MONODROMIE ALGÉBRIQUE DES GROUPES D'ARTIN DIÉDRAUX

par Ivan Marin

Résumé. — En vue d'étudier la théorie des représentations d'un groupe d'Artin diédral B, nous construisons des morphismes rationnels de B vers les inversibles de l'algèbre des tresses infinitésimales associée. Pour ce faire, nous construisons des analogues aux associateurs de Drinfeld en rang 2 pour toutes les symétries diédrales du plan.

Abstract. — Towards the study of the representation theory of any dihedral Artin group B, we build rational morphisms from B to the group of invertible elements of the associated infinitesimal braids algebra. For this we build analogons of Drinfeld associators, in rank 2 for arbitrary dihedral symmetries of the plane.

0. Introduction

Soit W un groupe de Coxeter fini, et B le groupe de tresses généralisé ou groupe d'Artin associé. Une présentation de B est déduite de la présentation de Coxeter de W en n'imposant pas aux générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ d'être involutifs. On a donc toujours une projection naturelle $\pi : B \to W$, dont le noyau P est un sous-groupe caractéristique de B

28 août 2004

Ivan Marin, 69 rue Sébastien Gryphe, 69007 Lyon
E-mail : `marin@maths.univ-evry.fr`
Url : `http://www.maths.univ-evry.fr/pages_perso/~marin`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20F36, 14F35, 20C08.
Mots clefs. — Groupes d'Artin, monodromie, associateurs, représentations.

(cf. [CoP]) appelé groupe des tresses pures associé à W. Cette définition algébrique de B et P est essentiellement dûe à Tits. Dans le cas où W est de type A_n, le groupe d'Artin associé à W est le groupe de tresses classique sur $n+1$ brins. Ces groupes naturellement associés aux groupes de Coxeter finis sont infinis de type fini, sans torsion et linéaires [Di]. Le lien de B avec W semble suffisamment rigide pour que l'on puisse espérer esquisser une théorie des représentations de B en lien avec celle de W.

Une définition topologique de B et P, essentiellement dûe à Brieskorn, provient de la description de W comme groupe de réflexions de $\mathbb{R}^n$. Si l'on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans noyaux des réflexions de W, et $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ son complexifié dans $\mathbb{C}^n$, P s'identifie au groupe fondamental de $X = \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, et B au groupe fondamental du quotient de X par l'action naturelle de W.

Cet espace X est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'un arrangement central d'hyperplans et un $K(P,1)$. Soit $\mathfrak{g}_X$ son algèbre de Lie (graduée) d'holonomie. Elle admet une présentation simple sur $\mathbb{Z}$ par générateurs et relations, avec un générateur t_H (de degré 1) par élément H de $\mathcal{H}$, et des relations quadratiques. Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0, et $\Bbbk_h = \Bbbk((h))$ le corps des séries de Laurent sur $\Bbbk$. On note $\mathfrak{g}_X[\Bbbk] = \mathfrak{g}_X \otimes \Bbbk$. L'action de W sur X induit une action de W sur $\mathfrak{g}_X$, et on a une 1-forme canonique Ω sur X à valeurs dans $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X[\Bbbk]$ qui est W-invariante. On note $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X(\Bbbk)$ la complétion de $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X[\Bbbk]$ par rapport à sa graduation naturelle et $\mathfrak{B}[\Bbbk] = \Bbbk W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}_X[\Bbbk]$, $\mathfrak{B}(\Bbbk) = \Bbbk W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}_X(\Bbbk)$. Pour $\Bbbk = \mathbb{C}$ les intégrales itérées de Chen permettent d'associer à chaque choix d'un point-base z de X un morphisme $\int_z : B \to \mathfrak{B}(\mathbb{C})$.

L'intérêt de ces morphismes en termes de théorie des représentations (en dimension finie et en caractéristique 0) est le suivant. A toute représentation $\check{\rho} : W \to GL_N(\mathbb{C})$ de W on peut associer une variété algébrique $\mathcal{V}(\check{\rho}) = \{\rho : \mathfrak{B}[\mathbb{C}] \to M_N(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Res}_W \rho = \check{\rho}\}$ et à tout $\rho \in \mathcal{V}(\check{\rho})$ une représentation $\rho_h : \mathfrak{B}(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C}_h)$ avec $\Bbbk_h = \Bbbk((h))$, donc une représentation $\int_z \circ \rho_h : B \to GL_N(\mathbb{C}_h)$ de B. En particulier, chacune des variétés $\mathcal{V}(\check{\rho})$ contient une famille à un paramètre naturelle qui permet d'obtenir les représentations de l'algèbre d'Iwahori-Hecke générique associée à W. D'autre part, toute représentation irréductible de $\mathfrak{B}[\mathbb{C}]$ donne lieu à une représentation irréductible de B sur $\mathbb{C}_h$.

Enfin, ces représentations sont universellement convergentes en h, et les réprésentations irréductibles obtenues sur $\mathbb{C}_h$ restent irréductibles après spécialisation en $h \in \mathbb{C}$ pour tout h en dehors d'un ensemble localement fini de complexes. Comme ces opérations sont compatibles au coproduit naturel de $\mathbb{C}B$ et de $\mathfrak{B}[\mathbb{C}]$ cela permet notamment d'introduire des structures naturelle qui reflètent « infinitésimalement » les algèbres d'Iwahori-Hecke, ou encore de démontrer des résultats d'irréductibilité des produits tensoriels de représentations de B (cf. [Ma2, Ma3]).

Cependant cette construction de monodromie transcendante, également utilisée dans [BMR] pour la construction d'algèbres de Hecke cyclotomiques, est entachée de plusieurs défauts. Outre la non-canonicité du choix d'un point-base dans un espace non contractile, ni même simplement connexe, elle ne permet pas de rendre compte de l'apparition fréquente de structures unitaires sur les représentations de B, et ne garde pas trace du corps de définition de la représentation infinitésimale ρ. En particulier, il serait utile d'avoir, pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0, des morphismes (injectifs) d'algèbres de Hopf $\widetilde{\Phi} : \Bbbk B \to \mathfrak{B}(\Bbbk)$ tels que, posant $\pi(\sigma_i) = s_i$, $H_i = \mathrm{Ker}\,(s_i - 1)$ et $\mathrm{t}_i = \mathrm{t}_{H_i}$, $\widetilde{\Phi}$ vérifie la

Condition fondamentale : Pour tout $i \in [1, n]$, il existe $\lambda \in \Bbbk^{\times}$ tel que $\widetilde{\Phi}(\sigma_i)$ est conjugué à $s_i \exp \lambda \mathrm{t}_i$ par un élément grouplike de $\mathsf{U}\mathfrak{g}(\Bbbk)$.

Sous cette hypothèse, les raisonnements de [Ma1] s'adaptent immédiatement et montrent entre autres que la correspondance $\widehat{\Phi}$ entre représentations de $\mathfrak{B}[\Bbbk]$ sur $\Bbbk$ et représentations de B sur $\Bbbk_h$ naturellement associé à $\widetilde{\Phi}$ est un foncteur qui préserve toutes les propriétés essentielles de théorie des représentations. En particulier, on a une notion de représentations formellement unitaires de B sur $GL_N(\mathbb{R}_h)$ qui permettent d'obtenir, après torsion du corps des coefficients et spécialisation en h imaginaire pur proche de 0 des représentations unitaires de B. On a également une notion simple de représentations infinitésimalement unitaires $\rho : \mathfrak{B}[\mathbb{R}] \to M_N(\mathbb{R})$, définie par $\rho(s) \in O_N(\mathbb{R})$ si $s \in W$ et $\rho(\mathrm{t}_H)$ symétrique, telle que, si ρ est infinitésimalement unitaire, $\widehat{\Phi}(\rho)$ est formellement unitaire. L'existence de tels morphismes permettrait notamment de montrer qu'il existe sur les représentations des algèbres de Hecke une structure unitaire directement issue des représentations orthogonales de W. D'autre part, l'exemple du type A montre que les structures unitaires connues sur les représentations de B ont toutes une interprétation simple au niveau infinitésimal.

On peut construire de tels morphismes pour le type A à l'aide des associateurs rationnels dont Drinfeld établit l'existence dans [Dr]. L'idée générale de la démonstration de Drinfeld est la suivante. A partir d'un choix de point-bases tangentiels de X on peut construire un morphisme

$\widetilde{\Phi} : B \to \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, qui vérifie bien la propriété voulue pour $\lambda = \mathrm{i}\pi$. On introduit alors le groupe des automorphismes Γ de B tels que $\widetilde{\Phi} \circ \Gamma$ vérifie encore la condition fondamentale. Malheureusement ce groupe discret est trop petit pour que $\widetilde{\Phi} \circ \Gamma$ puisse être défini sur $\mathbb{Q}$. Pour pallier à cette difficulté, on montre que $\widetilde{\Phi}$ s'étend en un morphisme $B(\mathbb{C}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{C})$, où $B(\Bbbk)$ désigne l'ensemble des $\Bbbk$-points d'un schéma en groupe naturellement relié à la complétion $\Bbbk$-pro-unipotente de P, qui contient B. On introduit alors un sous-groupe $G(\Bbbk)$ des automorphismes de $B(\Bbbk)$, qui agit librement et transitivement sur l'ensemble de ces automorphismes. D'un autre côté, les scalaires $\lambda \in \Bbbk^{\times}$ agissent sur $\mathfrak{B}(\Bbbk)$ par $\mathrm{t}_H \mapsto \lambda \mathrm{t}_H$, donc sur l'ensemble des morphismes considérés. On en déduit qu'à tout $\widetilde{\Phi}$ on peut associer un sous-groupe à un paramètre de $G(\Bbbk)$, donc un élément non trivial de son algèbre de Lie $\mathcal{G}(\Bbbk)$. Si le groupe $G(\Bbbk)$ est choisi suffisamment petit, un tel élément détermine inversement un unique morphisme $\widetilde{\Phi}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{G}(\Bbbk)$ contient des éléments non triviaux, et cela découle alors du fait que c'est le cas de $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ à cause de l'existence d'un morphisme sur $\mathbb{C}$.

C'est cette démonstration que nous adaptons ici pour montrer l'existence d'un morphisme $\widetilde{\Phi}$ défini sur $\mathbb{Q}$ pour les groupes diédraux, correspondant au type $I_2(m)$. Pour $m = 3$ il s'agit donc d'une reformulation de la démonstration de Drinfeld, à ceci près que nous ne prenons pas en compte l'équation dite du pentagone, qui n'a pas de sens en rang 2. Le groupe $G(\Bbbk)$ pour $m = 3$ est donc ici plus gros que le groupe de Grothendieck-Teichmüller considéré dans [Dr]. Pour m impair c'est un groupe naturellement associé au groupe d'Artin B, et la démonstration de Drinfeld s'adapte parfaitement. Si m est pair il faut se restreindre à un sous-groupe de $G(\Bbbk)$, formé des morphismes compatibles avec l'automorphisme non trivial du diagramme de Coxeter correspondant à W pour que le raisonnement ci-dessus s'applique. Cette distinction entre les cas m pair et impair recouvre les différences de théorie des représentations de W entre ces deux cas.

Le résultat principal de cet article peut donc s'énoncer comme suit

Théorème. — *Si W est de type $I_2(m)$, pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0 il existe un morphisme $\widetilde{\Phi} : \Bbbk B \to \mathfrak{B}(\Bbbk)$ qui vérifie la condition fondamentale.*

Dans [En], B. Enriquez montre l'existence de morphismes en type B_n qui vérifient la condition fondamentale. De tels morphismes existent donc au moins en type A_n, B_n, et $I_2(m)$. Dans l'appendice 3 nous éclaircissons le lien entre les notations d'Enriquez et les nôtres.

Une différence notable avec l'approche par intégrales itérées et point-base est que les morphismes associés, sur un corps $\mathbb{k} \subset \mathbb{R}$, ne sont jamais universellement convergents. En effet, si l'un d'entre eux l'était toute représentation de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ infinitésimalement unitaire donnerait lieu à des représentations de B unitarisables pour toute spécialisation imaginaire pure de h. En particulier, les représentations de l'algèbre de Hecke $H(q)$ associée à W seraient unitarisables pour toute valeur de q de module 1. Comme pour le groupe de tresses habituel (W de type A_n), nous montrons en section 1.3 que ce n'est pas le cas. Inversement, cela suggère que d'éventuelles propriétés de convergence de ces morphismes sont reliées à des propriétés de théorie de représentation des groupes d'Artin.

Conventions générales. Parmi les actions à gauches que nous considérerons, la notation $g \bullet A$ désignera toujours implicitement la conjugaison par g : $g \bullet A = gAg^{-1}$. Comme l'action de $g \in W$ sur $A \in \mathcal{A}(\mathbb{k})$ (définie en 1.2)s'identifie à la conjugaison de A par g dans $\mathfrak{B}(\mathbb{k})$ on utilisera également cette notation dans ce cadre. On convient d'autre part $g \bullet xy = g \bullet (xy)$ et $gg' \bullet x = (gg') \bullet x$ pour alléger les notations.

Si $(a_i)_{r \leq i \leq s}$ est une famille d'éléments d'un monoïde, on utilisera les notations

$$\prod_{i=r}^{s} a_i = a_r a_{r+1} \dots a_s, \quad \prod_{i=s}^{r} a_i = a_s a_{s-1} \dots a_r$$

Dans ce qui suit, $\mathbb{k}$ désignera un corps quelconque de caractéristique 0, et $\mathbb{k}^\times$ le groupe de ses éléments non nuls. Si A est une $\mathbb{k}$-algèbre, toujours supposée unifère, on désignera par A^* le groupe de ses éléments inversibles. Si A est une $\mathbb{k}$-algèbre de Hopf, toujours supposée avec antipode, on désignera par $A^\times$ le groupe de ses éléments grouplike.

1. Généralités

1.1. Définitions. — Soit $m \geq 3$, W le groupe diédral d'ordre $2m$, c'est-à-dire le groupe de réflexions de type de Coxeter $I_2(m)$. On note $\theta = \pi/m$ et $c = 2\cos(\theta)$. Deux présentations classiques de W sont données par $< s, \omega \mid s^2 = \omega^m = 1, s\omega = \omega^{-1}s >$ et $< s, s' \mid s^2 = (s')^2 = 1, (s's)^m = 1 >$, le passage entre les deux étant donné par les formules $\omega = s's$, $s' = \omega s$. Les réflexions de W sont les éléments de la forme $s\omega^r$ pour $0 \leq r \leq m-1$.

On définit le groupe d'Artin (ou groupe de tresses généralisé) B associé à W par la présentation

$$< \sigma, \tau \mid O = \underbrace{\sigma\tau\sigma\dots}_{m \text{ facteurs}} = \underbrace{\tau\sigma\tau\dots}_{m \text{ facteurs}} >$$

On a un morphisme $\pi : B \to W$ défini par $\sigma \mapsto s$, $\tau \mapsto s'$, dont le noyau P est appelé groupe de tresses pures associé à W. Le centre de B est cyclique infini, engendré par $O^2 \in P$ si m est impair et par $O \notin P$ si m est pair. La différence essentielle entre les cas pair et impair au niveau de W tient à ce que, d'une part le centre de W est cyclique d'ordre 2 engendré par $\omega^{\frac{m}{2}}$ si m est pair, alors qu'il est trivial si m est impair ; d'autre part que W admet deux classes de conjugaison de réflexions dans le cas pair, une seule dans le cas impair.

Le groupe $Out(B)$ a été déterminé dans [GHMR] (voir également [CrP]). Si m est impair il est cyclique d'ordre 2, engendré par l'automorphisme $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, $\tau \mapsto \tau^{-1}$ (automorphisme « image miroir de la tresse »), qui est compatible à la projection $\pi : B \to W$. Si m est pair au contraire ce groupe est infini, engendré par l'automorphisme image miroir, un automorphisme d'ordre infini $\sigma \mapsto \tau^{-1}$, $\tau \mapsto \tau\sigma\tau$, et l'automorphisme involutif du diagramme de Coxeter $J : \sigma \mapsto \tau$, $\tau \mapsto \sigma$. Lorsque m est impair on peut encore définir J, mais il est alors intérieur : il s'agit de la conjugaison par O. Les deux générateurs supplémentaires de $Out(B)$ dans le cas pair relèvent les automorphismes de W définis par $s \mapsto \omega s$, $\omega \mapsto \omega$ et $s \mapsto \omega s$, $\omega \mapsto \omega^{-1}$. Dans le cas impair ces automorphismes sont également intérieurs, conjugaisons par $\omega^{\frac{m+1}{2}}$ et $s\omega^{\frac{m-1}{2}}$ respectivement.

Tous les automorphismes de B relèvent donc un automorphisme de W, et en particulier P est un sous-groupe caractéristique de B pour toute valeur de m (il est stable par tout automorphisme).

1.2. Algèbre des tresses infinitésimales. — Soit $m \geq 3$. On pose $\theta = \pi/m$, $\theta_r = r\theta$ et $v_r = (\cos\theta_r, \sin\theta_r)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Soit $\alpha_r \in (\mathbb{R}^2)^*$ la forme linéaire définie par $\alpha_r(v) = \det(v_r, v)$, $\Delta_r = \operatorname{Ker}\alpha_r \subset \mathbb{R}^2$. Elle s'étend en une forme linéaire sur $\mathbb{C}^2$ encore notée α_r dont le noyau est l'hyperplan $H_r \subset \mathbb{C}^2$. Pour toute $\Bbbk$-algèbre (de Lie) $\mathcal{A}$ avec $\Bbbk \subset \mathbb{C}$ et $\mathrm{t}_0, \dots, \mathrm{t}_{m-1} \in \mathcal{A}$, on peut définir la 1-forme différentielle sur $X =$

$\mathbb{C}^2 \setminus H_0 \cup \cdots \cup H_{m-1}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ suivante

$$\Omega = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{t}_k \frac{\mathrm{d}\alpha_k}{\alpha_k}.$$

On vérifie immédiatement que Ω est intégrable si et seulement si $\mathrm{t}_0 + \cdots + \mathrm{t}_{m-1}$ commute à chacun des t_r. L'algèbre de Lie d'holonomie $\mathfrak{g}$ de X, ou algèbre de Lie des tresses infinitésimales pures associée à W, est définie sur $\mathbb{Q}$ par générateurs $\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_{m-1}$ et relation $T = \mathrm{t}_0 + \cdots + \mathrm{t}_{m-1}$ central. On note $\mathfrak{g}'$ le quotient de $\mathfrak{g}$ par son centre $\mathbb{Q}T$, et t_i l'image de t_i dans $\mathfrak{g}'$. Elle s'identifie à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ par $t_i \mapsto \mathrm{t}_i - \frac{T}{m}$. Pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0 on note $\mathfrak{g}[\Bbbk] = \mathfrak{g} \otimes \Bbbk$, $\mathfrak{g}'[\Bbbk] = \mathfrak{g}' \otimes \Bbbk$, $\mathsf{U}\mathfrak{g}[\Bbbk] = \mathsf{U}\mathfrak{g} \otimes \Bbbk$, $\mathsf{U}\mathfrak{g}'[\Bbbk] = \mathsf{U}\mathfrak{g}' \otimes \Bbbk$. Les algèbres de Lie $\mathfrak{g}[\Bbbk]$ et $\mathfrak{g}'[\Bbbk]$ ainsi que leurs algèbres enveloppantes sont naturellement graduées par $\deg t_i = \deg \mathrm{t}_i = 1$. On note $\mathfrak{g}(\Bbbk)$, $\mathfrak{g}'(\Bbbk)$, $\mathcal{A}(\Bbbk)$ et $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ leur complétion respectivement à cette graduation. On notera éventuellement $\mathrm{t}_{H_i} = \mathrm{t}_i$.

Le groupe W agit sur X par la représentation de réflexion, s agissant par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ω par la rotation d'angle 2θ, et sur $\mathcal{A}(\Bbbk)$ par $s.\mathrm{t}_r = \mathrm{t}_{-r}$, $\omega.\mathrm{t}_r = \mathrm{t}_{r+2}$, où l'addition est définie modulo m ($\mathrm{t}_{r+m} = \mathrm{t}_r$). La 1-forme Ω à valeurs dans $\mathcal{A}(\Bbbk)$ est équivariante pour ces actions, donc peut être considérée comme une 1-forme sur X/W. On a $P = \pi_1(X)$, $B = \pi_1(X/W)$.

