
Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Patrick Dehornoy pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger ce travail, pour ses conseils et ses critiques, pour son soutien et son enthousiasme à toute épreuve.

Je suis extrêmement reconnaissant envers François Digne et Luis Paris. Tous deux ont accepté de lire et de rapporter ma thèse. Leurs remarques, questions et suggestions, au sujet du manuscrit comme au cours de discussions antérieures, m'ont énormément apporté. Je remercie vivement Christian Kassel et Bernard Leclerc d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie le LAMFA d'Amiens qui m'a accueilli une semaine en automne dernier, séjour qui s'avéra très fructueux pour ma part. Je remercie à cette occasion tous les membres du GDR Tresses, en particulier les organisateurs de chacune des Journées Tresses, réunions semestrielles fort agréables. Je tiens également à saluer Michel Broué, Eddy Godelle, Franck Harou, Paul-André Melliès, Hugh Morton, Kyoji Saito, Alexei Sossinski, Brigitte Vallée, Friedrich Wehrung, et les remercier pour leurs signes d'encouragement. Je remercierai enfin tous les membres du SDAD, en particulier mes collègues doctorants Cédric Lecouvey, Céline Moreira, Gaëlle Morvan et Hervé Sibert, ainsi que le secrétariat de mathématiques, Marie-Claire Vernet tout spécialement.

REMERCIEMENTS

Sommaire

Introduction	5
Petits groupes gaussiens	9
Problème de conjugaison	27
Centre	43
Décomposition	53
Exemples et contre-exemples	77
Treillis de type fuseau	99
Conclusion	111
Bibliographie	123
Index	127

SOMMAIRE

Introduction

Ce texte est une étude par des méthodes algébriques et combinatoires d'une classe de groupes, appelés *petits groupes gaussiens*, dont font partie les groupes de tresses et, plus généralement, tous les groupes d'Artin sphériques, ainsi que diverses extensions de ces groupes précédemment introduites.

Depuis les travaux de Garside [29], Deligne [26] et Thurston [52], nous savons qu'une grande partie des propriétés du groupe de tresses B_n repose sur le fait que B_n est le groupe de fractions d'un monoïde B_n^+ dans lequel deux éléments quelconques admettent un unique ppcm: cette propriété est directement à l'origine de l'existence de formes normales remarquables dans B_n et, de là, d'une structure (bi)-automatique, laquelle fournit entre autres la décidabilité des problèmes de mots et de conjugaison, l'existence d'une inégalité isopérimétrique quadratique.

Il est alors naturel de chercher d'autres exemples de groupes qui soient des groupes de fractions de monoïdes avec unique ppcm, et de chercher si, effectivement, tous les résultats obtenus pour les groupes de tresses peuvent être étendus à ces nouveaux groupes. On se rend rapidement compte qu'il faut au moins ajouter des conditions de finitude, correspondant dans le cas des tresses à la finitude de l'ensemble des tresses de permutation et, plus généralement, dans le cas des groupes d'Artin, à la finitude du groupe de Coxeter associé. Plusieurs familles de groupes ont été considérées, notamment les groupes de Garside de [25] et [6]—voir aussi [38]. Introduits dans [25], et étudiés dans [23], les petits groupes gaussiens constituent, semble-t-il, la famille la plus étendue considérée jusqu'à présent dans cette approche : les seules conditions imposées sont celles mentionnées ci-dessus, à savoir qu'un petit groupe gaussien est le groupe de fractions d'un petit monoïde gaussien, ce dernier étant un monoïde simplifiable dans lequel toute paire d'éléments a un unique ppcm à gauche et à droite et tel que, de plus, il existe un élément dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident et forment une partie génératrice finie ("élément Δ ").

Dans ce travail, nous abordons les deux questions mentionnées plus haut, à savoir déterminer l'étendue de la classe des petits monoïdes et groupes gaussiens en étudiant de nombreux exemples, en particulier dans le cas de deux générateurs, et, d'autre part, étendre aux petits groupes gaussiens généraux des résultats précédemment établis pour les groupes de tresses ou les groupes d'Artin, en parti-

culier pour le problème de conjugaison et pour la description du centre et du quasi-centre. De tels résultats ne sont pas triviaux car, même si nous avons abstrait dans la définition des petits groupes gaussiens des propriétés essentielles des groupes de tresses, nous avons aussi renoncé à plusieurs autres conditions qui sont vérifiées dans le cas des tresses ou des groupes d'Artin (symétrie des relations, préservation de la longueur, propriété de l'élément Δ d'être le ppcm des éléments minimaux), et dont l'indisponibilité oblige à construire des démonstrations entièrement nouvelles.

