IRRÉDUCTIBILITÉ GÉNÉRIQUE DES PRODUITS TENSORIELS DE MONODROMIES

par Ivan Marin

Résumé. — Nous étudions le problème de l'irréductibilité du produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'un groupe fondamental $G = \pi_1(X)$, quand X est le complémentaire d'hypersurfaces dans un espace projectif. Nous mettons en place un formalisme adapté et utilisons une approche par monodromie pour définir une classe de représentations irréductibles de G dont les produits tensoriels restent irréductibles pour des valeurs génériques de paramètres de définition. Ceci est appliqué au groupe de tresses pures et à ses représentations les plus classiques (les algèbres de Hecke de type A, l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami, les actions de Yang-Baxter sur les produits tensoriels de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$-modules). Nous l'appliquons également aux algèbres de Hecke d'autres groupes de Coxeter, quotients des groupes de tresses pures généralisés. Enfin, nous définissons et obtenons des résultats sur des « algèbres de Hecke infinitésimales », objets cardinaux pour la décomposition des produits tensoriels de représentations des algèbres de Hecke. En particulier, nous montrons que non seulement les puissances extérieures, mais tout foncteur de Schur appliqué à la représentation de réflexion d'une algèbre de Hecke donne lieu à une représentation irréductible du groupe de tresses pures correspondant.

Ivan Marin, 69 rue Sébastien Gryphe, 69007 Lyon
E-mail : `marin@iml.univ-mrs.fr` • *Url :* `http://iml.univ-mrs.fr/~marin`

Classification mathématique par sujets (2000). — 20C99, 20F40, 20F36.

Mots clefs. — représentations, algèbre d'holonomie, groupes de tresses.

Abstract. —
We consider the general problem of establishing irreducibility criteria for the tensor product of two irreducible representations of a fundamental group $G = \pi_1(X)$, in particular when X is the complement of hypersurfaces in a projective space. We set up an ad-hoc formalism and use a monodromy approach to define a class of irreducible representations of G whose tensor products remain irreducible for generic values of defining parameters. This is applied to the pure braid group, and yields the result that the action of the pure braid group is irreducible on the tensor products of a wide class of representations (for generic parameters). The family of representations concerned here includes the representations of the Hecke algebras of type A, of the Birman-Wenzl-Murakami algebra, and the Yang-Baxter actions on the tensor products of $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$-modules. We then also apply this to the Hecke algebra representations of generalized braid groups. Finally, we define and get results on "infinitesimal Hecke algebras", which are convenient objects to study tensor products decompositions of Hecke algebra representations. In particular, we show that not only the alternating powers, but every Schur functor applied to the reflection representation of Hecke algebras yield irreducible representations of the corresponding pure braid group.

1. Introduction

1.1. Motivation. — Pour tout groupe G dont on connaît des familles de représentations irréductibles (resp. indécomposables), toujours supposées de dimension finie et, dans cette introduction, sur le corps $\mathbf{C}$ des complexes, il est naturel de se demander comment décomposer en composantes irréductibles (resp. indécomposables) le produit tensoriel de cette famille de représentations. Ce problème est bien posé grâce au théorème de Krull-Schmidt, qui affirme l'existence d'une telle décomposition en indécomposables, et grâce au théorème de Chevalley selon lequel un produit tensoriel de représentations semi-simples d'un groupe est encore semi-simple. Nous nous intéressons surtout au cas des représentations irréductibles.

Il semble que, pour la plupart des groupes connus, et à l'exception notable des groupes algébriques réductifs connexes, ce problème de décomposition reste aujourd'hui parmi les plus difficiles à comprendre. Par exemple, bien que la théorie des caractères permette d'y répondre pour n'importe quel groupe fini donné, il n'y a pas à ce jour d'approche qui le résolve d'une façon naturelle pour les séries infinies classiques, comme les groupes symétriques ou alternés. Dans la période récente, on s'est donc restreint à des questions de moindre ampleur. Pour le groupe symétrique, on sait par exemple décomposer en composantes irréductibles les produits tensoriels de représentations correspondant à des diagrammes de Young en équerre, ou bien à deux colonnes — le cas général semblant hors de portée.

Parmi ces questions, il en est une qui se pose de façon naturelle pour n'importe quel groupe G. Etant données deux représentations irréductibles de G de dimension au moins 2, quand le produit tensoriel de ces deux représentations est-il encore irréductible ? Il est clair que cela arrive souvent lorsque G est un produit direct, mais la réponse générale à cette question semble à l'heure actuelle elle-même hors de portée. Encore une fois, cela est facile pour les groupes réductifs connexes : si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe, les produits tensoriels ne sont jamais irréductibles, comme on peut le montrer de plusieurs façons (cf. [12], [15] lemme 1). En revanche, il semble difficile de trouver une raison profonde au fait que cette situation peut se produire pour le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ uniquement si n est un carré parfait, sans parler des séries de groupes infinis discrets.

Néanmoins, I. Zisser a montré de façon algébrique dans [16] que le produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'un groupe symétrique donné n'est irréductible que si l'une des deux représentations considérées est de dimension 1. Nous avons donné dans [13] une autre démonstration de ce théorème, qui met en évidence le lien avec le problème correspondant pour les représentations de monodromie d'une extension infinie du groupe considéré, en l'occurrence le groupe de tresses associé. De façon assez logique, et comme le faisait déjà remarquer Brauer [2], le problème de la décomposition des produits tensoriels semble plus simple pour les groupes « continus » que pour les groupe discrets, et les représentations de monodromie des groupes discrets infinis proviennent souvent d'une famille à au moins un paramètre de représentations.

1.2. Présentation des résultats. — Nous proposons ici un cadre général pour l'étude de ce problème quand G est le groupe fondamental d'une variété X d'un certain type. Pour ces variétés, il existe une structure naturelle, appelée algèbre d'holonomie et notée $\mathfrak{g}_X$, dont les représentations correspondent aux représentations de monodromie de G sur un fibré vectoriel trivial. On définit une notion intéressante pour notre problème, qui est celle des représentations *agrégeantes* de $\mathfrak{g}_X$. Ces représentations apparaissent par familles à un paramètre, et possèdent la propriété remarquable que le produit tensoriel de n représentations de ce type est, pour des valeurs génériques des n paramètres correspondants, également agrégeant et surtout irréductible si chacune des représentations d'origine l'est.

Nous démontrons ainsi, en section 2, des résultats d'irréductibilité générique pour les produits tensoriels de représentations de monodromie (théorème 1). La section 3 est consacrée à des applications de ce principe général. Dans certains cas, comme les groupe libres, on ne gagne pas grand chose à considérer les choses sous cet angle : il est clair qu'un produit tensoriel de deux représentations irréductibles « génériques » d'un groupe libre sera encore irréductible. En revanche, pour des groupes comme ceux étudiés par Kohno dans [9] qui sont « proches » d'un groupe libre, au sens notamment où ils se plongent dans leur complétion pronilpotente, on a, en un certain sens par linéarisation, rendu plus simple le problème d'origine. Plutôt que de multiplier les exemples en ce sens, nous nous sommes concentrés sur le groupe des tresses pures d'Artin, et montrons qu'un grand nombre de ses représentations usuelles provient de représentations agrégeantes, ce qui permet d'établir l'irréductibilité *a priori* d'un grand nombre de représentations obtenues par produit tensoriel. Parmi ces représentations usuelles, on compte notamment les représentations qui se factorisent par l'algèbre de Hecke de type A ou, plus généralement, par l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami (théorème 2), ainsi que les actions de Yang-Baxter sur les produits tensoriels de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$-modules (théorème 3). Une généralisation aux groupes de tresses généralisées est ensuite exposée (théorème 4), puis nous introduisons des « algèbres de Hecke infinitésimales », algèbres de Lie réductives qui rendent compte de la décomposition des produits tensoriels quand on impose un même paramètre générique à la famille de représentations considérées. L'étude de l'image de ces algèbres de Hecke infinitésimales dans la représentation de réflexion nous permet enfin de généraliser (théorème 5) le résultat classique de Kilmoyer d'irréductibilité des puissances alternées de la représentation de réflexion des algèbres de Hecke. En fait, tout *foncteur de Schur* appliqué à ces représentations de réflexion donne lieu, dans le cas générique, à une représentation irréductible du groupe de tresses pures considéré.

2. Approche générale

Dans [9], T. Kohno a montré comment les représentations du complété de Malcev de $\pi_1(X)$ s'obtiennent essentiellement à partir de représentations de l'algèbre de Lie d'holonomie $\mathfrak{g}_X$ sous certaines conditions de théorie de Hodge sur la variété X. Celles-ci sont notamment vérifiées quand

i) $X = \mathbf{CP}^N \setminus D$, où D est une hypersurface complexe,

ii) X est une variété compacte lisse kählerienne,

iii) $X = \tilde{X} \setminus D$, avec $\tilde{X}$ une variété algébrique projective lisse de premier nombre de Betti nul et D un diviseur à croisements normaux.

Dans ce qui suit, nous supposons que X est une variété d'un des types précédents. On fixe une fois pour toutes un point base de X, et on note $G = \pi_1(X)$. Nous définissons en section 1 l'algèbre de Lie d'holonomie $\mathfrak{g}_X$ de X. C'est une algèbre de Lie graduée que l'on peut définir sur $\mathbf{Q}$, donc sur tout corps de caractéristique 0 par extension des scalaires, et qui est engendrée par $H_1(X, \mathbf{Q})$. Les représentations ρ de $\mathfrak{g}_X$ se déforment naturellement en des familles ρ_h de représentations, où h désigne un scalaire. Lorsque le corps de base est (inclus dans) $\mathbf{C}$, elles définissent alors par monodromie des familles à un paramètre de représentations complexes de G. Dans les cas considérés ici, on sait que cette procédure permet de construire une partie importante des représentations de G.

Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ sera dite *homogène* si elle est engendrée par des éléments de $\mathfrak{g}_X$ qui sont homogènes pour sa graduation naturelle. On fixe un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0, on suppose $\mathfrak{g}_X$ définie sur $\mathbf{k}$, et on introduit la notion suivante :

DÉFINITION 1. — *Une représentation ρ d'une algèbre d'holonomie homogène $\mathfrak{g}_X$ est dite* agrégeante *relativement à une sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ si et seulement si $Res_{\mathfrak{D}}\rho$ est somme de représentations de dimension 1 deux à deux non isomorphes.*

Dans le cas où $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, cela revient à dire que $\rho(\mathfrak{D})$ est commutative et que $Res_{\mathfrak{D}}\rho$ est semi-simple sans multiplicités. Remarquons d'autre part que la condition d'agrégeance implique, dans le cas général, la commutativité de $\rho(\mathfrak{D})$. La terminologie utilisée dans la définition 1 est motivée par le théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet des sections suivantes :

THÉORÈME 1. — *Si $(\rho^{(i)})_{i\in I}$ est une famille finie de représentations agrégeantes d'une algèbre d'holonomie homogène $\mathfrak{g}_X$ relativement à une* *même sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$, alors, pour tout $\underline{h} = (h_i)_{i\in I}$ dans un certain ouvert dense de $\mathbf{k}^I$ pour la topologie de Zariski, la représentation $\overset{I}{\otimes}\rho^{(i)}_{h_i}$ de $\mathfrak{g}_X$ est agrégeante relativement à $\mathfrak{D}$. Elle est de plus irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si toutes les représentations $\rho^{(i)}$ le sont.*

Il est clair que le noyau et le conoyau d'un morphisme de représentations agrégeantes est encore une représentation agrégeante. On peut alors interpréter le théorème précédent en disant que l'on a défini des sous-catégories abéliennes pleines de la catégorie des représentations de $\mathfrak{g}_X$ qui sont « presque » des sous-catégories tensorielles. Lorsque le corps de base de $\mathfrak{g}_X$ est inclus dans $\mathbf{C}$, on déduira de ce théorème

Corollaire. — *Si l'on a une famille finie $(R_i(h))_{i\in I}$ de représentations de monodromie de $\pi_1(X)$, qui provient d'une famille $\rho^{(i)}$ de représentations irréductibles de $\mathfrak{g}_X$ agrégeantes par rapport à une même sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$, il existe un ouvert dense $U \subset \mathbf{C}^I$ tel que, pour tout $\underline{h} = (h_i) \in U$, $\overset{I}{\otimes} R_i(h_i)$ est irréductible.*

Dans ce corollaire, $\mathbf{C}$ est muni de sa topologie naturelle. On peut définir une propriété plus forte, qui ne fait pas intervenir de choix explicite d'une telle sous-algèbre $\mathfrak{D}$. On rappelle que l'on a une inclusion canonique $H_1(X,\mathbf{Q}) \subset \mathfrak{g}_X$, quel que soit le corps de base $\mathbf{k}$ sur lequel est défini $\mathfrak{g}_X$.

Définition 2. — *On dit d'une représentation ρ de $\mathfrak{g}_X$ qu'elle est* fortement agrégeante *si l'image de $H_1(X,\mathbf{Q})$ par ρ contient un endomorphisme diagonalisable sans multiplicités.*

Nous démontrons enfin

Proposition 1. — *Si $(\rho^{(i)})_{i\in I}$ est une famille finie de représentations fortement agrégeantes, alors il existe une sous-algèbre homogène $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ par rapport à laquelle elles sont toutes agrégeantes.*

2.1. Algèbre de Lie d'holonomie. — Soit $e_1,\ldots,e_n$ une famille d'éléments de $H_1(X,\mathbf{Z})$ qui forme une base de $H_1(X,\mathbf{Q})$ identifié à $H_1(X,\mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}$. On note $e_1^*,\ldots,e_n^*$ la base duale, canoniquement identifiée à une base du premier groupe de cohomologie de de Rham $H^1(X,\mathbf{C})$. Dans les cas étudiés, nous pouvons identifier canoniquement $H^1(X,\mathbf{C})$ à un certain $\mathbf{C}$-espace vectoriel F de 1-formes fermées, les 1-formes méromorphes sur $\mathbf{CP}_n$ ou $\tilde{X}$ à singularités logarithmiques le long de D dans les cas i) et iii), aux 1-formes harmoniques dans le cas ii).

