donc sur des $\Gamma(Y, ?)$ -acycliques. De plus, les foncteurs $\Gamma(X, ?)$ et $\Gamma(Y, ?)$ sont exacts à gauche et comme, pour tout faisceau abélien $\mathcal{H}$ sur X , on a

$$\Gamma(Y, f_*(\mathcal{H})) = \Gamma(f^{-1}(Y), \mathcal{H}) = \Gamma(X, \mathcal{H}),$$

le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ab}(X) & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{Ab}(Y) \\ & \searrow \Gamma & \swarrow \Gamma \\ & \mathfrak{Ab} & \end{array}$$

On peut alors appliquer le théorème de la suite spectrale de Grothendieck pour obtenir

$$E_2^{p,q} = R^p \Gamma(Y, ?)(R^q f_*(\mathcal{F})) = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \implies R^{p+q} \Gamma(X, ?)(\mathcal{F}) = H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

□

Corollaire 1. Si $f : X \rightarrow Y$ est continue entre espaces topologiques et si $\mathcal{F}$ est un faisceau abélien sur X , alors on a une suite exacte courte à cinq termes

$$0 \longrightarrow H^1(Y, f_* \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, R^1 f_* \mathcal{F}) \xrightarrow{d} H^2(Y, f_* \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}).$$

Théorème 3. (*Serre*)

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique quasi-cohérent sur un schéma affine X . Alors, on a

$$\forall i > 0, H^i(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Autrement dit : Sur un schéma affine, tout faisceau algébrique quasi-cohérent est acyclique.

Démonstration. Posons $R := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{U} := \{D(f), f \in R\}$. On peut écrire $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ pour un R -module M et soit $i : D(f) \hookrightarrow X$ l'inclusion. Pour $f, g \in R$, on a $(R_f)_g \simeq R_{fg}$ donc $(M_f)_g \simeq M_{fg}$ et si $D(g) \subseteq X$, il vient

$$\Gamma(D(g), {}_{D(f)}\mathcal{F}) = \Gamma(D(g) \cap D(f), \mathcal{F}|_{D(f)}) = \Gamma(D(fg), \mathcal{F}) = M_{fg} = (M_f)_g$$

d'où

$${}_{D(f)}\mathcal{F} \simeq \widetilde{M_f} = \Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{F})_f,$$

où M_f est considéré comme un R -module. Ainsi, ${}_{D(f)}\mathcal{F} \simeq \Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{F})_f$ est quasi-cohérent. Par récurrence, on peut supposer que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $0 < i < n$ et tout faisceau algébrique quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X . Or, on a vu que ${}_{D(f)}\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, pour tout $D(f) \in \mathcal{U}$ et donc, pour $0 < i < n$, il vient

$$H^i(D(f), \mathcal{F}|_{D(f)}) = H^i(X, i_*(\mathcal{F}|_{D(f)})) = H^i(X, {}_{D(f)}\mathcal{F}) = 0.$$

Maintenant, X est quasi-compact. En effet, si on a un recouvrement ouvert $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, soit $V_i := X \setminus U_i = V(I_i)$ avec I_i un idéal de R et on a alors $\emptyset = \bigcap_i V(I_i) = V(\sum_i I_i)$. Si $\sum_i I_i$ était propre, il existerait un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R contenant $\sum I_i$. Comme $V(I)$ est l'ensemble des idéaux premiers de R contenant I , on a $\mathfrak{m} \in V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ mais comme $\sum I_i \subseteq \mathfrak{m}$, on doit avoir $V(\mathfrak{m}) \subset V(\sum_i I_i) = \emptyset$ et ceci est absurde. Ainsi, on a $\sum_i I_i = R$ et il existe donc une partie finie $J \subset I$, des éléments $a_j \in R$ et $f_j \in I_j$ tels que $1 = \sum_{j \in J} a_j f_j$ et donc $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ et X est bien quasi-compact.

Soit $\alpha \in H^n(X, \mathcal{F})$. On peut choisir un sous-recouvrement ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tel que l'image de α dans $H^n(X, {}_{\mathcal{V}}\mathcal{F})$ soit nulle, pour tout $V \in \mathcal{V}$. Or, comme X est quasi-compact, on peut supposer que $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_p\}$ est fini, avec $V_i \in \mathcal{U}$. L'image de α dans $H^n(X, {}_{V_i}\mathcal{F})$ est nulle pour tout $1 \leq i \leq p$ et donc l'image de α dans

$$\bigoplus_{1 \leq i \leq p} H^n(X, {}_{V_i}\mathcal{F}) \simeq H^n\left(X, \bigoplus_{1 \leq i \leq p} {}_{V_i}\mathcal{F}\right)$$

est nulle. Ainsi, la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux quasi-cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \bigoplus_j {}_{V_j}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

montre que $\alpha \in \delta(H^{n-1}(X, \mathcal{G}))$. Si $n > 1$, l'hypothèse de récurrence montre que $H^{n-1}(X, \mathcal{G}) = 0$. Si $n = 1$, on sait que le foncteur $\Gamma(X, -)$ est exact sur les faisceaux quasi-cohérents, donc $\delta = 0$ et dans tous les cas, on a $\alpha = 0$. Ceci montre que $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ et achève la démonstration. $\square$