Un des résultats obtenus dans cette direction est l'analogie du résultat de décomposition démontré par Brieskorn et Saito pour les groupes d'Artin sphériques [12] (les termes précis seront définis dans le chapitre IV):

Théorème. (i) *Tout petit groupe gaussien est un itéré de produits croisés de petits groupes gaussiens Δ -purs.*

(ii) *Le centre d'un petit groupe gaussien Δ -pur est monogène, engendré par une puissance de l'élément Δ .*

La démonstration de ce résultat, comme celle de la plupart des autres propriétés établies ici, repose sur les propriétés algébriques de l'opération *résidu* $\setminus$ qui, dans un petit monoïde gaussien, associe à toute paire d'éléments (a, b) l'unique élément c tel que ac est le ppcm à droite de a et b . Plus spécifiquement, la notion-clé est celle de Δ local qui associe à chaque élément a le ppcm (à droite) de tous les éléments résidus $b \setminus a$ pour b variant dans le monoïde.

Voici une analyse de ce travail chapitre par chapitre. Le chapitre I est une introduction aux petits groupes gaussiens: définitions, propriétés fondamentales, présentation de quelques outils. En particulier, nous introduisons le *graphe caractéristique* d'un petit monoïde gaussien, un graphe fini qui décrit complètement le monoïde. Nous rappelons le résultat de [25] suivant lequel tout petit monoïde gaussien admet une présentation d'un type syntaxique particulier, dit complété, et nous présentons le procédé de *retournement de mots* [20], qui résout le problème de mot, et qui permet de calculer toutes les opérations de ppcm, résidu, pgcd, dans les petits monoïdes gaussiens. Pour illustrer ces notions, nous proposons une étude détaillée de deux exemples (le chapitre V présentera de nombreux autres exemples).

Dans le chapitre II, nous étudions le problème de conjugaison. Nous montrons comment étendre au cas des petits groupes gaussiens arbitraires la solution donnée par Elrifai & Morton dans le cas des groupes de tresses [27], elle-même une amélioration de la solution de Garside [29]. Les arguments utilisés dans [27] et [29] ne s'appliquent pas dans le cadre des petits groupes gaussiens généraux, et il faut à la place utiliser un lemme fondamental mettant en jeu l'opération $\setminus$. Nous pouvons alors reformuler un algorithme pour le problème de conjugaison, lequel consiste

en le calcul, à partir d'un élément donné, d'une sous-classe finie non vide distinguée de sa classe de conjugaison, appelée *classe sommitale* de l'élément. Nous en décrivons ensuite une amélioration en termes d'une opération spéciale de conjugaison appelée *cyclage*, et nous montrons que, pour ce faire, nous pouvons utiliser indifféremment la *forme Δ -normale* (de Garside) et la *forme normale fractionnaire* (de Thurston). Enfin, nous montrons que, dans tout petit groupe gaussien, calculer un élément de la classe sommitale d'un élément donné peut se faire avec une complexité polynômiale, ce qui étend un résultat récent de Birman-Ko-Lee [10] établi dans le cas des groupes de tresses.

Dans le chapitre III, nous décrivons le centre des petits groupes gaussiens. Nous ramenons d'abord l'étude du centre des petits groupes gaussiens à celle du centre des monoïdes correspondants. Puis, comme Brieskorn et Saito dans [12], nous étudions le quasicentre, défini comme l'ensemble des éléments du monoïde qui laissent l'ensemble des atomes stable par conjugaison. Pour cela, nous introduisons la notion de Δ *local* mentionnée plus haut. Nous calculons alors un ensemble générateur minimal du quasicentre. Nous donnons une nouvelle caractérisation du Δ local, ce qui nous permet d'obtenir que ses versions gauche et droite coïncident. Enfin, nous montrons que le quasicentre de tout petit monoïde gaussien est un monoïde abélien libre.

L'objet du chapitre IV est d'établir que tout petit groupe gaussien est un itéré de produits croisés de petits groupes gaussiens dont le centre est monogène. Ce résultat étend naturellement le résultat de décomposition établi par Brieskorn et Saito [12] et par Deligne [26] dans le cas des groupes d'Artin sphériques. Une différence majeure est que le produit n'est plus un produit direct, mais une généralisation de produit semi-direct, appelé *produit croisé*. Un exemple d'une telle décomposition est donné. Nous discutons finalement des sous-monoïdes paraboliques des petits monoïdes gaussiens.

Le chapitre V constitue un inventaire des monoïdes gaussiens rencontrés dans la littérature : ces derniers sont nombreux, ils comprennent, outre les monoïdes de tresses standard et les monoïdes d'Artin sphériques, certains monoïdes de nœud torique, les monoïdes de Birman-Ko-Lee associés à des présentations non standard des groupes de tresses, les monoïdes hypercubes de Garside, certains monoïdes de tresses de groupes de réflexions complexes...

