Feuille 5 Exercice n°1

$\gamma(t) = (a(3\cos t - \cos 3t), a(3\sin t - \sin 3t))$
(on prend $a = 1$)

1) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Il est 2π périodique.

$\gamma(t+\pi) = -\gamma(t)$.

$\gamma(\pi - t) = [-a(3\cos t - \cos(3t)), +a(3\sin t - \sin 3t)]$

$= S/O_y(\gamma(t))$.

On peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Puis on applique S/O_y et on a le comportement sur $[0, \pi]$. Puis on applique la symétrie par rapport à l'origine et on a le comportement sur $[0, 2\pi]$ et donc $\mathbb{R}$.

$x'(t) = -3\sin t + 3\sin 3t$

Or, $\frac{(e^{it} - e^{-it})^3}{(2i)^3} = \sin^3 t = \frac{e^{3it} - 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} - e^{-3it}}{(2i)^3}$

$= \frac{(e^{3it} - e^{-3it}) - 3(e^{it} - e^{-it})}{-4(2i)}$

$= \frac{\sin 3t}{4} + \frac{3\sin t}{4}$

Donc en fait :

$x'(t) = -3\sin t + 3(-4\sin^3 t + 3\sin t)$

$= +6\sin t - 12\sin^3 t$

$= 6\sin t(1 - 2\sin^2 t)$

$= 6\sin t(\cos 2t)$

Bref on a le signe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

De même :

$y'(t) = 3\cos t - 3\cos(3t)$

Or, $\frac{(e^{it} + e^{-it})^3}{(2)^3} = \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{+4(2)}$

$= \frac{\cos 3t + 3\cos t}{+4} = \cos^3 t$.

~~$\Rightarrow \cos 3t =$~~

Donc :

$y'(t) = 3\cos t - 3(+4\cos^3 t - 3\cos t)$

$= 12\cos t - 12\cos^3 t$

$= 12\cos t(1 - \cos^2 t)$

$= 12\cos t\sin^2 t$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$+$	0	$-$	
x	2	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$	↘	0
y	0	↗	$\sqrt{2}$	↗	4

Quels sont les vecteurs vitesse ?

en $t=0$: $\dot\gamma(0) = (0,0)$.

Par quel est son comportement au voisinage de 0 (cf courbe à droite).

$$\dot\gamma(t) = \left(6\left(t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)\right)\left(1 - \frac{(2t)^2}{4} + O(t^4)\right),\right.$$
$$\left. 12\left(1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)\right)t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + O(t^4)\right)^2\right)$$

$$= \left(6\left(t - \frac{t^3}{6} - t + t^2 + O(t^3)\right),\right.$$
$$\left. 12t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} - \frac{2t^2}{6} + O(t^2)\right)\right)$$

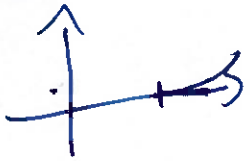
$$= 6\left(t + O(t^3),\ 2t^2(1 + O(t^2))\right)$$

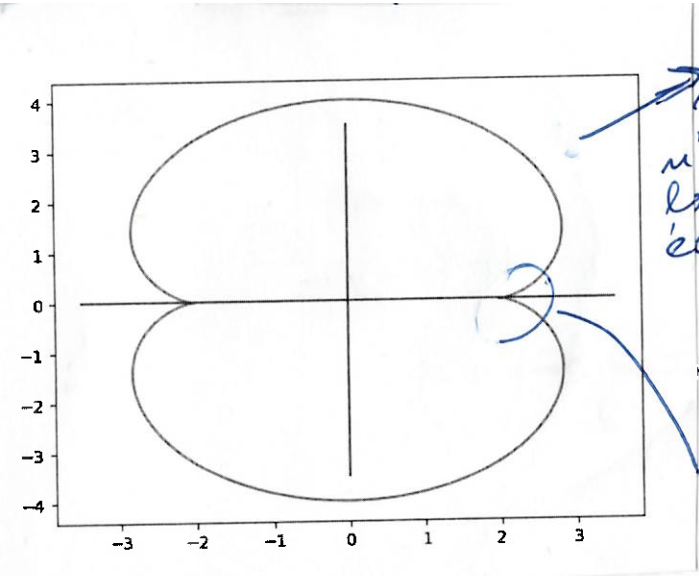
Donc $\dot\gamma(t) \sim 6t(1,0)$

et $\dot\gamma(t) - 6t(1,0) \sim (0, 12t^2)$

Le vecteur vitesse est nul, mais pour $t \sim 0$, il est colinéaire à $(1,0)$. L'accélération est verticale ascendante.

en $t = \frac{\pi}{2}$: $\dot\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-6, 0)$





les 2 axes n'ont pas la même échelle

3) La longueur de γ sur $[0, 2\pi]$ est $\int_0^{2\pi} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot\gamma(t)\|\,dt$

alors que mon calcul pour t : la tangente est horizontale.

On : $\|\dot\gamma(t)\|^2 = 36\sin^2 t\cos^2 2t + 144\cos^2 t\sin^4 t$

$= 36\sin^2 t\left(1 - 4\sin^2 t + 4\sin^4 t + 4\sin^2 t\cos^2 t\right)$

$= 36\sin^2 t\left(1 - 4\sin^2 t + 4\sin^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\right)$

$= 36\sin^2 t\left(1 - 4\sin^2 t + 4\sin^2 t\right) = 36\sin^2 t.$

Donc la longueur demandée est :

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\,|\sin t|\,dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 24\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 24 \times 1.$

La trigo s'arrangera bien pour vous aussi !

Ayez confiance (en nous) : on ne vous veut aucun mal. Donc si c'est trop dur, vérifiez