Théorème 4. (Leray)

Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts dont toutes les intersections finies sont acycliques. Alors, on a

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^\bullet(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Choisissons

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{J}^\bullet \\ & \searrow & \nearrow \varepsilon \\ & \mathcal{F} & \end{array}$$

une résolution injective de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{Ab}(X)$. On considère le bicomplexe de premier quadrant (ainsi que ses suites spectrales)

$$C^{p,q} = {}^{II}E_0^{p,q} := \prod_{|\sigma|=q+1} \mathcal{J}^p(U_\sigma) = \prod_{i_0 < \dots < i_q} \mathcal{J}^p(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}) = C^q(\mathcal{U}, \mathcal{J}^p),$$

que l'on peut visualiser par

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C^2(\mathcal{U}, \mathcal{J}^0) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{J}^1) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{J}^2) & \longrightarrow & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{J}^0) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{J}^1) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{J}^2) & \longrightarrow & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ C^0(\mathcal{U}, \mathcal{J}^0) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{J}^1) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{J}^2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Pour $\sigma \subset I$ avec $|\sigma| < \infty$, on a que $\mathcal{J}_{|U_\sigma}^i$ est flasque (si $i \geq 0$) et comme on a

$$H^i(U_\sigma, \mathcal{F}_{|U_\sigma}) = 0, \quad \forall i > 0,$$

la suite exacte longue du foncteur dérivé montre que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_\sigma) \longrightarrow \mathcal{J}^0(U_\sigma) \longrightarrow \mathcal{J}^1(U_\sigma) \longrightarrow \dots$$

est exacte. Ainsi, la suite spectrale $({}^{II}E_r^{p,q})_{r \geq 0}$ (filtration par lignes) s'effondre en première page et donne

$${}^{II}E_1^{p,q} = H_h^p({}^{II}E_0^{\bullet,q}) = \begin{cases} C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les différentielles verticales $d_1^{0,q} : E_1^{0,q} \rightarrow E_1^{0,q+1}$ sont (au signe près) celles de $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, d'où

$${}^{II}E_2^{p,q} = H_v^q H_h^p(C^{\bullet,\bullet}) = \begin{cases} H^q(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{p,0} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Ensuite, comme $\mathcal{J}^p$ est flasque, on a

$${}^I E_1^{p,q} = H_h^p({}^I E_0^{p,q}) = \begin{cases} H^p(\Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{q,0} H^p(X, \mathcal{F}).$$

Or, comme le bicomplexe $(C^{\bullet,\bullet})$ est de premier quadrant, on a les convergences

$${}^I E_2^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Tot}(C)) \quad \text{et} \quad {}^I E_2^{p,q} \Longrightarrow H^{p+q}(\text{Tot}(C))$$

et par effondrement en première page, il vient finalement $(n = p + q \geq 0)$

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = {}^I E_2^{0,n} = H^n(\text{Tot}(C)) = {}^I E_2^{n,0} = H^n(X, \mathcal{F}).$$

□

Corollaire 2. *Soient X une variété algébrique séparée, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert affine de X et $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique quasi-cohérent sur X . Alors, on a des isomorphismes*

$$\forall i \geq 0, \quad \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^i(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Comme X est séparée, les intersections finies d'ouverts dans $\mathcal{U}$ est un ouvert affine et par le Théorème d'acyclicité de Serre, comme $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent, les hypothèses du Théorème de Leray sont satisfaites et son application donne le résultat. □

Théorème 5. (Serre)

Soient X une variété algébrique projective et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X . Alors,

1. Pour tout $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Il existe $n_0 = n_0(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall d \geq n_0, \forall i > 0, H^i(X, \mathcal{F}(d)) = 0.$$

Démonstration. On suppose X plongée dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k)$ via $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ (X est alors fermée dans $\mathbb{P}^n$). On a alors

$$\forall i \geq 0, H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n, i_* \mathcal{F})$$

et on peut alors supposer que $X = \mathbb{P}^n$. En outre, les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ vérifient bien les deux assertions du théorème ci-dessus.

Posons $S := k[X_0, \dots, X_n]$. On sait que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ où M est un S -module gradué de type fini. Si les générateurs $x_1, \dots, x_r$ de M sont homogènes de degrés respectifs $n_1, \dots, n_r$, on a une surjection naturelle

$$\pi : L := \bigoplus_{i=1}^r S(-n_i) \twoheadrightarrow M$$

qui, au $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de L , associe x_i . Considérons $N := \ker \pi$. Comme S est noethérien, N est un S -module gradué de type fini et en passant aux faisceaux, on a la suite exacte courte de faisceaux cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

où on a noté

$$\mathcal{L} := \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n_i).$$

De plus, $\mathcal{L}$ est un faisceau dont la cohomologie vérifie le résultat.