L'action de W sur $\mathcal{A}(\Bbbk)$ est héritée de l'action par conjugaison $g \bullet x = gxg^{-1}$ de W sur l'ensemble de ses réflexions, l'hyperplan H_r étant stable pour la réflexion $s\omega^r$, et $\omega \bullet (\omega^r s) = \omega^{r+2} s$, $s \bullet (\omega^r s) = \omega^{-r} s$. On note $\mathfrak{B}[\Bbbk] = \Bbbk W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}[\Bbbk]$ le produit semi-direct d'algèbres de Hopf correspondant, que l'on appelle algèbre (de Hopf) des tresses infinitésimales associée à W, et on note $\mathfrak{B}(\Bbbk) = \Bbbk W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}(\Bbbk)$ sa complétion par rapport à la graduation $\deg(\mathrm{t}_i) = 1$, $\deg(g) = 0$ si $g \in W$. De façon similaire, on note $\mathfrak{B}'[\Bbbk] = \Bbbk W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}'[\Bbbk]$ le quotient de $\mathfrak{B}[\Bbbk]$ par la relation $T = 0$ et $\mathfrak{B}'(\Bbbk)$ sa complétion.

1.3. Représentations de *W*. — Un des modèles matriciels de la représentation de réflexion de W (ou de sa contragrédiente suivant la convention choisie) est donné par

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(s') = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, de façon générale, les représentations de W sont définies sur $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\cos\theta) \subset \mathbb{R}$. De plus, elles peuvent être définies par des matrices orthogonales sur $\mathbb{k}$. Chacune de ces représentations $\rho : W \to GL_N(\mathbb{k})$ peut être étendue à $\mathfrak{B}[\mathbb{k}]$ par $\rho(\mathrm{t}_H) = \rho(s_H)$, où $s_H \in W$ désigne la réflexion autour de l'hyperplan H. Ces représentations et en particulier l'image par ρ de $\mathfrak{g}[\mathbb{k}]$ ont été étudiées dans [Ma2, Ma3]. On en déduit comme dans [Ma1] que, une fois construit un morphisme $\widetilde{\Phi}$ vérifiant la condition fondamentale de l'introduction, on peut associer à chacune de ces représentations ρ une représentation $\widehat{\Phi}(\rho) : B \to U_N^{\epsilon}(\mathbb{k})$ où $U_N^{\epsilon}(\mathbb{k}) \subset GL_N(\mathbb{k}_h)$ désigne le groupe unitaire formel associée à l'automorphisme topologique de $\mathbb{k}_h$ défini par $h \mapsto -h$. Si un tel morphisme était universellement convergent, par spécialisation en tout h imaginaire pur on obtiendrait des représentations unitaires de B. Ces représentations vérifient que l'image de σ est semisimple et a pour spectre $\{e^{\lambda h}, -e^{-\lambda h}\}$. On en déduit que, quitte à multiplier l'image des générateurs par $v = e^{\lambda h}$, ces représentations se factorisent par l'algèbre de Hecke associée au paramètre v^2. De plus, si ρ est irréductible, ces représentations spécialisées en h sont irréductibles pour toute valeur h en dehors d'un ensemble localement fini de complexes.

L'algèbre de Hecke associée au paramètre $u = v^2$ est le quotient de $\mathbb{C}B$ par les relations $(\sigma+1)(\sigma-u) = 0$, $(\tau+1)(\tau-u) = 0$. Posons $d_j = 2\cos j\frac{\pi}{m}$. Alors (cf. [GP] lemme 8.1.10, et th. 8.3.1) les représentations irréductibles de dimension 2 de cette algèbre de Hecke sont toutes de la forme ρ_j, pour $1 \leq j \leq \frac{m-1}{2}$, avec

$$\rho_j(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ vd_j & v^2 \end{pmatrix} \quad \rho_j(\tau) = \begin{pmatrix} v^2 & vd_j \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fixons j, et soit a (resp. b) le projecteur sur l'espace propre de $\rho_j(\sigma)$ (resp. $\rho_j(\tau)$) correspondant à la valeur propre -1 parallèlement à l'autre espace propre. Si ρ_j est unitarisable en tant que représentation de B, cela implique que a et b sont autoadjoints positifs, donc qu'il en est de même de aba. Mais le spectre de aba est composé de 0 et de $d_j^2/(1+2\cos\alpha)$, si $u = \exp \mathrm{i}\alpha$. Cela n'est donc possible que si $\cos\alpha > -1/2$. (Cet argument est emprunté à [We], prop. 2.9.) En particulier, il ne peut pas exister de morphisme $\widetilde{\Phi}$ universellement convergent défini sur $\mathbb{R}$.

1.4. Complétions de P et de B. — Comme B est une extension de W par P, B est naturellement isomorphe à $B \ltimes P/\mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ est le sous-groupe de $B \ltimes P$ engendré par les éléments de la forme $x.x^{-1}$ pour

$x \in P$. Puisque P est une extension centrale d'un groupe libre par $\mathbb{Z}$, il est résiduellement nilpotent sans torsion, c'est-à-dire que P se plonge dans sa complétion $\Bbbk$-prounipotente $P(\Bbbk)$ (cf. [Bo] II §6 ex. 4 p.91 et [De] p. 175-178). L'action par conjugaison de B sur P s'étend en une action de B sur $P(\Bbbk)$ et B se plonge dans $B(\Bbbk) = B \ltimes P(\Bbbk)/\mathcal{Q}$. On en déduit une surjection naturelle $\pi : B(\Bbbk) \to W$ de noyau $P(\Bbbk)$.

Soit $P_r = P/C^r P$ où $C^r P$ est le r-ième terme de la suite centrale descendante de P. Le groupe P_r est nilpotent sans torsion, donc $P_r = \exp L_r$ où L_r est une $\mathbb{Z}$-algèbre de Lie nilpotente. On a alors $P_r(\Bbbk) = \exp L_r \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk$ et $P(\Bbbk)$ est la limite projective des $P_r(\Bbbk)$. C'est un $\Bbbk$-schéma en groupe affine ($\Bbbk$-groupe) pro-unipotent. Nous renvoyons à [DG] pour les résultats élémentaires sur ces objets. Si l'on désigne par $L(\Bbbk)$ la limite projective des $L_r(\Bbbk)$, alors $P(\Bbbk) = \exp L(\Bbbk)$. On peut alors définir, pour tous $X \in P(\Bbbk)$, $\lambda \in \Bbbk$, $X^\lambda = \exp \lambda x$, si $x = \log X \in L(\Bbbk)$.

Si Γ est un automorphisme continu de $\Bbbk$-groupe de $P(\Bbbk)$, on a alors $\Gamma(X^\lambda) = \Gamma(\exp(\lambda x)) = \exp(\lambda \Gamma(x)) = \Gamma(X)^\lambda$, où $X = e^x$, $x \in L(\Bbbk)$ et $\lambda \in \Bbbk$.

De même, $B(\Bbbk)$ est canoniquement muni d'une structure de $\Bbbk$-groupe. Soit Γ un automorphisme de $B(\Bbbk)$. On dit que Γ est *pur* si $\pi \circ \Gamma = \pi$. Il se restreint alors en un automorphisme continu de $P(\Bbbk)$. Soit $g \in B(\Bbbk)$ tel que $\pi(g)$ est d'ordre 2 (par exemple si $\pi(g)$ est une réflexion), et $\lambda \in \Bbbk$. On définit $g^{<\lambda>} = g(g^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}$. On a $(g^{<\lambda>})^{<\mu>} = g^{<\lambda\mu>}$. Si Γ est pur alors $\pi(\Gamma(g)) = \pi(g)$ et $\Gamma(g)^{<\lambda>} = \Gamma(g^{<\lambda>})$. On montre alors aisément que $\Gamma(g^{<\lambda>})^{<\mu>} = \Gamma(g)^{<\lambda\mu>} = \Gamma(g^{<\lambda\mu>})$ pour tous $\lambda, \mu \in \Bbbk$.

Supposons donné un morphisme $\Gamma : B \to B(\Bbbk)$ tel que $\Gamma(\sigma) = G^{-1}\sigma^{<\lambda>}G$, $\Gamma(\tau) = F^{-1}\tau^{<\mu>}F$ avec $F, G \in P(\Bbbk)$ et $\lambda, \mu \in \Bbbk$. Il s'étend suivant les inclusions naturelles $L_r \hookrightarrow L_r \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk$ en un automorphisme de $\Bbbk$-groupe de $B(\Bbbk)$ encore noté Γ tel que $\pi \circ \Gamma = \pi$.

Le centre de P est engendré par $Z = (\sigma\tau)^m = (\tau\sigma)^m$, et P lui-même est engendré par $u_0, \ldots, u_{m-1}$ où l'on a défini

$$u_0 = \sigma^2, u_1 = \tau^2, u_{2r} = (\tau\sigma)^r \bullet \sigma^2, u_{2r+1} = (\tau\sigma)^r \bullet \tau^2.$$

On a $u_{m-1} \ldots u_1 u_0 = (\sigma\tau)^m = Z$ et, à partir de la description géométrique de P comme groupe fondamental on montre qu'une présentation de P est

$$< u_0, \ldots, u_{m-1}, Z \mid u_{m-1} \ldots u_1 u_0 = Z, (Z, u_i) = 1 >$$

où $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$. On en déduit que $L(\mathbb{Q})$ est topologiquement engendrée par des générateurs $v_0, \ldots, v_{m-1}, z$ avec $u_i = \exp v_i$, $Z =$

$\exp z$ et relations $v_0 + \cdots + v_{m-1} = z$, $[z, v_i] = 0$. D'autre part, on a un morphisme $P \to < Z >$ défini par $u_i \mapsto Z$, $Z \mapsto Z^m$ qui s'étend en un morphisme $P(\mathbb{Q}) \to \exp \mathbb{Q}z$ dont la différentielle $L(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}z$ est $v_i \mapsto z$, $z \mapsto mz$. Ceci permet de l'étendre en un morphisme $P(\Bbbk) \to \exp \Bbbk z$. Ce morphisme est scindé par $Z \mapsto Z^{\frac{1}{m}} = \exp(\frac{z}{m})$, ce qui permet de décomposer $P(\Bbbk)$ en un produit direct $P'(\Bbbk) \times \exp \Bbbk z$.

2. L'associateur transcendant

2.1. Réduction à une variable. — On rappelle que $\theta = \pi/m$, $\theta_r = r\theta$, $v_r = (\cos\theta_r, \sin\theta_r)$, $\alpha_r(v) = \det(v_r, v)$. On a $\operatorname{Ker}\alpha_r = \mathbb{R}v_r = \operatorname{Ker}\alpha_{r+m}$ où l'addition est modulo $2m$. Pour $0 \leq r \leq 2m-1$, on note $U_r = \mathbb{R}_+^* v_r + \mathbb{R}_+^* v_{r+1}$ le demi-cône ouvert engendré par v_r et v_{r+1}, $\Delta_r = \mathbb{R}v_r$, $\Delta = \bigcup_{r=0}^{m-1} \Delta_r$.

En coordonnées polaires, tout $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ s'écrit uniquement sous la forme $v = (\rho\cos u, \rho\sin u)$ avec $\rho > 0$, $u \in [0, 2\pi[$. On a alors $\alpha_r(v) = \rho\sin(u - \theta_r)$ et U_r s'identifie (analytiquement) à $\mathbb{R}_+^* \times V_r$, où $V_r =]\theta_r, \theta_{r+1}[$. On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{d}F = \Omega F, \quad \Omega = \sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{t}_r \frac{\mathrm{d}\alpha_r}{\alpha_r}. \tag{2-1}$$

Comme $\mathrm{d}\alpha_r = \sin(u - \theta_r)\mathrm{d}\rho + \rho\cos(u - \theta_r)\mathrm{d}u$, on a

$$\Omega = \sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{t}_r \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \operatorname{cotg}(u - \theta_r)\mathrm{d}u \right)$$

où $\operatorname{cotg} z = \cos z / \sin z$. On en déduit que (2-1) est équivalent à

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{T}{\rho} F \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \left(\sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{t}_r \operatorname{cotg}(u - \theta_r) \right) F \tag{2-2}$$

avec $T = \sum_{r=0}^{m-1} \mathrm{t}_r$. Il est donc équivalent de considérer le système à valeurs dans $\mathcal{A}'(\mathbb{R})$ donné par $\partial F / \partial \rho = 0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \left(\sum_{r=0}^{m-1} t_r \operatorname{cotg}(u - \theta_r) \right) F \tag{2-3}$$

Ainsi F est une fonction de u, et du fait que $\mathrm{cotg}(u) - 1/u$ est analytique en 0 on déduit (cf. appendice 1, lemmes 13 et 14) qu'il existe des solutions uniques de (2-3) sur V_r telles que

$$F_{r,+} \sim (u-\theta_r)^{t_r},\ u \to \theta_r^+, \quad F_{r+1,-} \sim (\theta_{r+1} - u)^{t_{r+1}},\ u \to \theta_{r+1}^-,$$

où l'on a posé $t_{r+m} = t_r$, qui sont à valeurs grouplike (cf. appendice 1, lemme 16).

On considère l'équation différentielle (2-3) pour u une variable complexe, c'est-à-dire d'abord $u \in \mathcal{B} = ([0, 2\pi[+\mathrm{i}\mathbb{R})\setminus\Theta$, où $\Theta = \frac{\pi}{m}\mathbb{Z}$. On note $D_r = \theta_r + \mathrm{i}\mathbb{R}_-$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \bigcup_{r=0}^{m-1} D_r$. Comme $\mathcal{B}'$ est simplement connexe, chacune des fonctions $F_{r,\pm}$ s'étend en une fonction analytique sur $\mathcal{B}'$. On en déduit (cf. appendice 1, lemme 15) que $F_{r,+} = F_{r,-}\exp(\mathrm{i}\pi t_r)$.

2.2. Équation du demi-tour. — L'équation (2-3) s'écrit $\mathrm{d}F = \Omega' F$, où $\Omega' = \sum_{r=0}^{m-1} t_r \mathrm{cotg}(u-\theta_r)\mathrm{d}u$ est une 1-forme sur $C = (\mathbb{C}\setminus\Theta)/\pi\mathbb{Z}$. Notons $\widehat{C} = C \cup \{\mathrm{i}\infty, -\mathrm{i}\infty\}$ le compactifié de C en $\mathrm{i}\infty$ et $-\mathrm{i}\infty$, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann, $\zeta = \exp(2\mathrm{i}\theta)$ et $\mu_m = \{\zeta^r \mid r \in \mathbb{Z}\}$. On a un isomorphisme $\widehat{C}\setminus\Theta \to \widehat{C}\setminus\mu_m$ donné par l'application $\varphi : u \mapsto \exp(2\mathrm{i}u)$, avec $\varphi(\mathrm{i}\infty) = 0$, $\varphi(-\mathrm{i}\infty) = \infty$. On a $\mathrm{cotg}(u) = (\varphi(u)+1)/(\varphi(u)-1)$, donc

$$\varphi_*\Omega' = \sum_{r=0}^{n-1} t_r \frac{z\zeta^{-r}+1}{z\zeta^{-r}-1}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{r=0}^{m-1} t_r \frac{z+\zeta^r}{z-\zeta^r}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{r=0}^{m-1} t_r \frac{2\zeta^r}{z-\zeta^r}\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

est une 1-forme sur $\mathbb{C}\setminus(\mu_m \cup \{0\})$. Comme $\sum_{r=0}^{m-1} t_r = 0$, on montre aisément que $\varphi_*\Omega'$ s'étend en une 1-forme fermée sur $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\mu_m$, donc que Ω' s'étend en une 1-forme fermée sur $\widehat{C}\setminus\Theta$. En particulier, le chemin emprunté pour prolonger analytiquement $F_{0,+}$ au voisinage de π^+ devient un lacet homotopiquement trivial de $\widehat{C}\setminus\Theta$, d'où $F_{0,+}(u) = F_{0,+}(u+\pi)$, donc $F_{0,+}(u) \sim (u-\pi)^{t_0}$ quand $u \to 0$ et $F_{0,+} = F_{m,+}$.

2.3. Action du groupe diédral. — On considère à nouveau l'équation (2-3), cette fois sur $Y = (\mathbb{R}\setminus\Theta)/\pi\mathbb{Z}$. On a une action naturelle du groupe diédral W sur $\mathbb{R}^2$, où s agit par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et ω par la rotation d'angle 2θ. Si $v = (\rho\cos u, \rho\sin u) \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, on a

$$\begin{aligned} s.v &= (\rho\cos(-u), \rho\sin(-u)) \\ \omega.v &= (\rho\cos(u+2\theta), \rho\sin(u+2\theta)) \end{aligned}$$

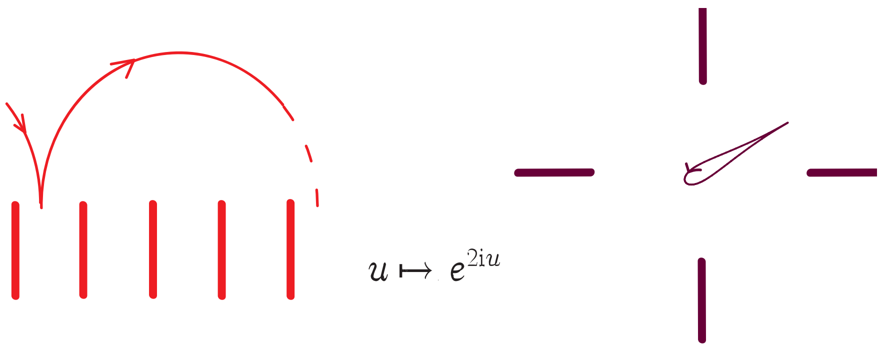

FIGURE 1. Trivialité homotopique du demi-tour

donc on en déduit une action de W sur Y, par $s.u = -u$, $\omega.u = u + 2\theta$. De l'action de W sur $\mathcal{A}'(\mathbb{R})$ on déduit une action de W sur le faisceau $\mathcal{F}$ des solutions de (2-3) sur Y. En effet, soit $\mathcal{G}$ le faisceau des fonctions analytiques sur Y. Si U est un ouvert de Y, $f \in \mathcal{G}(U)$ et $g \in W$ on note $g.f \in \mathcal{G}(g.U) : u \mapsto g.f(g^{-1}.u)$. Étendant cette action aux formes différentielles, on remarque que $g.\Omega' = \Omega'$ pour tout $g \in W$, donc si $f \in \mathcal{F}(U)$ on a $g.f \in \mathcal{F}(g.U)$. Par comparaison des comportements asymptotiques on en déduit $\omega \bullet F_{r,\pm} = F_{r+2,\pm}$ et $s \bullet F_{r,\pm} = F_{2m-r,\mp} = F_{-r,\mp}$.

