feuille 4 exo 4 astroïde

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$

1) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
Sur son domaine, la courbe est $\mathcal{C}^\infty$. Donc on peut dériver.

→ symétries ~~le~~ arc est 2π périodique
⇒ domaine de définition de longueur 2π. Pour préparer l'information suivante, on prend $[-\pi, \pi]$ (et pas $[0, 2\pi]$)

• $t \mapsto -t$ ~~renvoie~~ fait : $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$
$= s_{/Ox}((x(t), y(t)))$.
Donc si j'ai la courbe sur $[0, \pi]$, que je lui applique la symétrie par rapport à Ox, j'aurai le tracé pour $t \in [-\pi, 0]$ en plus. Donc j'aurai le tracé sur $[-\pi, \pi]$.

• On peut ne pas le remarquer, mais
$\gamma(\pi - t) = (x(\pi - t), y(\pi - t)) = (\cos^3(\pi - t), \sin^3(\pi - t))$
$= ((-\cos t)^3, (-\sin(-t))^3)) = (-x(t), +y(t))$
$= s_{/Oy}((x(t), y(t)))$.

Donc, si je restreins mon étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors par : $t \mapsto \pi - t$, j'aurai (après application de $s_{/Oy}$) la courbe sur "$[\pi - 0, \pi - \frac{\pi}{2}]$"
$= [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Donc, en adjoignant $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, j'ai sur $[0, \pi]$. Puis (grâce à $s_{/Ox}$) sur $[-\pi, 0]$ et donc $[-\pi, \pi]$!

2) On dérive, on étudie le signe, et on le justifie sur sa copie pour rassurer le correcteur :
$(\cos^3 t)' = -3\cos^2 t \sin t$, $(\sin^3 t)' = 3\sin^2 t \cos t$
Les signes sont donc faciles :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$		$-$	0
x	1	↘	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↘	0
y'	0	$+$		$+$	0
y	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↗	1

3) On remarque qu'on n'a pas de vecteur vitesse ~~et~~ équivalent du vecteur tangent qui donne le comportement en un t) en $t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$. On a donc deux points d'arrêt stationnaire. On va les étudier.

En $t=0$ on va devoir faire des développements limités :

$$x'(t) = -3\left(1-\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)^2\left(t-\frac{t^3}{6}+O(t^5)\right)$$
$$= -3t\left(1-2\times\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)\left(1-\frac{t^2}{6}+O(t^4)\right)$$
$$= -3t\left(1-t^2-\frac{t^2}{6}+O(t^4)\right)$$
$$= -3t\left(1-\frac{7t^2}{6}+O(t^4)\right)$$

et
$$y'(t) = 3\left(t-\frac{t^3}{6}+O(t^5)\right)^2 \times \left(1-\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)$$
$$= 3t^2\left(1-\frac{t^2}{6}+O(t^4)\right)^2\times\left(1-\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)$$
$$= 3t^2\left(1-2\times\frac{t^2}{6}+O(t^4)\right)\times\left(1-\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)$$
$$= 3t^2\left(1-\frac{t^2}{3}-\frac{t^2}{2}+O(t^4)\right)$$
$$= 3t^2\left(1-\frac{5t^2}{6}+O(t^4)\right)$$

En particulier :
$$\dot\gamma(t) = \left(-3t+\frac{7}{2}t^3+O(t^4),\ 3t^2-\frac{5}{2}t^4+O(t^6)\right)$$

En particulier :
$$\underbrace{\dot\gamma(t)}_{\text{vecteur}} = -3t\underbrace{(1,0)}_{\text{vecteur}} + 3t^2\underbrace{(0,1)}_{\text{vecteur}} + \underbrace{O(t^3)}_{\text{vecteur !}}.$$

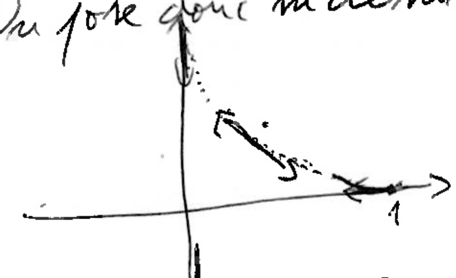
Et donc, avec les notations du cours : $p=2$, $q=3$ car ici, j'ai fait un développement de $\dot\gamma$ et non de $\gamma(t)$ comme dans le cours de $\dot\gamma$ et non de $\gamma(t)$ comme dans le cours de l'espace.

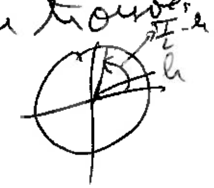
Donc <u>point de rebroussement de l'espèce</u>.