On fixe un point base de X et on s'intéresse aux représentations de $G = \pi_1(X)$ sur $\mathbf{C}^N$ qui sont la monodromie d'une connexion plate sur le fibré vectoriel trivial $X \times \mathbf{C}^N \to X$. Il est classique que de telles connexions sont déterminées par une 1-forme $\omega : X \to \mathfrak{gl}_N(\mathbf{C})$ qui est intégrable. Ici, nous demandons en plus que $h\omega$ soit intégrable pour tout $h \in \mathbf{C}$ ou, ce qui revient *a posteriori* au même, que $-\omega$ soit intégrable. Comme la condition d'intégrabilité s'écrit $\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = 0$, cela équivaut en effet à $\mathrm{d}\omega = 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$. On s'intéresse donc aux 1-formes fermées ω à valeurs dans $\mathfrak{gl}(V)$ telles que $\omega \wedge \omega = 0$. Si ω_1 et ω_2 sont de telles 1-formes, il est clair que les monodromies de ω_1 et ω_2 sont identiques si $\omega_1 - \omega_2$ est exacte. On introduit l'algèbre de Lie libre sur $H_1(X, \mathbf{Q})$, que l'on note L. Elle est engendrée par $e_1, \ldots, e_n$ et naturellement graduée, avec $L_0 = \{0\}$, $L_1 = H_1(X, \mathbf{Q})$, $L_2 = \Lambda^2 H_1(X, \mathbf{Q})$. On note $\tilde{L}$, $\tilde{L}_1$ et $\tilde{L}_2$ leur complexifié. On introduit d'autre part la 1-forme $\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i \in F \otimes \tilde{L}_1$. qui est une 1-forme fermée sur X à valeurs dans $\tilde{L}_1$. On a

$$\omega \wedge \omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_i^* \wedge e_j^* \otimes [e_i, e_j] \in \Lambda^2 F \otimes \tilde{L}_2.$$

A tout $\varphi \in (\Lambda^2 F)^* = \Lambda^2(F^*)$ on peut associer $\varphi(\omega \wedge \omega) \in \tilde{L}_2$, et on note κ le sous-espace de $\tilde{L}_2$ engendré par de tels éléments. On note $< \kappa >$ l'idéal de $\tilde{L}$ engendré par κ, et on définit l'algèbre de Lie d'holonomie comme l'algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{g}_X = \tilde{L}/ < \kappa >$, algèbre de Lie dont les représentations correspondent donc exactement aux 1-formes intégrables que l'on considère. En particulier, si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}_X$ correspondant à une 1-forme ω, on note ρ_h la représentation correspondant à $h\omega$, et $\int \rho_h$ la représentation de monodromie de G associée.

On peut en fait définir cette algèbre de Lie d'holonomie sur $\mathbf{Q}$, donc sur tout corps de caractéristique 0, de la façon suivante. Si l'on désigne par δ le transposé du cup-produit de $\Lambda^2 H^1(X, \mathbf{Q})$ vers $H^2(X, \mathbf{Q})$, vu comme morphisme $H_2(X, \mathbf{Q}) \to \Lambda^2 H_1(X, \mathbf{Q})$, et par ι l'injection naturelle de $\Lambda^2 H_1(X, \mathbf{Q})$ dans $Lie(H_1(X, \mathbf{Q}))$ définie par $\iota(x \wedge y) = [x, y]$, on peut définir κ comme l'image de $H_2(X, \mathbf{Q})$ par $\iota \circ \delta$, et $\mathfrak{g}_X = L/ < \kappa >$. Elle correspond, si X est algébrique et définie sur $\mathbf{Q}$, à l'algèbre de Lie du π_1 « de Rham » de X. Dans l'approche « transcendante » que l'on présente ici, nous ne tirons pas parti de cette structure rationnelle. Néanmoins, pour une approche par monodromie « algébrique », il est utile d'étudier les représentations de $\mathfrak{g}_X$ comme algèbre de Lie définie sur $\mathbf{Q}$. C'est pourquoi, autant qu'il est possible, nous supposerons que $\mathfrak{g}_X$ est définie sur un corps de caractéristique 0 quelconque, noté $\mathbf{k}$.

Dans les cas considérés ici, notamment à la suite des travaux de Morgan et Sullivan, Kohno a établi dans [9] un isomorphisme entre $\mathfrak{g}_X^*$ et l'algèbre de Malcev de $\pi_1(X)$, ce qui donne une bonne indication de l'importance des représentations de monodromie parmi les représentations de $\pi_1(X)$. Dans les cas i) et iii), on a alors un problème de Riemann-Hilbert généralisé, étudié par divers auteurs depuis (cf. notamment Hain [8] pour le cas iii), Kohno [10] pour le groupe de tresses pures (cas i)) en s'appuyant sur le travail de Golubeva [7].

2.2. Transfert d'irréductibilité. — On suppose $\mathbf{k} \subset \mathbf{C}$. On note H le morphisme d'Hurewicz $\pi_1(X) \to H_1(X, \mathbf{Z})$. Comme il est surjectif, on peut choisir, pour tout $i \in [1, n]$, une préimage $[\gamma_i]$ de e_i. On choisit de plus une représentation $\rho : \mathfrak{g}_X \to \mathfrak{gl}(V)$, où V désigne un espace vectoriel complexe de dimension finie N. Elle est déterminée par la donnée de $\rho(e_i) = a_i \in \mathfrak{gl}(V)$, et on note ω la 1-forme correspondante. La monodromie de $h\omega$ le long de γ_i en fonction de h est alors obtenue comme suit : on considère l'équation

$$\frac{\partial g(t,h)}{\partial t} = h\omega_i(t) g(t,h)$$

pour $g : [0,1] \times \mathbf{C} \to \mathfrak{gl}(V)$, où l'on a noté $\omega_i(t)\mathrm{d}t = \gamma_i^*\omega$ le pullback de ω sur $[0,1]$, et l'on veut déterminer $g(1,h)$ pour l'unique solution g telle que $g(0,h) = \mathrm{Id}_V$, où Id_V désigne l'endomorphisme identité de V. On note donc $g(1,h) = [\gamma_i](h)$. Il est clair que $g(1,h)$ est holomorphe en h. On peut obtenir l'expression complète de ses coefficients de Taylor en termes d'intégrales itérées de Chen. Ici, il nous suffira de considérer son expression au premier ordre en h. Par la méthode d'approximation de Picard, on montre aisément

$$\begin{aligned}
[\gamma_i](h) = g(1,h) &= \mathrm{Id}_V + h \int_0^1 \gamma_i^*\omega + o(h) \\
&= \mathrm{Id}_V + h \int_{\gamma_i} \omega + o(h) \\
&= \mathrm{Id}_V + h \int_{H([\gamma_i])} \omega + o(h)
\end{aligned}$$

Or $\int_{H([\gamma_i])} \omega = a_i$, d'où $[\gamma_i](h) = \mathrm{Id}_V + ha_i + o(h)$, soit

$$a_i = \lim_{h \to 0} \frac{[\gamma_i](h) - \mathrm{Id}_V}{h}.$$

Il est immédiat que, si une représentation de $\mathfrak{g}_X$ admet un sous-espace stable, ce sous-espace sera encore stable pour toutes les actions de $\pi_1(X)$

associées par monodromie. Inversement, munissant $\mathbf{C}$ de sa topologie naturelle, on montre

PROPOSITION 2. — *Si V est irréductible pour l'action de $\mathfrak{g}_X$, alors, pour tout $h \in \mathbf{C}$ en dehors d'un ensemble localement fini, la représentation $\int \rho_h$ de $\pi_1(X)$ associée à ρ par monodromie est irréductible.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer, d'après le théorème de Burnside, que les morphismes $\rho_h : \mathbf{C}\pi_1(X) \to \mathrm{End}(V)$ associés sont surjectifs, si l'on sait que l'image de $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ est $\mathrm{End}(V)$. On rappelle que N désigne la dimension de V. Comme $\mathsf{U}\mathfrak{g}_x$ est graduée, il existe une famille $x_1, \ldots, x_{N^2}$ d'éléments homogènes de $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ dont les images $v_1, \ldots, v_{N^2}$ forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathrm{End}(V)$. On note d_i le degré de x_i pour $1 \leq i \leq N^2$. Il découle alors du calcul de la monodromie à l'ordre 1 qu'existe pour tout $i \in [1, N^2]$ un élément $g_i \in \mathbf{C}\pi_1(X)$ tel que la limite quand h tend vers 0 de $h^{-d_i}\rho_h(g_i)$ soit égale à v_i. On introduit la fonction d'une variable complexe

$$f(h) = h^{-d} \det\left(\rho_h(g_1), \ldots, \rho_h(g_{N^2})\right)$$

avec $d = d_1 + \cdots + d_{N^2}$, où les $\rho_h(g_i)$ sont considérés comme des vecteurs de $\mathrm{End}(V)$. Il est clair que f est holomorphe, et

$$f(0) = \det(v_1, \ldots, v_{N^2}) \neq 0$$

par hypothèse. L'ensemble E des zéros d'une fonction holomorphe non nulle étant localement fini, on en déduit que, pour tout $h \in \mathbf{C} \setminus E$, $\rho_h(g_1), \ldots, \rho_h(g_{N^2})$ forme une base de $\mathrm{End}(V)$, donc que ρ_h est irréductible. $\square$

L'intérêt essentiel pour nous de cette opération de monodromie est qu'elle est compatible au produit tensoriel de représentations : si ρ^1 et ρ^2 sont deux représentations de $\mathfrak{g}_X$, la monodromie de $\rho^1 \otimes \rho^2$ est le produit tensoriel, comme représentations de $\pi_1(X)$, des monodromies de ρ^1 et ρ^2. En effet, si ρ^1 et ρ^2 correspondent à deux 1-formes ω^1, ω^2 et à deux espaces vectoriels V^1, V^2, l'expression des monodromies de ρ^1 et ρ^2 est déterminée par F^1 et F^2, solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} dF^1 = \gamma^*\omega^1 F^1 \; F^1(0) = Id_{V^1} \\ dF^2 = \gamma^*\omega^2 F^2 \; F^2(0) = Id_{V^2} \end{cases}$$

Alors, $F^1 \otimes F^2$ vérifie l'équation correspondant à $\rho^1 \otimes \rho^2$, et sa monodromie est bien le produit tensoriel des monodromies. En particulier, si ρ_1 et ρ_2 sont deux représentations de $\mathfrak{g}_X$ dont le produit tensoriel est irréductible, le produit tensoriel des monodromies de ρ_1 et ρ_2 sera irréductible pour des valeurs génériques du paramètre h.

2.3. Graphes d'irréductibilité. — On fixe un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0. Nous aurons besoin comme outil technique de la théorie complète des sous-algèbres de $M_n(\mathbf{k})$ qui contiennent les matrices diagonales. Ne connaissant pas de références où cette théorie élémentaire est exposée, nous en établissons ici les principaux résultats.

Si S est un ensemble fini, on note $\mathbf{k}S$ le $\mathbf{k}$-espace vectoriel de base S, et on note $\{s^* \mid s \in S\}$ sa base duale. On introduit dans $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ les unités matricielles, $e_{s,s'}$ pour $s, s' \in S$, définies par

$$\forall s'' \in S \quad e_{s,s'}s'' = \delta_{s',s''}s.$$

On peut alors définir une sous-algèbre commutative maximale $\mathcal{D}(S)$ de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ comme l'algèbre engendrée par les éléments $e_{s,s}$ pour $s \in S$. Comme $\mathcal{D}(S)$-module, $\mathbf{k}S$ est semi-simple sans multiplicités, et

$$\mathbf{k}S = \bigoplus_{s \in S} \mathbf{k}\, s.$$

De plus, si S_1 et S_2 sont deux ensembles finis disjoints,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\,(S_1 \cup S_2) &= \mathbf{k}S_1 \oplus \mathbf{k}S_2 \\ \mathbf{k}\,(S_1 \times S_2) &= \mathbf{k}S_1 \otimes \mathbf{k}S_2. \end{aligned}$$

Pour définir d'autres sous-algèbres remarquables de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$, nous avons besoin d'introduire la notion d'algèbre associée à ce que l'on appelle parfois un carquois, c'est-à-dire un graphe orienté. Fixons d'abord certaines conventions, afin de limiter le cadre qui nous est utile.

Définition 3. — *On appelle* graphe $\Gamma = (S, A)$ *la donnée de deux ensembles* finis*, un ensemble S de* sommets *et un ensemble $A \subset S \times S$ d'*arêtes*, tel que A n'intersecte pas la diagonale de $S \times S$.*

Pour nous, les graphes sont donc nécessairement orientés, finis, réduits et sans boucles. Si l'on a deux graphes $\Gamma_1 = (S, A_1)$ et $\Gamma_2 = (S, A_2)$ sur le même ensemble S de sommets, on notera $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ si $A_1 \subset A_2$, et on définit $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ comme $(S, A_1 \cup A_2)$.