Montrons 1) par récurrence descendante sur i . Si $i \geq n+1$, par le Corollaire 2 et le Théorème de Grothendieck, on a $H^i \mathcal{F} = 0$ car $\mathcal{F}$ est (quasi-)cohérent et $\mathbb{P}^n$ séparée. Supposons le résultat vrai pour $i+1$ et tout faisceau cohérent et passons à i . On a la suite exacte courte

$$\dots \longrightarrow H^{i-1} \mathcal{F} \longrightarrow H^i \mathcal{N} \longrightarrow H^i \mathcal{L} \xrightarrow{f} H^i \mathcal{F} \xrightarrow{g} H^{i+1} \mathcal{N} \longrightarrow \dots$$

et donc

$$h^i \mathcal{F} = \dim_k(H^i \mathcal{F}) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim_k(H^i \mathcal{L}) + \dim_k(H^{i+1} \mathcal{N}) = h^i \mathcal{L} + h^{i+1} \mathcal{N}$$

et on a $h^i \mathcal{L} < \infty$, ainsi que $h^{i+1} \mathcal{N} < \infty$ par hypothèse de récurrence. Donc $h^i \mathcal{F} < \infty$ et on a le premier point.

Pour 2), on procède aussi par récurrence descendante sur i , en établissant les propriétés

$$\forall i \geq 1, (P_i) : \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{Coh}(\mathbb{P}^n), \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall p \geq i, \forall d \geq n_0, h^p \mathcal{F}(d) = 0.$$

Il est clair que (P_{n+1}) est vraie par le Théorème de Grothendieck. Soit donc $1 \leq i \leq n$, supposons (P_{i+1}) vraie et montrons (P_i) . Soient $\mathcal{F}$ cohérent et soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ comme ci-dessus. Il existe d_0 tel que si $d \geq d_0$ et $p \geq i+1$, on ait $h^p(\mathcal{N}(d)) = h^p(\mathcal{F}(d)) = 0$, par hypothèse de récurrence (on prend $d_0 \geq \max(d_{\mathcal{N}}, d_{\mathcal{F}})$). On pose alors

$$n_0 := \max(d_0, n_1 - n, \dots, n_r - n).$$

Pour $d \geq n_0$, on a la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^i \mathcal{L}(d) \longrightarrow H^i \mathcal{F}(d) \longrightarrow H^{i+1} \mathcal{N}(d) \longrightarrow \cdots.$$

Comme $d - n_j \geq -n$, on a $h^i \mathcal{L}(d) = 0$ et comme $d \geq d_0$, on a $h^{i+1} \mathcal{N}(d) = 0$, d'où $h^i \mathcal{F}(d) = 0$ et ceci montre que (P_i) est vraie. La véracité de (P_1) termine alors la démonstration. $\square$

Théorème 6. (Bézout)

Si $F, G \in k[X, Y, T]$ sont deux polynômes homogènes, sans facteur commun et de degrés respectifs s et t , alors on a

$$\sum_{x \in \mathbb{P}^2} \mu_x(F, G) = \sum_{x \in V_p(F) \cap V_p(G)} \mu_x(F, G) = st.$$

Démonstration. On rappelle qu'on a une structure de schéma fini sur l'intersection $Z = V_p(F, G) = V(F_b, G_b) \subset k^2$ et qu'on a $\mu_x(F, G) = 0$ si $x \in \mathbb{P}^2 \setminus Z$ et, si $x \in Z$,

$$\mu_x(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_x(F_b, G_b) = \dim_k \left(\mathcal{O}_{k^2, x} / (F_b, G_b) \right) = \dim \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2, x} / (F, G)_x \right),$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{P}^2} \mu_x(F, G) &= \sum_{x \in Z} \mu_x(F, G) = \sum_{x \in Z} \dim \left(\mathcal{O}_{k^2, x} / (F_b, G_b) \right) \\ &= \dim \left(\prod_{x \in Z} \mathcal{O}_{k^2, x} / (F_b, G_b) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \dim \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z). \end{aligned}$$

Ensuite, pour un faisceau algébrique sur une variété algébrique X , on pose

$$\forall i \geq 0, \quad h^i \mathcal{F} = h^i(X, \mathcal{F}) := \dim_k(H^i(X, \mathcal{F}))$$

et par le Théorème de Serre, si X est projective et $\mathcal{F}$ cohérent, on a $h^i \mathcal{F} < \infty$. Il s'agit alors de montrer que

$$h^0 \mathcal{O}_Z = st.$$

On a deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) \longrightarrow \mathcal{J}_Z \longrightarrow 0.$$

On obtient donc les deux suites exactes longues de cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^i(\mathcal{J}_Z) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{J}_Z) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t)) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s)) \oplus H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t)) \longrightarrow H^i(\mathcal{J}_Z) \longrightarrow \dots$$

La première suite en $i = 1$ donne

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow \dots$$

Or, on sait que $h^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et que $\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = k$ d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow k \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow 0.$$

