Feuille n° 4. (1)

Exercice 1 :

$r(\theta) = 1+2\cos(3\theta)$.

1) On remarque que r est $\frac{2\pi}{3}$ périodique :

$\forall \theta : r\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\theta)$.

Attention, les courbe non polaires ~~pe~~ permettent de restreindre l'étude à un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$. Mais, θ a aussi (pour les courbes polaires) une signification géométrique.

Par ailleurs $\theta \mapsto r(\theta)$ est paire.

Donc on étudiera sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Puis on fera le symétrique par rapport à Ox et on aura la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Puis on fera tourner de $\frac{2\pi}{3}$ pour avoir la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Puis on refera tourner de $\frac{2\pi}{3}$ cette dernière courbe, ce qui nous donnera la courbe sur $\left[\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}, \pi+\frac{2\pi}{3}\right] = \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$.

Si on résume, on aura obtenu les courbe sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ qui est bien de longueur 2π

2) Quelles valeurs de θ sont telles que :

$$r(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (\text{ou } 3\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k'\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \theta = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \left(\Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k'\pi}{3}\right) \end{cases}$$

On ne retient que : $\theta = \frac{2\pi}{9}$ $(k=0)$ qui appartient bien à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

les autres $(k \neq 0)$ sont forcément à l'extérieur de l'intervalle d'étude

$\theta = \frac{4\pi}{9}$. Mais $\frac{4\pi}{9} > \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 12 > 9$!

Donc cette solution n'est pas dans $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

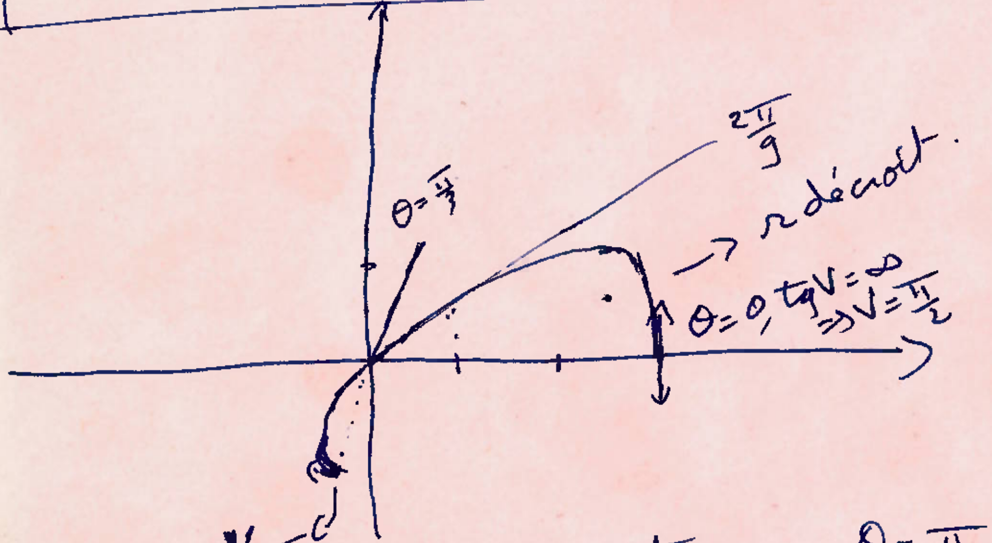
Donc $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{9}}$.

En ce point $\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{0}{-6\sin\left(3 \times \frac{2\pi}{9}\right)} = \frac{0}{-6(\neq 0)} = 0$

Allez je vais faire ce que je fais sur mon brouillon (ou au tableau). ②

L'étude des fonctions donne :

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$
r	3	$1+\sqrt{2}$	1	0	-1
r'	0	$-$	$-$	$-$	-0
$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$	∞			0	∞



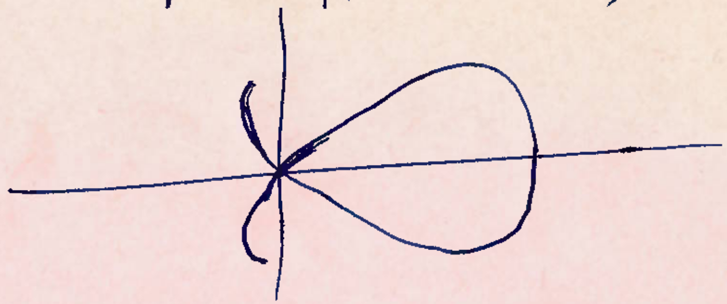
J'ai besoin du vecteur vitesse en $\theta=\frac{\pi}{3}$

On : $\vec{v} = \underbrace{-6\sin 3\theta}_{r'}\,\vec{u}_r + \underbrace{(1+2\cos(3\theta))}_{r}\,\underbrace{e_\theta}_{\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}}$

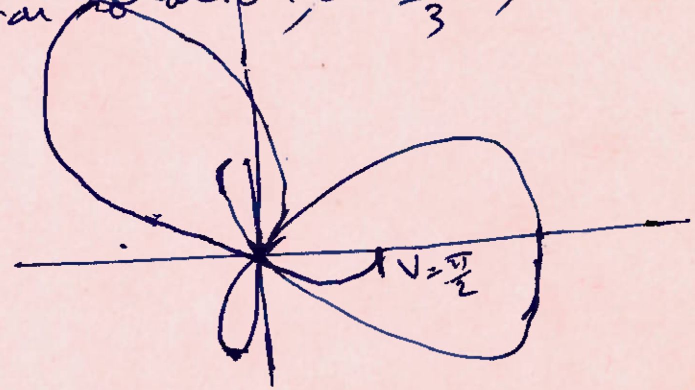
Donc : $\vec{v}\,/\,\theta=\frac{\pi}{3}) = \phi\,\vec{u}_r - \cancel{e_\theta}$.

et $\operatorname{tg} V\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) = \infty$.

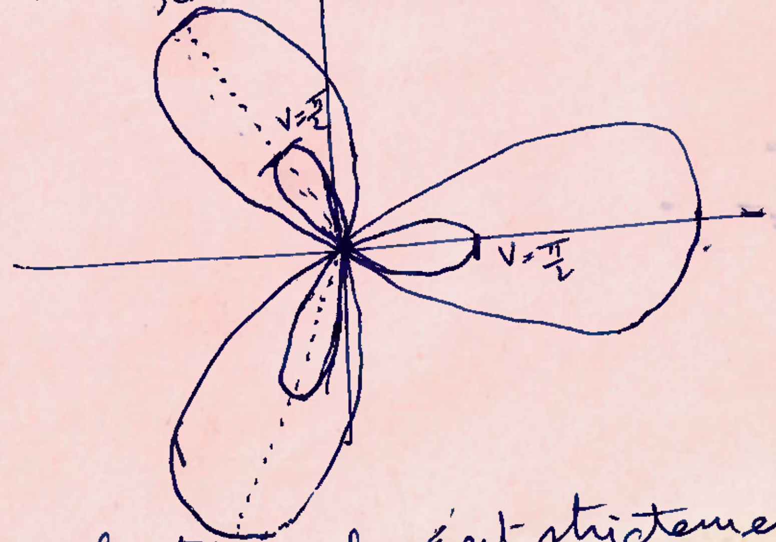
Par symétrie par rapport à Ox, on a :



Puis par rotation de $\frac{2\pi}{3}$, on a :



Puis :



Prouver que la petite boucle est strictement dans la grande ? Qu'elle est strictement (la dernière) dans le second quadrant $(x<0, y>0)$?