Pour signifier qu'il existe dans $\Gamma = (S, A)$ une arête de source x et de but y, c'est-à-dire $(x, y) \in A$, ou éventuellement pour désigner une telle arête, on utilisera la notation $x \to y$. Si un graphe $\Gamma = (S, A)$ est donné, on appelle *chemin* de Γ une famille $(a_1, \dots, a_r)$ de sommets de Γ, pour

$r \geq 1$, tels que $a_i \to a_{i+1}$ si $i \in [1, r-1]$. On dit qu'un tel chemin joint le sommet a_1 au sommet a_r, et on appelle $r-1$ la longueur du chemin, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui interviennent dans sa définition. Un chemin sera dit vide s'il est de longueur 0.

DÉFINITION 4. — *Soit* Γ *un graphe* (S, A). *Une partie* E *de* S *est dite* Γ-stable *si toute arête de* Γ *dont la source est dans* E *a son but dans* E. *On dit que* Γ *est* irréductible *si pour tous sommets* $s, s' \in S$ *il existe un chemin joignant* s *à* s'. *Autrement dit, si* S *n'admet pas de partie* Γ*-stable propre.* Γ *est dit* indécomposable *si* S *n'admet pas de partition en deux parties* Γ*-stables propres.*

Les deux définitions de l'irréductibilité sont en effet équivalentes : si S admet une partie Γ-stable propre E, il est clair qu'un élément de E ne pourra être joint à un élément de $S \setminus E$; inversement, s'il n'existe pas de chemin reliant s à s' pour $s, s' \in S$, l'ensemble E des sommets auxquels s peut être joint est d'évidence Γ-stable et propre.

Pour un graphe $\Gamma = (S, A)$ on définit son enveloppe symétrique $\Gamma^\bullet = (S, A^\bullet)$ comme le graphe défini sur S par

$$(s_1, s_2) \in A^\bullet \text{ ssi } (s_1, s_2) \in A \text{ ou } (s_2, s_1) \in A.$$

Il est clair qu'une partie $\Gamma^\bullet$-stable de S est Γ-stable, que $\Gamma^{\bullet\bullet} = \Gamma^\bullet$, et que de plus

$$\Gamma \text{ indécomposable } \Leftrightarrow \Gamma^\bullet \text{ irréductible.}$$

On dit que Γ est symétrique si $\Gamma^\bullet = \Gamma$.

DÉFINITION 5. — *Soit* $\Gamma = (S, A)$ *un graphe. On note* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *la sous-algèbre de* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ *engendrée par les éléments* $e_{y,x}$ *pour* $(x, y) \in A$, *et* $e_{s,s}$ *pour* $s \in S$. *En particulier,* $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{A}(\Gamma)$.

Si un graphe $\Gamma = (S, A)$ est donné, on appelle enveloppe transitive de Γ et on note $\bar{\Gamma}$ le graphe $(S, \bar{A})$ tel que $x \to y$, i.e. $(x, y) \in \bar{A}$, si et seulement si il existe un chemin non vide de Γ joignant x à y. On dit que Γ est *transitif* si $\Gamma = \bar{\Gamma}$, c'est-à-dire si, pour tous sommets distincts x et y de Γ, l'existence d'un chemin de x vers y équivaut à l'existence d'une arête $x \to y$. En particulier,

$$\begin{aligned} &\Gamma \text{ irréductible } &&\Leftrightarrow \bar{\Gamma} \text{ irréductible} \\ &\Gamma \text{ indécomposable } &&\Leftrightarrow \bar{\Gamma} \text{ indécomposable.} \end{aligned}$$

Il est clair d'autre part que $\mathcal{A}(\bar{\Gamma}) = \mathcal{A}(\Gamma)$. En particulier, à deux graphes définis sur le même ensemble de sommets qui ont même enveloppe transitive, on a associé la même algèbre. Remarquons d'autre part que Γ est irréductible si et seulement si $\bar{\Gamma} = (S, \bar{A})$ est le graphe complet sur S, défini par $\bar{A} = \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1 \neq s_2\}$.

Cette construction nous permet de décrire toutes les sous-algèbres de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ qui contiennent $\mathcal{D}(S)$:

Lemme 1. — *Si S est un ensemble fini et si B est une sous-algèbre de* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ *contenant $\mathcal{D}(S)$, il existe un graphe transitif $\Gamma = (S, A)$ tel que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$, défini par $A = \{(s_1, s_2) \in S^2 \mid s_1 \neq s_2$ et $e_{s_2,s_1} \in B\}$.*

Démonstration. — On a évidemment $\mathcal{A}(\Gamma) \subset B$. De plus, Γ est transitif. Inversement, si b est un élément de B, il s'écrit

$$b = \sum_{s,s'} c_{s,s'} e_{s,s'}$$

avec, pour tous $s, s' \in S$, $c_{s,s'} \in \mathbf{k}$. Si $c_{s,s'} \neq 0$, on a

$$e_{s,s'} = \frac{1}{c_{s,s'}} e_{s,s} b e_{s',s'} \in \mathcal{D}(S) B \mathcal{D}(S) \subset B$$

donc $e_{s,s'} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, et $b \in \mathcal{A}(\Gamma)$, ceci pour tout $b \in B$. □

Si l'on considère maintenant $\mathbf{k}S$ comme $\mathcal{A}(\Gamma)$-module, on a

Proposition 3. — *Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe. En tant que $\mathcal{A}(\Gamma)$-module, $\mathbf{k}S$ est irréductible si et seulement si Γ est irréductible, indécomposable si et seulement si Γ est indécomposable. De plus, une partie E de S est Γ-stable si et seulement si $\mathbf{k}E$ est $\mathcal{A}(\Gamma)$-stable.*

Démonstration. — Soit V un sous-espace de $\mathbf{k}S$, stable pour $\mathcal{D}(S)$. Comme $e_{ss}V \in \{0, \mathbf{k}\, s\}$ selon que s appartient à V ou non, V est entièrement déterminé par $J(V) = \{s \in S \mid s \in V\}$. Si l'on note $K(E)$, pour E une partie de S, le sous-espace de $\mathbf{k}S$ engendré par E, alors J et K sont deux bijections réciproques l'une de l'autre entre les parties de S et les sous-espaces de $\mathbf{k}S$ stables pour $\mathcal{D}(S)$.

Si V est stable pour $\mathcal{A}(\Gamma)$, toute arête de Γ ayant sa source s dans $J(V)$ a son but s' dans $J(V)$, puisque, comme $e_{s',s} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $s \in V \Rightarrow s' = e_{s',s}s \in V$. Ainsi, V est stable par $\mathcal{A}(\Gamma)$. Inversement, si E est une partie Γ-stable de S, $K(E) = \mathbf{k}E$ est stable pour $\mathcal{A}(\Gamma)$. On en déduit immédiatement les conclusions de l'énoncé. □

Corollaire 1. — *Si S est un ensemble fini et B une sous-algèbre de* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ *qui contient $\mathcal{D}(S)$, il existe un unique graphe transitif $\Gamma = (S, A)$ tel que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$.*

Démonstration. — D'après le lemme 1, $B = \mathcal{A}(\Gamma)$ avec $\Gamma = (S, A)$ le graphe transitif défini par $A = \{(s_1, s_2) \in S^2 \ \mid s_1 \neq s_2 \text{ et } e_{s_2,s_1} \in B\}$. Si $B = \mathcal{A}(\Gamma')$ avec Γ' transitif, par définition de $\mathcal{A}(\Gamma')$, à toute arête (s_1, s_2) de Γ' correspond un élément e_{s_2,s_1} de B, donc une arête (s_1, s_2) de Γ. On a ainsi $\Gamma' \subset \Gamma$. Inversement, fixons une arête $x \to y$ de Γ. On considère l'ensemble E des éléments s de S tels que x soit joint à s par un chemin de Γ'. E est par définition Γ'-stable, donc $\mathbf{k}E$ est $\mathcal{A}(\Gamma')$-stable. Mais $\mathcal{A}(\Gamma') = B = \mathcal{A}(\Gamma)$, donc E est Γ-stable, et $x \in E \Rightarrow y \in E$, donc $x \to y$ est une arête de $\bar{\Gamma}' = \Gamma'$. On en déduit bien $\Gamma = \Gamma'$. □

On a ainsi établi une bijection entre graphes transitifs sur S et sous-algèbres de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ qui contiennent $\mathcal{D}(S)$. Ceci nous permet d'énoncer en corollaire un analogue faible du théorème de Burnside, qui ne suppose pas le corps $\mathbf{k}$ algébriquement clos.

Corollaire 2. — *Soit S un ensemble fini, et B une sous-algèbre de* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ *qui contient $\mathcal{D}(S)$. En tant que B-module, $\mathbf{k}S$ est irréductible si et seulement si $B = \mathrm{End}(\mathbf{k}S)$. Il est alors absolument irréductible.*

Démonstration. — Si $B = \mathrm{End}(\mathbf{k}S)$, il est clair que le B-module $\mathbf{k}S$ est absolument irréductible. Inversement, supposons $\mathbf{k}S$ irréductible. Comme B contient $\mathcal{D}(S)$, on peut supposer d'après le lemme 1 que $B = \mathcal{A}(\Gamma)$, où Γ est un graphe transitif d'ensemble de sommets S. D'après la proposition 3, Γ est alors irréductible, c'est-à-dire que deux sommets peuvent toujours être joints par un chemin, donc par une arête puisque Γ est transitif. Γ est ainsi le graphe complet sur S, et $B = \mathcal{A}(\Gamma) = \mathrm{End}(\mathbf{k}S)$. □

Pour tout ensemble Φ d'éléments de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$, on note Γ_Φ le graphe sur S défini par

$$s' \to s \ \text{ ssi } \exists \varphi \in \Phi \quad s^* \varphi s' \neq 0$$

et B_Φ la sous-algèbre de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ engendrée par Φ et $\mathcal{D}(S)$. On a alors

Proposition 4. — *Pour tout ensemble Φ d'éléments de* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$*, $B_\Phi = \mathcal{A}(\Gamma_\Phi)$.*

Démonstration. — Comme B_Φ contient $\mathcal{D}(S)$, il existe d'après le lemme 1 un graphe transitif Γ tel que $B_\Phi = \mathcal{A}(\Gamma)$. Comme $\Phi \subset B_\Phi$, on a $\Gamma_\Phi \subset \Gamma$

et $\bar{\Gamma}_\Phi \subset \Gamma$. Supposons maintenant donnée une arête $s' \to s$ de Γ. Cela signifie qu'existe $b \in B$ tel que $s^* b s' \neq 0$. On peut supposer b de la forme

$$b = d_1 \varphi_1 d_2 \varphi_2 \dots \varphi_r d_{r+1}$$

avec $d_i \in \mathcal{D}(S)$, $\varphi_i \in \Phi$. Ecrivant l'identité de $\mathbf{k}S$ sous la forme $\sum_{u \in S} u u^*$, on a donc une somme non nulle de termes de la forme

$$s^* d_1 u_1 u_1^* \varphi_1 v_1 v_1^* d_2 u_2 u_2^* \varphi_2 v_2 v_2^* \dots u_r u_r^* \varphi_r v_r v_r^* d_{r+1} s.$$

L'un de ces termes est donc non nul, ce qui signifie qu'existent une famille d'éléments u_i, v_i de S tels que $v_i \to u_i$ soit une arête de Γ_Φ, avec $u_{i+1} = v_i$ ($v_i^* d_{i+1} u_{i+1} \neq 0$), $v_r = s'$ et $u_1 = s$: ceci détermine un chemin dans Γ_Φ de s' vers s, et l'arête $s' \to s$ appartient à $\bar{\Gamma}_\Phi$, d'où $\Gamma = \bar{\Gamma}_\Phi$, et

$$B_\Phi = \mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\bar{\Gamma}_\Phi) = \mathcal{A}(\Gamma_\Phi).$$

□

Remarquons enfin

PROPOSITION 5. — *Soient $r \geq 1$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in (\mathbf{k}S)^*$. Si $X_1, \dots, X_r \in \mathcal{D}(S)$ sont définis par $X_i s = \varphi_i(s) s$ pour tout $s \in S$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $X_1, \dots, X_r$ engendrent $\mathcal{D}(S)$ comme algèbre.

ii) $X_1, \dots, X_r$ engendrent $\mathcal{D}(S)$ comme algèbre unifère.

iii) $s \neq s' \Rightarrow \exists i \quad \varphi_i(s) \neq \varphi_i(s')$.