Par le théorème de Cauchy sur V_0 et V_1, il existe $\Phi_0, \Phi_1 \in \mathcal{A}'(\mathbb{R})$ grouplike tels que $F_{1,-} = F_{0,+}\Phi_0$, $F_{2,-} = F_{1,+}\Phi_1$. On en déduit

$$F_{1,+} = F_{1,-} \exp(\mathrm{i}\pi t_1) = F_{0,+}\Phi_0 \exp(\mathrm{i}\pi t_1) \tag{2-4}$$

$$F_{2,+} = F_{2,-} \exp(\mathrm{i}\pi t_2) = F_{1,+}\Phi_1 \exp(\mathrm{i}\pi t_2) \tag{2-5}$$

Appliquant ω^r à ces deux égalités, on a

$$\begin{cases} F_{2r+1,+} = F_{2r,+}(\omega^r \bullet \Phi_0) \exp(\mathrm{i}\pi t_{2r+1}) \\ F_{2r+2,+} = F_{2r+1,+}(\omega^r \bullet \Phi_1) \exp(\mathrm{i}\pi t_{2r+2}) \end{cases} \tag{2-6}$$

Appliquant ωs à l'équation $F_{1,-} = F_{0,+}\Phi_0$ il vient $F_{1,+} = F_{2,-}(\omega s \bullet \Phi_0)$. Comme $F_{2,-} = F_{1,+}\Phi_1$ on obtient

$$\Phi_1^{-1} = \omega s \bullet \Phi_0 \tag{2-7}$$

On note $\mathrm{P}_0 = \Phi_0 \exp(\mathrm{i}\pi t_1)$, et

$$\xi = \Phi_0 \exp(\mathrm{i}\pi t_1)\Phi_1 \exp(\mathrm{i}\pi t_2) = \Phi_0 \exp(\mathrm{i}\pi t_1)(\omega s \bullet \Phi_0^{-1}) \exp(\mathrm{i}\pi t_2).$$

Comme $F_{2,+} = F_{0,+}\xi$, on déduit de l'action de ω^r que $F_{2r+2,+} = F_{2r,+}(\omega^r \bullet \xi)$ d'où, pour tout $r \geq 0$,

$$F_{2r+2,+} = F_{0,+} \prod_{j=0}^{r} (\omega^j \bullet \xi) \tag{2-8}$$

2.4. Cas m impair. — On suppose que $m \geq 3$ est impair.

LEMME 1. — *Φ_0 et Φ_1 vérifient les équations $\Phi_0 = \omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi_1$, $\Phi_1 = \omega^{\frac{m+1}{2}} \bullet \Phi_0$, $\Phi_0^{-1} = s\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi_0$, $\Phi^{-1} = s\omega^{\frac{m-3}{2}} \bullet \Phi_1$.*

Démonstration. — Ces quatre équations se déduisent toutes de l'une d'entre elles par action de W et la relation (2-7). Il suffit donc de démontrer $\Phi_0 = \omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi_1$. Appliquant $\omega^{\frac{m-1}{2}}$ à (2-5) et en utilisant $F_{m+1,+} = F_{1,+}$, $F_{m,+} = F_{0,+}$, il vient $F_{1,+} = F_{0,+}(\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi_1) \exp(\mathrm{i}\pi t_1)$. De (2-4) on déduit alors $\Phi_0 = \omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi_1$. □

On a alors

$$\xi = \Phi_0 \exp(\mathrm{i}\pi t_1)(\omega s \bullet \Phi_0^{-1}) \exp(\mathrm{i}\pi t_2) = \mathrm{P}_0(\omega^{\frac{m+1}{2}} \bullet \mathrm{P}_0)$$

LEMME 2. — *Φ_0 vérifie l'équation*

$$\left(\prod_{r=0}^{\frac{m-3}{2}} \omega^r \bullet \xi \right) (\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \mathrm{P}_0) = 1$$

c'est-à-dire

$$\left(\prod_{r=0}^{\frac{m-3}{2}} (\omega^r \bullet \mathrm{P}_0)(\omega^{\frac{m+1}{2}+r} \bullet \mathrm{P}_0) \right) (\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \mathrm{P}_0) = 1$$

Démonstration. — (2-6) se réécrit $F_{2r+1,+} = F_{2r,+}(\omega^r \bullet \mathrm{P}_0)$ et en particulier $F_{m,+} = F_{m-1,+}(\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \mathrm{P}_0)$. L'énoncé se déduit alors de $F_{m,+} = F_{0,+}$ et de la relation (2-8) pour $r = (m-3)/2$. □

2.5. Cas m pair. — On suppose que $m \geq 4$ est pair.

On déduit comme dans le cas m impair de la relation (2-8), avec cette fois $r = \frac{m}{2} - 1$, et de l'invariance par demi-tour $F_{m,+} = F_{0,+}$ la relation suivante

LEMME 3. — *On a*

$$\prod_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^r \bullet \xi) = 1$$

Nous verrons en section 5, lemme 12, une autre relation vérifiée par Φ_0, qui fait intervenir un automorphisme *extérieur* de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$. Cet élément Φ_0 vérifie d'autres relations algébriques (par exemple la relation du pentagone de Drinfeld si $m = 3$), étroitement liées aux propriétés de dépendance algébrique sur $\mathbb{Q}$ de ses coefficients. En particulier, Φ_0 et ses coefficients semblent reliés aux séries formelles et aux nombres zêtas multiples qui apparaissent dans [En]. Cependant, seules les relations établies ici sont utiles pour définir les morphismes rationnels qui nous intéressent dans ce travail.

3. Associateurs diédraux

3.1. Définitions. — Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0. L'algèbre $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ est une algèbre de Hopf complète au sens de Quillen (cf. [Qu] appendice A2). On note $\widehat{\otimes}$ le produit tensoriel complété et $\Delta : \mathcal{A}'(\Bbbk) \to \mathcal{A}'(\Bbbk)\widehat{\otimes}\mathcal{A}'(\Bbbk)$ son coproduit. Si $x, y \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$ on identifie $x \otimes y$ à son image dans $\mathcal{A}'(\Bbbk)\widehat{\otimes}\mathcal{A}'(\Bbbk)$.

DÉFINITION 1. — *Soit $m \geq 3$ impair. Pour tout $\lambda \in \Bbbk$, on note $\mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$ l'ensemble des $\Phi \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$ tels que*

$$\Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi \tag{3-1}$$

$$\Phi^{-1} = s\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi \tag{3-2}$$

$$\left[\prod_{r=0}^{\frac{m-3}{2}} (\omega^r \bullet \mathrm{P})(\omega^{\frac{m+1}{2}+r} \bullet \mathrm{P})\right] (\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \mathrm{P}) = 1 \tag{3-3}$$

avec $\mathrm{P} = \Phi e^{\lambda t_1}$.

Définition 2. — *Soit $m \geq 4$ pair. Pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, on note $\mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$ l'ensemble des $\Phi \in \mathcal{A}'(\mathbb{k})$ tels que*

$$\Delta(\Phi) = \Phi \otimes \Phi \tag{3-4}$$

$$\prod_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^r \bullet \xi) = 1 \tag{3-5}$$

avec $\xi = \Phi e^{\lambda t_1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})e^{\lambda t_2}$.

Que m soit pair ou impair, l'action naturelle W-invariante de $\mathbb{k}^{\times}$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{k})$ telle que $\mu \bullet \mathrm{t}_r = \mu \mathrm{t}_r$ laisse stable $\mathcal{A}'(\mathbb{k})$ et envoie surjectivement $\mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$ sur $\mathbb{Ass}_{\lambda\mu}^{(m)}(\mathbb{k})$. D'autre part, les éléments grouplike Φ_0 construits de façon transcendante appartiennent à $\mathbb{Ass}_{\mathrm{i}\pi}^{(m)}(\mathbb{C})$, d'après les lemmes 1 à 3, donc $\mathbb{Ass}_{1}^{(m)}(\mathbb{C}) \neq 0$ pour tout $m \geq 3$. Remarquons que pour $m = 3$ on retrouve les équations des associateurs de Drinfeld, l'équation du demi-tour (3-3) étant celle dite de l'hexagone (l'équation du pentagone n'a pas de sens en rang 2).

Au premier ordre, on peut décrire $\Phi \in \mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$ par $\Phi \equiv 1 + \sum_{r=0}^{m-1} a_r t_r$ avec $a_r \in \mathbb{k}$ et on peut supposer $\sum_{r=0}^{m-1} a_r = 0$. Si m est impair, l'équation (3-2) impose $a_{m-r+1} = -a_r$ pour tout r, où on a convenu $a_{m+r} = a_r$. En particulier, $a_1 = -a_0$. Dans tous les cas, le lemme suivant permet d'éliminer les coefficients a_0 et a_1, en prenant $f(X) = e^{a_0 X}$. Il reflète, dans le cas de l'associateur transcendant Φ_0, le fait que l'on aurait pu modifier les conditions asymptotiques sur $F_{0,+}$ (resp. $F_{1,-}$) par une fonction grouplike de t_0 (resp. de t_1). C'est un analogue du changement de jauge (*twist*) de Drinfeld.

Lemme 4. — *Soit $f(X) = \exp(\alpha X)$ avec $\alpha \in \mathbb{k}$ et $\Phi \in \mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$. Alors $\Phi' = f(t_0)^{-1}\Phi f(t_1) \in \mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$. De plus, si m est pair, $\Phi f(t_1) \in \mathbb{Ass}_{\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$.*

Démonstration. — On a bien $\Delta(\Phi') = \Phi' \otimes \Phi'$. Si m est impair,

$$s\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi' = f(t_1)^{-1}(s\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi)f(t_0) = f(t_1)^{-1}\Phi^{-1}f(t_0) = (\Phi')^{-1}$$

d'où (3-2) et, si l'on pose $\mathrm{P}' = \Phi' e^{\lambda t_1}$,

$$\mathrm{P}' = f(t_0)^{-1}\Phi f(t_1)e^{\lambda t_1} = f(t_0)^{-1}\mathrm{P}f(t_1).$$

Que m soit pair ou impair, si $\xi = \Phi e^{\lambda t_1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})e^{\lambda t_2}$ et $\xi' = \Phi' e^{\lambda t_1}(\omega s \bullet (\Phi')^{-1})e^{\lambda t_2}$, on a

$$\xi' = f(t_0)^{-1}\Phi f(t_1)e^{\lambda t_1} f(t_1)^{-1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})f(t_2)e^{\lambda t_2}$$

soit $\xi' = f(t_0)^{-1}\xi f(t_2)$ et $\omega^r \bullet \xi' = f(t_{2r})^{-1}(\omega^r \bullet \xi)f(t_{2r+2})$. On déduit alors de (3-3) et (3-5) que $\Phi' \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\mathbb{k})$, soit la première partie de l'énoncé. Si m est pair et $\Phi' = \Phi f(t_1)$, Φ' est grouplike, $\omega s \bullet \Phi' = (\omega s \bullet \Phi) f(t_1)$ et $\xi' = \xi$ d'où $\Phi' \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\mathbb{k})$. $\square$

La proposition suivante peut se démontrer par un calcul direct, assez long. Elle peut également se déduire de l'automorphisme « image miroir » de B. C'est ce que nous ferons à la fin de cette partie.

Proposition 3.1. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, $\mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\mathbb{k}) = \mathbb{Ass}_{-\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$.*

3.2. Relations entre $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$. —

On fixe $\Phi \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\mathbb{k})$, et on pose

$$\tilde{\sigma} = s e^{\lambda t_0}, \quad \tilde{\tau} = \Phi \omega s e^{\lambda t_1} \Phi^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}\tilde{\sigma} &= \Phi \omega s e^{\lambda t_1} \Phi^{-1} s e^{\lambda t_0} \\ &= \omega s (\omega s \bullet \Phi) e^{\lambda t_1} \Phi^{-1} s e^{\lambda t_0} \\ &= \omega (\omega^{-1} \bullet \Phi) e^{\lambda t_{-1}} (s \bullet \Phi)^{-1} e^{\lambda t_0} \\ &= \omega (\omega^{-1} \bullet \xi)\end{aligned}$$

d'où, pour tout $r \geq 1$,

$$(\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^r = \omega^r \prod_{j=r}^{1} \omega^{m-j} \bullet \xi = \omega^r \prod_{q=m-r}^{m-1} (\omega^q \bullet \xi) \tag{3-6}$$

Lemme 5. — *Si m est impair, $(\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m-1}{2}} = \omega^{\frac{m-1}{2}} \mathrm{P}^{-1}$ et*

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m-1}{2}} = s\omega^{\frac{m-1}{2}} \Phi^{-1} = (\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m-1}{2}} \tilde{\tau}$$

Démonstration. — Calcul direct à partir de (3-6). $\square$

Lemme 6. — *Si m est pair, $(\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m}{2}} = (\tilde{\sigma}\tilde{\tau})^{\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}$.*

Démonstration. — On déduit par calcul direct de (3-6) que $(\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}$. D'autre part, $\tilde{\sigma}^{-1} = s e^{-\lambda t_0}$, $\tilde{\tau}^{-1} = \Phi \omega s e^{-\lambda t_1} \Phi^{-1}$. Comme $\Phi \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\mathbb{k}) = \mathbb{Ass}_{-\lambda}^{(m)}(\mathbb{k})$, on en déduit que $(\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1})^{\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}$, d'où $(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})^{\frac{m}{2}} = \omega^{-\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}$. $\square$

3.3. Aspects particuliers du cas m pair. — Au niveau des groupes diédraux, les principales différences entre les cas m pair et impair proviennent du fait que, si m est pair, W admet deux classes de conjugaisons de réflexions, et non plus une. Ceci a pour conséquence que, sous l'action de W, les générateurs t_r de $\mathfrak{g}(\Bbbk)$ se répartissent en deux orbites, suivant que r est pair ou impair. En particulier, on peut étendre l'action de $\Bbbk^\times$ sur $\mathcal{A}(\Bbbk)$ en une action de $\Bbbk^\times \times \Bbbk^\times$, par $(\alpha,\beta).\mathrm{t}_r = \alpha\mathrm{t}_r$ si r est pair, $(\alpha,\beta).\mathrm{t}_r = \beta\mathrm{t}_r$ si r est impair. On peut alors définir, pour $\lambda,\mu \in \Bbbk$, l'ensemble $\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda,\mu}(\Bbbk)$ des $\Phi \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$ vérifiant les équations (3-4) et (3-5), avec cette fois $\xi = \Phi e^{\lambda t_1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})e^{\mu t_2}$. On voit facilement que $(\alpha,\beta).\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda,\mu}(\Bbbk) = \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\alpha\lambda,\beta\mu}(\Bbbk)$, $\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda,\lambda}(\Bbbk) = \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda}(\Bbbk)$. Enfin, si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda,\mu}(\Bbbk)$ et $\tilde{\sigma} = se^{\lambda t_0}$, $\tilde{\tau} = \Phi\omega s e^{\mu t_1}\Phi^{-1}$, on montre de même $(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})^{\frac{m}{2}} = (\tilde{\tau}\tilde{\sigma})^{\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}$.

On a donc $\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda,\mu}(\Bbbk) = (\lambda,\mu)\bullet\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{1}(\Bbbk)$ dès que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Les cas particuliers se ramènent donc à $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{0,1}(\Bbbk)$ et $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{1,0}(\Bbbk)$. Dans le premier cas $\tilde{\sigma} = s$ donc $\tilde{\sigma}^2 = 1$ et $\tilde{\tau} = \Phi\omega s e^{t_1}\Phi^{-1}$, dans le deuxième $\tilde{\sigma} = se^{t_0}$ et $\tilde{\tau} = \Phi\omega s\Phi^{-1}$ donc $\tilde{\tau}^2 = 1$.

Soit φ l'automorphisme involutif de W défini par $\varphi(s) = \omega s$, $\varphi(\omega) = \omega^{-1}$ et f l'automorphisme de $\mathfrak{g}[\Bbbk]$, donc de $\mathcal{A}(\Bbbk)$, défini sur les générateurs par $f(\mathrm{t}_r) = \mathrm{t}_{-r+1}$. L'automorphisme f est φ-équivariant, au sens où $f(g \bullet x) = \varphi(g) \bullet f(x)$ pour tous $g \in W$, $x \in \mathsf{U}\mathfrak{g}(\Bbbk)$. On en déduit un automorphisme involutif $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$. Si m est impair, il s'agit simplement de la conjugaison par $s\omega^{\frac{m-1}{2}}$. Si m est pair en revanche, φ est un automorphisme extérieur de W, donc il s'agit d'un automorphisme extérieur de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$ qui étend φ, et échange t_0 et t_1.

3.4. Morphismes de monodromie. — On rappelle que l'on plonge $\mathfrak{B}'(\Bbbk)$ dans $\mathfrak{B}(\Bbbk)$ par $t_r \mapsto \mathrm{t}_r - T/m$.

Fixons $\lambda \in \Bbbk$, $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda}(\Bbbk) \subset \mathcal{A}'(\Bbbk)$ et notons $\tilde{\sigma} = se^{\lambda t_0}$, $\tilde{\tau} = \Phi\omega s e^{\lambda t_1}\Phi^{-1} \in \mathfrak{B}'(\Bbbk)$, $\overline{\sigma} = se^{\lambda \mathrm{t}_0} \in \mathfrak{B}(\Bbbk)$, $\overline{\tau} = \Phi\omega s e^{\lambda \mathrm{t}_1}\Phi^{-1} \in \mathfrak{B}(\Bbbk)$. On a $\tilde{\sigma} = \overline{\sigma}e^{-\lambda T/m}$, $\tilde{\tau} = \overline{\tau}e^{-T\lambda/m}$.

Si m est impair, on déduit du lemme 5 que

$$\overline{\sigma}(\overline{\tau}\overline{\sigma})^{\frac{m-1}{2}} = (\overline{\tau}\overline{\sigma})^{\frac{m-1}{2}}\overline{\tau} = s\omega^{\frac{m-1}{2}}\Phi^{-1}e^{\lambda T}$$

et $(\overline{\sigma}\overline{\tau})^m = (\overline{\tau}\overline{\sigma})^m = e^{2\lambda T}$. Si m est pair, on déduit du lemme 6 que $(\overline{\sigma}\overline{\tau})^{\frac{m}{2}} = (\overline{\tau}\overline{\sigma})^{\frac{m}{2}} = \omega^{\frac{m}{2}}e^{\lambda T}$ et $(\overline{\sigma}\overline{\tau})^m = e^{2\lambda T}$. Dans les deux cas, on a associé à $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}_{\lambda}(\Bbbk)$ un morphisme $\widetilde{\Phi} : B \to \mathfrak{B}(\Bbbk)^\times$, groupe formé des éléments grouplike de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$, défini par $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$, $\tau \mapsto \overline{\tau}$. Il est clair qu'il vérifie la condition fondamentale de l'introduction.

Remarquons que de la donnée de $\widetilde{\Phi}$ on déduit λ par la relation $\widetilde{\Phi}((\overline{\sigma\tau})^m) = e^{2\lambda T}$. Si m est impair on peut également en déduire Φ, par $\widetilde{\Phi}(\overline{\sigma}(\overline{\tau\sigma})^{\frac{m-1}{2}}) = s\omega^{\frac{m-1}{2}}\Phi^{-1}e^{\lambda T}$. En revanche si m est pair cela n'est pas possible puisque Φ et Φe^{t_1} donnent lieu au même morphisme $\widetilde{\Phi}$.

On note $p : \mathfrak{B}(\Bbbk) \to \Bbbk W$ la projection sur sa composante homogèene de degré 0. Comme $p\circ\widetilde{\Phi}(\sigma) = s$ et $p\circ\widetilde{\Phi}(\tau) = \omega s$ on en déduit que $p\circ\widetilde{\Phi} = \pi$ et que $\widetilde{\Phi}$ se restreint en un morphisme $\widetilde{\Phi} : P \to \exp \mathfrak{g}(\Bbbk) = \mathcal{A}(\Bbbk)^{\times}$ qui s'étend en $\widetilde{\Phi} : P(\Bbbk) \to \exp \mathfrak{g}(\Bbbk)$ et finalement $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to \mathfrak{B}(\Bbbk)$. Il est clair que, si $f \in P'(\Bbbk)$, alors $\widetilde{\Phi}(f) \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$.

Nous établissons ici les propriétés élémentaires de ces morphismes.

Proposition 3.2. — *Soient $\lambda \neq 0$ et $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\lambda}^{(m)}(\Bbbk)$. Le morphisme $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to \mathfrak{B}(\Bbbk)^{\times}$ est un isomorphisme qui envoie $P(\Bbbk)$ (resp. $P'(\Bbbk)$) sur $\mathcal{A}(\Bbbk)^{\times}$ (resp. $\mathcal{A}'(\Bbbk)^{\times}$).*

Démonstration. — On montre d'abord que $\widetilde{\Phi} : P(\Bbbk) \to \exp \mathfrak{g}(\Bbbk)$ est un isomorphisme. Comme c'est un morphisme de $\Bbbk$-schémas en groupes affines connexes (car pro-unipotents) il suffit de montrer que l'application tangente $\mathrm{d}\widetilde{\Phi} : L(\Bbbk) \to \mathfrak{g}(\Bbbk)$ est un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbres de Lie filtrées complètes. Notons $u_r = \exp v_r$, $v_r \in L(\Bbbk)$. On a $\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(v_r) = 2\lambda t_r + w_r$, avec w_r de valuation au moins 2. De plus, $\widetilde{\Phi}(Z) = \exp(2\lambda T)$, donc $\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(z) = 2\lambda T$. D'autre part, $u_{m-1}\dots u_1 u_0 = Z$ donc $v_0 + v_1 + \dots + v_{m-1} = z$. On en déduit un morphisme $\varphi : \mathfrak{g}(\Bbbk) \to L(\Bbbk)$ tel que $\varphi(t_r) = v_r/2\lambda$. Alors $c = \mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ \varphi$ est un endomorphisme de $\mathfrak{g}(\Bbbk)$ tel que $c(t_r) = t_r + w_r$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathfrak{g}(\Bbbk)$ la valuation de $c(x) - x$ est strictement supérieure à la valuation de x donc c est inversible et $\mathrm{d}\widetilde{\Phi} : L(\Bbbk) \to \mathfrak{g}(\Bbbk)$ est un isomorphisme.