De plus, on a

$$\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(\mathbb{P}^2, i_* \mathcal{J}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{J}_Z) = \Gamma(Z, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})_{\mathbb{P}^2 \setminus Z}) = 0 \text{ car } \mathcal{O}_Z = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})_Z.$$

Au final, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{J}_Z) \longrightarrow 0$$

et donc $1 - h^0 \mathcal{O}_Z + h^1 \mathcal{J}_Z = 0$, ce qui entraîne

$$h^0 \mathcal{O}_Z = 1 + h^1 \mathcal{J}_Z.$$

Ensuite, Z est un espace noethérien de dimension 0, donc par le Théorème de Grothendieck, on a

$$h^1 \mathcal{O}_Z = h^2 \mathcal{O}_Z = 0$$

et par la première suite exacte longue en $i = 2$, il vient

$$h^2 \mathcal{J}_Z = h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) = 0.$$

Par la seconde suite exacte longue en $i = 2$, on obtient de plus (puisque $h^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) = h^1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) = 0$),

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s)) \oplus H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t)) \longrightarrow 0$$

et ceci implique

$$h^1 \mathcal{J}_Z - h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s-t) + h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-s) + h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\forall d \in \mathbb{Z}, h^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d-2) = \binom{2-d-3}{2} = \binom{-d-1}{2}.$$

Finalement, on en tire

$$h^1 \mathcal{J}_Z = \binom{s+t-1}{2} - \binom{s-1}{2} - \binom{t-1}{2} = st - 1$$

et donc

$$\sum_{x \in \mathbb{P}^2} \mu_x(F, G) = h^0 \mathcal{O}_Z = 1 + h^1 \mathcal{J}_Z = st,$$

d'où le résultat. □

Théorème 7. (Riemann-Roch)

Soient C une courbe projective lisse irréductible de genre g et D un diviseur sur C .

1. On a

$$\chi \mathcal{O}_C(D) \stackrel{\text{def}}{=} h^0 \mathcal{O}_C(D) - h^1 \mathcal{O}_C(D) = \deg D + 1 - g.$$

2. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $\deg(D) \geq N$, alors $h^1 \mathcal{O}_C(D) = 0$ et donc

$$h^0 \mathcal{O}_C(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Démonstration. Pour 1), on décompose $D = D_1 - D_2$ avec $D_i \geq 0$. On a alors une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0$$

d'où $\chi \mathcal{O}_C(D) = \chi \mathcal{O}_C(-D_2) + \chi \mathcal{O}_{D_1}$. On a aussi une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{D_2} \longrightarrow 0$$

qui donne $\chi \mathcal{O}_C(-D_2) = \chi \mathcal{O}_C - \chi \mathcal{O}_{D_2}$. Mais, par définition du genre, on a $\chi \mathcal{O}_C = 1 - g$ et pour le schéma fini D_i , on a avec le Théorème de Grothendieck :

$$\chi \mathcal{O}_{D_i} = h^0 \mathcal{O}_{D_i} = \deg(D_i)$$

et, en récapitulant, il vient

$$\chi \mathcal{O}_C(D) = \chi \mathcal{O}_C + \chi \mathcal{O}_{D_1} - \chi \mathcal{O}_{D_2} = 1 - g + \deg(D_1) - \deg(D_2) = \deg(D) + 1 - g.$$

Pour 2), on peut supposer qu'on a un plongement $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ et si H est une section hyperplane de C , on désigne encore par H le diviseur hyperplan (défini dans le groupe de Picard de C). On a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, h^1 \mathcal{O}_C(nH) = h^1 \mathcal{O}_C(n)$$

et ceci est nul pour tout $n \geq n_0$; ce dernier entier étant donné par le Théorème de Serre (qu'il est licite d'appliquer puisque $\mathcal{O}_C$ est cohérent sur C). Soit donc D un diviseur. Par le premier point, on a

$$h^0 \mathcal{O}_C(D - n_0 H) \geq \chi \mathcal{O}_C(D - n_0 H) = \deg(D - n_0 H) + 1 - g$$

et cette quantité est strictement positive dès que $\deg(D) \geq N := n_0 \deg(H) + g$. De plus, si cette condition est remplie et si $f \in \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D - n_0 H))$, avec $f \neq 0$, on a $D \geq n_0 H - \text{div}(f)$, ou encore, $D = D_1 + (n_0 H - \text{div}(f))$, avec $D_1 \geq 0$. Ensuite, on a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(n_0 H - \text{div}(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0$$

et la suite exacte longue de cohomologie associée s'écrit (en degré 1)

$$\dots \longrightarrow H^1 \mathcal{O}_C(n_0 H - \text{div}(f)) \longrightarrow H^1 \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow H^1 \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0$$

car $H^2 \mathcal{O}_C(n_0 H - \text{div}(f)) = 0$ par le Théorème de Grothendieck. Comme $n_0 H - \text{div}(f) = n_0 H \in \text{Pic}(C)$, on a

$$\mathcal{O}_C(n_0 H - \text{div}(f)) \simeq \mathcal{O}_C(n_0 H)$$

et donc

$$H^1 \mathcal{O}_C(n_0 H - \text{div}(f)) \simeq H^1 \mathcal{O}_C(n_0 H) \simeq H^1 \mathcal{O}_C(n_0) = 0,$$

par le Théorème de Serre. Enfin, comme D_1 est fini, on a aussi $h^1 \mathcal{O}_{D_1} = 0$ et il vient

$$h^1 \mathcal{O}_C(D) = 0$$

et ceci achève la démonstration. □

Théorème 8. (*Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch*)