Démonstration. — On a évidemment i) $\Rightarrow$ ii). On montre ii) $\Rightarrow$ iii). S'il existe $s \neq s'$ tel que, pour tout $i \in [1, r]$, $\varphi(s) = \varphi(s')$, alors $\mathbf{k}(s - s')$ sera une droite stable pour l'action de l'algèbre unifère engendrée par $X_1, \dots, X_r$, mais pas pour l'action de $\mathcal{D}(S)$. Enfin, si l'on suppose que $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ vérifient iii), on va montrer que $X_1, \dots, X_r$ engendrent $\mathcal{D}(S)$ en tant qu'algèbre. Le cas $r = 1$ découle immédiatement du théorème d'interpolation de Lagrange. Si $r \geq 2$, on associe à tout $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbf{k}^r$ l'élément $Y \in \mathcal{D}(S)$ défini par $Y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_r X_r$. Pour $s \in S$ on a

$$Y s = (\beta_1 \varphi_1(s) + \dots + \beta_r \varphi_r(s)) s.$$

Si, à tout couple $(s, s') \in S^2$ on associe le vecteur $v_{s,s'}$ de $\mathbf{k}^r$ de composantes $\varphi_i(s) - \varphi_i(s')$, on a par hypothèse $v_{s,s'} \neq 0$ ssi $s \neq s'$. Si $s \neq s'$, l'orthogonal de $v_{s,s'}$ dans $\mathbf{k}^r$ pour la forme quadratique canonique est un hyperplan, et il suffit de supposer que $\underline{\beta}$ n'appartient pas à l'union finie de ces hyperplans pour se ramener au cas $r = 1$: Y engendre alors $\mathcal{D}(S)$ comme algèbre, donc $X_1, \dots, X_r$ également. □

2.4. Produits tensoriels. — Soient $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ une famille de graphes sur des ensembles de sommets $S_1, \ldots, S_n$. On note $I = \{1, ..., n\}$ et on définit la *disjonction* $\overset{I}{\vee}\ \Gamma_i$ de la famille $(\Gamma_i)_{i\in I}$ comme le graphe admettant pour ensemble de sommets $\overset{I}{\times}\ S_i = S_1 \times \cdots \times S_n$ et pour arêtes

$$(s_1, \ldots, s_n) \to (s'_1, \ldots, s'_n) \text{ ssi } \exists i \in I\ s_i \to s'_i \text{ et } s_j = s'_j \text{ pour } j \neq i.$$

On remarque $\left(\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i\right)^{\bullet} = \overset{I}{\vee}\ \Gamma_i^{\bullet}$. On munit $\mathbf{k}^n$ de sa forme quadratique (non dégénérée) standard, que l'on note $(\,.\,|\,.\,)$.

LEMME 2. — *Si $(\Gamma_i)_{i\in I}$ est la famille des graphes complets associés à une famille d'ensembles $(S_i)_{i\in I}$, alors $\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i$ est irréductible.*

Démonstration. — Soient $s = (s_1, \ldots, s_n)$ et $s' = (s'_1, \ldots, s'_n)$ deux éléments de $\overset{I}{\times}\ S_i$. On pose $s^{(0)} = s$, $s^{(1)} = (s'_1, s_2, \ldots, s_n)$ et $s^{(2)} = (s'_1, s'_2, s_3, \ldots, s_n)$, ..., $s^{(n)} = s'$. Il est alors clair que $s^{(k)} \to s^{(k+1)}$ pour tout $k \in [0, n-1]$, d'où $\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i$ irréductible. □

PROPOSITION 6. — *Chaque Γ_i pour $i \in I$ est irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si $\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i$ l'est.*

Démonstration. — Si Γ_i est irréductible, $\overline{\Gamma}_i$ est le graphe complet sur S_i. D'après le lemme précédent, si chaque Γ_i est irréductible, $\overset{I}{\vee}\,\overline{\Gamma}_i$ est irréductible. Or

$$\overset{I}{\vee}\,\overline{\Gamma}_i \subset \overline{\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i},$$

donc $\overset{I}{\vee}\ \Gamma_i$ est irréductible. Si chaque Γ_i est indécomposable, chaque $\Gamma_i^{\bullet}$ est irréductible, donc $\left(\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i\right)^{\bullet} = \overset{I}{\vee}\ \Gamma_i^{\bullet}$ l'est également, c'est-à-dire que $\overset{I}{\vee}\,\Gamma_i$ est indécomposable. Pour obtenir les réciproques, on note π_j pour $j \in I$ la projection naturelle de $S = \overset{I}{\times}\ S_i$ sur S_j, et $\Gamma = \overset{I}{\vee}\,\Gamma_i$. S'il existe une partie Γ_j-stable propre E_j de S_j pour un certain $j \in I$, $E = \pi_j^{-1}(E_j)$ est d'évidence Γ-stable et propre. De même, si $E'_j = S_j \setminus E_j$ est également Γ_j-stable, on définit $E' = \pi_j^{-1}(E'_j)$. Il est clair que $S = E \cup E'$ est une partition de S en parties Γ-stables et propres. On en déduit immédiatement les deux réciproques. □

On suppose maintenant donnée une $\mathbf{k}$-bigèbre unifère C de coproduit Δ, ainsi qu'une famille $\underline{c} = (c^1, ..., c^n)$ d'éléments de C. Soit $(\mathbf{k}S_i)_{i \in I}$ une famille de C-modules, m_i^j l'action de c^j sur $\mathbf{k}S_i$, m^j l'action de c^j sur $\overset{I}{\otimes} \mathbf{k}S_i = \mathbf{k}\left(\overset{I}{\times} S_i\right)$ définie par le coproduit itéré $\Delta^{(I)}$ de C. On note $\underline{m}_i$ la famille des (m_i^j), $\underline{m}$ la famille des (m^j), pour $1 \leq j \leq n$, et enfin $\Gamma_i = \Gamma_{\underline{m}_i}$, $\Gamma = \Gamma_{\underline{m}}$.

Proposition 7. — *Si $\underline{c}$ est composée d'éléments primitifs pour Δ, alors $\Gamma = \overset{I}{\vee} \Gamma_i$.*

Démonstration. — Comme Γ est par définition égale à l'union des Γ_{m^j}, et que l'opération de disjonction commute à l'union des graphes, on peut supposer que la famille $\underline{c}$ est composée d'un unique élément noté c. On note de même $\underline{m} = (m)$, $\underline{m}_i = (m_i)$, et enfin on numérote, pour la commodité de l'exposition, les éléments de I : $I = \{1, \dots, r\}$. L'arête $(s_1, \dots, s_r) \to (s'_1, \dots, s'_r)$ appartient à Γ si et seulement si $(s'_1, \dots, s'_r)^* m(s_1, \dots, s_r) \neq 0$. Or, comme c est primitif,

$$m(s_1 \otimes \cdots \otimes s_r) = \sum_{k=1}^{r} s_1 \otimes \cdots \otimes s_{k-1} \otimes m_k(s_k) \otimes s_{k+1} \otimes \cdots \otimes s_r$$

donc cette condition équivaut bien à $\exists i \quad s_i \to s'_i$ et $\forall j \neq i \ s_j = s'_j$. $\square$

On suppose désormais que C est $\mathbf{N}$-graduée en tant qu'algèbre, engendrée par ses éléments de degré au plus 1 qui forment un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie V, et que tous ses éléments de degré 0 sont scalaires. Pour tout $h \in \mathbf{k}$, l'homothétie hId_V se prolonge en un endomorphisme d'algèbre graduée de C que l'on note a_h. Par composition avec a_h, tout C-module peut ainsi être « tordu » : l'élément $x \in C$ agit alors comme $a_h(x)$ dans l'ancien module.

Pour $\underline{h} = (h_i)_{i \in I} \in \mathbf{k}^I$, on définit $a_{\underline{h}} = \overset{I}{\otimes} a_{h_i} \in \mathrm{End}(C^{\otimes I})$, et $\Delta_{\underline{h}}^{(I)} = a_{\underline{h}} \circ \Delta^{(I)}$. Si l'on considère à nouveau une famille $\underline{c}$ d'éléments de C, on remarque, en reprenant la démonstration précédente, que la proposition 7 se généralise. On définit de la même façon, pour tous $h \in \mathbf{k}$ et $\underline{h} \in \mathbf{k}^I$, $m_i^j(h)$ l'action de $a_h(c^j)$ sur $\mathbf{k}S_i$, $m^j(\underline{h})$ l'action de c^j sur $\overset{I}{\otimes} \mathbf{k}S_i$ définie par $a_{\underline{h}} \circ \Delta^{(I)}(c^j)$. On note encore $\underline{m}_i(h)$ la famille des $m_i^j(h)$, $\underline{m}(\underline{h})$ la famille des $m^j(\underline{h})$, $\Gamma_i(h) = \Gamma_{\underline{m}_i(h)}$, $\Gamma(\underline{h}) = \Gamma_{\underline{m}(\underline{h})}$, et on montre comme précédemment

Proposition 8. — *Si $\underline{c}$ est composée d'éléments homogènes qui sont primitifs pour Δ, et si $\underline{h} \in \mathbf{k}^n$ est une famille de scalaires non nuls, alors* $\Gamma(\underline{h}) = \overset{I}{\vee}\, \Gamma_i(\underline{h}) = \overset{I}{\vee}\, \Gamma_i$.

On retrouve la proposition 7 avec $\underline{h} = (1, \ldots, 1)$. On a d'autre part

Proposition 9. — *Soit A une sous-algèbre unifère de C engendrée en tant qu'algèbre unifère par des éléments primitifs et homogènes. Si, pour tout $i \in I$, l'image de A dans* $\mathrm{End}(\mathbf{k}S_i)$ *est $\mathcal{D}(S_i)$, alors, pour $\underline{h}$ générique, l'image de $\Delta_{\underline{h}}^{(I)}(A)$ dans* $\mathrm{End}(\overset{I}{\otimes}\, \mathbf{k}S_i)$ *est* $\mathcal{D}(\overset{I}{\times}\, S_i)$.

Démonstration. — Comme chaque S_i est fini, il existe un nombre fini $X_1, \ldots, X_r$ d'éléments primitifs homogènes de A tels que, pour tout $i \in I$, les images de $X_1, \ldots, X_r$ dans $\mathrm{End}(\mathbf{k}S_i)$ engendrent $\mathcal{D}(S_i)$. On peut leur associer des formes linéaires $\varphi_i^j \in (\mathbf{k}S_i)^*$ définies par $X_j s_i = \varphi_i^j(s_i) s_i$ pour tout $j \in [1, r]$ et $s_i \in S_i$. La proposition 5 dit que

$$\forall i \in I \ \ \forall s_i, s_i' \in S_i \ \ s_i \neq s_i' \Rightarrow \exists j \in [1, r] \ \varphi_i^j(s_i) \neq \varphi_i^j(s_i').$$

Pour tout $\underline{h} = (h_i)_{i \in I}$, on a, si l'on note $I = \{1, \ldots, n\}$,

$$\Delta_{\underline{h}}^{(I)}(X_j)(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{n_j} \varphi_i^j(s_i)\right] s_1 \otimes \cdots \otimes s_n,$$

où $n_j = deg(X_j)$. Comme un scalaire ne peut être primitif, on a $n_j \geq 1$. D'après la proposition 5, on aura la conclusion voulue si et seulement si, en notant $\underline{s} = (s_i)_{i \in I} \in \overset{I}{\times}\, S_i$,

$$\forall \underline{s}, \underline{s}' \in \overset{I}{\times}\, S_i \ \ \underline{s} \neq \underline{s}' \Rightarrow \exists j \ \ \sum_{i=1}^{n} h_i^{n_j} \varphi_i^j(s_i) \neq \sum_{i=1}^{n} h_i^{n_j} \varphi_i^j(s_i')$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^{n_j} \left[\varphi_i^j(s_i) - \varphi_i^j(s_i')\right] \neq 0.$$

Il s'agit donc de montrer, si l'on note, pour $i \in [1, r]$, $\underline{s}, \underline{s}' \in \overset{I}{\times}\, S_i$ et $\underline{s} \neq \underline{s}'$, $v^j(\underline{s}, \underline{s}')$ le vecteur non nul

$$\left(v^j(\underline{s}, \underline{s}')\right)_i = \varphi_i^j(s_i) - \varphi_i^j(s_i'),$$

que l'ensemble

$$F = \{\underline{h} \in \mathbf{k}^I \ \mid \ \forall \underline{s} \neq \underline{s}' \, \forall j \in [1, r] \ \ (\underline{h}^{n_j} | v^j(\underline{s}, \underline{s}')) \neq 0\} = \bigcap_{\underline{s} \neq \underline{s}'} \bigcup_{j \in [1, r]} G_j(\underline{s}, \underline{s}')$$

où $G_j(\underline{s},\underline{s}') = \{\underline{h} \in \mathbf{k}^I \mid (\underline{h}^{n_j}|v^j(\underline{s},\underline{s}')) \neq 0\}$, est un ouvert dense de $\mathbf{k}^I$. Chacun des $G_j(\underline{s},\underline{s}')$ est lui-même image réciproque de $E_j(\underline{s},\underline{s}')$, ensemble des $\underline{h} \in \mathbf{k}^n$ tels que $(\underline{h}|v^j(\underline{s},\underline{s}')) \neq 0$ pour $\underline{s} \neq \underline{s}'$ par le morphisme $\underline{h} \mapsto \underline{h}^{n_j}$. Ce morphisme est dominant car $n_j > 0$. Il en résulte que, si $v^j(\underline{s},\underline{s}') \neq 0$, alors $E_j(\underline{s},\underline{s}')$ est le complémentaire d'un hyperplan, donc $G_j(\underline{s},\underline{s}')$ est un ouvert dense. Pour $\underline{s} \neq \underline{s}'$ fixés, l'union des $G_j(\underline{s},\underline{s}')$ est un ouvert de $\mathbf{k}^I$, non vide car il existe j tel que $v^j(\underline{s},\underline{s}') \neq 0$, donc dense. F est ainsi un ouvert dense comme intersection finie d'ouverts denses de $\mathbf{k}^I$ avec $\mathbf{k}$ infini. $\square$

Corollaire. — *Si l'on a une famille $\underline{c}$ d'éléments de C et une sous-algèbre A de C qui vérifient respectivement les hypothèses des deux propositions précédentes, et si de plus chacun des Γ_i est irréductible (resp. indécomposable), alors, pour $\underline{h}$ générique, $\mathbf{k}\left(\overset{I}{\times} S_i\right)$ est irréductible (resp. indécomposable) pour l'action de $\Delta_{\underline{h}}^{(I)}(C)$.*

Démonstration. — On note $S = \overset{I}{\times} S_i$. D'après la proposition 9, $\Delta_{\underline{h}}^{(I)}(C)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(\mathbf{k}S)$ qui contient $\mathcal{D}(S)$ pour $\underline{h}$ générique. D'après la proposition 8 et la proposition 6, si $\underline{h} \in (\mathbf{k}\backslash\{0\})^n$, le graphe associé à $\underline{c}$ pour l'action de C sur $\mathbf{k}S$ sera bien irréductible (resp. indécomposable) si et seulement si chacun des Γ_i l'est. La conclusion découle alors de la proposition 3. $\square$

2.5. Démonstration du théorème 1. — Nous appliquons le cadre des sections précédentes au cas où C est l'algèbre enveloppante universelle $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ de $\mathfrak{g}_X$, munie de la graduation naturelle issue de $\mathfrak{g}_X$. Rappelons qu'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$ est dite homogène si elle est engendrée par des éléments homogènes de $\mathfrak{g}_X$. Son algèbre enveloppante $\mathsf{U}\mathfrak{D}$ est alors une sous-algèbre unifère de $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ engendrée en tant qu'algèbre par des éléments primitifs et homogènes.