On a $p(\mathfrak{B}(\Bbbk)^{\times}) = W$ et $p \circ \widetilde{\Phi} = \pi$, donc dès que $\lambda \neq 0$ on en déduit que $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to \mathfrak{B}(\Bbbk))^{\times}$ est injectif. De plus, si $x \in \mathfrak{B}(\Bbbk)^{\times}$ et $x_0 = p(x)$ il existe $\sigma \in B$ tel que $\pi(\sigma) = x_0$. On a alors $p(\widetilde{\Phi}(\sigma)) = x_0$ d'où $\widetilde{\Phi}(\sigma^{-1})x \in \mathcal{A}(\Bbbk)^{\times}$ vaut $\widetilde{\Phi}(g)$ pour un certain $g \in P(\Bbbk)$ et $x = \widetilde{\Phi}(\sigma g)$, donc $\widetilde{\Phi}$ est surjectif et donc un isomorphisme.

$\square$

Lemme 7. — *Soit $m \geq 3$ impair, $\lambda \in \Bbbk$, $\Phi \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$. On a $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\lambda}^{(m)}(\Bbbk)$ si et seulement si il existe un morphisme $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to$*

$(\mathfrak{B}(\Bbbk))^\times$ *(nécessairement unique) tel que* $\widetilde{\Phi}(\sigma) = se^{\lambda \mathrm{t}_0}$ *et*

$$\widetilde{\Phi}(\tau) = \Phi\omega s e^{\lambda \mathrm{t}_1}\Phi^{-1},\ \widetilde{\Phi}(O) = s\omega^{\frac{m-1}{2}}\Phi^{-1}e^{\lambda T},\ \Phi(O^2) = e^{2\lambda T}$$

Démonstration. — Si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$, alors $\widetilde{\Phi}$ est bien défini et satisfait ces propriétés comme on vient de le montrer. Inversement, posons $\mathrm{P} = \Phi e^{\lambda t_1} \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$. De $\widetilde{\Phi}(O^2) = \widetilde{\Phi}(O)^2$ on déduit (3-2). On montre alors par calcul direct (cf. lemme 5) que

$$\widetilde{\Phi}\left((\tau\sigma)^{\frac{m-1}{2}}\right) = \omega^{\frac{m-1}{2}}\left(\omega^{\frac{m+1}{2}} \bullet \left(\prod_{q=0}^{\frac{m-3}{2}} \omega^q \bullet \xi\right)\right) e^{\lambda \frac{T}{m}(m-1)}$$

avec $\xi = \mathrm{P}(\omega^{\frac{m+1}{2}} \bullet \mathrm{P})$ soit, comme $O = \sigma(\tau\sigma)^{\frac{m-1}{2}}$,

$$\widetilde{\Phi}(O) = se^{\lambda t_0}\widetilde{\Phi}\left((\tau\sigma)^{\frac{m-1}{2}}\right) = s\omega^{\frac{m-1}{2}}\Phi^{-1}e^{\lambda T}.$$

On en déduit

$$\omega^{\frac{m+1}{2}} \bullet \left(\prod_{q=0}^{\frac{m-3}{2}} \omega^q \bullet \xi\right) = e^{-\lambda \mathrm{t}_1}\Phi^{-1} = \mathrm{P}^{-1}$$

d'où (3-3). □

LEMME 8. — *Soit* $m \geq 4$ *pair,* $\lambda \in \Bbbk$, $\Phi \in \exp\mathfrak{g}'(\Bbbk)$. *On a* $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$ *si et seulement si il existe un morphisme* $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to \mathfrak{B}(\Bbbk)^\times$ *(nécessairement unique) tel que* $\widetilde{\Phi}(\sigma) = se^{\lambda \mathrm{t}_0}$ *et*

$$\widetilde{\Phi}(\tau) = \Phi\omega s e^{\lambda \mathrm{t}_1}\Phi^{-1},\ \widetilde{\Phi}(O) = \omega^{\frac{m}{2}}e^{\lambda T},\ \Phi(O^2) = e^{2\lambda T}$$

Démonstration. — Si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$, $\widetilde{\Phi}$ vérifie bien ces propriétés. Inversement, posons $\xi = \Phi e^{\lambda t_1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})e^{\lambda t_2}$. On montre par calcul direct (cf. lemme 6) que

$$\widetilde{\Phi}\left((\tau\sigma)^{\frac{m}{2}}\right) = \left(\prod_{q=0}^{\frac{m}{2}-1} \omega^q \bullet \xi\right)\omega^{\frac{m}{2}}e^{\lambda T}$$

d'où (3-5) puisque $\widetilde{\Phi}((\tau\sigma)^{\frac{m}{2}}) = \widetilde{\Phi}(O) = \omega^{\frac{m}{2}}e^{\lambda T}$. □

Ces deux lemmes nous donnent une démonstration de la proposition 3.1 alternative au calcul direct. En effet, soit $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$ et Γ l'automorphisme de B défini par $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$, $\tau \mapsto \tau^{-1}$ (« image miroir de la tresse »). Le morphisme Γ s'étend à $B(\Bbbk)$ et permet de définir $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi} \circ \Gamma$.

On a $\widetilde{\Psi}(\sigma) = se^{-\lambda t_0}$, $\widetilde{\Psi}(\tau) = \Phi\omega s e^{-\lambda t_1}\Phi^{-1}$, $\widetilde{\Psi}(O^2) = \widetilde{\Phi}(O^{-2}) = e^{-2\lambda T}$, $\Gamma(O) = O^{-1}$ donc $\widetilde{\Psi}(O) = \omega^{\frac{m}{2}} e^{-\lambda T}$ si m est pair,

$$\widetilde{\Psi}(O) = e^{-\lambda T}\Phi^{-1} s\omega^{\frac{m-1}{2}} = s\omega^{\frac{m-1}{2}}(s\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \Phi)e^{-\lambda T} = s\omega^{\frac{m-1}{2}}\iota(\Phi)^{-1}e^{-\lambda T}$$

si m est impair. On en déduit que $\widetilde{\Psi}$ est le morphisme associé à Φ et au scalaire $-\lambda$, et que $\Phi \in \mathbb{Ass}^{(m)}_{-\lambda}(\Bbbk)$.

4. Groupe d'automorphismes de $B(\Bbbk)$

4.1. Groupe spécial d'automorphismes. — On suppose $m \geq 3$. On note

$$O = \underbrace{\sigma\tau\sigma\dots}_{m \text{ facteurs}}.$$

Si m est impair, $\pi(O)$ est une réflexion. Que m soit pair ou impair, $\pi(O)$ est d'ordre 2, donc O est justifiable de la notation $O^{<\lambda>}$.

Définition 3. — *On note $G^{(m)}(\Bbbk)$ l'ensemble des couples $(\lambda, f) \in \Bbbk^\times \times P'(\Bbbk)$ tels qu'il existe un morphisme $\tilde{f} : B \to B(\Bbbk)$ satisfaisant à*

(4-1) $$\sigma \mapsto \sigma^{<\lambda>}$$

(4-2) $$\tau \mapsto f^{-1}\tau^{<\lambda>}f$$

(4-3) $O \mapsto O^{<\lambda>}f$ *si m est impair,* $O \mapsto O^{<\lambda>}$ *si m est pair.*

(4-4) $$O^2 \mapsto (O^2)^\lambda$$

Si m est pair, (4-3) implique naturellement (4-4). On étend naturellement $\tilde{f}$ en un automorphisme continu pur de $B(\Bbbk)$.

L'automorphisme $\tilde{f}$ est bien déterminé par f. Inversement, si m est impair, la condition (4-3) montre que f est déterminé par $\tilde{f}$. On en déduit dans ce cas que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ de $G^{(m)}(\Bbbk)$ vers $Aut(B(\Bbbk))$ est injective. Il n'en est pas de même si m est pair, puisqu'alors $(\lambda, \tau^2 f)$ correspond au même morphisme $\tilde{f}$.

Soient maintenant $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ les automorphismes correspondant à deux éléments (λ_1, f_1) et (λ_2, f_2) de $G^{(m)}(\Bbbk)$ et $\tilde{f} = \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$. On a $\tilde{f}(\sigma) = \sigma^{<\lambda>}$ avec $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, $\tilde{f}(\tau) = f^{-1}\tau^{<\lambda>}f$ avec $f = f_1\tilde{f}_1(f_2)$ et $\tilde{f}(O)$ vaut $O^{<\lambda>}f$ si m est impair, $O^{<\lambda>}$ si m est pair. On en déduit une loi de composition interne associative sur $G^{(m)}(\Bbbk)$ donnée par la formule

$$(\lambda_1, f_1) * (\lambda_2, f_2) = (\lambda_1\lambda_2, f_1\tilde{f}_1(f_2)).$$

Comme de plus $(1,1)$ est un élément neutre évident et que $(\lambda, f) * (\lambda^{-1}, (\tilde{f}^{-1})(f^{-1})) = (1,1)$ on vient de munir $G^{(m)}$ d'une loi de groupe, l'identifiant à un sous-groupe des automorphismes de $B(\Bbbk)$.

Pour simplifier les notations, on notera à λ fixé $\hat{\sigma} = (\sigma^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} = \sigma^{-1}\sigma^{<\lambda>} \in P(\Bbbk)$ et $\hat{\tau} = \tau^{-1}\tau^{<\lambda>}$, $\hat{O} = O^{-1}O^{<\lambda>}$.

On peut traduire la définition de $G^{(m)}(\Bbbk)$ par des conditions algébriques sur les couples (λ, f). Si m est impair les conditions que l'on obtient ici peuvent se simplifier (voir 5.4).

Lemme 9. — *$G^{(m)}(\Bbbk)$ est l'ensemble des couples $(\lambda, f) \in \Bbbk^\times \times P'(\Bbbk)$ tels que*

$$O \bullet f = f^{-1} \quad \textit{si } m \textit{ est impair.} \tag{4-5}$$

$$\left[\prod_{k=\frac{m-1}{2}}^{1} (\tau\sigma)^{-k} \bullet L\right] \hat{\sigma} = \hat{O} f \quad \textit{si } m \textit{ est impair,} \tag{4-6}$$

$$\prod_{k=\frac{m}{2}-1}^{0} ((\sigma\tau)^{-k} \bullet M) = \hat{O} \quad \textit{si } m \textit{ est pair.}$$

avec $L = \hat{\sigma} f^{-1} \hat{\tau} (\tau \bullet f)$, $M = (\tau^{-1} \bullet (\hat{\sigma} f^{-1}))\hat{\tau} f$.

Démonstration. — Soit $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$. Si m est impair, les conditions (4-3) et (4-4) impliquent que $(O^2)^\lambda = \tilde{f}(O)^2$ vaut

$$(O^{<\lambda>} f)^2 = (O^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} O f O^{-1} O^2 (O^2)^{\frac{\lambda-1}{2}} = (O^2)^\lambda (O \bullet f) f$$

car O^2 est central, d'où (4-5). Soit $V_r = \sigma\tau\ldots$ (r facteurs) et $E_r \in P(\Bbbk)$ tel que $\tilde{f}(V_r) = V_r E_r$. On a $V_1 = \sigma$, $\tilde{f}(V_1) = \sigma^{<\lambda>} = \sigma\hat{\sigma} = V_1\hat{\sigma}$ d'où $E_1 = \hat{\sigma}$. On a $E_{2r+1} = (\sigma^{-1} \bullet E_{2r})\hat{\sigma}$ et $E_{2r+2} = (\tau^{-1} \bullet E_{2r+1} f^{-1})\hat{\tau} f$. On en déduit $E_{2r+2} = ((\tau^{-1}\sigma^{-1}) \bullet E_{2r})M$ et $F_{2r+3} = (\tau\sigma)^{-1} \bullet F_{2r+1} L$ où l'on a posé $E_{2r+1} = F_{2r+1}\hat{\sigma}$, et enfin que

$$E_m = \prod_{k=\frac{m}{2}-1}^{0} \Big((\sigma\tau)^{-k} \bullet M\Big) \text{ ou } E_m = \left[\prod_{k=\frac{m-1}{2}}^{1} (\tau\sigma)^{-k} \bullet L)\right] \hat{\sigma}$$

suivant que m est pair ou impair. Comme $V_m = O$, on déduit alors (4-6) de (4-3). Inversement, on montre par la même méthode que, si (λ, f) vérifie (4-5) et (4-6), alors $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$. □

4.2. Action de $G^{(m)}(\Bbbk)$ sur $\mathbb{A}\mathrm{ss}^{(m)}(\Bbbk)$. — Soient $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\mu}^{(m)}(\Bbbk)$ et $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$. Leur sont associés des morphismes $\widetilde{\Phi}$ et $\tilde{f}$:

$$B(\Bbbk) \xrightarrow{\tilde{f}} B(\Bbbk) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} \mathfrak{B}(\Bbbk)^{\times}.$$

On a

$$(\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f})(\sigma) = \widetilde{\Phi}(\sigma^{<\lambda>}) = \widetilde{\Phi}(\sigma)\widetilde{\Phi}((\sigma^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}) = se^{\mu t_0}\left(e^{2\mu t_0}\right)^{\frac{\lambda-1}{2}} = se^{\lambda\mu t_0}$$

et

$$(\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f})(\tau) = \widetilde{\Phi}(f^{-1}\tau^{<\lambda>}f) = \widetilde{\Phi}(f)^{-1}\Phi\omega s e^{\lambda\mu t_1}\Phi^{-1}\widetilde{\Phi}(f).$$

On pose alors $\Phi.f = \widetilde{\Phi}(f)^{-1}\Phi$. On a donc $\Phi.f \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$.

Lemme 10. — *Si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\mu}^{(m)}(\Bbbk)$, $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$ alors $\Phi.f \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\lambda\mu}^{(m)}(\Bbbk)$.*

Démonstration. — D'après ce qui précède et les lemmes 7 et 8 il suffit de calculer les images par $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}$ de O et O^2. On a $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O^2) = \widetilde{\Phi}((O^2)^{\lambda}) = \widetilde{\Phi}(O^2)^{\lambda} = e^{2\lambda\mu T}$. Si m est impair,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O) &= \widetilde{\Phi}(O^{<\lambda>}f) = \widetilde{\Phi}(O)\widetilde{\Phi}(O^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}\widetilde{\Phi}(f) \\ &= s\omega^{\frac{m-1}{2}}\iota(\Phi)^{-1}e^{\mu T}e^{\mu(\lambda-1)T}\widetilde{\Phi}(f) \\ &= s\omega^{\frac{m-1}{2}}\iota(\Phi.f)^{-1}e^{\lambda\mu T}.\end{aligned}$$

Si m est pair, $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O) = \widetilde{\Phi}(O^{<\lambda>}) = \widetilde{\Phi}(O)e^{\mu T(\lambda-1)} = \omega^{\frac{m}{2}}e^{\lambda\mu T}$. □

Si $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\mu}^{(m)}(\Bbbk)$ et $f \in P'(\Bbbk)$, on peut toujours définir $\Phi.f = \widetilde{\Phi}(f)^{-1}\Phi \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$.

Lemme 11. — *Soit $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\mu}^{(m)}(\Bbbk)$ et $f \in P'(\Bbbk)$. Si $\Phi.f \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_{\lambda\mu}^{(m)}(\Bbbk)$ avec $\lambda\mu \neq 0$ alors $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$.*

Démonstration. — Définissons $\tilde{f}(\sigma) = \sigma^{<\lambda>}$, $\tilde{f}(\tau) = f^{-1}\tau^{<\lambda>}f$. Cette application s'étend en un homomorphisme de groupes du groupe libre sur σ, τ vers $B(\Bbbk)$, telle que $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f} = \widetilde{\Phi.f}$, donc $\tilde{f}$ se factorise par B parce que $\widetilde{\Phi}$ est injectif sur $B(\Bbbk)$. Par définition, $\tilde{f}$ satisfait (4-1), (4-2), et $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f} = \widetilde{\Phi.f}$. On a

$$\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O^2) = e^{2\lambda\mu T} = \widetilde{\Phi}(O^2)^{\lambda} = \widetilde{\Phi}((O^2)^{\lambda})$$

d'où $\tilde{f}(O^2) = (O^2)^\lambda$, soit (4-4), par injectivité de $\widetilde{\Phi}$. De même, si m est impair,

$$\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O) = s\omega^{\frac{m-1}{2}} \Phi^{-1} \widetilde{\Phi}(f) e^{\lambda\mu T} = s\omega^{\frac{m-1}{2}} \Phi^{-1} e^{\lambda\mu T} \widetilde{\Phi}(f) = \widetilde{\Phi}(O^{<\lambda>} f)$$

d'où $\tilde{f}(O) = O^{<\lambda>} f$ par injectivité de $\widetilde{\Phi}$, soit (4-3). Si m est pair, on conclut de même à partir de $\widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}(O) = \widetilde{\Phi}(O^{<\lambda>}) = O^{<\lambda\mu>}$. $\square$

On note $\mathbb{Ass}_*^{(m)}(\Bbbk)$ la réunion des couples (λ, Φ) pour $\lambda \in \Bbbk^\times$, $\Phi \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$. D'après le lemme 10 on a une action à droite de $G^{(m)}(\Bbbk)$ sur $\mathbb{Ass}_*^{(m)}(\Bbbk)$ par $(\mu, \Phi).(\lambda, f) = (\mu\lambda, \Phi.f)$.

Proposition 4.1. — *L'action de $G^{(m)}(\Bbbk)$ sur $\mathbb{Ass}_*^{(m)}(\Bbbk)$ est libre et transitive.*

Démonstration. — On démontre d'abord la transitivité. Soient $\Phi \in \mathbb{Ass}_\lambda^{(m)}(\Bbbk)$, $\Phi' \in \mathbb{Ass}_\mu^{(m)}(\Bbbk)$ avec $\lambda\mu \neq 0$. On a $\Phi'\Phi^{-1} \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$. Posons $f = \widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi'\Phi^{-1}) \in P'(\Bbbk)$. On a alors $\Phi' = \widetilde{\Phi}(f)^{-1}\Phi$ donc $\Phi' = \Phi.f$ et $(\mu/\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$ d'après le lemme 11, donc l'action est transitive. Si $\Phi = \Phi.f$ avec $(\lambda, f) \in G^{(m)}(\Bbbk)$, alors $\widetilde{\Phi} = \widetilde{\Phi} \circ \tilde{f}$ donc $\tilde{f}$ est l'identité par injectivité de $\widetilde{\Phi}$. Cela implique $\lambda = 1$ et, au moins si m est impair, $f = 1$. En général, comme $f \in P'(\Bbbk)$ on a $\Phi.f = \widetilde{\Phi}(f^{-1})\Phi$ donc $\Phi.f = \Phi \Rightarrow \widetilde{\Phi}(f) = 1 \Rightarrow f = 1$ puisque $\widetilde{\Phi}$ est injectif ($\lambda = 1 \neq 0$). $\square$

5. Existence d'un associateur rationnel

5.1. Généralités. — On fixe $m \geq 3$, ce qui nous permet d'ôter l'exposant (m) des notations. L'action de $\Bbbk^\times$ sur $\mathfrak{B}'(\Bbbk)$ qui à $\alpha \in \Bbbk^\times$ et $t_i \in \mathfrak{B}'(\Bbbk)$ associe αt_i induit une action de $\Bbbk^\times$ sur $\mathbb{Ass}_*(\Bbbk)$: à $\alpha \in \Bbbk^\times$ et $(\lambda, \Phi) \in \mathbb{Ass}_*(\Bbbk)$ on associe $(\lambda\alpha, \Phi_\alpha)$ où Φ_α est l'image de $\Phi \in \mathfrak{B}'(\Bbbk)$ par l'action de α. Le quotient $\mathbb{Ass}_*(\Bbbk)/\Bbbk^\times$ s'identifie à $\mathbb{Ass}_1(\Bbbk)$. On note $j : \mathbb{Ass}_1(\Bbbk) \hookrightarrow \mathbb{Ass}_*(\Bbbk)$ et $q : \mathbb{Ass}_*(\Bbbk) \twoheadrightarrow \mathbb{Ass}_1(\Bbbk)$ les injections et surjections canoniques. Si $\Phi \in \mathbb{Ass}_1(\Bbbk)$ et $f \in G(\Bbbk)$ on pose $\Phi \star f = q(\Phi.f)$. C'est une action de $G(\Bbbk)$ sur $\mathbb{Ass}_1(\Bbbk)$.