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme projectif lisse entre variétés quasi-projectives lisses. Alors, pour tout $x \in K(X)$, on a

$$\mathrm{ch}(f_!(x)) = f_*(\mathrm{ch}(x)\mathrm{td}(\mathcal{T}_f)),$$

dans $A(Y) \otimes \mathbb{Q}$, où $\mathcal{T}_f$ est le faisceau tangent relatif de f .

Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{f_!} & K(Y) \\ \mathrm{td}(\mathcal{T}_f)\mathrm{ch}_X \downarrow & & \downarrow \mathrm{ch}_Y \\ \mathrm{Gr}K(X) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Gr}K(Y) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

Bonus : Suite spectrale liant cohomologie de Čech, cohomologie locale et foncteur dérivé

Lemme 1. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert d'un espace topologique X et si $\mathcal{I}$ est un préfaisceau abélien injectif sur X , alors on a

$$\forall n > 0, \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0.$$

Démonstration. On procède en plusieurs étapes. On va construire un complexe de chaînes $\mathcal{K}(\mathcal{U})_*$ de préfaisceaux représentant le foncteur de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}, -)$, puis on montrera que ce complexe est acyclique, puis on conclura grâce à l'exactitude de $\text{Hom}(-, \mathcal{I})$ garantie par l'injectivité de $\mathcal{I}$. Dans la suite de cette preuve, pour un ouvert U , on notera $\mathbb{Z}^U := j_{p!}\mathbb{Z}_U$ (extension par zéro du préfaisceau constant $\mathbb{Z}_U$ via $j : U \hookrightarrow X$) le préfaisceau

$$\mathbb{Z}^U : V \mapsto \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } V \subset U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour $i_0 < \dots < i_p \in I$ et $0 \leq j \leq p$, on considère le morphisme de préfaisceaux $\mathbb{Z}^{U_{i_0, \dots, i_p}} \rightarrow \mathbb{Z}^{U_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p}}$, donné par $(-1)^j$ fois le morphisme canonique. On obtient ainsi un complexe de chaînes de préfaisceaux

$$\mathcal{K}(\mathcal{U})_* : \dots \longrightarrow \bigoplus_{i_0 < i_1} \mathbb{Z}^{U_{i_0, i_1}} \longrightarrow \bigoplus_{i_0} \mathbb{Z}^{U_{i_0}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

De plus, ce complexe représente le foncteur $\check{C}^*(\mathcal{U}, -)$.

En effet, si $U \subset X$ est ouvert et $\mathcal{F} \in \mathfrak{PAb}_X$, on a par adjonction, des isomorphismes naturels en $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_X}(\mathbb{Z}^U, \mathcal{F}) &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_X}(j_{p!}\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_U}(\mathbb{Z}_U, j^{-1}\mathcal{F}) \\ &= \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_U}(\mathbb{Z}_U, \mathcal{F}|_U) \simeq \mathcal{F}(U). \end{aligned}$$

Ceci donne un isomorphisme naturel en $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &= \prod_{i_0 < \dots < i_1} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \simeq \prod_{i_0 < \dots < i_1} \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_X}(\mathbb{Z}^{U_{i_0, \dots, i_p}}, \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_X} \left(\bigoplus_{i_0 < \dots < i_1} \mathbb{Z}^{U_{i_0, \dots, i_p}}, \mathcal{F} \right) = \text{Hom}_{\mathfrak{PAb}_X}(\mathcal{K}(\mathcal{U})_p, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{K}(\mathcal{U})_p$ représente bien le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. De plus, par le lemme de Yoneda, la différentielle de Čech $d : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ induit une différentielle $\mathcal{K}(\mathcal{U})_{p+1} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{U})_p$ et on obtient bien le complexe représentant désiré.

