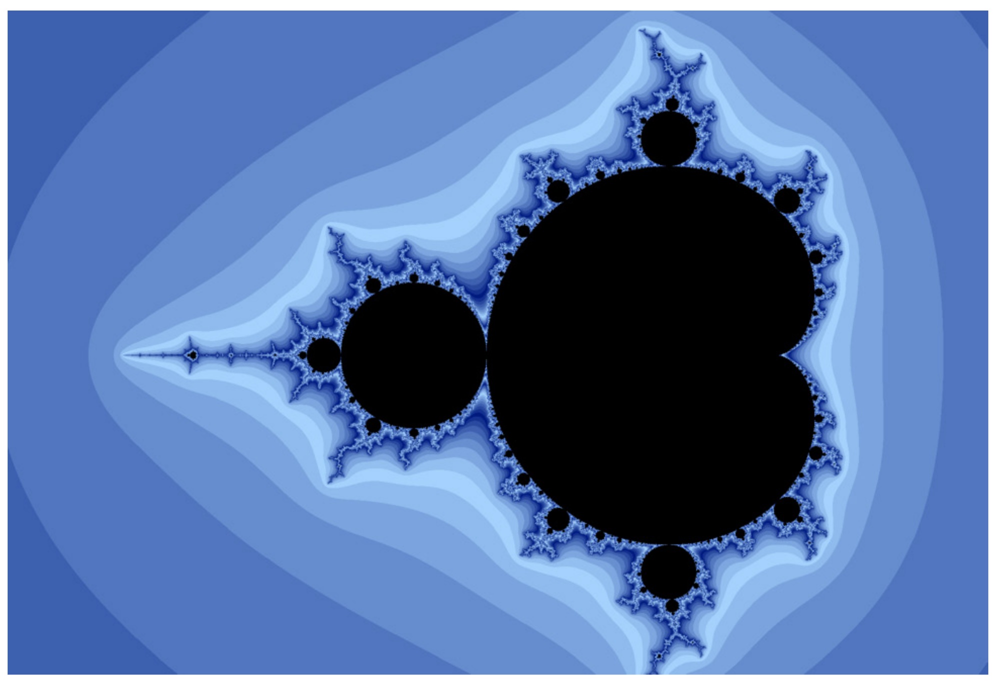
L'ensemble de Mandelbrot

L'*ensemble de Mandelbrot* est un sous-ensemble du plan, c'est-à-dire une collection de points du plan. En voilà une représentation calculée par informatique.



Tout cela est bien joli mais qu'est-ce que cela représente ?

Systèmes dynamiques holomorphes

Il s'agit de *systèmes dynamiques holomorphes*, définis pas des polynômes : les polynômes de degré 2 notés P_c et définis par

$$P_c(z)=z^2+c.$$

Le nombre complexe c est le paramètre, et le nombre complexe z est la *variable dynamique*. L'étude du système dynamique P_c consiste en l'étude de suites définies par récurrence par la formule suivante :