Supposons $\mathbb{Ass}_1(\Bbbk) \neq \emptyset$ et choisissons $\Phi \in \mathbb{Ass}_1(\Bbbk)$. Considérons la suite

$$1 \to G_1(\Bbbk) \to G(\Bbbk) \xrightarrow{\nu} \Bbbk^\times \to 1 \qquad (5\text{-}1)$$

où $\nu(\lambda, f) = \lambda$. Elle est exacte si et seulement si ν est surjective. Pour tout $\lambda \in \Bbbk^\times$ on a $\Phi_\lambda \in \mathbb{Ass}_\lambda(\Bbbk) \subset \mathbb{Ass}_*(\Bbbk)$ donc il existe un unique

$g = (\lambda, \breve{g}) \in G(\Bbbk)$ tel que $\Phi_\lambda = \Phi.\breve{g}$. Posant $\Theta_\Phi(\lambda) = g$ on a donc $\Theta_\Phi(1) = (1,1)$ et $\nu \circ \Theta_\Phi(\lambda) = \lambda$, donc (5-1) est exacte et à chaque $\Phi \in \mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$ correspond une section de ν. On a

$$\begin{aligned}\Theta_\Phi(\Bbbk^\times) &= \{g \in GT(\Bbbk) \mid \exists \lambda \in \Bbbk^\times \ \ \Phi_\lambda = \Phi.g\}\\ &= \{g \in GT(\Bbbk) \mid q(\Phi.g) = \Phi\}\\ &= \{g \in GT(\Bbbk) \mid \Phi = \Phi \star g\}\end{aligned}$$

ainsi $\Theta_\Phi(\Bbbk^\times)$ est le stabilisateur de Φ pour l'action de $GT(\Bbbk)$ sur $\mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\Bbbk)$. D'autre part, notant $\mathcal{G}(\Bbbk)$ et $\mathcal{G}_0(\Bbbk)$ les algèbres de Lie respectives de $G(\Bbbk)$ et $G_1(\Bbbk)$, on en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathcal{G}_0(\Bbbk) \to \mathcal{G}(\Bbbk) \stackrel{\mathrm{d}\nu}{\to} \Bbbk \to 0 \tag{5-2}$$

et une section $\mathrm{d}\Theta_\Phi$ de $\mathrm{d}\nu$. Notant $(\lambda, g_\lambda) = \Theta_\Phi(\lambda)$, on a

$$\Phi_\lambda = \Phi.g_\lambda = \widetilde{\Phi}(g_\lambda^{-1})\Phi = (\widetilde{\Phi} \circ \Theta_\Phi(\lambda^{-1}))\Phi \tag{5-3}$$

D'autre part $G(\Bbbk) \subset \Bbbk^\times \times P'(\Bbbk)$, d'algèbre de Lie $\Bbbk \times L'(\Bbbk)$. Posons $\mathrm{d}\Theta_\Phi(1) = (1,\psi) \in \Bbbk \times L'(\Bbbk)$, d'où $\mathrm{d}\Theta_\Phi(l) = (l, l\psi)$. Pour tout $\Phi \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$, considérons le morphisme de schémas $\mathbb{G}_m \to \mathcal{A}'(.)$ qui à $\alpha \in \Bbbk^\times$ associe $\Phi_\alpha \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$. Sa différentielle permet de construire une dérivation ∂ de $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ définie par $\Phi_{1+\epsilon l} = \Phi + \epsilon l \partial \Phi$ pour $\epsilon^2 = 0$ et $l \in \Bbbk$. Différenciant (5-3) en $\lambda = 1$ on obtient alors $\partial\Phi = -\left(\mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ \mathrm{d}\Theta_\Phi(1)\right)\Phi$ soit

$$(\partial\Phi)\,\Phi^{-1} = -\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \tag{5-4}$$

L'existence d'un associateur transcendant implique $\mathbb{A}\mathrm{ss}_1(\mathbb{C}) \neq \emptyset$, donc les suites (5-1) et (5-2) sont exactes, c'est-à-dire que $\mathrm{d}\nu$ est non nulle sur les points rationnels complexes. Comme $\mathrm{d}\nu$ est définie sur $\mathbb{Q}$, il s'ensuit que $\mathrm{d}\nu$ est non nulle sur $\mathbb{Q}$, donc que (5-2) est exacte pour $\Bbbk = \mathbb{Q}$. Il existe donc $(1,\psi) \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ tel que $\psi \neq 0$.

Dans le cas pair, nous aurons besoin d'introduire un sous-groupe propre de $G(\Bbbk)$. On note J l'automorphisme de B défini par $J(\sigma) = \tau$, $J(\tau) = \sigma$. Quand m est impair, il s'agit de la conjugaison par O. Lorsque m est pair, il s'agit d'un automorphisme *extérieur* de B. Dans les deux cas il se restreint en un automorphisme extérieur de P, et il se prolonge en un automorphisme de $B(\Bbbk)$ qui laisse stable $P(\Bbbk)$ et $P'(\Bbbk)$.

On note $\mathfrak{J}$ l'automorphisme de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$ défini par $\mathfrak{J}(s) = \omega s$, $\mathfrak{J}(\omega) = \omega^{-1}$, $\mathfrak{J}(t_r) = r_{-r+1}$. Quand m est impair il s'agit de la conjugaison par $s\omega^{\frac{m-1}{2}}$, quand m est pair d'un automorphisme involutif extérieur de $\mathfrak{B}(\Bbbk)$.

On définit

$$\begin{aligned} \mathbb{Ass}'_\lambda(\Bbbk) &= \{\Phi \in P'(\Bbbk) \mid (\lambda,\Phi) \in \mathbb{Ass}_\lambda(\Bbbk), \quad \mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}\} \\ \mathbb{Ass}'(\Bbbk) &= \{(\lambda,\Phi) \in \mathbb{Ass}(\Bbbk) \mid \mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}\} \\ G'(\Bbbk) &= \{(\lambda,f) \in G(\Bbbk) \mid J(f) = f^{-1}\} \end{aligned}$$

et $\mathbb{Ass}'_*(\Bbbk) = \mathbb{Ass}'(\Bbbk) \cap \mathbb{Ass}_*(\Bbbk)$. Soit $\Phi \in \mathbb{Ass}'_\lambda(\Bbbk)$ et $\widetilde{\Phi} : B(\Bbbk) \to \mathfrak{B}(\Bbbk)^\times$ le morphisme associé. On a $\mathfrak{J}(\widetilde{\Phi}(\sigma)) = \omega s e^{\lambda t_1} = \Phi^{-1} \bullet \widetilde{\Phi}(\tau)$ et $\mathfrak{J}(\widetilde{\Phi}(\tau)) = \Phi^{-1} \bullet \widetilde{\Phi}(\sigma)$. On en déduit

$$\mathfrak{J} \circ \widetilde{\Phi} = \mathrm{Ad}(\Phi^{-1}) \circ \widetilde{\Phi} \circ J \tag{5-5}$$

Si $(\lambda,f) \in G'(\Bbbk)$ et $\tilde{f} : B \to B(\Bbbk)$ désigne le morphisme associé, on a

$$\tilde{f} \circ J = \mathrm{Ad}(f^{-1}) \circ J \circ \tilde{f} \tag{5-6}$$

On en déduit que $G'(\Bbbk)$ est un sous-groupe de $G(\Bbbk)$. De plus, on déduit de (5-5) que $\mathbb{Ass}'(\Bbbk)$ est stable sous l'action de $G'(\Bbbk)$. Enfin, si $\Phi \in \mathbb{Ass}'_\mu(\Bbbk)$ avec $\mu \neq 0$ et $f \in P'(\Bbbk)$ tel que $\Phi.f \in \mathbb{Ass}'_{\lambda\mu}(\Bbbk)$, alors on sait d'après le lemme 11 que $(\lambda, f) \in G(\Bbbk)$. On a donc $\mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}$ et $\mathfrak{J} \circ \widetilde{\Phi}(f^{-1})\mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}\widetilde{\Phi}(f)$. On en déduit $\mathfrak{J} \circ \widetilde{\Phi}(f^{-1}) = \mathrm{Ad}(\Phi^{-1}) \circ \widetilde{\Phi} \circ J(f^{-1})$, d'où $f = J(f)^{-1}$ d'après (5-5) et l'injectivité de $\widetilde{\Phi}$. Ainsi l'action de $G'(\Bbbk)$ sur $\mathbb{Ass}'_*(\Bbbk)$ est libre et transitive. Si m est impair on a évidemment $\mathbb{Ass}(\Bbbk) = \mathbb{Ass}'(\Bbbk)$, $G(\Bbbk) = G'(\Bbbk)$, etc.

Lemme 12. — *L'associateur transcendant Φ_0 appartient à $\mathbb{Ass}'_{\mathrm{i}\pi}(\mathbb{C})$.*

Démonstration. — On note j le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a des actions de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ et $\mathbb{R}^2$, en faisant agir j sur $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ par $\mathfrak{J}$, et sur $\mathbb{R}^2$ comme réflexion par rapport à la droite Δ d'équation $y = -x \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$ (cf. figure 2).

La forme différentielle Ω' est alors invariante par j, et si $F_{0,+}$, $F_{0,-}$ sont définis comme en section 3 on a $j.F_{0,+} = F_{1,-}$ par comparaison des comportements asymptotiques. On déduit alors de $F_{1,-} = F_{0,+}\Phi_0$ que $\mathfrak{J}(\Phi_0) = \Phi_0^{-1}$. □

Le raisonnement précédent s'applique alors, en remplaçant $G(\Bbbk)$, $G_1(\Bbbk)$ par $G'(\Bbbk)$, $G'_1(\Bbbk) = G'(\Bbbk) \cap G_1(\Bbbk)$ et $\mathcal{G}(\Bbbk)$, $\mathcal{G}_0(\Bbbk)$ par les algèbres de Lie $\mathcal{G}'(\Bbbk)$, $\mathcal{G}'_0(\Bbbk)$ de $G'(\Bbbk)$, $G'_1(\Bbbk)$.

On cherche donc à résoudre (5-4) avec $(1,\psi) \in \mathcal{G}'(\Bbbk)$. Pour ce faire, il nous faut d'abord définir $\widetilde{\Phi}$ pour tout $\Phi \in \mathcal{A}'(\Bbbk)$ de terme constant égal à 1.

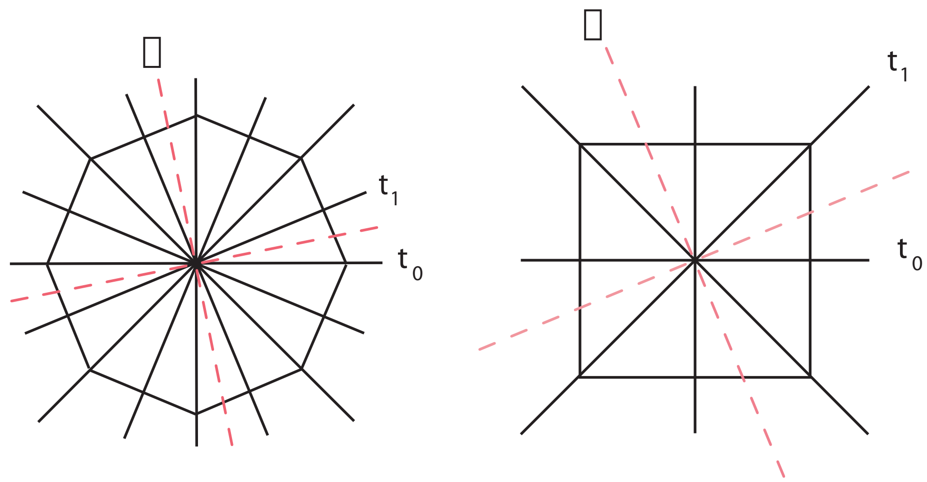

FIGURE 2. L'automorphisme extérieur j pour $m = 8$ et $m = 4$

5.2. Le morphisme $\widetilde{\Phi}$. — On rappelle que, si A est une algèbre de Hopf (complétée), $A^{\times}$ désigne le groupe des éléments grouplike de A, et que si A est une algèbre A^* désigne le groupe des éléments inversibles de A.

On suppose m impair. On a défini des éléments $u_{2r} = (\tau\sigma)^r \bullet \sigma^2$, $u_{2r+1} = (\tau\sigma)^r \bullet \tau^2$ et noté que $P'(\Bbbk)$ est engendré par $\tilde{u}_r = u_r Z^{\frac{-1}{m}}$ pour $0 \leq r \leq m-1$ soumis à l'unique relation $\tilde{u}_{m-1} \dots \tilde{u}_0 = 1$. Il s'identifie donc à la complétion $\Bbbk$-prounipotente du groupe libre sur toute partie à $m-1$ éléments de $\{\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{m-1}\}$. D'autre part, l'automorphisme J laisse stable $P'(\Bbbk)$. On montre facilement les identités suivantes

$$\forall r \in [0, \frac{m}{2}] \quad u_{m-2r} = (\tau\sigma)^{-r} \bullet \sigma^2 \tag{5-7}$$

$$\forall r \in [0, \frac{m}{2}] \quad u_{m-2r+1} = (\tau\sigma)^{-r} \bullet \tau^2 \tag{5-8}$$

On note $x_1 = u_1$, $x_0 = u_0$, $x_r = u_r \dots u_2 u_1$ pour $r \geq 1$, $x_r = u_0 u_{m-1} \dots u_{m+r}$ pour $r \leq 0$. On montre par récurrence sur r que

$$\forall r \geq 1 \ \ x_{2r} = \underbrace{\tau\sigma\tau\dots\tau}_{2r-1}\sigma^2\underbrace{\tau\sigma\tau\dots\tau}_{2r-1} = (\tau\sigma)^r(\sigma\tau)^r \tag{5-9}$$

$$\forall r \geq 0 \ \ x_{2r+1} = (\underbrace{\tau\sigma\tau\dots\tau}_{2r+1})^2 = ((\tau\sigma)^r\tau)^2 \tag{5-10}$$

$$\forall r \geq 0 \ \ x_{-2r} = (\underbrace{\sigma\tau\sigma\dots\sigma}_{2r+1})^2 = ((\sigma\tau)^r\sigma)^2 \tag{5-11}$$

$$\forall r \geq 1 \ \ x_{-2r+1} = \underbrace{\sigma\tau\sigma\dots\sigma}_{2r-1}\tau^2\underbrace{\sigma\tau\sigma\dots\sigma}_{2r-1} = (\sigma\tau)^r(\tau\sigma)^r \tag{5-12}$$

D'autre part, on a $u_1 = x_1$, $u_0 = x_0$, $u_r = x_r x_{r-1}^{-1}$ pour $2 \leq r \leq \frac{m}{2}$, $u_{m-r} = x_{1-r}^{-1} x_{-r}$ pour $1 \leq r < \frac{m-1}{2}$. Posons $\tilde{x}_r = x_r Z^{\frac{-r}{m}}$ pour $r \geq 1$, $\tilde{x}_{-r} = x_{-r} Z^{-\frac{r+1}{m}}$ pour $r \leq 0$ de telle sorte que $\tilde{x}_r \in P'(\Bbbk)$. On a alors

$$\forall r \geq 1, \quad J(\tilde{x}_r) = \tilde{x}_{-r+1}. \tag{5-13}$$

Si m est impair, considérons les deux ensembles

$$\{\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\frac{m-1}{2}}, \tilde{u}_{\frac{m+3}{2}}, \dots, \tilde{u}_{m-1}\} = \{\tilde{u}_0, \dots, \widehat{\tilde{u}_{\frac{m+1}{2}}}, \dots, \tilde{u}_{m-1}\}$$

et $\{\tilde{x}_{-\frac{m-3}{2}}, \dots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\frac{m-1}{2}}\}$. Le groupe $P'(\Bbbk)$ est libre sur le premier ensemble, donc sur le deuxième d'après les identités précédentes. Pour construire un morphisme $\widetilde{\Phi} : P'(\Bbbk) \to \mathcal{A}'(\Bbbk)$ il suffit donc de déterminer ses valeurs sur l'un de ces deux ensembles.

Si m est pair, la relation $\tilde{u}_{m-1} \dots \tilde{u}_0 = 1$ est équivalente à $\tilde{x}_{\frac{m}{2}} \tilde{x}_{1-\frac{m}{2}} = 1$. Pour construire un morphisme $\widetilde{\Phi} : P'(\Bbbk) \to \mathcal{A}'(\Bbbk)$ il suffit donc de déterminer des valeurs $\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_r)$ telles que $\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{\frac{m}{2}})\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{1-\frac{m}{2}}) = 1$.

Pour tout $\Phi \in \mathcal{A}'(\Bbbk)^*$ tel que $\Phi \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_1(\Bbbk)$, on note

$$\sigma_\Phi = se^{t_0}, \quad \tau_\Phi = \Phi\omega se^{t_1}\Phi^{-1} \in \mathfrak{B}'(\Bbbk)$$

et on définit un morphisme $\widetilde{\Phi} : P'(\Bbbk) \to \mathcal{A}'(\Bbbk)^*$ par les formules de la table 1. On en déduit les valeurs de $\widetilde{\Phi}$ sur les éléments $\tilde{u}_r$ (table 2). Soit enfin $\Phi' = \mathfrak{J}(\Phi^{-1})$. Comme $J(\tilde{x}_r) = \tilde{x}_{1-r}$ et $\mathrm{Ad}(\Phi) \circ \mathfrak{J}$ envoie $\sigma_{\Phi'}$ et $\tau_{\Phi'}$ respectivement sur τ_Φ et σ_Φ, on a

$$\mathrm{Ad}(\Phi) \circ \mathfrak{J} \circ \widetilde{\Phi}' = \widetilde{\Phi} \circ J \tag{5-14}$$

$$
\begin{array}{lll}
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{2r}) & = (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r (\sigma_\Phi \tau_\Phi)^r & \text{si } 1 \leq 2r < \frac{m}{2} \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{2r+1}) & = ((\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r \tau_\Phi)^2 & \text{si } 1 \leq 2r+1 < \frac{m}{2} \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{-2r}) & = ((\sigma_\Phi \tau_\Phi)^r \sigma_\Phi)^2 & \text{si } 1 - \frac{m}{2} < -2r \leq 0 \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{-2r+1}) & = (\sigma_\Phi \tau_\Phi)^r (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r & \text{si } 1 - \frac{m}{2} < -2r+1 \leq 0 \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{\frac{m}{2}}) & = \omega^{\frac{m}{2}} (\sigma_\Phi^{-1} \tau_\Phi^{-1})^{\frac{m}{4}} (\sigma_\Phi \tau_\Phi)^{\frac{m}{4}} & \text{si } m/2 \text{ est pair} \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{1-\frac{m}{2}}) & = \omega^{\frac{m}{2}} (\tau_\Phi^{-1} \sigma_\Phi^{-1})^{\frac{m}{4}} (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^{\frac{m}{4}} & \text{si } m/2 \text{ est pair} \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{\frac{m}{2}}) & = \omega^{\frac{m}{2}} (\underbrace{\sigma_\Phi^{-1} \tau_\Phi^{-1} \dots}_{\frac{m}{2}})(\underbrace{\tau_\Phi \sigma_\Phi \dots}_{\frac{m}{2}}) & \text{si } m/2 \text{ est impair} \\
\widetilde{\Phi}(\tilde{x}_{1-\frac{m}{2}}) & = \omega^{\frac{m}{2}} (\underbrace{\tau_\Phi^{-1} \sigma_\Phi^{-1} \dots}_{\frac{m}{2}})(\underbrace{\sigma_\Phi \tau_\Phi \dots}_{\frac{m}{2}}) & \text{si } m/2 \text{ est impair}
\end{array}
$$

TABLE 1. Valeurs de $\widetilde{\Phi}$ sur la famille $\tilde{x}$

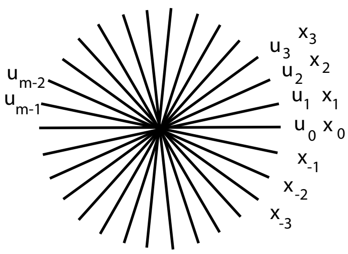

FIGURE 3. (u_r) et (x_r)

5.3. Existence et unicité d'une solution. — Pour tout $n \geq 0$ on note $\mathcal{A}'_n(\Bbbk)$ l'idéal de $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ formé des éléments de valuation au moins n.