2. Posons $\mathbb{Z}_{\mathcal{U}} := \text{im} \left(\bigoplus_i \mathbb{Z}^{U_i} \rightarrow \mathbb{Z}_X \right)$. Alors, on a

$$H_n(\mathcal{K}(\mathcal{U})_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, considérons le complexe augmenté

$$\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_* : \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i_0 < i_1} \mathbb{Z}^{U_{i_0, i_1}} \longrightarrow \bigoplus_{i_0} \mathbb{Z}^{U_{i_0}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

et montrons qu'il est acyclique. Puisque l'on travaille avec des préfaisceaux, le foncteur $\Gamma(W, -)$ est exact pour tout ouvert $W \subset X$ et il suffit donc de montrer que le complexe $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_*(W)$ est acyclique. On va montrer qu'il est homotope à zéro. Soit $I_1 := \{i \in I ; W \subset U_i\}$. Si $I_1 = \emptyset$, alors $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_*(W) = 0$ et il n'y a rien à prouver. Sinon, on a

$$\forall p, \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_p(W) = \bigoplus_{\substack{i_0 < \cdots < i_p \\ i_j \in I_1}} \mathbb{Z},$$

et la différentielle est donnée par

$$(ds)_{i_0, \dots, i_p} = \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{\substack{i \in I_1 \\ i_{j-1} < i < i_j}} (-1)^j s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i, i_j, \dots, i_p}.$$

Fixons $k \in I_1$ et définissons $h : \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_p(W) \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_{p+1}(W)$ par

$$(hs)_{i_0, \dots, i_{p+1}} := \begin{cases} s_{i_1, \dots, i_{p+1}} & \text{si } i_0 = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $i_0 = k$, on a

$$\begin{aligned} (dh + hd)(s)_{i_0, \dots, i_p} &= d(hs)_{i_0, \dots, i_p} + h(ds)_{i_0, \dots, i_p} \\ &= \sum_j \sum_{i_{j-1} < i < i_j} (-1)^j h(s)_{i_0, \dots, i_{j-1}, i, i_j, \dots, i_p} + (ds)_{i_1, \dots, i_p} \\ &= s_{i_0, \dots, i_p} + \underbrace{\sum_{j \neq 0} \sum_{i_{j-1} < i < i_j} (-1)^j s_{i_0, \dots, i_{j-1}, i, i_j, \dots, i_p} + (ds)_{i_1, \dots, i_p}}_{=0} = s_{i_0, \dots, i_p}. \end{aligned}$$

Et, si $i_0 \neq k$,

$$(dh + hd)(s)_{i_0, \dots, i_p} = d(hs)_{i_0, \dots, i_p} = \sum_j \sum_{i_{j-1} < i < i_j} (-1)^j h(s)_{i_0, \dots, i_{j-1}, i, i_j, \dots, i_p} = s_{i_0, \dots, i_p}.$$

Dans les deux cas, on a $(dh + hd)(s) = s$ soit $dh + hd = id$ et le complexe $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{U})_*(W)$ est bien homotope à zéro, donc acyclique.

3. Comme $\mathcal{I}$ est injectif, le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{Pab}_X}(-, \mathcal{I})$ est exact et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \forall n > 0, \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{I}) &= H^n(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{I})) \\ &= H^n(\text{Hom}_{\mathfrak{Pab}_X}(\mathcal{K}(\mathcal{U})_*, \mathcal{I})) = \text{Hom}_{\mathfrak{Pab}_X}(H_n(\mathcal{K}(\mathcal{U})_*), \mathcal{I}) = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 9. (*Suite spectrale de Cech*)

Soient X un espace topologique, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . En notant $\mathcal{H}^\bullet(X, \mathcal{F}) = \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F})$ le préfaisceau de cohomologie locale de $\mathcal{F}$, il existe une suite spectrale de premier quadrant aboutissant à la cohomologie de X à valeurs dans $\mathcal{F}$:

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(X, \mathcal{F})) \implies H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. Considérons la catégorie abélienne $\mathfrak{Ab}_X$ (resp. $\mathfrak{PAb}_X$) des faisceaux (resp. préfaisceaux) abéliens sur X , ainsi que les foncteurs

$$\mathfrak{Ab}_X \xrightarrow[\text{can.}]{F} \mathfrak{PAb}_X \xrightarrow{G} \mathfrak{Ab}$$

F étant le foncteur d'oubli et $G = \check{H}^0(\mathcal{U}, -)$. Remarquons que le composé $G \circ F$ est le foncteur $\Gamma(X, -)$ des sections globales, que les catégories $\mathfrak{Ab}_X$ et $\mathfrak{PAb}_X$ possèdent assez d'objets injectifs et que les foncteurs F et G sont exacts à gauche. Rappelons également que pour tout $p \geq 0$, le préfaisceau $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$ est défini par

$$\mathcal{H}^p(\mathcal{F}) : U \mapsto H^p(U, \mathcal{F}) = H^p(U, \mathcal{F}|_U),$$

au sens des foncteurs dérivés. Soient $p \geq 0$ et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . Montrons que l'on a

$$R^p F = \mathcal{H}^p(X, -) \text{ et } R^p G = \check{H}^p(\mathcal{U}, -).$$

Soit donc $\mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J}^\bullet$ une résolution injective de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{Ab}_X$ et soit $U \subset X$ un ouvert. On calcule

$$\begin{aligned} R^p F(\mathcal{F})(U) &\stackrel{\text{def}}{=} H^p(F(\mathcal{J}^\bullet))(U) = H^p(\mathcal{J}^\bullet(U)) \\ &= H^p(\mathcal{J}|_U^\bullet(U)) = R^p(\Gamma(U, \mathcal{J}|_U^\bullet)) = H^p(U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{H}^p(X, \mathcal{F})(U), \end{aligned}$$