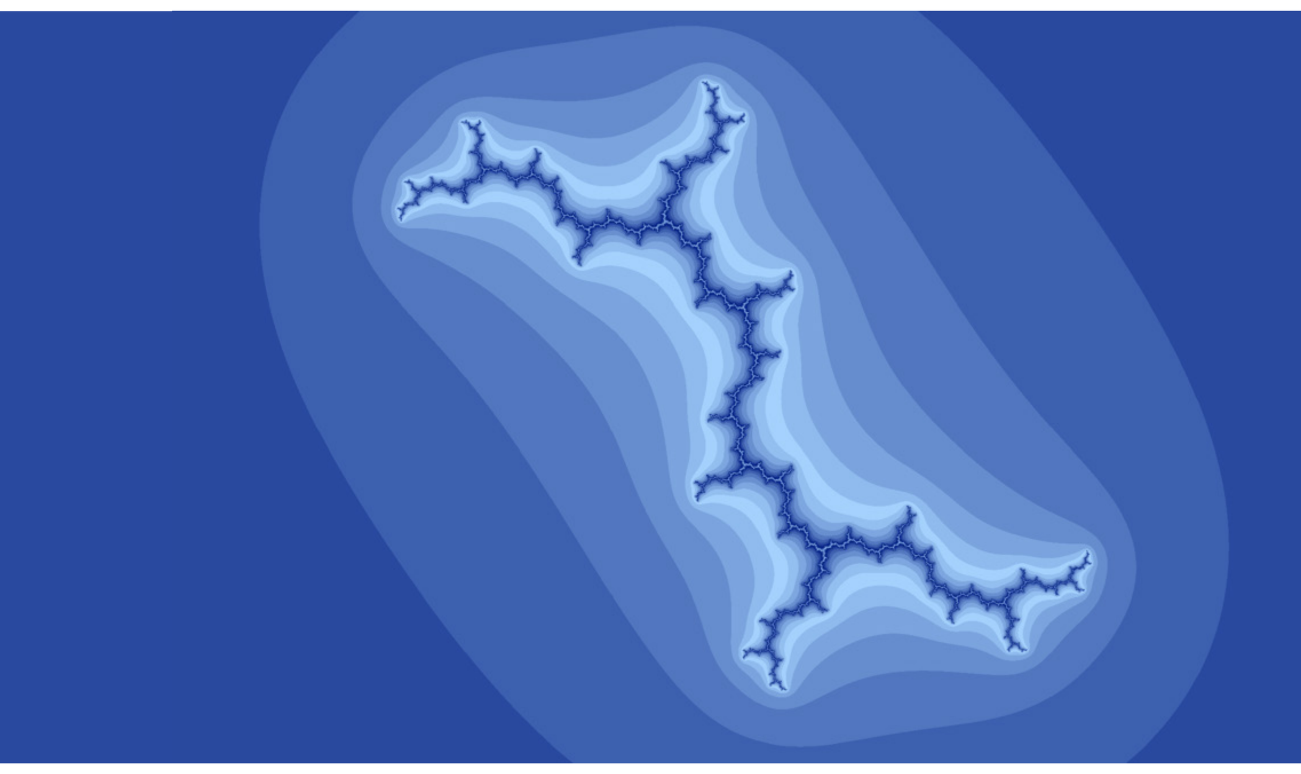
$$z_0\in \boldsymbol{C},\ z_{n+1}=P_c(z_n).$$

On cherche à comprendre la sensibilité à la condition initiale. Ceci signifie que l'on cherche à comprendre à quel point, lorsqu'on change un tout petit peu z_0 la suite $(z_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ change de comportement.
Cette question fait apparaître de façon naturelle un découpage du plan complexe $\boldsymbol{C}$ en deux sous-ensembles complémentaires l'un de l'autre

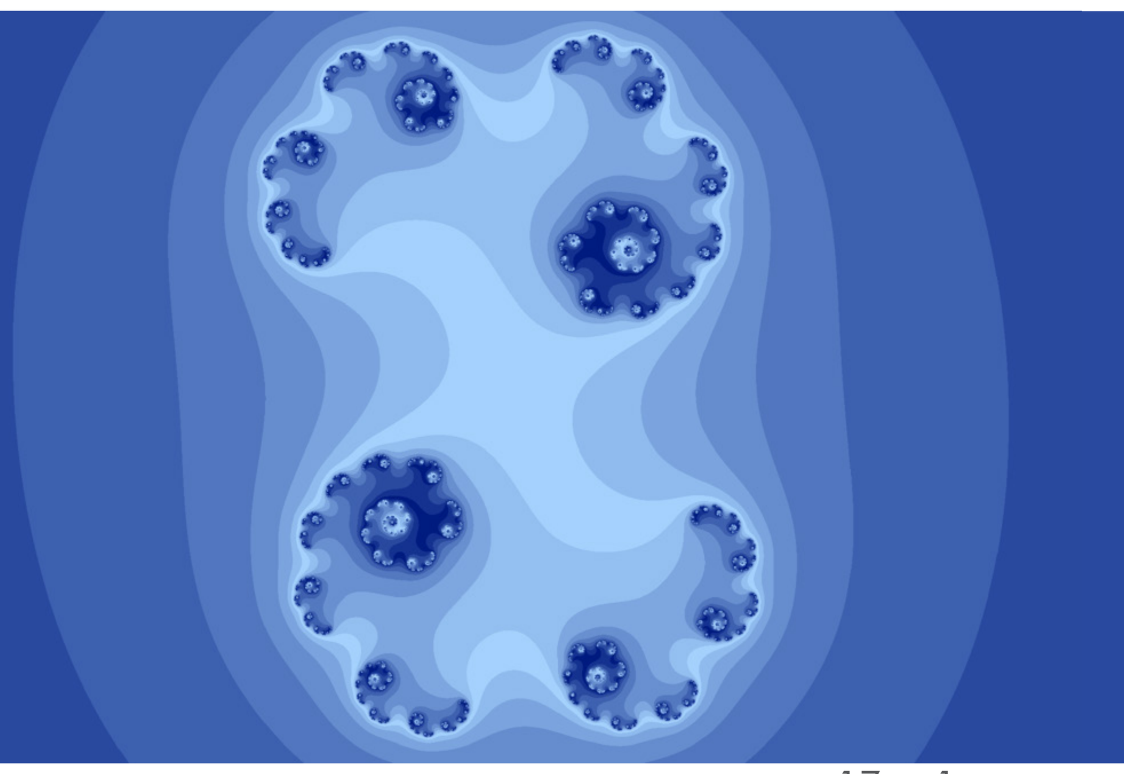
- le *bassin d'attraction de l'infini* de P_c qui consiste en l'ensemble des points $z_0\in \boldsymbol{C}$ pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ tend vers l'infini,
- son complémentaire l'*ensemble de Julia rempli* $K(P_c)$ de P_c qui consiste, pour sa part, en l'ensemble $z_0\in \boldsymbol{C}$ des nombres complexes pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ est bornée. Il n'est pas très difficile de démontrer que $K(P_c)$ coïncide avec l'ensemble des $z_0\in \boldsymbol{C}$ pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ reste dans le le disque centré en 0 de rayon $1+|c|$