Notons $\tilde{u}_i = \exp v_i$, $v_i \in L'(\Bbbk)$, et $\mathrm{d}\widetilde{\Phi} : L'(\Bbbk) \to \mathcal{A}'(\Bbbk)$ l'application tangente. On déduit des formules de la table 2 que, pour tout $0 \leq i \leq m-1$, on a $\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(v_i) \equiv 2t_i \mod \mathcal{A}'_2(\Bbbk)$. C'est immédiat pour m impair (pour $i = m-1$ on utilise $\tilde{u}_{m-1} \dots \tilde{u}_1 \tilde{u}_0 = 1$), et pour m pair les seuls cas non

Pour tout m :	
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{2r}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^r \bullet \sigma_\Phi^2$	$2 \leq 2r < \frac{m}{2}$
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{2r+1}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^r \bullet \tau_\Phi^2$	$2 \leq 2r+1 < \frac{m}{2}$
Pour m impair :	
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{2r}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{\frac{2r-1-m}{2}} \bullet \tau_\Phi^2$	$\frac{m+1}{2} < 2r \leq m-1$
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{2r+1}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{\frac{2r+1-m}{2}} \bullet \sigma_\Phi^2$	$\frac{m+1}{2} < 2r+1 \leq m-1$
Pour m pair :	
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{m-2r}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{-r} \bullet \sigma_\Phi^2$	$1 \leq 2r < \frac{m-2}{2}$
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{m-2r+1}) = (\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{-r} \bullet \tau_\Phi^2$	$1 \leq 2r+1 < \frac{m-2}{2}$
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{\frac{m}{2}}) = \omega^{\frac{m}{2}}(\sigma_\Phi^{-1}\tau_\Phi^{-1})^{\frac{m}{4}}\sigma_\Phi^2(\sigma_\Phi^{-1}\tau_\Phi^{-1})^{\frac{m}{4}}$	$\frac{m}{2}$ pair
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{\frac{m}{2}}) = \omega^{\frac{m}{2}}(\underbrace{\sigma_\Phi^{-1}\tau_\Phi^{-1}\dots}_{\frac{m}{2}})\tau_\Phi^2(\underbrace{\tau_\Phi^{-1}\sigma_\Phi^{-1}\dots}_{\frac{m}{2}})$	$\frac{m}{2}$ impair
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{\frac{m}{2}+1}) = \omega^{\frac{m}{2}}(\sigma_\Phi^{-1}\tau_\Phi^{-1})^{\frac{m}{4}}\tau_\Phi^2(\tau_\Phi^{-1}\sigma_\Phi^{-1})^{\frac{m}{2}}(\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{\frac{m}{4}}$	$\frac{m}{2}$ pair
$\widetilde{\Phi}(\tilde{u}_{\frac{m}{2}+1}) = \omega^{\frac{m}{2}}(\sigma_\Phi^{-1}\tau_\Phi^{-1})^{\frac{m-2}{4}}(\tau_\Phi^{-1}\sigma_\Phi^{-1})^{\frac{m}{2}}\sigma_\Phi^2(\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{\frac{m-2}{4}}$	$\frac{m}{2}$ impair

TABLE 2. Valeurs de $\widetilde{\Phi}$ sur la famille $\tilde{u}$

triviaux sont $i \in \{\frac{m}{2}, 1+\frac{m}{2}\}$. Dans ces cas, on remarque $(\tau_\Phi\sigma_\Phi)^{\frac{m}{2}} \equiv \omega^{\frac{m}{2}}$ modulo $\mathcal{A}'_2(\mathbb{k})$, qui découle de ce que $\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \omega^{-k} - \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} s\omega^k \in \mathbb{k}W$ agit par 0 sur la composante homogène de degré 1 de $\mathcal{A}'(\mathbb{k})$.

En particulier, si $\Phi^1 \equiv \Phi^2 \mod \mathcal{A}'_r(\mathbb{k})$ on a $\mathrm{d}\widetilde{\Phi}^1(v_i) \equiv \mathrm{d}\widetilde{\Phi}^2(v_i) \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k})$. On peut alors considérer l'équation (5-4) pour $\Phi \in \mathcal{A}'(\mathbb{k})$ tel que $\Phi \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$.

PROPOSITION 5.1. — *Il existe un unique* $\Phi \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$ *dans* $\mathcal{A}'(\mathbb{k})$ *qui vérifie (5-4). De plus, un tel* Φ *appartient à* $\exp \mathfrak{g}'(\mathbb{k})$.

Démonstration. — On a $\partial\Phi, \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \in \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$ donc (5-4) est vérifiée modulo $\mathcal{A}_1(\mathbb{k})$. Supposons démontré qu'existe $\Phi \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$ vérifiant (5-4) modulo $\mathcal{A}'_r(\mathbb{k})$ pour un certain $r \geq 1$, et que toute autre solution soit congrue à Φ modulo $\mathcal{A}'_r(\mathbb{k})$. Pour montrer la même chose au rang $r+1$, il suffit de montrer qu'existe un unique $\Phi' \in \mathcal{A}'(\mathbb{k})$ homogène de degré r tel que $\Phi + \Phi'$ soit solution de (5-4) modulo $\mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k})$, c'est-à-dire

$$(\partial\Phi + \partial\Phi')(\Phi + \Phi')^{-1} \equiv -\mathrm{d}\left(\widetilde{\Phi + \Phi'}\right)(\psi) \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k}).$$

Or $\mathrm{d}\widetilde{\Phi+\Phi'}(v_i) \equiv \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(v_i) \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k})$ donc $\mathrm{d}\widetilde{\Phi+\Phi'}(\psi) \equiv \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k})$. D'autre part $\partial\Phi + \partial\Phi' \in \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$ donc

$$(\partial\Phi + \partial\Phi')(\Phi + \Phi')^{-1} \equiv (\partial\Phi + \partial\Phi')\Phi^{-1} \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k}),$$

et l'équation est équivalente à $(\partial\Phi + \partial\Phi')\Phi^{-1} \equiv -\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \mod \mathcal{A}'_{r+1}(\mathbb{k})$ c'est-à-dire $\partial\Phi' \equiv -\left(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi)\right)\Phi - \partial\Phi$ et $\partial\Phi'$ est uniquement déterminé. Enfin, ∂ se restreint en une bijection sur chacune des composantes homogènes de degré au moins 1 de $\mathcal{A}'(\mathbb{k})$, donc Φ' existe et est uniquement déterminé, ce qui nous permet de conclure par récurrence l'existence et l'unicité d'une solution.

Comme $\psi \in \mathcal{G}(\mathbb{k})$ et d'après les formules de la table 2 on a $\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \in \exp \mathfrak{g}'(\mathbb{k})$ donc $\Delta(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi)) = \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \otimes \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi)$. Par l'action naturelle de $\mathbb{k}^\times$ sur $\mathcal{A}'(\mathbb{k})\widehat{\otimes}\mathcal{A}'(\mathbb{k})$ on peut définir, de façon analogue à ∂, une dérivation de $\mathcal{A}'(\mathbb{k})\widehat{\otimes}\mathcal{A}'(\mathbb{k})$ que l'on note encore ∂. On a

$$\partial(\Phi \otimes \Phi) = \partial\Phi \otimes \Phi + \Phi \otimes \partial\Phi = -(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi))(\Phi \otimes \Phi)$$

soit $\partial(\Phi \otimes \Phi) = -\Delta(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi))(\Phi \otimes \Phi)$.

Comme $\Delta \circ \partial$ et $\partial \circ \Delta$ sont deux applications linéraires continues $g : \mathcal{A}'(\mathbb{k}) \to \mathcal{A}'(\mathbb{k})\widehat{\otimes}\mathcal{A}'(\mathbb{k})$ qui vérifient toutes deux l'équation $g(RS) = g(R)\Delta(S) + \Delta(R)g(S)$ et coïncident sur les générateurs (t_i), on a $\Delta \circ \partial = \partial \circ \Delta$ et $\partial(\Delta(\Phi)) = \Delta(\partial\Phi) = -\Delta(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi))\Delta(\Phi)$. Ainsi $\Phi \otimes \Phi$ et $\Delta(\Phi)$ ont la même image par l'application $K \mapsto (\partial K)K^{-1}$, donc ils sont égaux parce qu'ils ont même terme constant, donc Φ est grouplike c'est-à-dire $\Phi \in \exp \mathfrak{g}'(\mathbb{k})$.

□

Corollaire. — *Si* $\Phi \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_1(\mathbb{k})$ *et* Φ *vérifie (5-4), alors* $\Phi^{-1} = \mathfrak{J}(\Phi)$.

Démonstration. — On pose $\Phi' = \mathfrak{J}(\Phi^{-1})$. D'après (5-14) on a $\mathrm{Ad}(\Phi) \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi}' = \mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ J$. D'autre part, comme $\psi \in \mathcal{G}'(\mathbb{k}]$ on a $J(\psi) = -\psi$ Alors $\Phi'\mathfrak{J}(\Phi) = 1$ implique

$$D(\Phi') = -\Phi' \bullet \mathfrak{J}(D(\Phi)) = -\Phi' \bullet \mathfrak{J}(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(-\psi)) = -\Phi' \bullet \mathfrak{J} \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ J(\psi)$$

Or $\mathrm{Ad}(\Phi') \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ J = \mathrm{Ad}(\Phi') \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{Ad}(\Phi) \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi}' = \mathrm{Ad}(\Phi'\mathfrak{J}(\Phi)) \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi}' = \mathrm{d}\widetilde{\Phi}'$ d'où Φ' vérifie (5-4) d'où $\Phi = \Phi'$ et $\Phi^{-1} = \mathfrak{J}(\Phi)$ par unicité.

□

Il reste à vérifier qu'une telle solution vérifie l'équation du demi-tour.

5.4. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}'(\Bbbk)$. — Soit $(l,\psi) \in \mathcal{G}'(\Bbbk)$. Comme $J(f) = f^{-1}$ pour tout $(\lambda, f) \in G'(\Bbbk)$ on a, d'une part $J(\psi) = -\psi$, d'autre part les équations (4-6) se simplifient. En effet, posons $F = \hat{\sigma} f^{-1}$. On a $L = F((\tau\sigma)^{\frac{m+1}{2}} \bullet F) = F(\tau \bullet J(F))$. De même $M = (\tau^{-1} \bullet F)J(F)$ d'où $(\sigma\tau)^{-k} \bullet M = \tau^{-1}(\tau\sigma)^{-k} \bullet (F(\tau \bullet J(F)))$. Posons $F' = F(\tau \bullet J(F))$. Puisque τ commute à $\hat{O}$ lorsque m est pair, on en déduit que f vérifie les équations

$$\left(\prod_{k=\frac{m-1}{2}}^{1} (\tau\sigma)^{-k} \bullet F'\right) F = \hat{O}, \prod_{k=\frac{m}{2}-1}^{0} (\tau\sigma)^{-k} \bullet F' = \hat{O} \tag{5-15}$$

suivant que m est pair ou impair.

Pour linéariser (5-15) on pose $\lambda = 1 + \epsilon l$, $f = \exp(\epsilon\psi)$ avec $\psi \in L'(\Bbbk)$, $\epsilon^2 = 0$. On a $\sigma^2 = u_0 = \exp(v_0)$ d'où $\hat{\sigma} = \exp(\epsilon \frac{l}{2} v_0)$, $\hat{O} = \exp(\epsilon \frac{l}{2} z)$. On en déduit $F = \hat{\sigma} f^{-1} = \exp \epsilon(\frac{l}{2} v_0 - \psi)$ et $\tau \bullet J(F) = \exp \epsilon(\frac{l}{2} v_1 - \tau \bullet J(\psi))$. Soient $X_0, \ldots, X_{m-1}$ une famille d'indéterminées indexée par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et $\mathcal{R} = \Bbbk \ll X_0, \ldots, X_{m-1} \gg /(e^{X_{m-1}} \ldots e^{X_0} - 1)$. On note η l'automorphisme de $\mathcal{R}$ défini par $X_i \mapsto X_{i+1}$, et pour $S \in \mathcal{R}$ on note $\eta.S$ l'image de S par cet endomorphisme. Pour tout m-uplet $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1})$ d'éléments de $L'(\Bbbk)$ ou $\mathcal{A}'_1(\Bbbk)$ tels que $e^{x_{m-1}} \ldots e^{x_0} = 1$ on définit $S(\underline{x})$ par spécialisation. Soit $\underline{\tilde{v}} = (\tilde{v}_0, \ldots, \tilde{v}_{m-1})$, avec $\tilde{v}_i = v_i - \frac{z}{m}$ et $S \in \mathcal{R}$ telle que $\psi = S(\underline{\tilde{v}})$.

On a $(\tau\sigma) \bullet \tilde{v}_r = \tilde{v}_{r+2}$ et on vérifie facilement $\tau^{-1} \bullet u_r = J(u_{r-1})$ donc $\tilde{v}_r = \tau \bullet J(\tilde{v}_{r-1})$. On en déduit que $\tau \bullet J(\psi) = (\eta.S)(\underline{\tilde{v}})$ et $\tau\sigma \bullet \psi = (\eta^2.S)(\underline{\tilde{v}})$. On déduit alors de (5-15) que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \eta^k.S(\underline{\tilde{v}}) - \frac{l}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{v}_k = 0 \tag{5-16}$$

On en déduit que, pour tout m-uplet $\underline{d} \in \mathcal{A}'_1(\Bbbk)^m$ tel que $e^{d_{m-1}} \ldots e^{d_0} \equiv 1 \mod \mathcal{A}_{n+1}(\Bbbk)$,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k.S(\underline{d}) - \frac{l}{2} \sum_{k=0}^{m-1} d_k \equiv 0 \mod \mathcal{A}'_{n+1}(\Bbbk) \tag{5-17}$$

5.5. L'équation du demi-tour. — On suppose que Φ satisfait (5-4), et on pose $\mathrm{P} = \Phi e^{t_1}$, $\xi = \Phi e^{t_1}(\omega s \bullet \Phi^{-1})e^{t_2}$. Les équations (3-3) et (3-5) s'écrivent alors $Q = 1$ avec

$$Q = \prod_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (\omega^r \bullet \xi), Q = \left[\prod_{r=0}^{\frac{m-3}{2}} (\omega^r \bullet \xi) \right] (\omega^{\frac{m-1}{2}} \bullet \mathrm{P})$$

suivant que m est pair ou impair. On a $\mathrm{P}\omega s\Phi = \tau_\Phi$ et $\tau_\Phi \sigma_\Phi = \xi\omega$ d'où

$$\prod_{r=0}^{n-1} (\omega^r \bullet \xi) = (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^n \omega^{-n}.$$

Posons $D(Q) = (\partial Q)Q^{-1}$. De $D(AB) = D(A) + A \bullet D(B)$ on déduit $D(\Phi^{-1}) = -\Phi \bullet D(\Phi)$ et $D(\xi) = D(\Phi) + \mathrm{P} \bullet t_1 - \tau_\Phi \bullet D(\Phi) + \xi \bullet t_2$. On note $q_0 = 1$, $q_1 = \mathrm{P}$, $q_{2r} = (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r$, $q_{2r+1} = (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r \mathrm{P}$, et $t'_r = q_r \bullet t_r$. Ainsi

$$D(Q) = \sum_{r=1}^{m} t'_r + \sum_{r=0}^{\frac{m-1}{2}} (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r \bullet D(\Phi) - \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}-1} (\tau_\Phi \sigma_\Phi)^r \tau_\Phi \bullet D(\Phi)$$

que m soit pair ou impair. On veut montrer $Q = 1$. Pour ce faire, on va montrer par récurrence $Q \equiv 1 \mod \mathcal{A}'_n(\Bbbk)$ pour tout $n \geq 1$. On note que, à n fixé, c'est équivalent à $D(Q) \equiv 0$. Soit donc $n \geq 1$. A partir de maintenant, les congruences seront toujours comprises modulo $\mathcal{A}_{n+1}(\Bbbk)$. On suppose donc que $Q \equiv 1 + R$ avec R polynôme de Lie homogène de degré n. En utilisant les formules de la table (2) on en déduit par un calcul direct les formules

$$\forall r \geq 0 \quad t'_{r+m} \equiv t'_r \tag{5-18}$$

$$\forall r \in [0, m-1] \quad \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\tilde{v}_r) \equiv 2t'_r. \tag{5-19}$$

D'autre part, en utilisant les identités $q_{2r+1}^{-1} q_{2r} = \omega^2 \bullet (e^{-t_1}\Phi^{-1})$ et $q_{2r}^{-1} q_{2r-1} = \omega^r s \bullet (e^{-t_0}\Phi)$, on montre par récurrence sur $r \in [1, m-1]$ la formule

$$e^{2t'_{m-1}} e^{2t'_{m-2}} \dots e^{2t'_{m-r}} \equiv Q e^{-t_0} (s \bullet q_r) e^{t_{m-r}} q_{m-r}^{-1} \tag{5-20}$$

En particulier, pour $r = m-1$ on a

$$e^{2t'_{m-1}} \dots e^{2t'_1} \equiv Q e^{-t_0} (s \bullet Q) e^{-t_0}$$

On pose $t''_{m-1} = t'_{m-1} - R$, $t''_1 = t'_1 - (s \bullet R)$, $t''_i = t'_i$ si $i \notin \{1, m-1\}$ et $\underline{t}'' = (t''_0, \dots, t''_{m-1})$, de telle façon que $e^{2t''_{m-1}} \dots e^{2t''_0} \equiv 1$. On utilise maintenant

$$D(\Phi) = -\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) = -\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(S(\underline{v})) = -S(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\underline{v})) \equiv -S(\underline{t}'')$$

On en déduit $(\tau_\Phi\sigma_\Phi)^k \bullet D(\Phi) \equiv -S((\tau_\Phi\sigma_\Phi)^k \bullet \underline{t}'') \equiv -(\eta^{2k}.S)(\underline{t}'')$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\tau_\Phi \bullet D(\Phi) &= -\tau_\Phi \bullet \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) & &= \tau_\Phi \bullet \mathrm{d}\widetilde{\Phi} \circ J(\psi)\\ &= \mathrm{Ad}(\tau_\Phi \Phi) \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi) &&= \Phi\omega s e^{t_1} \bullet \mathfrak{J}(\mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi))\\ &= \mathfrak{J}(\Phi^{-1} s e^{t_0} \bullet \mathrm{d}\widetilde{\Phi}(\psi))\end{aligned}$$

Comme on déduit des définitions que $\Phi^{-1} s e^{t_0} \bullet t'_r = \mathfrak{J}(t'_{r+1})$, on a

$$\tau_\Phi \bullet D(\Phi) \equiv \mathfrak{J}(\Phi^{-1} s e^{t_0} \bullet S(\underline{t}'')) \equiv (\eta.S)(\underline{t}'')$$

et plus généralement $(\tau_\Phi\sigma_\Phi)^k \tau_\Phi \bullet D(\Phi) \equiv (\eta^{2k+1}.S)(\underline{t}'')$. On a donc

$$D(Q) \equiv t'_1 + \cdots + t'_m - \sum_{k=0}^{m-1} (\eta^k.S)(\underline{t}'')$$

Appliquant (5-17) avec $l = 1$ on en déduit $D(Q) \equiv R + s \bullet R$. En utilisant $\mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}$ si m est impair et la centralité de $\omega^{\frac{m}{2}}$ dans le cas pair, on a $\omega \bullet Q = \xi^{-1} \bullet Q$ donc $\omega \bullet R = R$. Ainsi la classe de $D(Q)$, donc R, est invariant sous l'action de W, et $D(Q) \equiv nR \equiv 2R$. Ainsi $R = 0$, sauf peut-être si $n = 2$. Pour conclure il nous suffirait de montrer que l'espaces des polynômes de Lie homogènes de degré 2 n'admet pas de vecteur invariant pour l'action de W. C'est vrai si m est impair.