On peut caractériser la propriété d'agrégeance par rapport à $\mathfrak{D}$ d'une autre façon :

Proposition 10. — *ρ est agrégeante par rapport à $\mathfrak{D}$ si et seulement si $\rho(\mathfrak{D})$ est commutative et s'il existe $d \in \mathsf{U}\mathfrak{D}$ tel que $\rho(d)$ soit diagonalisable à valeurs propres distinctes. Si S désigne une base propre de $\rho(d)$, on a alors $\rho(\mathsf{U}\mathfrak{D}) = \mathcal{D}(S)$.*

Démonstration. — On note V l'espace vectoriel sous-jacent de ρ, et on suppose que ρ est agrégeante par rapport à $\mathfrak{D}$. On choisit une base S de V propre pour l'action de $\mathfrak{D}$. Cela permet d'identifier V à $\mathbf{k}S$. Dire que la restriction à $\mathfrak{D}$ de $\mathbf{k}S$ est somme de représentations de dimension 1 deux à deux distinctes équivaut à dire que, pour l'action de $\mathfrak{D}$,

$$\mathbf{k}S = \bigoplus_{s \in S} \mathbf{k}\, s$$

où l'action de $\mathfrak{D}$ sur $\mathbf{k}\, s$ est donnée par une forme $\psi_s \in \mathfrak{D}^*$ telle que

$$\forall d \in \mathfrak{D} \quad d.s = \psi_s(d)\, s.$$

Inversement, à tout $d \in \mathfrak{D}$ est associé $\varphi_d \in (\mathbf{k}S)^*$ définie par $\varphi_d(s) = \psi_s(d)$. Le fait que la restriction considérée soit sans multiplicités se traduit par

$$s \neq s' \Rightarrow \exists d\ \psi_s(d) \neq \psi_{s'}(d) \Leftrightarrow \exists d\ \varphi_d(s) \neq \varphi_d(s').$$

Puisque S est fini, on peut choisir une famille finie $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{D}$ telle que

$$s \neq s' \Rightarrow \exists d \in \mathcal{F} \quad \varphi_d(s) \neq \varphi_d(s')$$

et appliquer la proposition 5. On a alors $\rho(\mathsf{U}\mathfrak{D}) = \mathcal{D}(S)$, donc il existe $d \in \mathsf{U}\mathfrak{D}$ satisfaisant les conditions requises. Réciproquement, s'il existe $d \in \mathsf{U}\mathfrak{D}$ tel que $\rho(d)$ soit diagonalisable à valeurs propres distinctes, on note S une base propre pour $\rho(d)$. Si de plus $\rho(\mathfrak{D})$ est commutative, $\rho(\mathsf{U}\mathfrak{D})$ commute à $\rho(d)$, donc $\rho(\mathsf{U}\mathfrak{D}) \subset \mathcal{D}(S)$, $\mathbf{k}S$ est somme des droites $\mathbf{k}s$ pour $s \in S$, qui sont stables pour l'action de $\mathsf{U}\mathfrak{D}$, et sur lesquelles $d \in \mathsf{U}\mathfrak{D}$ agit par des valeurs différentes : la restriction est sans multiplicités, et ρ est agrégeante. □

Comme les matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes forment un ouvert de $M_N(\mathbf{k})$, on en déduit immédiatement que, dans la variété des représentations de dimension n de $\mathfrak{g}_X$, et pour la topologie de Zariski,

Corollaire. — *Si $\mathfrak{D}$ est commutative, la propriété d'être agrégeant par rapport à $\mathfrak{D}$ est ouverte.*

On peut alors démontrer le théorème 1. D'après la proposition 10, pour tout $i \in I$ il existe $d_i \in \mathsf{U}\mathfrak{D}$ tel que $\rho^{(i)}(d)$ soit diagonalisable à valeurs propres distinctes. On note S_i une base propre de $\rho^{(i)}(d_i)$, et on identifie $\mathbf{k}S_i$ à l'espace sous-jacent de $\rho^{(i)}$. On a $\rho^{(i)}(\mathfrak{D}) = \mathcal{D}(S_i)$. On applique alors les propositions 8 et 9 à $C = \mathsf{U}\mathfrak{g}_X$, $\underline{c}$ une famille génératrice de $\mathfrak{g}_X$, $A = \mathsf{U}\mathfrak{D}$. D'après la proposition 9, on obtient bien que, pour $\underline{h}$ générique, $\overset{I}{\otimes}\rho^{(i)}_{h_i}$ est agrégeante. D'après son corollaire, elle est de plus irréductible (resp. indécomposable) si chacune des $\rho^{(i)}$ l'est.

On déduit alors du théorème 1, à l'aide de la proposition 2, la démonstration de son corollaire. En effet, $\overset{I}{\otimes}\rho^{(i)}_{h_i}$ est irréductible pour $(h_1,\dots,h_n)$ dans un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{C}^n$. On note V l'espace vectoriel sous-jacent. D'après la proposition 2, on en déduit que la représentation de monodromie sera irréductible pour au moins un n-uplet $h_1,\dots,h_n$. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, l'image de $\mathbf{C}\pi_1(X)$ sera donc $\mathrm{End}(V)$ dans ce cas. Comme cette représentation de monodromie est analytique en $h_1,\dots,h_n$, on en déduit que ce sera encore vrai pour $(h_1,\dots,h_n)$ dans un ouvert dense U de $\mathbf{C}^n$ pour sa topologie naturelle.

On démontre maintenant la proposition 1. Une famille $\underline{e}=(e_1,\dots,e_n)$ d'éléments de $H_1(X,\mathbf{Z})$ qui forme une base de $H_1(X,\mathbf{Q})$ engendre $\mathfrak{g}_X$ comme algèbre de Lie, et $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ comme algèbre unifère. Les éléments e_i sont primitifs et homogènes dans $\mathsf{U}\mathfrak{g}_X$, et il en est de même de toute combinaison linéaire

$$e_{\underline{\lambda}}=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots\lambda_ne_n$$

où $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{C}^n$. À cette famille $\underline{e}$ on peut associer la sous-algèbre $\mathfrak{D}_{\underline{e}}$ de $\mathfrak{g}_X$ engendrée par $e_1,\dots,e_n$, et à tout $\underline{\lambda}$ on peut associer la sous-algèbre commutative $\mathfrak{D}_{\underline{\lambda}}$ engendrée par $e_{\underline{\lambda}}$. Dire qu'une représentation $\rho:\mathsf{U}\mathfrak{g}_X\to\mathrm{End}(V)$ est fortement agrégeante équivaut à dire qu'elle est agrégeante par rapport à l'algèbre commutative $\mathfrak{D}_{\underline{\lambda}}$ pour un certain $\underline{\lambda}\in\mathbf{Q}^n$. Comme l'ensemble des $\underline{\lambda}\in\mathbf{k}^n$ tels que $\rho(e_{\underline{\lambda}})$ soit diagonalisable sans multiplicités est un ouvert de $\mathbf{k}^n$ pour la topologie de Zariski, cela équivaut encore à dire qu'elle est agrégeante par rapport à $\mathfrak{D}_{\underline{\lambda}}$ pour un certain $\underline{\lambda}\in\mathbf{k}^n$. Ainsi, la notion d'agrégeance forte est stable par extension des scalaires. Pour la même raison, si l'on a une famille finie de représentations fortement agrégeantes, chacune de ces représentations sera agrégeante par rapport à un *même* $\mathfrak{D}_{\underline{\lambda}}$, avec $\underline{\lambda}\in\mathbf{Q}^n$. De même, les noyaux et conoyaux de morphismes entre deux représentations fortement agrégeantes, ainsi que les duaux de représentations fortement agrégeantes sont fortement agrégeants.

Une question naturelle que nous laissons ouverte est enfin de savoir, lorsque ρ est irréductible, sous quelles conditions sur les $\rho(e_i)$ il existe $\underline{\lambda}$ tel que $\rho(e_{\underline{\lambda}})$ est diagonalisable à valeurs propres distinctes.

Qu'il y ait en effet besoin de conditions supplémentaires, c'est-à-dire que toutes les représentations irréductibles, même agrégeantes par rapport à une certaine sous-algèbre homogène, ne sont pas en général fortement agrégeantes, est attesté par le contre-exemple suivant, dû à Gaëtan Chenevier :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate aisément que A et B engendrent $M_3(\mathbf{C})$ en tant qu'algèbre et $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ en tant qu'algèbre de Lie, donc que $\mathbf{C}^3$ est bien irréductible, et que toute combinaison linéaire de A et B est nilpotente. Il est d'autre part facile de faire apparaître ces matrices comme représentation d'une algèbre d'holonomie $\mathfrak{g}_X$ (par exemple pour $X = \mathbf{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$). Une telle représentation ne sera donc pas fortement agrégeante. En revanche, la matrice $[B, [A, [A, B]]] = \mathrm{diag}(-3, 0, 3)$ est diagonale à valeurs propres distinctes : une telle représentation sera donc agrégante par rapport à l'algèbre engendrée par l'élément homogène (de degré 4) correspondant.

3. Applications

Nous étudions le problème de l'irréductibilité dans le cas où X est le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans dans un espace affine, et plus particulièrement quand cet arrangement correspond à un groupe de Coxeter fini. Nous sommes bien dans le cadre de la partie précédente, puisque X s'identifie alors au complémentaire d'un arrangement central d'hyperplans dans l'espace projectif associé.

Les premières sections montrent comment l'on peut appliquer le théorème 1 dans ce cadre. Il s'agit d'abord de trouver de bonnes sous-algèbres homogènes $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{g}_X$. Les algèbres que nous considérons ici sont commutatives et liées aux éléments dits de Jucys-Murphy. Elles forment des sous-espaces de $H_1(X, \mathbf{Q})$ qui vérifient la condition

$$\forall x, y \in \mathfrak{D} \quad x \wedge y \in \delta\left(H_2(X, \mathbf{Q})\right)$$

où δ désigne, comme en 2.1, le transposé du cup-produit. De tels sous-espaces seront appelés des sous-espaces *totalement isotropes* de $H_1(X, \mathbf{Q})$. Toute droite de $H_1(X, \mathbf{Q})$ est évidemment totalement isotrope. En 3.1 nous obtenons ainsi des résultats d'irréductibilité générique pour les produits tensoriels de certaines représentations du groupe de tresses pures, en particulier pour celles qui se factorisent par l'algèbre de Hecke générique de type A. Nous généralisons ce résultat à d'autres groupes de Coxeter finis dans les sections suivantes. Après avoir mis en place en 3.2 le cadre d'ensemble, nous définissons en 3.3 le rôle d'éléments de Jucys-Murphy généralisés dans cette étude, ce qui nous permet de démontrer l'irréductibilité générique des produits tensoriels de représentations d'algèbres de Hecke pour l'action du groupe de tresses (pures) correspondant.

Enfin, en 3.4, nous montrons comment aborder un problème plus fin, à savoir la décomposition des produits tensoriels de représentations d'une algèbre de Hecke donnée pour des valeurs génériques de son paramètre de définition q. Nous généralisons en particulier, en section 3.5, un résultat classique de Kilmoyer.

Pour éviter les redites, nous n'énoncerons les résultats d'irréductibilité que pour l'algèbre d'holonomie, la traduction en termes d'irréductibilité de représentations de $\pi_1(X)$ étant immédiate à partir de la proposition 2 et du corollaire du théorème 1. On note $\mathbf{k}$ le corps de base de $\mathfrak{g}_X$.