Comme on sent bien que $t=\frac{\pi}{4}$ donnera un point singulier, on calcule $\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ~~$=\frac{3}{4}$~~

$$\dot\gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}(-1,1).$$

On pose donc successivement $(x\searrow,\ y\nearrow)$ et on s'aperçoit qu'on devrait faire l'étude du point d'arrêt stationnaire en $t=\frac{\pi}{2}$. On trouve :

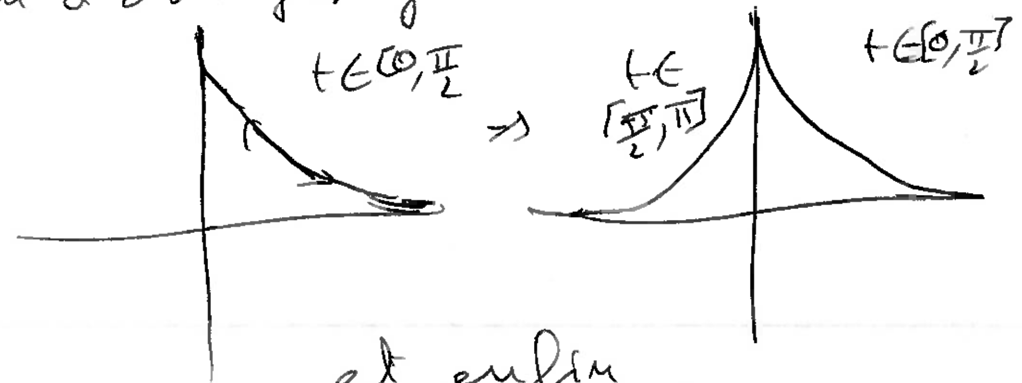




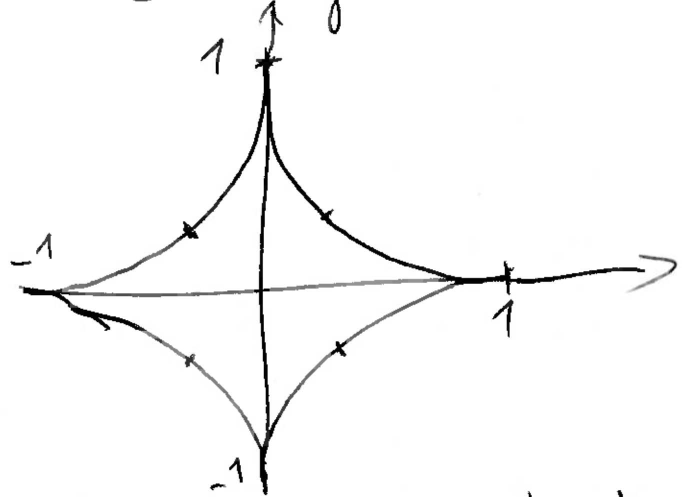
$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \left(\sin^3 h,\ \cos^3 h\right)$$
$$= \left(\left(h-\frac{h^3}{6}+O(h^5)\right)^3,\ \left(1-\frac{h^2}{2}+O(h^4)\right)^3\right)$$
$$= \left(h^3\left(1-\frac{h^2}{6}+O(h^4)\right)^3,\ 1-\frac{3h^2}{2}+O(h^4)\right)$$
$$= \left(h^3\left(1-\frac{h^2}{2}+O(h^4)\right),\ 1-\frac{3h^2}{2}+O(h^4)\right) =$$
$$\gamma\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\ (0,1) + \frac{h^2}{2}\left(0,-\frac{3}{2}\right) + h^3(1,0) + O(h^4)$$

pas de terme en h car $\dot\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,0)$ $\rightarrow p=2,\ q=3$ car $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ et $(1,0)$ sont libres.

On a donc justifié :



et enfin



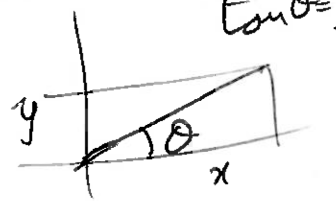
4) La distance de O à $\gamma(t)$ est :

$$\|\overrightarrow{O\gamma(t)}\| = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$$

$$= \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t} \quad (= r)$$

Par ailleurs l'angle θ des coordonnées polaires est tel que :

$\tan\theta = \frac{y}{x}$



Donc $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}$

$\tan\theta = (\tan t)^3$ (il faut l'écrire pour le voir).

Or, on cherche à exprimer t en fonction de θ. (on veut remplacer t dans la définition de $r(t)$ en une fonction $r(\theta)$! Toujours se demander ce qu'on sait et ce qu'on veut savoir.

~~t = arctan~~

Donc : $(\tan\theta)^{1/3} = \tan t$. et :

$$t = \arctan\left((\tan\theta)^{1/3}\right)$$

Donc : $r(\theta) = \sqrt{\cos^3\left(\arctan\left((\tan\theta)^{1/3}\right)\right) + \sin^3\left(\arctan\left((\tan\theta)^{1/3}\right)\right)}$

ouf !

4,5) : Longueur de la courbe :

$$L = \int_0 ds = 4\int_0^{\pi/2} ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\, dt$$

Or $\cos^6 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^6 = \frac{e^{6it} + 6e^{4it} + 15e^{2it} + 20 + 15e^{-2it} + 6e^{-4it} + e^{-6it}}{2^6}$

$$= \frac{e^{6it} + e^{-6it}}{2 \times 2^5} + \frac{6}{2^5}\,\frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} + \frac{15}{2^5}\,\frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} + \frac{20}{2^6}$$

$= \frac{1}{32}\cos(6t)$