Le *point critique* de P_c est le nombre complexe 0 car il s'agit du seul nombre complexe pour lequel la dérivée $P_c'(z)=2.z$ de P_c s'annule.
Un résultat important dans ce champs des mathématiques est la dichotomie suivante (c'est-à-dire qu'il y a deux cas exclus l'un de l'autre) :

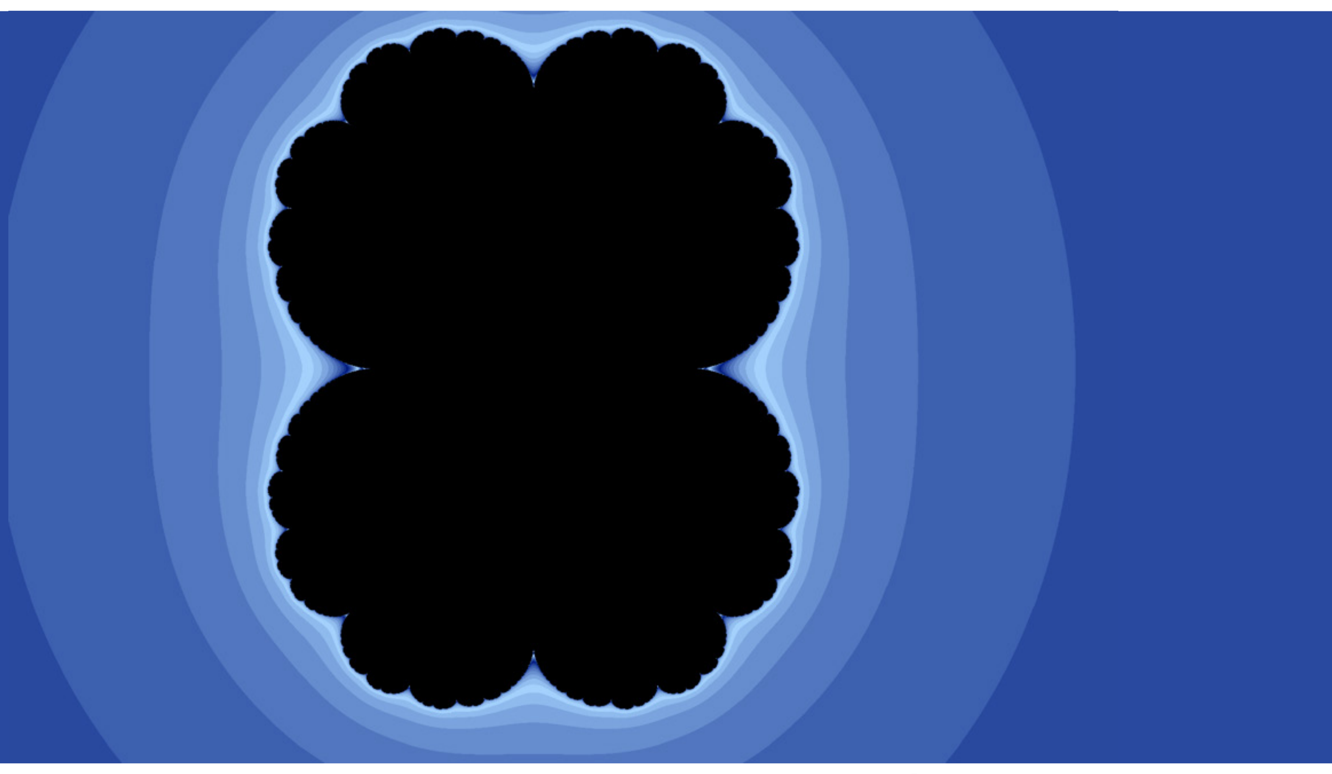
- soit $0\in K(P_c)$ auquel cas $K(P_c)$ est connexe, ce qui veut dire d'un seul tenant.
- soit $0\notin K(P_c)$ auquel cas $K(P_c)$ est disconnexe. Il s'agit même d'une poussière de Cantor (un nuage de points).