3.1. Application aux tresses pures. — On note $\mathbf{C}^n_* = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid z_i \neq z_j \Leftrightarrow i \neq j\}$ dans lequel on fixe une fois pour toutes un point base, et $P_n = \pi_1(\mathbf{C}^n_*)$ le groupe des tresses pures à n brins. On applique ce qui précède aux représentations de P_n, pour $X = \mathbf{C}^n_*$. L'algèbre d'holonomie homogène $\mathfrak{g}_X$ est connue sous le nom d'algèbre des tresses infinitésimales pures, et se note $\mathcal{T}_n$. Elle admet une présentation par générateurs $t_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ et relations

$$\begin{array}{lll} [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 \; [t_{ij}, t_{kl}] = 0 & \text{si } \#\{i, j, k, l\} = 4 \\ t_{ij} = t_{ji}, t_{ii} = 0 \quad \deg t_{ij} = 1 & \text{si } i \neq j \end{array}$$

Elle est donc engendrée par des éléments de degré 1. Nous considérons les éléments $T_2, \dots, T_n$ définis par

$$T_r = \sum_{1 \leq i < j \leq r} t_{ij}.$$

Ces éléments commutent entre eux, et engendrent donc une sous-algèbre de Lie commutative $\mathfrak{D}$ de $\mathcal{T}_n$. Ils forment même un sous-espace totalement isotrope de $H_1(X, \mathbf{Q})$, dont une autre base remarquable est formée des éléments $Y_2, \dots, Y_n$ définis par $Y_r = T_r - T_{r-1}$, où l'on a convenu que $T_1 = 0$. Une représentation de $\mathcal{T}_n$ est autrement connue sous le nom de « système KZ ». Spécialisant la définition 1, on dit pour simplifier qu'un système KZ est agrégeant si et seulement si la représentation de

$\mathfrak{g}_X = \mathcal{T}_n$ associée est agrégeante relativement à $\mathfrak{D}$. Un tel système sera donc fortement agrégeant au sens de la définition 2.

L'intérêt du théorème 1 est lié à l'abondance des représentations de P_n qui proviennent de représentations agrégeantes de $\mathcal{T}_n$. Nous donnons deux exemples, qui permettent de construire à l'aide de produits tensoriels une vaste famille de représentations irréductibles du groupe de tresses pures.

3.1.1. Représentations de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami. — L'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami $BMW_n(\alpha, s)$ est en général définie comme un quotient de dimension finie de l'algèbre de groupe complexe du groupe de tresses « plein », dont l'algèbre de Iwahori-Hecke de type A est facteur direct. Sa définition, pour laquelle nous renvoyons à [1], fait intervenir deux paramètres $\alpha, s \in \mathbf{C}$. Ici, nous ne considérons cette (famille d') algèbre(s) que pour des valeurs génériques de α et s (pour la topologie naturelle de $\mathbf{C}$). Dans ce cas, cette algèbre est semi-simple, et une conséquence immédiate de [12], prop. 5, est qu'elle est de façon naturelle un quotient de $\mathbf{C}P_n$, algèbre de groupe des tresses *pures*. C'est de cette façon que nous la considérons désormais.

Nous avons montré dans [12] que toute représentation de $BMW_n(\alpha, s)$ est une représentation de monodromie. Plus précisément, si $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique 0, à toute représentation ρ de la $\mathbf{k}$-algèbre de Brauer $Br_n(m)$ et à tout $h \in \mathbf{k}$ non nul, on a associé une représentation irréductible ρ'_h de $\mathcal{T}_n$, et ainsi, si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, une représentation $\int \rho'_h$ de $\mathbf{C}P_n$. Cette représentation, pour $h \in \mathbf{C}$ en dehors d'un ensemble localement fini, est irréductible et se factorise par $BMW_n(\alpha, s)$ avec $\alpha = \exp((m-1)h)$ et $s = \exp(h)$. Inversement, toute représentation irréductible de P_n qui se factorise par $BMW_n(\alpha, s)$, pour des valeurs génériques de α et s, s'obtient de cette façon.

Une conséquence du théorème 4 de [12] est alors

Théorème 2. — *Soit $n \geq 2$. Pour presque tout $m \in \mathbf{k}$, et pour toute représentation irréductible de $Br_n(m)$, la représentation de $\mathcal{T}_n$ associée est agrégeante et irréductible.*

Rappelons que l'algèbre de Hecke de type A est un quotient de l'algèbre de Birman-Wenzl-Murakami. Ses représentations irréductibles proviennent donc également de représentations agrégeantes de $\mathcal{T}_n$.

3.1.2. Systèmes de Yang-Baxter. — Soient $V_1, \dots, V_n$ une famille de représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe algébrique

G sur $\mathbf{k}$, qui est semi-simple. Il est désormais classique qu'existe une action de $\mathcal{T}_n$ sur $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ qui commute à l'action diagonale de G, où t_{ij} agit sur $V_i \otimes V_j$ par

$$\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C$$

où C désigne le Casimir de G, élément de l'algèbre enveloppante de son algèbre de Lie, et Δ le coproduit naturel. En particulier, on a une action de $\mathcal{T}_n$ sur l'espace vectoriel des vecteurs de plus haut poids $(V_1 \otimes \dots V_n)^+$ de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, qui laisse stable les sous-espaces homogènes $(V_1 \otimes \dots V_n)_\lambda$ pour tout poids dominant λ.

Théorème 3. — *Si $V_1, \dots, V_n$, pour $n \geq 2$, est une famille de représentations irréductibles de $SL_2(\mathbf{k})$, alors $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^+$ est agrégeante pour l'action de $\mathcal{T}_n$.*

Démonstration. — On note C l'élément de Casimir de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{k})$, que l'on normalise de telle façon qu'il agisse par 1 sur la représentation standard. On indexe les représentations irréductibles de $SL_2(\mathbf{k})$ par leur plus haut poids de la façon habituelle, de telle manière que [0], [1] et [2] correspondent respectivement aux représentations triviale, standard et adjointe. La formule de Clebsch-Gordan dit alors que, si $a \leq b$,

$$[a] \otimes [b] = [b-a] + [b-a+2] + \cdots + [a+b-2] + [a+b].$$

Si $V_1 = [a]$, on choisit, pour tout u entier dans $[0,a]$, un vecteur de plus haut poids de V_1 de poids u, que l'on note (u). On note $\mathcal{F}_1$ l'ensemble de ces vecteurs, que l'on a ainsi identifié à $[0,a] \subset \mathbf{N}$. Supposons que l'on a construit un ensemble $\mathcal{F}_r$ de vecteurs de plus haut poids de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, indexé par des r-uplets de façon à identifier $\mathcal{F}_r$ à une partie de $\mathbf{N}^r$. Pour chaque $(u_1, \dots, u_r) \in \mathcal{F}_r$, on considère le produit tensoriel de la composante irréductible qu'il engendre sous l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{k})$ par V_{r+1}. Comme la formule de Clebsch-Gordan ne fait pas apparaître de multiplicités, chaque composante irréductible de ce produit tensoriel est uniquement déterminé par son poids u_{r+1}. On choisit alors un vecteur de plus haut poids correspondant, élément donc de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_{r+1}$, que l'on note $(u_1, \dots, u_{r+1})$. La réunion de ces $(r+1)$-uplets forme ainsi un ensemble $\mathcal{F}_{r+1}$, et l'itération de ce procédé à partir de $\mathcal{F}_1$ nous permet de construire, pour tout $r \in [1,n]$, une famille $\mathcal{F}_r$ qui forme une base de $V_1 \otimes \dots V_r$. On note alors

$$\mathcal{F}_r(\lambda) = \{(u_1, \dots, u_r) \in \mathcal{F}_r \ \mid \ u_r = \lambda\}.$$

Il est clair que $\mathcal{F}_r$, resp. $\mathcal{F}_r(\lambda)$ forme une base de $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)^+$, resp. $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)_\lambda$.

Pour tout $r \in [1, n]$, on note C_r l'action du Casimir C sur $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, que l'on identifie à $\mathbf{k}\mathcal{F}_r$. Un calcul classique montre que

$$C_r = C_{r-1} \otimes 1 + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes C + 2Y_r. \tag{1}$$

On en déduit que Y_r, pour $1 \leq r \leq n$, agit scalairement sur chaque élément de $\mathcal{F}_r$, donc sur chaque élément de $\mathcal{F}_n$. On note ρ l'action de $\mathcal{T}_n$ sur $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^+ = \mathbf{k}\mathcal{F}_n$. On a vu $\rho(\mathsf{U}\mathfrak{D}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}_n)$. Pour montrer l'égalité, on veut appliquer la proposition 5 avec $X_i = Y_i$, $2 \leq i \leq n$.

On définit $\alpha_i \in \mathbf{N}$ par $V_i \simeq [\alpha_i]$. L'action de C sur $[m]$ vaut $C(m) = m(m+2)/8$. Comme, pour $2 \leq r \leq n$,

$$(u_1, \ldots, u_n) \in (u_1, \ldots, u_r) \otimes V_{r+1} \otimes \cdots \otimes V_n \subset (u_1, \ldots, u_{r-1}) \otimes V_r \otimes \cdots \otimes V_n,$$

et que, par construction, chaque k-uplet $(v_1, \ldots, v_k)$ est de poids v_k, on déduit de (1) que l'action de Y_r sur $(u_1, \ldots, u_n)$ vaut

$$\left(C(u_r) - C(u_{r-1}) - C(\alpha_r)\right)/2.$$

Soient maintenant deux vecteurs distincts $\underline{u} = (u_1, \ldots u_n)$ et $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{F}_n$. On veut donc montrer qu'existe r tel que

$$C(u_r) - C(u_{r-1}) - C(\alpha_r) \neq C(v_r) - C(v_{r-1}) - C(\alpha_r).$$

Comme $u_1 = v_1$ et $\underline{u} \neq \underline{v}$, il existe un $r \geq 2$ tel que $u_{r-1} = v_{r-1}$ et $u_r \neq v_r$. La conclusion découle alors de

$$C(a) - C(b) = (a-b)(a+b+2)/8 = 0 \Rightarrow a = b$$

si $a, b \in \mathbf{N}$. $\square$

3.2. Groupes de tresses pures généralisés. — Soit W un groupe de Coxeter fini, que l'on considère comme sous-groupe de $GL(V)$, avec V espace vectoriel complexe, à l'aide de sa représentation de réflexion. On dira que W est *réduit* si sa représentation de réflexion est irréductible, c'est-à-dire que son diagramme de Coxeter est connexe. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des hyperplans de réflexion de W, et $s_H \in GL(V)$ pour $H \in \mathcal{A}$ la réflexion par rapport à H. On note B le groupe de tresses généralisé au sens de Brieskorn et Saito [3] et P le groupe de tresses pures correspondant. Si $W = \mathfrak{S}_n$, P et B sont les groupes de tresses (pures) classiques sur n brins. On note $\mathcal{H}_q$ l'algèbre de Hecke complexe de paramètre $q \in \mathbf{C}$ correspondant à W. C'est le quotient de $\mathbf{C}B$ par les éléments $(\sigma - q)(\sigma + q^{-1})$ pour σ générateur d'Artin de B. Il est classique depuis Tits que, pour presque tout $q \in \mathbf{C}$, $\mathcal{H}_q$ est isomorphe à $\mathbf{C}W$. On a $P = \pi_1(X)$, avec

$$X = V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

et un point base arbitraire de X fixé une fois pour toute. On note, pour $H \in \mathcal{A}$, α_H une forme linéaire non nulle sur V telle que $\mathrm{Ker}\alpha_H = H$, et $\omega_H = \frac{\mathrm{d}\alpha_H}{\alpha_H}$.

L'espace F des 1-formes fermées à singularités logarithmiques choisi ici est engendré par $\omega_H, H \in \mathcal{A}$, les générateurs correspondants de $\mathfrak{g}_X$ sont notés t_H, $H \in \mathcal{A}$, et sont assujettis aux relations (cf. [9], prop. 2.19)

$$[t_H, \sum_{H' \in \mathcal{A}_U} t_{H'}] = 0$$

où U désigne un sous-espace de codimension 2 de V contenu dans H et $\mathcal{A}_U$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ contenant U. Il est classique que, pour des valeurs génériques de $q \in \mathbf{C}$, les représentations de l'algèbre de Hecke sont des représentations de monodromies. Plus précisément, si $\rho : W \to GL(E)$ désigne une représentation de W, et que l'on prend pour $\mathbf{k} \subset \mathbf{C}$ le corps de définition des représentations irréductibles de W, pour tout $h \in \mathbf{C}$ la 1-forme

$$\omega = \sum_{H \in \mathcal{A}} h\rho(s_H)\omega_H$$

est intégrable, c'est-à-dire que $t_H \mapsto \rho(s_H)$ définit une représentation ρ' de $\mathfrak{g}_X$ et $\int \rho'_h$ est une représentation de P. Si ρ est irréductible, puisque W est engendré par les s_H pour $H \in \mathcal{A}$, ρ' sera encore irréductible, et $\int \rho'_h$ sera une représentation irréductible de P pour tout h en dehors d'un ensemble localement fini. Comme ω est W-équivariante, elle permet en fait (cf. [4]) de définir une représentation de B qui se factorise par $\mathcal{H}_q$ pour $q = \exp(2\mathrm{i}\pi h)$, et la restriction de cette représentation à P est $\int \rho'_h$. Comme on peut obtenir, dans le cas générique, toutes les représentations de $\mathcal{H}_q$ de cette manière, on vient de remarquer

Proposition 11. — *Les restrictions à P des représentations irréductibles de $\mathcal{H}_q$ sont irréductibles pour des valeurs génériques de $q \in \mathbf{C}$.*

Corollaire. — *Pour des valeurs génériques de $q \in \mathbf{C}$, le morphisme $\mathbf{C}P \to \mathcal{H}_q$ est surjectif.*

Le corollaire découle du théorème de Burnside et de la semi-simplicité de $\mathcal{H}_q$. La généricité dont il est question dans la proposition 11 et son corollaire se réfère en fait à la topologie de Zariski de $\mathbf{C}$, parce que les représentations de $\mathcal{H}_q$ peuvent être définies sur $\mathbf{k}(q)$.