le passage de la première à la seconde ligne se faisant en remarquant que $\mathcal{F}|_U \xrightarrow{\varepsilon|_U} \mathcal{J}|_U^\bullet$ est une résolution puisque le foncteur $\cdot|_U$ est exact ; d'où le résultat pour F . Pour G , comme $R^\bullet G$ est un foncteur dérivé, c'est un ∂ -foncteur universel et en vertu de la proposition II, 2.2.1 du [Tôhoku], il suffit de montrer que $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, -)$ est aussi un ∂ -foncteur universel. Tout d'abord, $\check{H}^i(\mathcal{U}, -)$ est effaçable pour tout $i > 0$. En effet, si $\mathcal{G}$ est un préfaisceau abélien sur X , comme la catégorie $\mathfrak{Ab}$ admet assez d'injectifs, si $x \in X$, on peut choisir un groupe abélien I_x et un monomorphisme $\mathcal{G}_x \hookrightarrow I_x$. En notant $\iota^x : \{x\} \hookrightarrow X$ l'inclusion, on pose $\mathcal{I} := \prod_{x \in X} \iota_*^x I_x$. Alors, $\mathcal{I}$ est un faisceau abélien sur X et on a un monomorphisme de préfaisceaux $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{I}$. De plus, $\mathcal{I}$ est injectif dans $\mathfrak{Ab}_X$ car, pour tout faisceau abélien $\mathcal{G}$ sur X , on a

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Ab}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}_X}(\mathcal{G}, \iota_*^x I_x) \stackrel{\text{adj.}}{=} \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}_{\{x\}}}((\iota^x)^{-1} \mathcal{G}, I_x) = \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathfrak{Ab}}(\mathcal{G}_x, I_x),$$

donc le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{Ab}_X}(-, \mathcal{I})$ est exact, comme composé de foncteurs exacts. Ensuite, par la propriété universelle de la faisceautisation, il est aussi injectif dans $\mathfrak{PAb}_X$. Par le Lemme précédent, puisque $\mathcal{I}$ est un préfaisceau injectif, on a $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0$ pour tout $i > 0$. Ceci entraîne que $\check{H}^i(\mathcal{U}, -)$ est effaçable. Il nous reste donc à montrer que $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, -)$ est un foncteur cohomologique (i.e. un ∂ -foncteur exact défini pour tous les degrés). En fait, ceci résulte du fait que $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, -)$ est défini sur les préfaisceaux. En effet, si on a une suite exacte courte de préfaisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'' \longrightarrow 0,$$

alors, pour tout ouvert $U \subset X$, on a une suite exacte courte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}'(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}''(U) \longrightarrow 0$$

et ceci nous donne donc des suites exactes courtes, pour tout $p > 0$,

$$0 \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{G}'(U_{i_0, \dots, i_p}) \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{G}(U_{i_0, \dots, i_p}) \longrightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{G}''(U_{i_0, \dots, i_p}) \longrightarrow 0$$

et ceci nous donne donc une suite exacte courte au niveau des complexes de Čech

$$0 \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}') \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{G}'') \longrightarrow 0.$$

Cette suite nous donne donc une suite exacte longue fonctorielle en cohomologie de Čech

$$\dots \longrightarrow \check{H}^{i-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}') \longrightarrow \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{G}'') \xrightarrow{\partial} \check{H}^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}') \longrightarrow \dots$$

On en conclut que $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, -)$ est bien un ∂ -foncteur universel et comme $G = \check{H}^0(\mathcal{U}, -)$, on obtient bien l'égalité désirée. De plus, on a vu que F préserve les injectifs, et comme les injectifs sont flasques et que les flasques sont Čech-acycliques, F envoie les faisceaux injectifs sur des préfaisceaux G -acycliques. Par le théorème 2.4.1 de Grothendieck, on a une suite spectrale convergente de premier quadrant

$$E_2^{p,q} = R^p G(R^q F(\mathcal{F})) \implies R^{p+q} G F(\mathcal{F}),$$

et, puisque le triangle suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ab}_X & \xrightarrow{\Gamma(X, -)} & \mathfrak{Ab} \\ & \searrow F \quad \nearrow G & \\ & \mathfrak{PAb}_X & \end{array}$$

les calculs menés ci-dessus montrent que le résultat découle d'une simple réécriture de la suite spectrale de Grothendieck. $\square$

Corollaire 3. *Sous les mêmes hypothèses, on a une suite exacte à cinq termes*

$$0 \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^1(X, \mathcal{F})) \longrightarrow \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}) .$$

Démonstration. Ceci est simplement la suite exacte à cinq termes

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2$$

associée à la suite spectrale du Théorème 9. □

Corollaire 4. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . On suppose que $\mathcal{F}$ est localement acyclique, sauf peut-être en degré 1. Alors, on a une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^1(\mathcal{F})) \longrightarrow \check{H}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots .$$