Ensemble de Julia rempli $K(P_i)$ de $P_i(z)=z^2+i$



Ensemble de Julia rempli de P_c pour $c=\frac{17}{39}+\frac{1}{10}i$

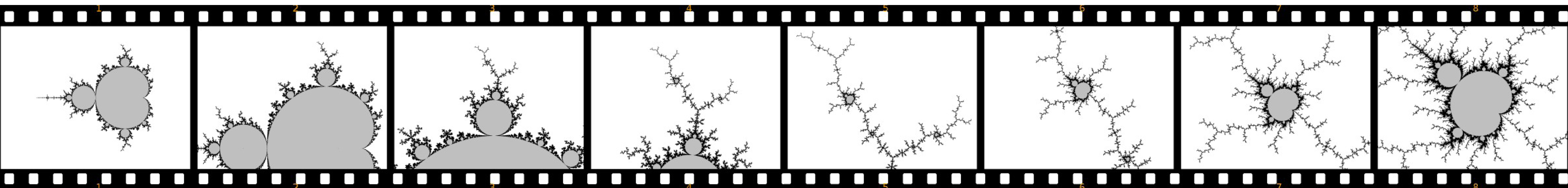


Ensemble de Julia rempli de $P_{1/4}(z)=z^2+\frac{1}{4}$

L'ensemble de Mandelbrot

Que représente l'ensemble de Mandelbrot ? Comment l'ensemble de Mandelbrot est-il relié à ces objets compliqués ?

En gros à chaque point de l'image correspond un système dynamique sous-jacent. Le point joue le rôle d'un paramètre ajustable. Différents points correspondent à des ensembles de Julia différents, à des systèmes différents, et selon le comportement de ces derniers, on peut décider de colorier le point de telle ou telle façon. L'ensemble de Mandelbrot noté *M* est exactement l'ensemble des nombres complexes $c\in \boldsymbol{C}$ pour lesquels l'ensemble de Julia rempli $K(P_c)$ est connexe. Grâce à la dichotomie mentionnée précédemment, on peut donner une définition programmable de l'ensemble de Mandelbrot *M* :
il s'agit de l'ensemble des nombres complexes $c\in \boldsymbol{C}$ pour lesquels la suite défini par récurrence par $c_0=c,\ c_{n+1}=P_c(c_n)$ reste dans le disque du plan centré en et de rayon $1+|c|$



Références

- **Arnaud Chéritat**, **« L'ensemble de Mandelbrot »** - Images des Mathématiques, CNRS, 2010
- Les chapitres 5 et 6 de **Dimensions**, un Film sous licence libre de Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez

Les images ont été réalisées à l'aide du logiciel FractalStream.

Organisé par le département de mathématiques de l'UPJV
Conception et réalisation : Direction de la recherche
Impression : Reprographie campus - UPJV - Septembre 2013