Le fait que la 1-forme ω associée à une représentation ρ de W soit W-équivariante se traduit algébriquement par le fait que l'on peut étendre la représentation de $\mathfrak{g}_X$ correspondante en une représentation de la bigèbre $\mathbf{k}W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}_X$ par

$$s_H \mapsto \rho(s_H) \quad t_H \mapsto \rho(s_H)$$

où W agit sur les $t_H \in \mathfrak{g}_X$ par la contragrédiente de la représentation de réflexion. La décomposition d'un produit tensoriel de représentations de $\mathcal{H}_q$ pour B est alors équivalente, si q est générique, à la décomposition correspondante pour l'action de $\mathbf{k}W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}_X$. La proposition suivante montre qu'il suffit de considérer l'action de P.

Proposition 12. — *Si $\rho_1, \ldots, \rho_r$ sont des représentations de W, les composantes stables de $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ sont les mêmes pour l'action de $\mathfrak{g}_X$ et de $\mathbf{C}W \ltimes \mathsf{U}\mathfrak{g}_X$.*

Démonstration. — Si l'on note $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$, il suffit de montrer que $\rho(s_H)$ est un polynôme de $\rho(t_H)$ pour tout $H \in \mathcal{A}$. On fixe H, et l'on note $s = s_H$, $t = t_H$. Pour chaque $i \in [1, r]$ on fixe une base de vecteurs propres pour $\rho_i(t)$. Les tenseurs purs formés d'éléments de ces bases forment une base de ρ. Sur un tel tenseur, il existe $a, b \in \mathbf{N}$ avec $a + b = r$ tels que t agisse par $a - b$ et s par $(-1)^b$. Comme il existe $P \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $P(b) = (-1)^b$ pour tout $b \in [0, r]$, on a $\rho(s) = Q(\rho(t))$ avec $Q(x) = P(\frac{r-x}{2})$. □

De la même façon, on montre facilement (cf. [14] III.4.1, prop. 34) le résultat analogue pour les représentations du groupe de tresses étudiées en 7.1 (pour m générique) et en 7.2 (dans le cas où les V_i sont tous isomorphes).

3.3. Eléments de Jucys-Murphy généralisés. — On suppose que $\mathfrak{g}_X$ est définie sur $\mathbf{k} \subset \mathbf{C}$. Pour établir des résultats d'irréductibilité générique des produits tensoriels de représentations de P issues de l'algèbre de Hecke, il s'agit de vérifier l'agrégeance par rapport à une famille bien choisie d'éléments de $\mathfrak{g}_X$ issus de $\mathbf{k}W$, c'est-à-dire de généraliser les éléments de Jucys-Murphy du groupe symétrique. Les deux propriétés essentielles que satisfont ces éléments sont

(A) ce sont des sommes de réflexions

(B) ils engendrent une sous-algèbre commutative *maximale* de $\mathbf{C}W$ qui agit diagonalement sur les représentations de W.

Par rapport au problème qui nous intéresse ici, il suffit en fait de définir pour tout groupe de Coxeter W une famille $JM(W)$ d'éléments de $\mathbf{k}W$ qui satisfont les deux conditions plus faibles

(A') chaque élément est image d'un élément homogène de l'algèbre de Lie libre sur les réflexions.

(B') pour chaque représentation irréductible complexe de W, l'algèbre engendrée par leur image dans End(W) est diagonale maximale.

La condition (A) restant essentielle pour prouver un résultat d'agrégeance forte.

Si l'on a des éléments $JM(W)$ dont les images dans toute représentation sont diagonales sur $\mathbf{C}$, on peut associer à tout représentation irréductible ρ de W sur un espace vectoriel complexe E son *contenu*, défini par

$$\mathrm{cont}(\rho) = \{(\alpha_t) \in \mathbf{C}^{JM(W)} \mid \exists x \in E \setminus \{0\} \ \ \forall t \in JM(W) \ \ \rho(t)x = \alpha_t x \}$$

Les conditions (B) et (B') équivalent ainsi à, si l'on note $W^\vee$ l'ensemble des (classes de) représentations irréductibles complexes de W,

$$(B') \Leftrightarrow \forall \rho \in W^\vee \ \#\mathrm{cont}(\rho) = \dim \rho$$
$$(B) \Leftrightarrow (B') \text{ et } \forall \rho \neq \rho' \ \mathrm{cont}(\rho) \cap \mathrm{cont}(\rho') = \emptyset$$

Si l'on note K le corps de définition des représentations de W, on sait (cf. [6] th. 5.3.9 p. 153) que

$$K = \mathbf{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{m_{s,t}}\right) \ \mid \ s,t \in S\right)$$

où S désigne l'ensemble des générateurs de Coxeter et $m_{s,t}$ les coefficients de la matrice de Cartan. On introduit alors la condition naturelle, notée (C), que les valeurs propres de $JM(W)$ sur chaque représentation complexe de W appartiennent à K.

Supposons que l'on ait associé à certains groupes de Coxeter réduits W des familles $JM(W)$ d'éléments de $\mathbf{k}W$. Si $W = W_1 \times \dots W_r$, on note $JM^+(W_i)$ l'image de $JM(W_i)$ dans W pour l'inclusion naturelle, et on pose

$$JM(W) = JM^+(W_1) \cup \cdots \cup JM^+(W_r)$$

Il est clair que, si chacun des $JM(W_i)$ vérifie (A) (resp. (A')), alors $JM(W)$ également. En effet, si X (resp. X_i) désigne l'espace de configuration de W (resp. W_i), alors $X = X_1 \times \cdots \times X_r$ et $\mathfrak{g}_X = \mathfrak{g}_{X_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{X_r}$. De même, comme chacune des représentations irréductibles complexes de W est un produit tensoriel de représentations irréductibles complexes des W_i, $JM(W)$ vérifie la condition (B) (resp. (B')) dès que c'est le cas de chacun des $JM(W_i)$. En effet, si $W = W_1 \times W_2$ et $\rho \in W\check{}$, on peut décomposer $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ avec $\rho_i \in W_i\check{}$ et, si les $JM(W_i)$ vérifient (B'), on a $\mathrm{cont}(\rho) = \mathrm{cont}(\rho_1) \times \mathrm{cont}(\rho_2)$.

Le problème de la construction de tels éléments pour les groupes de Coxeter réduits est étudié dans [11]. Nous y montrons que des éléments vérifiant les conditions (A), (B) et (C) existent en type A, B, $I_2(m)$, H_3, que des éléments vérifiant (A), (B') et (C) existent en type F_4, et que des éléments vérifiant (A) et (B') existent en type H_4, ce qui permet de conclure à l'agrégeance forte pour les groupes de tresses pures correspondants. Nous conjecturons que des éléments vérifiant (A) et (B') existent également pour les type D et E donc en particulier que l'on a un résultat d'agrégeance forte pour les représentations de l'algèbre de Hecke de tout groupe de tresses généralisé. Nous avons donc en tous cas le résultat

Théorème 4. — *Pour tout groupe de Coxeter fini W, les représentations irréductibles de W induisent des représentations irréductibles fortement agrégeantes de $\mathfrak{g}_X$, sauf peut-être si W admet un sous-groupe parabolique de type D_4.*

En d'autres termes, pour W comme ci-dessus, les produits tensoriels de r représentations irréductibles de son algèbre de Hecke sont irréductibles sous l'action de P pour des valeurs génériques des r paramètres impliqués.

3.4. Algèbres de Hecke infinitésimales. — Soit (W, S) un groupe de Coxeter fini, $\mathbf{k}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$, K le corps de définition des représentations de W. On appelle *algèbre de Hecke infinitésimale* associée à W sur $\mathbf{k}$ et on note $\mathcal{H}(W)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathbf{k}W$ engendrée par les réflexions de W. Comme W est engendré par ses réflexions, on déduit de toute représentation irréductible de W sur $\mathbf{k}$ un $\mathcal{H}(W)$-module irréductible. Si X est le complémentaire d'hyperplans complexes correspondant à W, on a un morphisme naturel $\mathfrak{g}_X \to \mathcal{H}(W)$ qui associe à tout $\mathcal{H}(W)$-module un $\mathfrak{g}_X$-module, donc par monodromie une famille à un paramètre de représentations du groupe de tresses pures généralisé $P = \pi_1(X)$, génériquement irréductible si le $\mathcal{H}(W)$-module d'origine l'est. Si ce $\mathcal{H}(W)$-module provient lui-même d'un W-module, cette représentation de P se factorise dans le cas général par l'algèbre de Hecke associée à W.

Pour tout $x \in \mathcal{H}(W)$ on note $\mathrm{ad}(x) : y \mapsto [x, y]$ l'action adjointe de $\mathcal{H}(W)$ et, pour tout $x \in W$, on note $\mathrm{Ad}(x) : y \mapsto xyx^{-1}$ l'action adjointe de W sur $\mathbf{k}W$. Comme l'ensemble des réflexions de W est stable par conjugaison, cette action se restreint à $\mathcal{H}(W)$ et on constate que, pour toute réflexion x de W et tout $y \in \mathcal{H}(W)$,

$$\mathrm{ad}(x)^2(y) = 2(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(x))(y).$$

Comme toute réflexion de W est conjuguée à une réflexion élémentaire par une suite de réflexions elles-mêmes élémentaires, on en déduit que $\mathcal{H}(W)$ est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par l'ensemble S des générateurs de Coxeter.

Pour tout groupe fini G et toute classe de conjugaison c de G on note $T_c \in \mathbf{k}G$ la somme des éléments de c. Il est classique que les T_c forment une base du centre $Z(\mathbf{k}G)$ de $\mathbf{k}G$.

Lemme 3. — *Soit G un groupe fini engendré par $S \subset G$ et L la sous-algèbre de Lie de $\mathbf{k}G$ engendrée par S. Alors L est réductive et son centre $Z(L)$ est inclus dans le sous-espace vectoriel de L engendré par les T_c pour $c \cap S \neq \emptyset$.*

Démonstration. — Comme S engendre G, d'une part toute représentation irréductible de G sur $\mathbf{k}$ est irréductible en tant que L-module, d'autre part $Z(L) \subset Z(\mathbf{k}G)$. Toute représentation fidèle de $\mathbf{k}G$ se restreint en une représentation semi-simple fidèle de L, donc L est réductive. Pour toute classe de conjugaison c de G on note $\varphi_c \in (\mathbf{k}G)^*$ la fonction centrale caractéristique associée. Pour tous $g \in G$ et $y \in H$, $\varphi_c([g, y]) = \varphi_c(gy - yg) = \varphi_c(g(yg)g^{-1} - yg) = 0$. Si l'on note $E = \mathbf{k}S \subset \mathbf{k}G$ et F l'espace vectoriel des crochets itérés d'éléments de E, il est clair que $L = E + F$, et $\varphi_c(F) = \{0\}$ pour toute classe c, d'où $\varphi_c(L) = \varphi_c(E)$ et $\varphi_c(L) = 0$ pour toute classe c telle que $c \cap S = \emptyset$. Comme $Z(L) \cup Z(\mathbf{k}G) \cap L$, et

$$L \subset \sum_{c \cap S = \emptyset} \mathrm{Ker}\ \varphi_c,$$

on en déduit que $Z(L)$ est inclus dans le sous-espace vectoriel de L, donc de $\mathbf{k}G$, engendré par les T_c pour $c \cap S = \emptyset$. L'inclusion réciproque est immédiate. □

Dans le cas particulier de $G = W$, ce lemme permet de compléter les remarques générales sur la définition de $\mathcal{H}(W)$ en la

Proposition 13. — *Pour tout groupe de Coxeter fini W, $\mathcal{H}(W)$ est une algèbre de Lie réductive, engendrée par les réflexions élémentaires de W, et son centre admet pour base l'ensemble des éléments T_c où c parcours l'ensemble des classes de conjugaisons de réflexions de W.*

Si (W, S) se réduit en tant que système de Coxeter *via* $S = S_1 \cup S_2$, $W = W_1 \times W_2$ on a $\mathcal{H}(W) = \mathcal{H}(W_1) \oplus \mathcal{H}(W_2)$. Pour des groupes réduits de faible rang, on peut appliquer des algorithmes connus pour déterminer l'algèbre dérivée $\mathcal{H}(W)'$. On obtient notamment les résultats suivants, la colonne $\mathcal{H}(W)'$ contenant le type d'isomorphie de $\mathcal{H}(W)'$ en tant qu'algèbre de Lie semi-simple complexe.

W	$\mathcal{H}(W)'$	$\dim \mathcal{H}(W)'$	W	$\mathcal{H}(W)'$	$\dim \mathcal{H}(W)'$
A_3	A_1A_2	11	D_4	$A_1(A_2)^3A_3C_4$	78
A_4	A_3A_4	39	A_5	$(A_4)^2A_8D_8$	248
B_3	$A_1(A_2)^2$	19	B_4	$A_1A_2(A_3)^2A_5A_7$	139
H_3	$A_4A_3(A_2)^2$	55			

De plus, chacun des facteurs simples provient dans ces cas-là d'un $\mathbf{C}W$-module irréductible.

