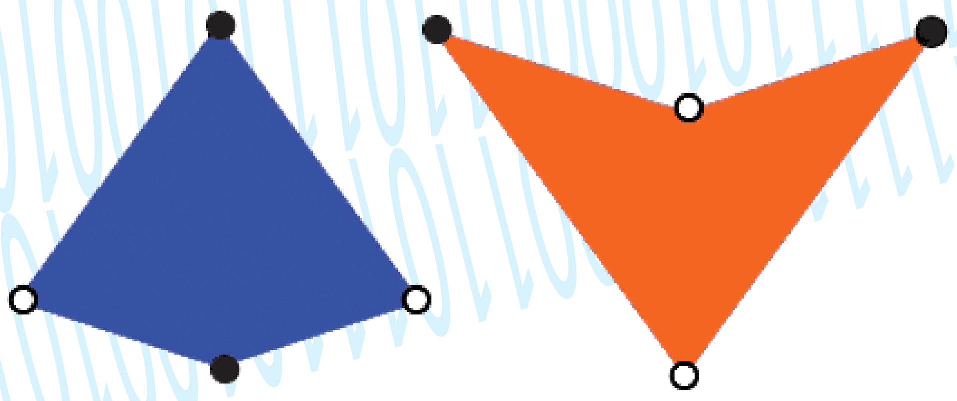
UNIVERSITÉ
de Picardie
Jules Verne

Pavages du plan



Imaginez que l'on cherche à paver le plan avec les pavés ci contre, où un sommet d'une couleur ne peut que rencontrer un sommet de la même couleur. Autrement dit, ces pavés représentent des pièces d'un puzzle et l'on se demande si celui-ci peut être arbitrairement grand.

Peut on savoir, en un temps fini, si cela est possible ? Plus précisément, peut-on trouver un algorithme qui, étant donné une famille de pavés, nous dit si l'on peut paver des domaines du plan arbitrairement grands ?

Un peu d'histoire

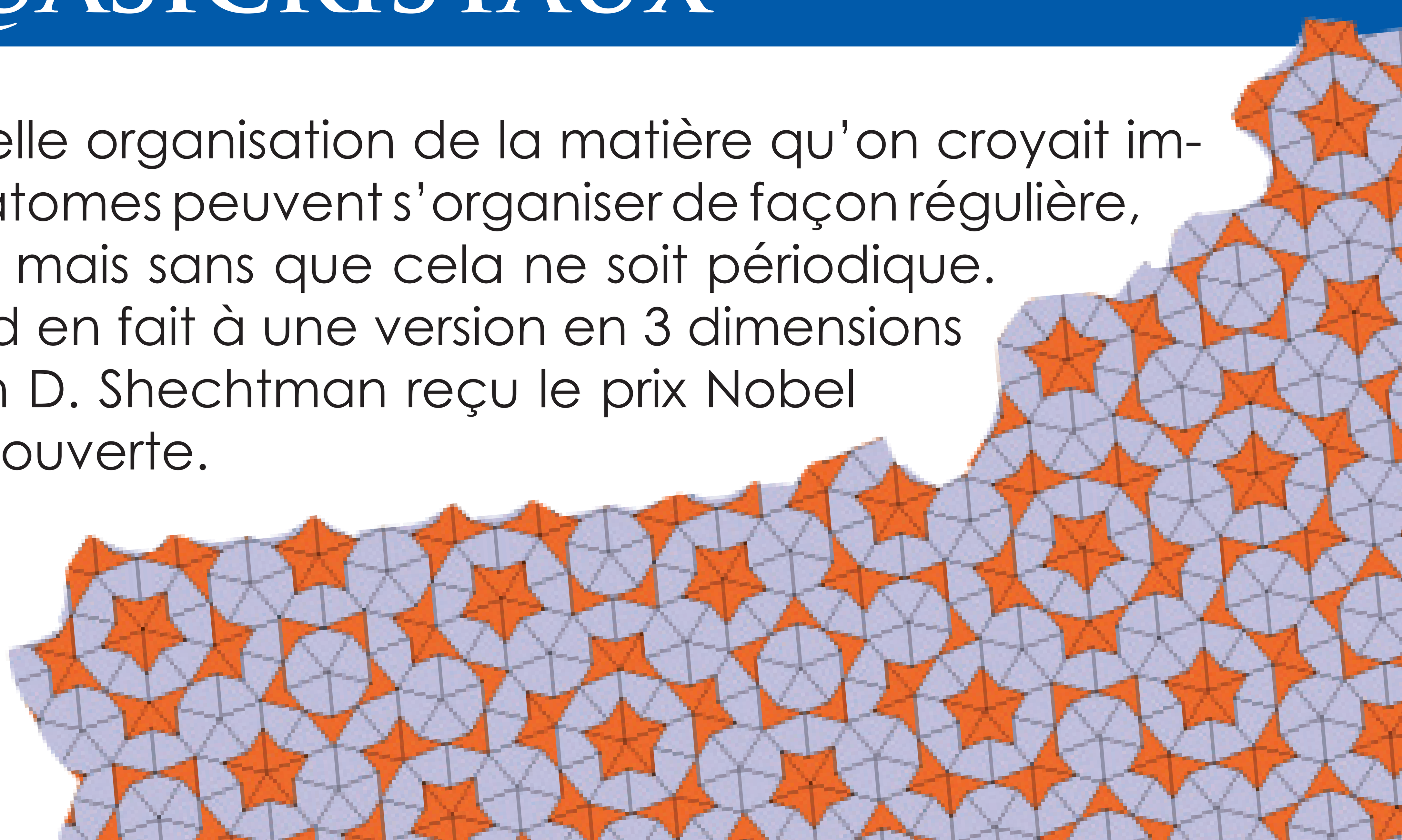
Des scientifiques comme Kepler ou des artistes comme Dürer se sont intéressés à cette question en apportant des réponses partielles. Ainsi l'on sait qu'il n'est pas possible de paver le plan avec des polygones convexes possédant tous p côtés, pour $p > 6$.

En 1960 le mathématicien américain Berger, prouve qu'il n'existe pas d'algorithme pour déterminer si une famille de pavés donnée peut paver le plan. Ce problème est dit indécidable.
Sa preuve consiste à coder n'importe quelle machine de Turing par une famille de pavés. Il montre ensuite que le problème de paver le plan est équivalent au problème de l'arrêt (halting problem) qui est le premier exemple de problème indécidable donné par Turing.

Ce résultat a de nombreuses conséquences. En particulier, il permet de montrer qu'il existe des pavés qui ne pavent le plan que de façon non-périodique. Berger proposa un exemple explicite avec une famille d'environ 20 000 pavés. Dans les années 1970, le mathématicien Penrose trouva un exemple avec seulement 2 pavés : c'est le fameux pavage de Penrose.

Les quasicristaux

En 1984, on découvrit une nouvelle organisation de la matière qu'on croyait impossible : des quasicristaux. Les atomes peuvent s'organiser de façon régulière, uniforme, parfaitement ordonnée mais sans que cela ne soit périodique.
La position des atomes correspond en fait à une version en 3 dimensions du pavage de Penrose. L'israélien D. Shechtman reçu le prix Nobel de chimie en 2011 pour cette découverte.



Réalisé par le Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA, CNRS UMR 7352) - UPJV - Octobre 2012