Démonstration. Ceci résulte du lemme des deux lignes, qu'il est licite d'appliquer puisque $\mathcal{H}^q(\mathcal{F}) = 0$ à moins que $q = 0, 1$. On obtient une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^n \longrightarrow E_2^{n-1,1} \xrightarrow{d} E_2^{n+1,0} \longrightarrow H^{n+1} \longrightarrow \dots$$

qu'il suffit d'évaluer en les foncteurs qui nous intéressent pour obtenir la suite exacte longue voulue. □

Corollaire 5. *(Théorème de Leray)*

Soient X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts dont toutes les intersections finies sont acycliques. Alors, on a

$$\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(X, \mathcal{F}) .$$

Démonstration. L'hypothèse signifie que, si $i_0, \dots, i_p \in I$ et si $V := U_{i_0, \dots, i_p}$, alors on a

$$\forall p > 0, \quad H^p(V, \mathcal{F}|_V) = 0.$$

Ceci entraîne que $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})(V) = 0$ et donc que le complexe de Čech du préfaisceau $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$ est nul, donc que l'on a

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) = 0, \quad \forall p \geq 0, \quad \forall q \neq 0.$$

Ainsi, la suite spectrale de Čech s'effondre en seconde page et on en tire que

$$\forall n \geq 0, \quad \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{H}^0(\mathcal{F})) = E_2^{n,0} = E_\infty^{n,0} = H^n(X, \mathcal{F}).$$

Remarquons que l'on peut aussi dériver le résultat directement du Corollaire 4. □

Corollaire 6. (*Suite exacte longue de Mayer-Vietoris*)

Soient X un espace topologique recouvert par deux de ses ouverts U, V et $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur X . Alors, on a une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(U, \mathcal{F}) \oplus H^n(V, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(U \cap V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

De plus, le résultat demeure si $\mathcal{F}$ est un faisceau de modules sur un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ et en particulier, si $\mathcal{F}$ est un faisceau algébrique sur une variété algébrique ou un schéma.

Démonstration. On considère le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Pour tout préfaisceau abélien $\mathcal{G}$ sur X , on a

$$\forall p \geq 2, \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0 \Rightarrow \forall p \neq 0, 1, \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0,$$

d'où

$$\forall p \neq 0, 1, E_2^{p,q} = 0$$

donc, par le lemme des deux colonnes on obtient, pour tout $n \geq 1$, une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,n-1} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_2^{0,n} \longrightarrow 0$$

qui se réécrit ici

$$0 \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F})) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^n(\mathcal{F})) \longrightarrow 0.$$

Remarquons que pour tout $k \geq 0$, on a

$$\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^k(\mathcal{F})) = \mathcal{H}^k(\mathcal{F})(U) \times \mathcal{H}^k(\mathcal{F})(V) = H^k(U, \mathcal{F}) \oplus H^k(V, \mathcal{F}),$$

et

$$\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^k(\mathcal{F})) = \mathcal{H}^k(\mathcal{F})(U \cap V) = H^k(U \cap V, \mathcal{F}).$$

Considérons alors α^n la différentielle de Čech :

$$\begin{array}{ccc} \alpha^n & : & H^n(U, \mathcal{F}) \oplus H^n(V, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(U \cap V, \mathcal{F}) \\ & & (s, t) \mapsto s|_{U \cap V} - t|_{U \cap V} \end{array}$$

ainsi que le morphisme canonique $\beta^n = H^n(\beta)$, où

$$\begin{array}{ccc} \beta & : & \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(V, \mathcal{F}) \\ & & s \mapsto (s|_U, s|_V) \end{array}$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F})) &\stackrel{\text{def}}{=} \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F})) / \text{im}(\check{C}^0 \rightarrow \check{C}^1) \\ &= H^{n-1}(U \cap V, \mathcal{F}) / \text{im} \alpha^{n-1} = \text{coker } \alpha^{n-1}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^n(\mathcal{F})) = \ker(\check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^n(\mathcal{F})) \rightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}^n(\mathcal{F}))) = \ker \alpha^n.$$

Donc, la suite exacte courte ci-dessus s'écrit aussi

$$0 \longrightarrow \text{coker } \alpha^{n-1} \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \ker \alpha^n \longrightarrow 0.$$

On peut donc recoller ces suites exactes courtes pour obtenir une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(U \cap V, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & H^n(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta^n} & H^n(U, \mathcal{F}) \oplus H^n(V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^n} H^n(U \cap V, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
 & & \text{coker } \alpha^{n-1} & & \text{ker } \alpha^n & &
 \end{array}$$

qui est bien la suite de Mayer-Vietoris.

□

Corollaire 7. *Soient X un schéma recouvert par deux ouverts affines U, V et $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique quasi-cohérent sur X . Alors, pour tout $n > 0$, on a un isomorphisme*

$$H^{n-1}(U \cap V, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F}) .$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du Corollaire 6 et du Théorème 3 de Serre.

□