En effet, notons V (resp. V') l'espace des éléments homogènes de degré 1 de $\mathcal{A}(\Bbbk)$ (resp. $\mathcal{A}'(\Bbbk)$) muni de l'action restreinte de W. Sous cette action, $V \simeq V' \oplus \mathbb{1}$, et $\Lambda^2 V \simeq \Lambda^2 V' \oplus V'$. Il suffit de montrer que $E = \Lambda^2 V$ ne contient pas la représentation triviale de W. On constate aisément que le caractère χ_E de E vaut 0 sur les rotations non triviales et $\frac{1-m}{2}$ sur les réflections. Comme $\dim E = \frac{m(m-1)}{2}$ on en déduit que le produit scalaire de χ_E avec $\mathbb{1}$ est nul, ce qui conclut.

Dans le cas pair, il nous faut utiliser de plus l'invariance par $\mathfrak{J}$. Comme $\mathfrak{J}(\Phi) = \Phi^{-1}$ on a $\mathfrak{J}(\xi) = \Phi^{-1} s e^{t_0} \bullet \xi$ et $\mathfrak{J}(Q) = (\Phi^{-1} e^{t_0}) \bullet (s \bullet Q)$ donc $\mathfrak{J}(Q) \equiv s \bullet Q \equiv Q$ et R est invariant sous l'action de $\mathfrak{J}$. La conclusion découle alors du fait que l'espace des polynômes de Lie homogènes de degré 2 de $\mathcal{A}'(\Bbbk)$ invariants par W et $\mathfrak{J}$ est nul.

En effet, si l'on note $\Omega = \mathrm{Ad}(s) \circ \mathfrak{J} \circ \mathrm{Ad}(\omega)$, $S = \mathrm{Ad}(s)$. Alors $\Omega(t_r) = t_{r+1}$, $\Omega \circ S \circ \Omega = S$, $S^2 = 1$. Soit W' le groupe diédral engendré par Ω et S. Il suffit de montrer que $E = \Lambda^2 V$ ne contient pas de vecteur invariant par W'. Le caractère χ_E de E vaut 0 sur les rotations non triviales, $\chi_E(\Omega^{\frac{m}{2}}) = -m/2$, $\chi_E(S) = (4-m)/2$ et $\chi_E(S\Omega^{\frac{m}{2}}) = (2-m)/2$. On en déduit $(\chi_E \mid \mathbb{1}) = 0$, ce qui conclut.

6. Appendice 1 : équations Fuchsiennes formelles

Nous établissons ici des résultats bien connus sur les équations différentielles fuchsiennes à valeurs dans une algèbre de Hopf complète, pour lesquels nous n'avons pas trouvé de référence convenable.

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini, et M le monoïde libre sur $\mathcal{X}$. On note $\emptyset$ son élément neutre, et $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha \star \beta$ son produit de concatenation. Pour tout corps $\mathbb{k}$ on note $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ la $\mathbb{k}$-algèbre de Magnus sur $\mathcal{X}$, c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles sur $\mathbb{k}$ en les variables non commutatives éléments de $\mathcal{X}$. Si $\mathbb{k}$ est un corps topologique, on munit $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple, et de sa graduation naturelle $\mathcal{M}(\mathbb{k}) = \prod \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{k})$ et des projections naturelles $\pi_\alpha : \mathcal{M}(\mathbb{k}) \to \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{k}) = \mathbb{k}$ pour $\alpha \in M$. Enfin, on note $\omega : \mathcal{M}(\mathbb{k}) \to \mathbb{N}$ la valuation associée à la graduation totale ($\omega(x) = 1$ pour $x \in \mathcal{X}$).

Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ (resp. $U \subset \mathbb{R}$) on dit classiquement que $C : U \to \mathcal{M}(\mathbb{C})$ (resp. $C : U \to \mathcal{M}(\mathbb{R})$) est analytique sur U si et seulement si $\pi_\alpha \circ C$ est analytique sur U pour tout $\alpha \in M$.

Soient $A \in \mathcal{X}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |z| < 1\}$ et $C : D \to \mathcal{M}(\mathbb{C})$ analytique sur D telle que, pour tout $z \in D$, $C(\overline{z}) = \overline{C(z)}$ et $\omega(C(z)) \geq 1$. On considère l'équation différentielle

$$G'(z) = \left(\frac{A}{z} + C(z)\right) G(z) \tag{6-1}$$

Elle se restreint en une équation différentielle réelle sur $]0,1[$,

$$G'(x) = \left(\frac{A}{x} + C(x)\right) G(x) \tag{6-2}$$

Lemme 13. — *Il existe une seule solution G_+ de (6-2) sur $]0,1[$ telle que $G_+(x) \sim x^A$ quand $x \to 0^+$.*

Dans cet énoncé, $x^A = \exp(A\log(x))$, et $G(x) \sim x^A$ signifie que $G(x)x^{-A}$ est une fonction analytique sur $]-1,1[$, qui vaut 1 en 0.

Démonstration. — On cherche $G_+(x)$ sous la forme $P(x)x^A$ avec P analytique et $P(0) = 1$. Ainsi $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$, $p_0 = 0$ et $p_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. L'équation (6-2) se réécrit sous la forme

$$P(x)\frac{A}{x} + P'(x) = \frac{A}{x}P(x) + C(x)P(x)$$

soit $(*)$ $xP'(x) + [P(x), A] = xC(x)P(x)$. Notons $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. L'équation implique alors

$$np_n + [p_n, A] = \sum_{r+s=n} c_{r+1} p_s$$

pour tout $n \geq 0$. Le membre de droite ne comporte que des p_s pour $s < n$, donc l'unicité et l'existence d'une solution formelle découlent par récurrence de l'inversibilité dans $\mathcal{M}(\Bbbk)$, pour tout $n \geq 1$, de l'opérateur $n - \mathrm{ad}(A)$. Il reste à vérifier l'analyticité de P ainsi défini.

Notons

$$P(x) = \sum_{\alpha \in M} f_\alpha(x)\alpha, \quad C(x) = \sum_{\alpha \in M} g_\alpha(x)\alpha$$

avec $f_\alpha, g_\alpha \in \mathbb{R}[[x]]$, les g_α étant analytiques. Comme $P(0) = 0$, on a $f_\alpha(0) = 0$ si $\omega(\alpha) \geq 1$, $f_\emptyset(0) = 1$. L'équation $(*)$ s'écrit alors

$$\sum_{\alpha \in M} \left(x f'_\alpha(x)\alpha + f_\alpha(x)(\alpha \star A - A \star \alpha) - \sum_{\beta \star \gamma = \alpha} x g_\beta(x) f_\gamma(x)\alpha \right) = 0.$$

En particulier $xf'_\emptyset(x) = xg_\emptyset(x)f_\emptyset(x)$ donc $f'_\emptyset(x) = g_\emptyset(x)f_\emptyset(x)$ pour $x \neq 0$. Or $g_\emptyset(x) = 0$ donc $f'_\emptyset(x) = 0$ et comme $f_\emptyset(0) = 1$, on a $f_\emptyset(x) = 1$.

Pour tout $\alpha \in M$, on note α' (resp. α'') l'unique monôme tel que $\alpha = \alpha' \star A$ (resp. $\alpha = A \star \alpha''$) s'il existe, $\dagger$ sinon et on pose $f_\dagger(x) = 0$. Comme $g_\emptyset(x) = 0$ on a, pour tout α tel que $\omega(\alpha) \geq 1$,

$$f'_\alpha(x) = \frac{f_{\alpha''}(x) - f_{\alpha'}(x)}{x} + \sum_{\substack{\beta \star \gamma = \alpha \\ \omega(\gamma) < \omega(\alpha)}} g_\beta(x) f_\gamma(x).$$

Supposons que les $f_\gamma(x)$ pour $\omega(\gamma) < \omega(\alpha)$ soient analytiques sur $]-1, 1[$. De plus $f_\gamma(0) = 0$, sauf si $\gamma = \emptyset$. Ainsi $f_{\alpha''}(0) = f_{\alpha'}(0) = 0$ sauf si $\alpha = A$. Mais alors $\alpha' = \alpha'' = \emptyset$ et $f_{\alpha''}(x) - f_{\alpha'}(x) = 0$. Dans tous les cas on en déduit que $f'_\alpha(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ et admet un rayon de convergence au moins égal à 1. Il en est donc de même pour f_α, et on conclut par récurrence sur $\omega(\alpha)$. □

On démontre de la même façon le lemme

Lemme 14. — *Il existe une seule solution G_- de (6-2) sur $]-1, 0[$ telle que $G_-(x) \sim (-x)^A$ quand $x \to 0^-$.*

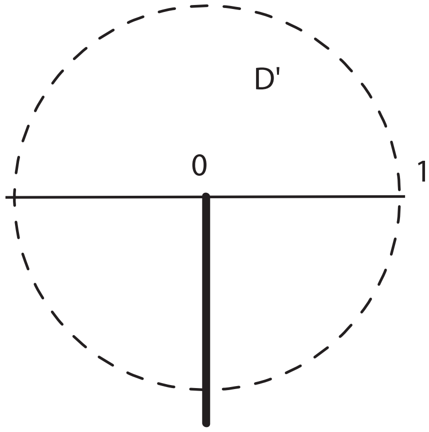

FIGURE 4. Le domaine D'

On montre facilement que ces solutions G_+, G_- s'étendent analytiquement au domaine complexe simplement connexe $D' = D \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}_-$ (voir figure 4) en des solutions de l'équation (6-1). Pour étudier ces prolongements, on introduit $\mathrm{Log}(z)$, branche du logarithme complexe défini comme le prolongement de $\log(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ sur D' et, pour $z \in D'$, on note $z^A = \exp(A\mathrm{Log}(z))$. On a, pour $x \in]0,1[$, $\mathrm{Log}(-x) = \log(x) + \mathrm{i}\pi$ d'où

$$(-x)^A = \exp(A\mathrm{Log}(-x)) = \exp\left(A(\mathrm{i}\pi + \log x)\right) = x^A \exp(\mathrm{i}\pi A).$$

Notons alors $\tilde{G}(z) = G_+(z)e^{-\mathrm{i}\pi A}$. C'est une fonction analytique sur D' qui vérifie l'équation (6-1). Il existe une unique fonction $P_+(x)$ analytique réelle sur $]-1,1[$ telle que $G_+(x) = P_+(x)x^A$ pour tout $x \in]0,1[$. On en déduit $G_+(z) = P_+(z)z^A$ pour tout $z \in D'$. En particulier, pour $x \in]-1,0[$,

$$\tilde{G}(x) = P_+(x)x^A e^{-\mathrm{i}\pi A} = P_+(x)(-x)^A.$$

On en déduit que $\tilde{G}(x)$ est une fonction analytique réelle sur $]-1,0[$ telle que $\tilde{G}(x) \sim (-x)^A$ quand x tend vers 0^-. D'après le lemme 14 cela signifie

LEMME 15. — *Pour tout* $x \in]-1,0[$, $G_+(x) = G_-(x)e^{\mathrm{i}\pi A}$

L'algèbre $\mathcal{M}(\Bbbk)$ est la complétion de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre sur $\mathcal{X}$. Elle est donc munie d'une structure d'algèbre de Hopf complète au sens de [Qu]. Soit $V \subset \mathbb{Q}\mathcal{X} \subset \mathcal{M}(\Bbbk)$ un sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires rationnelles d'éléments de $\mathcal{X}$. On note $\mathcal{U}(\Bbbk)$ le quotient de $\mathcal{M}(\Bbbk)$ par l'idéal de Hopf fermé qu'il engendre, et $\mathcal{U}^1(\Bbbk) = \Bbbk\mathcal{X}/V \otimes \Bbbk \subset \mathcal{U}(\Bbbk)$. Soient A l'image dans $\mathcal{U}(\Bbbk)$ d'un $\hat{A} \in \mathcal{X}$ et $C : D \to \mathcal{U}^1(\mathbb{C})$ tel que $C(\overline{z}) = \overline{C(z)}$. Si l'on considère l'équation 6-2 avec cette fois G à valeurs dans $\mathcal{U}(\mathbb{R})$, les lemmes précédents sont encore valables. En effet, l'unicité des solutions se démontre de la même façon, et leur existence découle d'un relèvement de A en $\hat{A}$ et de C en une fonction analytique $\hat{C} : D \to \mathcal{M}(\mathbb{C})$. On invoquera donc ces lemmes également dans ce cadre.

Soit Δ le coproduit de $\mathcal{U}(\Bbbk)$, et notons $B(z) = \frac{A}{z} + C(z)$. Pour tout $z \in D'$, comme $C(z)$ est primitif $B(z)$ l'est également. Alors

$$\Delta(G(z))' = \Delta(G'(z)) = \Delta(B(z))\Delta(G(z)) = (B(z)\otimes 1 + 1\otimes B(z))\Delta(G(z))$$

Soit $\hat{G}(z) = G(z) \otimes G(z)$. On a

$$\hat{G}'(z) = G'(z) \otimes G(z) + G'(z) \otimes G(z) = (B(z) \otimes 1 + 1 \otimes B(z))\hat{G}(z)$$

Ainsi, $G(z)\otimes G(z)$ et $\Delta(G(z))$ vérifient la même équation différentielle, et la même condition asymptotique parce que z^A est grouplike. Le lemme 13 appliqué à $\mathcal{U}(\Bbbk)\widehat{\otimes}\mathcal{U}(\Bbbk)$ considéré comme quotient de l'algèbre de Magnus sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ permet de conclure la démonstration du lemme suivant :

Lemme 16. — *Si $C(x)$ est primitif pour tout $x \in]-1, 1[$ alors, pour tout $z \in D'$, $G_+(z)$ et $G_-(z)$ sont grouplike.*

7. Appendice 2 : le cas $m = 3$ et les associateurs de Drinfeld

7.1. Associateurs de Drinfeld et associateurs diédraux. — Soit $\lambda \in \Bbbk$. Un associateur de Drinfeld $\varphi(A, B)$ tel que défini dans [Dr] est l'exponentielle d'une série de Lie en deux variables A et B, que l'on peut considérer comme l'exponentielle d'une série de Lie en A, B, C avec relation $A + B + C = 0$. Elle est soumise aux relations

$$\varphi(B, A) = \varphi(A, B)^{-1} \tag{7-1}$$

$$e^{\lambda A}\varphi(B, A)e^{\lambda B}\varphi(C, B)e^{\lambda C}\varphi(A, C) = 1 \tag{7-2}$$

ainsi qu'à une troisième relation qui ne nous sera pas utile, appelée équation du pentagone. A un tel associateur on peut associer des morphismes $B \to \mathfrak{B}(\Bbbk)$ où B et $\mathfrak{B}(\Bbbk)$ sont associés non plus à des groupes diédraux mais aux groupes de Coxeter de type A_n pour tout $n \geq 2$. Si $n = 2$, il n'est pas nécessaire d'imposer à φ de vérifier l'équation du pentagone pour que l'application définie par Drinfeld soit un morphisme. Comme $A_2 = I_2(3)$, nous précisons ici les rapports entre ces associateurs de Drinfeld et le cas $m = 3$.

Soit $m = 3$, φ un associateur de Drinfeld, $\overline{\varphi} = \varphi(t_0, t_1) \in \exp \mathfrak{g}'(\Bbbk)$, $\Phi = (\overline{\varphi})^{-1} = \varphi(t_1, t_0)$. On a $s\omega \bullet t_0 = t_1$, $s\omega \bullet t_1 = t_0$, $s\omega \bullet t_2 = t_2$. On déduit alors de (7-1) que Φ vérifie (3-2), et de (7-2) que Φ vérifie (3-3). L'ensemble des associateurs de Drinfeld associés à $\lambda \in \Bbbk$ s'injecte donc dans $\mathbb{A}\mathrm{ss}_{\lambda}^{(3)}(\Bbbk)$.

7.2. Le groupe de Grothendieck-Teichmüller. — Drinfeld introduit d'autre part un groupe $GT(\Bbbk)$, dit de Grothendieck-Teichmüller, formé des couples de la forme $(\lambda, g(X,Y))$, où $\lambda \in \Bbbk$ et $g(X,Y)$, élément de la complétion pro-$\Bbbk$-unipotente du groupe libre sur X et Y, satisfait à

$$g(X,Y) = g(Y,X)^{-1} \tag{7-3}$$

$$g(X_3, X_1) X_3^{\frac{\lambda-1}{2}} g(X_2, X_3) X_2^{\frac{\lambda-1}{2}} g(X_1, X_2) X_1^{\frac{\lambda-1}{2}} = 1 \tag{7-4}$$

pour $X_1 X_2 X_3 = 1$ ainsi qu'à une autre équation, encore dite du pentagone. Le groupe P est engendré par $p_1 = \sigma^2$, $p_2 = \tau^2$, $p_3 = \sigma^{-1}\tau^2\sigma = \tau\sigma^2\tau^{-1}$. soumis à la seule relation $p_3 p_2 p_1 = Z$ avec $Z = (\sigma\tau)^3$ central. On pose $Y_i = p_i Z^{\frac{-1}{3}} \in P(\Bbbk)$, $f = g(\tau^2 Z^{\frac{-1}{3}}, \sigma^2 Z^{\frac{-1}{3}}) = g(Y_2, Y_1) \in P(\Bbbk)$, et $O = \sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau$. Comme $O \bullet \sigma = \tau$, $O \bullet \tau = \sigma$ et $O \bullet Z = Z$, on a $O \bullet f = f$ d'après (7-3). On veut montrer (4-6), c'est-à-dire $((\tau\sigma)^{-1} \bullet J)\hat{\sigma} = \hat{O} f$ avec $\hat{O} = Z^{\frac{\lambda-1}{2}}$, $\hat{\sigma} = (p_1)^{\frac{\lambda-1}{2}}$, $\hat{\tau} = (p_2)^{\frac{\lambda-1}{2}}$ et $J = \hat{\sigma} f^{-1} \hat{\tau}(\tau \bullet f)$. C'est équivalent à

$$(\sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet (\hat{\sigma} f^{-1}))(\sigma^{-1} \bullet \hat{\tau})(\sigma^{-1} \bullet f)\hat{\sigma} f^{-1} = Z^{\frac{\lambda-1}{2}}.$$

On a $\sigma^{-1} \bullet \hat{\tau} = \sigma^{-1} O \bullet \hat{\sigma} = \tau\sigma \bullet \hat{\sigma}$, $\sigma^{-1} \bullet f = \sigma^{-1} O \bullet f^{-1} = \tau\sigma \bullet f^{-1}$, donc il s'agit de montrer

$$(\sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet F)(\tau\sigma \bullet F) F = Z^{\frac{\lambda-1}{2}}$$

avec $F = \hat{\sigma} f^{-1} = (Z^{\frac{1}{3}})^{\frac{\lambda-1}{2}} Y_1^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_2, Y_1)$. Or on a

$$\left\{ \begin{array}{rlr} \tau\sigma \bullet \sigma^2 = \tau\sigma^2\tau^{-1} & \text{d'où} & \tau\sigma \bullet Y_1 = Y_3 \\ \tau\sigma \bullet \tau^2 = \sigma^2 & \text{d'où} & \tau\sigma \bullet Y_2 = Y_1 \\ \sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet \sigma^2 = \tau^2 & \text{d'où} & \sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet Y_1 = Y_2 \\ \sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet \tau^2 = \sigma^{-1}\tau^2\sigma & \text{d'où} & \sigma^{-1}\tau^{-1} \bullet Y_2 = Y_3 \end{array} \right.$$

Ainsi il s'agit de vérifier

$$Y_2^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_3,Y_2) Y_3^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_1,Y_3) Y_1^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_2,Y_1) = 1$$

si $Y_3Y_2Y_1 = 1$, c'est-à-dire

$$Y_2^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_1,Y_2) Y_1^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_3,Y_1) Y_3^{\frac{\lambda-1}{2}} g(Y_2,Y_3) = 1$$

si $Y_1Y_2Y_3 = 1$, ce qui est bien équivalent à (7-4). Ainsi le groupe de Grothendieck-Teichmüller s'injecte dans $G^{(3)}(\Bbbk)$.