Pour le type A, on sait d'autre part (cf. [12]) décomposer une partie de $\mathcal{H}(W)$ pour tout n (précisément la partie qui correspond à l'algèbre de Temperley-Lieb). Nous allons maintenant déterminer les facteurs simples de $\mathcal{H}(W)'$ pour $W = I_2(m)$, $\mathbf{k} = K$. Pour fixer les notations, une présentation de W comme groupe de Coxeter est donnée par générateurs $S = \{s, t\}$ et relations $s^2 = t^2 = 1$, $(st)^m = 1$. Des éléments de Jucys-Murphy généralisés satisfaisant (A), (B) et (C) sont fournis par $JM(W) = \{s, t + sts\}$. On note V_r le K-espace vectoriel sous-jacent à la représentation ρ_r de W, définie pour $1 \leq r \leq (m-1)/2$ par

$$\rho_r(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -c_r & 1 \end{pmatrix} \rho_r(t) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -c_r \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $c_r = \zeta^r + \zeta^{-r} \in K$ (ce sont des polynômes de Tchebyshev de c_1), $\zeta = \exp(2\mathrm{i}\pi/m)$. On introduit ensuite le morphisme d'algèbres de Lie $\chi : K \to K^2$ défini par $x \mapsto (x, -x)$, $\iota : \mathfrak{sl}_2(K) \to \mathfrak{gl}_2(K)$ l'inclusion naturelle. Suivant que m est impair ou pair, on considère le premier ou le deuxième des diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd} KW \arrow[r, "\sim"] & K^2 \oplus \bigoplus \mathrm{End}(V_r) \\ \mathcal{H}(W) \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"] & K \oplus \bigoplus \mathfrak{sl}(V_r) \arrow[u, "\chi \oplus \iota^{(m-1)/2}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} KW \arrow[r, "\sim"] & K^4 \oplus \bigoplus \mathrm{End}(V_r) \\ \mathcal{H}(W) \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"] & K^2 \oplus \bigoplus \mathfrak{sl}(V_r) \arrow[u, "\chi^2 \oplus \iota^{(m-1)/2}"'] \end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme horizontal est la décomposition de la représentation régulière en composants isotypiques sur K suivant les modèles choisis plus haut. Il est clair qu'il existe bien une unique application linéaire Φ tel que le diagramme commutatif considéré commute.

Proposition 14. — *Les morphismes Φ sont des isomorphismes d'algèbres de Lie. En particulier, $\mathcal{H}(W)'$ est de type $(A_1)^n$ si $W = I_2(m)$, avec $n = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$.*

Démonstration. — On note $\rho_j : \mathcal{H}(W)' \to \mathfrak{sl}(V_j)$ l'action de $\mathcal{H}(W)'$ sur V_j, $\tilde{\rho}_j$ l'action associée sur $\mathfrak{sl}(V_j)$, suivant les modèles matriciels précédents. On vérifie immédiatement que $\rho_j(s)$, $\rho_j(t)$, $\rho_j([s,t]) \in \mathfrak{sl}(V_j)$ sont linéairement indépendants, d'où $\rho_j(\mathcal{H}(W)') = \mathfrak{sl}(V_j)$. On en déduit que $\mathfrak{sl}(V_j)$ est irréductible pour l'action $\tilde{\rho}_j$ de $\mathcal{H}(W)'$. D'autre part, du fait que $\rho_j(t + sts)$ est conjugué à

$$2\cos(\frac{2\pi j}{m}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on déduit que les spectres comparés de $\tilde{\rho}_j(t + sts)$ et $\tilde{\rho}_j(s)$ valent $(0, 4\cos(\frac{2j\pi}{m}), -4\cos(\frac{2j\pi}{m}))$ et $(0, 1, -1)$, donc que $\mathfrak{sl}(V_j)$ et $\mathfrak{sl}(V_{j'})$ sont deux $\mathcal{H}(W)'$-modules non isomorphes dès que $j \neq j'$. Enfin, $\Phi(\mathcal{H}(W)')$ est un sous-espace de la somme directe des $\mathfrak{sl}(V_j)$ qui est stable pour l'action de $\mathcal{H}(W)'$, donc est égal à la somme directe de certains des $\mathfrak{sl}(V_j)$. Comme chaque ρ_j est surjectif et se factorise par $\mathcal{H}(W)'$, on en déduit que Φ est surjectif, et est donc bien un isomorphisme. $\square$

De façon générale, les propriétés d'éléments de Jucys-Murphy généralisés permettent de déployer $\mathcal{H}(W)$:

Proposition 15. — *Soit W un groupe de Coxeter fini. Si $JM(W)$ vérifie les conditions (A),(B),(C), alors $\mathcal{H}(W)$ est déployable sur K, pour une sous-algèbre de Cartan égale à l'intersection de $\mathcal{H}(W)$ avec la sous-algèbre unifère de KW engendrée par $JM(W)$.*

Démonstration. — On note $jm(W)$ la sous-algèbre unifère de KW engendrée par $JM(W)$. $JM(W)$ agit diagonalement, à gauche et à droite, sur KW, d'après (B') et (C), et le fait que KW est un produit d'algèbres de matrices sur K. Si $\mathcal{J} = jm(W) \cap \mathcal{H}(W)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{H}(W)$, elle sera donc déployante. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{J}$ est maximale parmi les sous-algèbres de Lie commutatives de $\mathcal{H}(W)$. Or, si $\mathcal{K}$ est une sous-algèbre de Lie contenant $\mathcal{J}$, tout $x \in \mathcal{K}$ commute dans KW à $JM(W) \subset \mathcal{J}$. La sous-algèbre commutative unifère de KW engendrée par x et $JM(W)$ contenant $jm(W)$, sous-algèbre commutative maximale de KW, on en déduit $x \in jm(W)$ d'où $x \in \mathcal{J}$ et $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$. □

D'après [11], $\mathcal{H}(W)$ est ainsi déployable sur K, au moins dès que W n'admet pas de sous-groupe parabolique de type D_4, H_4 ou F_4. Remarquons d'autre part que des éléments $JM(W)$ qui vérifient (A) sont nécessairement diagonalisables sur $\mathbf{R}$, parce que les réflexions sont autoadjointes pour les produits scalaires W-invariants. Leurs valeurs propres sont de plus des entiers algébriques, puisqu'ils agissent par des matrices à coefficients entiers dans la représentation régulière de W.

3.5. Algèbres de Burau infinitésimales. — L'étude du type A (cf. [12]) suggère que l'image de $\mathcal{H}(W)$ pour $\mathbf{k} = K$ dans la représentation de réflexion de W, notée $\mathcal{H}_R(W)$, admet une structure remarquable. Nous allons montrer que c'est bien le cas, et généraliser ici le résultat de classique de Kilmoyer, suivant lequel les puissances alternées de la représentation de réflexion de toute algèbre de Hecke sont irréductibles. Une conséquence immédiate du théorème que nous démontrons ici est en effet que tout *foncteur de Schur* de la représentation de réflexion de l'algèbre de Hecke d'un groupe de Coxeter réduit est irréductible pour l'action du groupe de tresses pures correspondant, pour des valeurs génériques du paramètre de définition.

Nous démontrons tout d'abord deux lemmes :

LEMME 4. — *Pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{H}_R(B_n) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{Q})$.*

Démonstration. — On note $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ les générateurs de Coxeter de B_n, avec $(ts_1)^4 = (s_i s_{i+1})^3 = 1$, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de la représentation de réflexion (correspondant au couple $([n-1],[1])$ dans l'indexation classique). L'action de B_n peut être définie par

$$\begin{array}{l} te_1 = -e_1,\ te_i = e_i \text{ si } 1 < i < n \\ s_i e_i = e_{i+1},\ s_i e_{i+1} = e_i,\ s_i e_j = e_j \quad \text{si } j \notin \{i, i+1\} \end{array}$$

On note également t_i la réflexion définie par $t_i e_i = -e_i$, $t_i e_j = e_j$ pour $j \neq i$, de telle façon que t agisse pat t_1. On a alors

$$[s_i, t_i]e_i = -2e_{i+1}, \quad [s_i, t_i]e_{i+1} = 2e_i, \quad [s_i, t_i]e_j = 0 \ \text{ si } j \notin \{i, i+1\}$$

Si $E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire de coordonnées (i, j) de $M_n(\mathbf{Q})$, on en déduit, par combinaison linéaire de $[s_i, t_i]$, t_i, t_{i+1} et s_i, que les $E_{i,i+1}$ et $E_{i+1,i}$ appartiennent à $\mathcal{H}_R(B_n)$. Comme ils engendrent $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{Q})$ et que, pour $n \geq 3$, l'image de t est de trace non nulle, on a la conclusion voulue. □

Lemme 5. — *Pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{H}_R(D_n) \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbf{Q})$.*

Démonstration. — On identifie D_n au sous-groupe de B_n engendré par $u, s_1, \dots, s_{n-1}$ avec $u = ts_1t$. La représentation de réflexion de D_n est la restriction de la représentation de réflexion de B_n. Il s'agit alors de montrer $\mathcal{H}_R(D_n) = \mathcal{H}_R(B_n)$. Pour montrer que la sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}_R(D_n)$ est un idéal de $\mathcal{H}_R(B_n)$, il suffit de montrer $[t, s_1] \in \mathcal{H}_R(D_n)$. On a, avec les notations du lemme précédent,

$$[t, s_1]e_1 = 2e_2, \quad [t, s_1]e_2 = -2e_1, \quad [t, s_1]e_i = 0 \ \text{ si } i \notin \{1, 2\}$$

Si l'on note $X = [u, s_1] + [s_1, s_2] \in \mathcal{H}_R(D_n)$, on a

$$Xe_2 = 2e_3 \quad Xe_3 = -2e_2 \quad Xe_i = 0 \quad i \notin \{2, 3\}$$

donc X est conjugué à $[t, s_1]$ par un élément de $\mathfrak{S}_n \simeq < s_1, \dots, s_{n-1} > \subset D_n$, d'où $[t, s_1] \in \mathcal{H}_R(D_n)$. D'après le lemme précédent, $\mathcal{H}_R(D_n)$ est donc un idéal de $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \times \mathfrak{sl}_n(\mathbf{Q})$. Comme $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{Q})$ est une algèbre de Lie simple, $\mathcal{H}_R(D_n)' = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{Q})$. Pour $n \geq 3$ la trace de s_1 est non nulle, d'où $\mathcal{H}_R(D_n) = \mathfrak{gl}_n(\mathbf{Q})$. □

Comme le résultat analogue est vrai pour le type A d'après [12], ainsi que pour les groupes diédraux d'après la preuve de la proposition 14, on conclut au cas par cas sur les groupes exceptionnels H_3, H_4, F_4, E_6, E_7 et E_8 la preuve de la proposition suivante

Proposition 16. — *Pour tout groupe de Coxeter fini réduit W de rang n, $\mathcal{H}_R(W) \simeq \mathfrak{gl}_n(K)$ si $n \neq 2$, $\mathcal{H}_R(W) \simeq \mathfrak{sl}_n(K)$ si $n = 2$.*

On en déduit immédiatement le résultat suivant, qui généralise le résultat classique de Kilmoyer [5] concernant l'irréductibilité des puissances extérieures des représentations de réflexion de l'algèbre de Hecke. On note F_λ le foncteur de Schur associé à la partition λ.

Théorème 5. — *Soit W un groupe de Coxeter fini réduit, R sa représentation de réflexion, H_q son algèbre de Hecke, R_q la représentation de réflexion de H_q. Pour tout foncteur de Schur F_λ, $F_\lambda(R_q)$ est irréductible sous l'action de P pour des valeurs génériques de $q \in \mathbf{C}$.*

Comme R_q, donc chaque $F_\lambda(R_q)$, peut être défini sur $K(q)$, et comme l'absolue irréductibilité est une notion ouverte, la notion de généricité dans l'énoncé du théorème 5 est relative à la topologie *de Zariski* de $\mathbf{C}$, donc signifie « pour q en dehors d'un ensemble fini » (dépendant de λ).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.S. Birman, H. Wenzl, *Braids, link polynomials and a new algebra*, Trans. Am. Math. Soc. 313, No.1, 249-273 (1989).

[2] R. Brauer, *Sur la multiplication des caractères des groupes continus et semi-simples*, C. R. Acad. Sci., 204, 632-634 (1937).

[3] E. Brieskorn et K. Saito, *Artin-gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. 17, 245-271 (1972).

[4] M. Broué, G. Malle et R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. 500, 127-190 (1998).

[5] C.W. Curtis, N. Iwahori et R. Kilmoyer, *Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B, N)-pairs*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 40, 81-116 (1971).

[6] M. Geck et G. Pfeiffer, *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series. 21. Oxford, Clarendon Press (2000).

[7] V. Golubeva, *On the recovery of Pfaffian systems of Fuchsian type from the generators of the monodromy group*, Math. USSR Izvestija, vol. 17, 227-241 (1981).

[8] R. M. Hain, *On a generalization of Hilbert's 21st problem*, Ann. Scient. E.N.S. 4^e série, t.19, 609-627 (1986).

[9] T. Kohno, *Série de Poincaré-Koszul associée au groupe de tresses pures*, Invent. Math. 82, 57-75 (1985).

[10] T. Kohno, *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Braids, AMS-IMS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Santa Cruz/Calif. 1986, Contemp. Math. 78, 339-363 (1988).

[11] I. Marin, *Éléments de Jucys-Murphy généralisés*, preprint de l'Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille, novembre 2002.

[12] I. Marin, *Quotients infinitésimaux du groupe de tresses*, preprint de l'École Normale Supérieure, No DMA-01-31, Paris, novembre 2001. A paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[13] I. Marin, *On KZ-systems which are irreducible under the action of the symmetric group*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 333, No.6, 517-522 (2001).

[14] I. Marin, *Représentations linéaires des tresses infinitésimales*, thèse de l'université Paris XI-Orsay (2001).

[15] I. Marin, *Une caractérisation tensorielle des représentations standard*, Expo. Math. 18, No.3, 243-253 (2000).

[16] I. Zisser, *Irreducible products of characters in A_n* Isr. J. Math. 84, No.1-2, 147-151 (1993).