

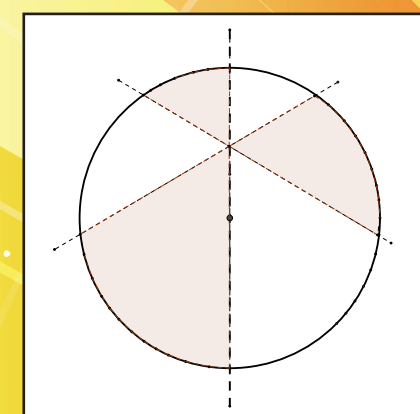
SAVEZ-VOUS PARTAGER ÉQUITABLEMENT UNE PIZZA ?



Deux convives veulent manger une pizza en ayant chacun la même quantité. Ils coupent la pizza en prenant soin que les angles des parts soient identiques, mais manque de chance, ils ne sont pas sûr que la coupe passe par le centre de la pizza. Leurs parts ne sont pas forcément égales.

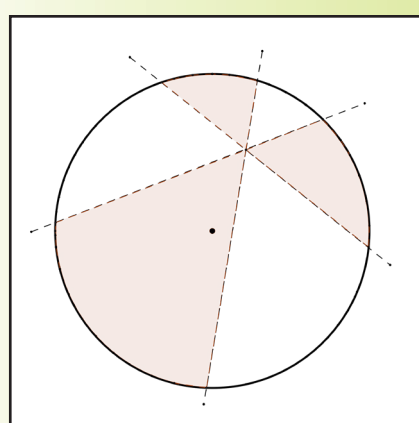
Le théorème de la pizza apporte la solution à ce problème. Comme de nombreuses énigmes mathématiques, la solution a été obtenue étapes par étapes, en étudiant les diverses possibilités.

Dans le cas le plus simple, une ligne de coupe rencontre le centre de la pizza. Un dessin nous montre qu'il y a une symétrie de la coupe par rapport à cette ligne : les convives reçoivent la même quantité de pizza s'ils prennent les parts alternativement.

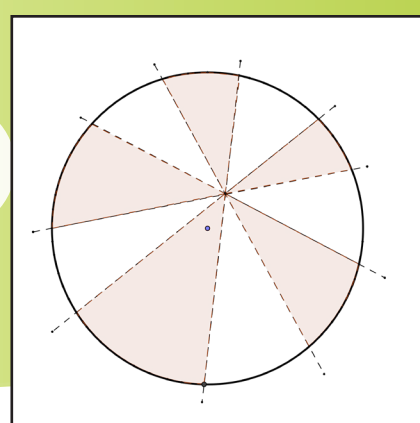


Découpage avec une coupe passant par le centre de la pizza

Et si aucune ligne ne rencontre le centre ? Si la pizza est coupée en un nombre pair de fois, la même stratégie marche. Ce résultat a été démontré en 1968, non plus en utilisant des arguments de symétrie mais par des calculs algébriques élémentaires de calculs d'aires.



Celui ayant la part du centre est avantage (idem si c'est découpé en 7, 11 coupes)



Celui ayant la part du centre est désavantage (idem si c'est découpé en 5, 9 coupes)

Les choses se compliquent lorsque la pizza est coupée en un nombre impair de fois. Pour une pizza coupée en 3, 7, 11, 15, ... coupes, celui ayant la part contenant le centre aura plus que l'autre. Pour une pizza coupée 5, 9, 13, 17, ... coupes, c'est le contraire qui prévaut !

Démontrer ce résultat s'est révélé difficile. Tellement difficile qu'il a fallu 11 années à R. Mabry et P. Deierman pour achever la démonstration en 2010, à l'aide d'astuces géométriques, de formules algébriques manipulable, de calcul informatique et de résultats d'analyse combinatoire.

Il existe de nombreuses variantes de ce problème. Par exemple avec 3, 4 ou n convives : si l'on découpe la pizza en $4n$ coupes, elle peut être partagée équitablement entre n personnes. Ainsi, une pizza découpée en 12 coupes peut être partagée équitablement en 2 mais aussi en 3.

D'autres variantes apparaissent lorsque les parts ne forment plus le même angle.

Ref

Jeremy Hirschhorn, Michael Hirschhorn, Jeremy K. Hirschhorn, Andrew Hirschhorn et Philip Hirschhorn, « The pizza theorem », Australian Mathematical Society Gazette, vol. 26, 1999, p. 120-121

Rick Mabry et Paul Deiermann, « Of Cheese and Crust: A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results », American Mathematical Monthly, vol. 116, 2009, p. 423-438