7.3. L'associateur transcendant et φ_{KZ}. — On établit ici le lien entre l'associateur φ_{KZ} que Drinfeld construit à partir de l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov et l'associateur transcendant Φ_0 pour $m = 3$.

On note D_1, D_2, D_0 les droites de $E = \mathbb{R}^3$ euclidien définies par les équations $D_1 : x_2 = x_3$, $D_0 : x_1 = x_2$, $D_2 : x_1 = x_3$, $V = \{(x_1,x_2,x_3) \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et on pose $D_i' = D_i \cap V$. Une base de V^* est formée des fonctions $x = x_1 - x_2$, $y = x_1 - x_3$. On munit V de la base duale.

Soit Ω la 1-forme correspondant à la connection KZ sur $E \setminus D_0 \cup D_1 \cup D_2$,

$$\Omega = t_0 \mathrm{d}\log(x_1 - x_2) + t_1 \mathrm{d}\log(x_2 - x_3) + t_2 \mathrm{d}\log(x_1 - x_3)$$

et $V' = V \setminus D_0' \cup D_1' \cup D_2'$. On a $t_0 + t_1 + t_2 = 0$, et

$$\Omega_{|V'} = t_0 \frac{\mathrm{d}x}{x} + t_1 \frac{\mathrm{d}y - \mathrm{d}x}{y - x} + t_2 \frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

Soit $\phi : V \to V$ donné par la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Les fonctions et formes différentielles sont transportées par $\phi_* : V^* \to V^*$ de matrice $({}^tM)^{-1}$. On a

$$\phi_*(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} y, \phi_*(y) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x + y), \phi_*(x - y) = \frac{1}{\sqrt{3}} y - x.$$

On pose $\theta = \pi/3$, $\theta_r = r\theta$ d'où $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \pi/3$, $\theta_2 = 2\pi/3$, $v_r = (\cos\theta_r, \sin\theta_r)$ et $\alpha_r(v) = \det(v_r, v)$. On a

$$\alpha_0 = y, \alpha_1 = -x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2}, \alpha_2 = -x\frac{\sqrt{3}}{2} - y\frac{1}{2}.$$

Notant $D_i'' = \phi(D_i') = \mathbb{R}v_i$, on a $\phi(V') = V'' = V \setminus D_0'' \cup D_1'' \cup D_2''$ (voir figure 5) et

$$\phi_*(\Omega_{|V'}) = t_0 \frac{\mathrm{d}\alpha_0}{\alpha_0} + t_1 \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\alpha_1} + t_2 \frac{\mathrm{d}\alpha_2}{\alpha_2}$$

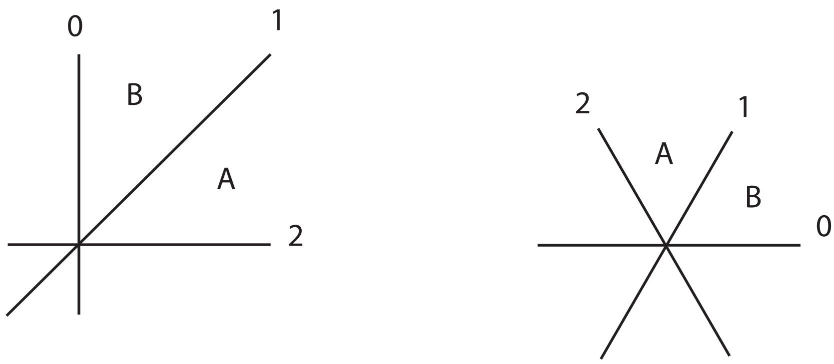

FIGURE 5. Le changement de coordonnées ϕ

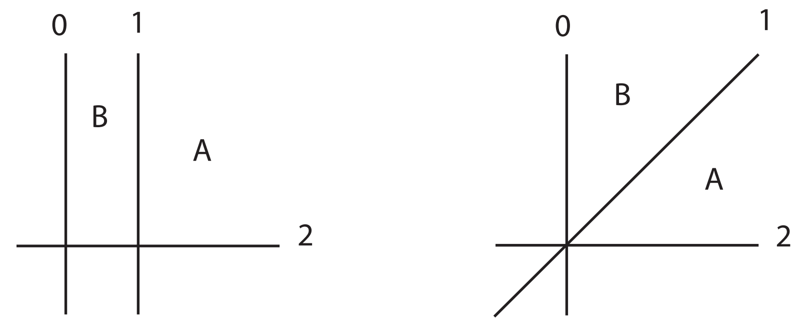

FIGURE 6. L'éclatement ϵ

On note $\epsilon : V \to V$ l'application $(s,w) \mapsto (sw,w)$. On a

$$\begin{array}{l} \epsilon^{-1}(D'_0) = \{(s,w) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ w=0 \text{ ou } s=0\} \\ \epsilon^{-1}(D'_1) = \{(s,w) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ w=0 \text{ ou } s=1\} \\ \epsilon^{-1}(D'_2) = \{(s,w) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ w=0\} \end{array}$$

On note Δ_0, Δ_1 et Δ_2 les droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives $s = 0$, $s = 1$, $w = 0$ et $V^e = V \setminus \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ (voir figure 6). L'application ϵ est un isomorphisme analytique $V^e \to V'$. De $x = sw$, $y = w$ on déduit

$$\epsilon^* \left(\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}w}{w} + \frac{\mathrm{d}s}{s}, \epsilon^* \left(\frac{\mathrm{d}y}{y}\right) = \frac{\mathrm{d}w}{w}, \epsilon^* \left(\frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x - y}\right) = \frac{\mathrm{d}w}{w} + \frac{\mathrm{d}s}{s-1}$$

et

$$\epsilon^* \left(\Omega_{|V'}\right) = \left(\frac{t_0}{s} + \frac{t_1}{s-1}\right) \mathrm{d}s.$$

L'équation différentielle $G'(s) = \left(\frac{t_0}{s} + \frac{t_1}{s-1}\right) G(s)$ sur $]0,1[$ admet deux solutions $G_\pm(s)$ déterminées par $G_+(s) \sim (1-s)^{t_1}$ pour $s \to 1^-$, $G_-(s) \sim s^{t_0}$ pour $s \to 0^+$, et on a par définition $\varphi_{KZ} = G_+^{-1} G_-$, c'est-à-dire $G_- = G_+ \varphi_{KZ}$. On en déduit deux fonctions $F_\pm = G_\pm(\frac{x}{y})$, solutions de $\mathrm{d}F = \Omega F$ sur $\{(x,y) \in V \mid 0 < x < y\}$ uniquement déterminées par

$$F_+ \sim \left(1 - \frac{x}{y}\right)^{t_1} \text{ quand } \frac{x}{y} \to 1^-, \quad F_- \sim \left(\frac{x}{y}\right)^{t_0} \text{ quand } \frac{x}{y} \to 0^+.$$

Or $\phi_*(\frac{x}{y}) = \frac{-\alpha_0}{\alpha_2}$, $\phi_*(1 - \frac{x}{y}) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. On en déduit deux fonctions $\tilde{F}_\pm$ solutions de $\mathrm{d}F = (\phi_* \Omega) F$ telles que

$$\tilde{F}_+ \sim \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{t_1} \text{ quand } \frac{-\alpha_0}{\alpha_2} \to 1^-, \quad \tilde{F}_- \sim \left(\frac{-\alpha_0}{\alpha_2}\right)^{t_0} \text{ quand } \frac{-\alpha_0}{\alpha_2} \to 0^+.$$

Passant en coordonnées polaires, on a

$$\tilde{F}_+ \sim \left(\frac{\theta - u}{\sin(\theta)}\right)^{t_1} \text{ quand } u \to \theta^-, \quad \tilde{F}_- \sim \left(\frac{u}{\sin(2\theta)}\right)^{t_0} \text{ quand } u \to 0^+.$$

Posons $\beta = 1/\sin\theta = 1/\sin 2\theta$. On a donc $\tilde{F}_+ \beta^{-t_1} \sin(\theta - u)^{t_1}$ quand $u \to \theta^-$, $\tilde{F}_- \beta^{-t_0} \sim u^{t_0}$ quand $u \to 0^+$, c'est-à-dire $\tilde{F}_+ \beta^{-t_1} = F_{1,-}$ et $\tilde{F}_- \beta^{-t_0} = F_{0,+}$. Comme $F_{1,-} = F_{0,+} \Phi_0$ et $\tilde{F}_+ \varphi_{KZ} = \tilde{F}_-$, on a

$$\varphi_{KZ} = \beta^{-t_1} \Phi_0^{-1} \beta^{t_0}$$

8. Appendice 3 : Associateurs d'Enriquez et morphismes en type B

Dans [En], B. Enriquez définit des analogues des associateurs de Drinfeld, qui lui permettent d'obtenir des morphismes du groupe d'Artin de type B_n vers les éléments grouplike de certaines algèbres de Hopf complètes. Dans cet appendice nous établissons le lien entre ces morphismes et ceux qui nous intéressent ici.

On désignera par W(S) le groupe de Coxeter associé au diagramme de Coxeter S, $A(S)$ (resp. $P(S)$) le groupe d'Artin (resp. le groupe de tresses pures généralisé) associé. D'autre part, on note $\mathcal{B}_n = A(A_{n-1})$ le groupe de tresses habituel, et $\mathcal{P}_n = P(A_{n-1})$ le groupe de tresses pures.

8.1. Le groupe d'Artin de type B et les groupes $G(N,1,n)$. — On note $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ les générateurs standard de $A(B_n)$. On a $\tau\sigma_1\tau\sigma_1 = \sigma_1\tau\sigma_1\tau$, τ commute à σ_i si $i > 1$, et les $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ vérifient les relations de $\mathcal{B}_n$. Ce groupe apparaît comme groupe de tresses généralisé associé non seulement à B_n, mais à une famille de groupes de réflexions complexes.

On note $W_{N,n}$ le groupe de réflexions complexes, de type $G(N,1,n)$ dans la classification de ST, défini comme l'ensemble des éléments de $GL_N(\mathbb{C})$ notés $[\underline{a}, \sigma]$ avec $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{C}$ et $a_i^N = 1$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, tels que

$$[\underline{a}, \sigma](z_1, \ldots, z_n) = (a_1 z_{\sigma(1)}, \ldots, a_n z_{\sigma(n)})$$

Pour $N > 1$ l'action de ce groupe est irréductible, et on a $W_{1,n} = \mathfrak{S}_n$, $W_{2,n} = W(B_n)$. On note $s = [(\zeta, 1, \ldots, 1), 1]$ avec $\zeta = e^{2i\pi/m}$. Dans tous les cas on a une décomposition de $W_{N,n}$ en produit semi-direct $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$, s correspondant à $(1, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$.

Pour les propriétés de ces groupes et de leurs groupes de tresses généralisé, nous renvoyons à [BMR]. Rappelons que s et les transpositions vérifient, outre les relations du groupe symétrique sur les transpositions $s_i = (i\ i+1)$, les relations $ss_1ss_1 = s_1ss_1s$, $s^N = 1$, et s commute à s_i pour $i > 1$. D'autre part le complément dans $\mathbb{C}^n$ des hyperplans de réflexions est

$$X_{N,n} = \{(z_1, \ldots, z_n) \ | \ z_j \neq 0, z_j \neq \zeta^a z_k\}$$

dont le groupe fondamental est noté $P_{N,n}$. On vérifie facilement que l'algèbre d'holonomie $\mathfrak{g}_{N,n} = \mathfrak{g}_{X_{N,n}}$ de $X_{N,n}$ est exactement l'algèbre $t_{n+1,N}$ de [En]. Cette dernière est engendrée par des générateurs $t(a)^{i,j}$ et $t_0^{1,i}$ pour $i, j \in [2, n]$, et on trouve parmi les relations de définition $t(a)^{ij} = t(-a)^{ji}$. Plus précisément, notant $v(a)^{i,j} = t(a)^{i+1,j+1}$, $u_i = t_0^{1,i+1}$, les générateurs $v(a)^{i,j}$ correspondent aux hyperplans $z_i = \zeta^a z_j$, les éléments u_i aux hyperplans $z_i = 0$. Il suffit alors de vérifier que les relations de définition sont les mêmes pour en conclure $\mathfrak{g}_{N,n} \simeq t_{n+1,N}$ comme algèbre de Lie graduée.

Pour tout $N > 1$, le quotient $X_{N,n}/W_{N,n}$ a $A(B_n)$ comme groupe fondamental. La preuve du theorème 7.1 et le corollaire 7.5 de [En] montre l'existence de morphismes $A(B_n) \to (\mathsf{U}\mathfrak{g}_{N,n}(\Bbbk))^\times \rtimes W_{N,n}$ pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0, donnés par

$$\tau \mapsto s\exp(u_1), \quad \sigma_i = \Psi_i s_i \exp(Nv(0)^{i,i+1}/2)\Psi_i^{-1}$$

où $\Psi_i \in (\mathsf{U}\mathfrak{g}_{N,n}(\Bbbk))^\times$. Dans les termes de l'introduction, pour $N = 2$ cela montre

THÉORÈME (Enriquez). — *Si W est de type B_n, pour tout corps $\Bbbk$ de caractéristique 0 il existe un morphisme $\widetilde{\Phi} : \Bbbk B \to \mathfrak{B}(\Bbbk)$ qui vérifie la condition fondamentale.*

Pour $N > 2$, cela montre l'existence de morphismes de ce type pour les groupes de réflexions complexes $W_{N,n}$ et leur groupe de tresses généralisé au sens de [BMR]. Cela permet également d'espérer élargir ces propriétés aux groupes de réflexions complexes.

8.2. Les groupes $\boldsymbol{K_{N,n}}$ et $\boldsymbol{P_{N,n}}$. — B. Enriquez obtient des isomorphismes de la complétion pro-$\Bbbk$-unipotente d'un sous-groupe $K_{N,n}$ de $\mathcal{P}_n$ avec le groupe des éléments grouplike de $\mathsf{U}\mathfrak{g}_{N,n}(\Bbbk)$. Nous montrons que ce sous-groupe $K_{N,n}$ est naturellement isomorphe à $P_{N,n}$.

Le groupe $K_{N,n}$ est défini dans [En] comme suit. On note x_{ij} les générateurs classiques de $\mathcal{P}_n$, et F'_n le sous-groupe engendré par les $x_{1,i}$, $i \in [2, n]$. Il est classique que F'_n est libre sur ces générateurs, et que l'on a une décomposition $\mathcal{P}_n \simeq \mathcal{P}'_n \ltimes F'_{n-1}$ où $\mathcal{P}'_n \simeq \mathcal{P}_{n-1}$ laisse fixe le premier brin. Il est classique que l'action par conjugaison de $A(A_{n-1}) = \mathcal{B}_n$ sur les générateurs libres x_{1i} de F'_n est l'action d'Artin. En particulier, $\mathcal{P}'_n$ agit trivialement sur l'abélianisé $\mathbb{Z}^{n-1}$ de F'_n, et on en déduit un morphisme $\mathcal{P}_n \to \mathbb{Z}^{n-1}$ puis par réduction modulo N un morphisme $\mathcal{P}_n \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{n-1}$, dont $K_{N,n}$ est par définition le noyau. Dans [En], $\mathcal{P}_n$ (et donc $K_{N,n}$) est considéré comme un sous-groupe de $A(B_{n-1})$. Cette interprétation, visuellement évidente en termes de tresses géométriques, peut se décrire algébriquement comme suit.

On a un morphisme surjectif $A(B_n) \to A(A_{n-1})$ donné par $\tau \mapsto 1$, $\sigma_i \mapsto \sigma_i$. Ce morphisme est scindé, par $\sigma_i \mapsto \sigma_i$. Son noyau F_n est un groupe libre de rang n sur les générateurs

$$\gamma_i = \sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_1\tau\sigma_1^{-1}\dots\sigma_{i-2}^{-1}\sigma_{i-1}^{-1}$$

De plus, l'action de $A(A_{n-1})$ sur lui est l'action d'Artin (cf. [CrP] prop 2.1) : σ_i envoie γ_i sur γ_{i+1}, γ_{i+1} sur $\gamma_{i+1}^{-1}\gamma_i\gamma_{i+1}$ et γ_j sur γ_j si $j \notin \{i, i+1\}$.

En particulier, le morphisme d'abélianisation $F_n \to \mathbb{Z}^n$ est équivariant, par rapport à l'action de $A(A_{n-1})$ sur F_n, l'action par permutation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{Z}^n$, et le morphisme naturel $A(A_{n-1}) \to \mathfrak{S}_n$. On en déduit un morphisme surjectif $A(B_n) \simeq A(A_{n-1}) \ltimes F_n \to \mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}^n$. Il envoie τ sur $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ et σ_i sur $(i-1, i) \in \mathfrak{S}_n$ pour $i > 1$. En composant avec la projection canonique $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on en déduit des morphismes $\pi_N : A(B_n) \to \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. On a $\pi_N(\tau) = (\overline{1}, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$, $\pi_N(\sigma_i) = (i-1, i) \in \mathfrak{S}_n$ pour $i > 1$. Il s'agit donc du morphisme déjà mentionné $A(B_n) \to W_{N,n}$, en particulier pour $N = 2$ de la projection naturelle du groupe de tresses généralisé $A(B_n)$ sur le groupe de Coxeter $W(B_n)$.

On a alors $A(B_n) \simeq \mathcal{B}_n \ltimes F_n$. Considérons l'isomorphisme $F'_n \to F_n$ défini par $x_{1i} \mapsto \gamma_{i-1}$. On déduit de la compatibilité des actions le diagramme commutatif suivant, dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales des injections.

$$\begin{tikzcd}
 & F'_n \rtimes A(A_{n-1}) \arrow[r] & F_n \rtimes A(A_{n-1}) \arrow[r] & A(B_n) \\
\mathcal{P}_{n+1} \arrow[r] & F'_n \rtimes \mathcal{P}_n \arrow[r] \arrow[u] & F_n \rtimes \mathcal{P}_n \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

L'inclusion $\mathcal{P}_{n+1} \hookrightarrow A(B_n)$ est celle donnée par la composition des flèches du diagramme. Comme la restriction de π_N à $F_n \rtimes \mathcal{P}_n$ est simplement $(F_n \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n) \times 1$, on en déduit bien que son noyau $P_{N,n}$ s'identifie à $K_{N,n+1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 2 et 3*, Actualités scientifiques et industrielles 1349, Hermann (1972).

[BMR] M. Broué, G. Malle et R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid Groups, Hecke algebras* J. Reine Angew. Math. **500**, 127-190 (1998).

[CoP] A.M. Cohen et Luis Paris, *On a theorem of Artin*, à paraître au J. Group Theory

[De] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in Galois groups over $\mathbb{Q}$, Publ., Math. Sci. Res. Inst. **16**, 79-297 (1989).

[DG] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique. Généralités. Groupes commutatifs* North-Holland (1970).

[CrP] J. Crisp et Luis Paris, *Artin groups of type B and D*, preprint math.GR/0210438, à paraître à Adv. Geom.

[Di] F. Digne, *On the linearity of Artin braid groups*, J. Algebra **268** No.1, 39-57 (2003).

[Dr] V.G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-hopf algebras and a group closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** No. 4, 829-860 (1991).

[En] B. Enriquez, *Quasi-reflection algebras, multiple polylogarithms at roots of 1, and analogues of the group GT*, preprint math.QA/0408035, août 2004.

[GP] M. Geck et G. Pfeiffer, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, London Math. Society Monographs New Series **21**, Clarendon Press (2000).

[GHMR] N.D. Gilbert, J. Howie, V. Metaftsis, et E. Raptis, *Tree actions of automorphism groups*, J. Group Theory **3** No.2, 213-223 (2000). MS

[Qu] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. Maths **90** No. 2, 205-295 (1969).

[Ma1] I. Marin, *On the representation theory of braid groups*, soumis pour publication.

[Ma2] I. Marin, *Irréducitibilité générique des produits tensoriels de monodromies*, Bull. Soc. Math. Fr. **132** 201-232 (2004).

[Ma3] I. Marin, *Algèbres de Hecke infinitésimales*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris **337** , No.5, 297-302 (2003).

[We] H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** No. 2, 349–383 (1988).