Enfin, dans le chapitre VI, nous considérons les petits monoïdes gaussiens dont le treillis des éléments simples (les diviseurs de l'élément Δ) a la forme d'un fuseau. Après avoir défini les *monoïdes de type fuseau*, nous les décrivons complètement en termes de présentations. Nous établissons que tout petit monoïde gaussien est la projection d'un petit monoïde gaussien de type fuseau. Nous étudions plusieurs exemples.

INTRODUCTION

I. Les petits groupes gaussiens

Dans ce premier chapitre, nous introduisons les *petits groupes gaussiens*, objet principal de notre étude. Nous donnons les premières définitions, mentionnons les propriétés de base et présentons quelques outils. Une classe plus petite de tels groupes, les *groupes de Garside*, est considérée par P. Dehornoy et L. Paris dans [25]. La famille que nous étudions est celle considérée par Dehornoy dans [23].

Dans la première section, nous définissons les petits groupes gaussiens et formulons leurs propriétés premières. Dans la section 2, nous présentons le *graphe caractéristique* d'un petit monoïde gaussien, objet intrinsèque qui concentre toute l'information du monoïde. La section 3 est consacrée au traitement syntaxique des groupes gaussiens : nous y rappelons la correspondance établie dans [25] entre monoïdes gaussiens et présentations d'un type particulier. Pour illustrer ces notions, la section 4 donne une étude détaillée de deux exemples de petits groupes gaussiens (le chapitre V présentera de nombreux autres exemples).

1. Petits monoïdes gaussiens

Un petit groupe gaussien est le groupe de fractions d'un monoïde dans lequel il existe, de façon essentielle, une bonne théorie de la divisibilité et des ppcm.

Dans tout monoïde, il existe une notion naturelle de diviseur à gauche : nous disons que b est un diviseur à gauche de a —ou que a est un multiple à droite de b —s'il existe d vérifiant $a = bd$. Nous parlons de diviseur ou de multiple propre si, en outre, nous avons $d \neq 1$. Dès lors, nous disons que c est un plus petit commun multiple à droite—ou ppcm à droite—de a et b si c est un multiple à droite de a et de b , et un diviseur à gauche de tout multiple à droite commun à a et b . De même, c est un plus grand commun diviseur à gauche—ou pgcd à gauche—de a et b si c est un diviseur à gauche de a et de b et un multiple à droite de tout diviseur à gauche commun à a et b . Diviseur à droite, multiple à gauche, ppcm à gauche et pgcd à droite sont définis symétriquement.

L'unicité des ppcm peut être garantie par des conditions assez faibles.

Définition 1.1. Un monoïde M est *conique* si, pour tous a, b dans M , $ab = 1$ entraîne $a = b = 1$.

Dans un monoïde M simplifiable à gauche (*resp.* à droite) et conique, la relation « être un diviseur à gauche propre » (*resp.* « être un diviseur à droite propre ») est un ordre partiel sur M , et les ppcm à droite et pgcd à gauche (*resp.* les ppcm à gauche et pgcd à droite) sont uniques quand ils existent [23].

Définition 1.2. [23] Supposons que M est un monoïde simplifiable et conique. Pour a, b éléments de M , l'unique ppcm à droite de a et b est noté $a \vee b$, quand il existe; dans ce cas, l'unique élément d de M vérifiant $a \vee b = ad$ sera noté $a \setminus b$, lu « a sous b », et appelé *résidu à droite* de b dans a . Nous définissons les opérations $\widetilde{\vee}$ et $/$ symétriquement. En particulier, nous avons

$$a \vee b = a(a \setminus b) = b(b \setminus a),$$

dès que $a \vee b$ est défini, et

$$a \widetilde{\vee} b = (b/a)a = (a/b)b,$$

dès que $a \widetilde{\vee} b$ est défini.

Pour définir précisément les monoïdes gaussiens, nous avons besoin d'une notion supplémentaire.

Définition 1.3. [23][25] Supposons que M est un monoïde. Un élément a de M est un *atome* si nous avons $a \neq 1$ et si $a = bc$ entraîne $b = 1$ ou $c = 1$. Nous disons que M est *atomique* si M est engendré par ses atomes et si, de plus, pour tout a dans M , la *norme* $\|a\|$ de a , définie comme la borne supérieure des longueurs des décompositions de a en produit d'atomes, est finie.

Remarquons en particulier qu'un monoïde atomique est conique.

Définition 1.4. [23][25] (i) Supposons que M est un monoïde. Nous disons que M est *gaussien* si M est atomique, simplifiable, et si deux éléments quelconques de M admettent un ppcm à droite et à gauche.

(ii) Supposons que M est un monoïde gaussien. Nous disons que M est *petit* si M contient un *élément de Garside*, ce dernier étant défini comme un élément de M dont les diviseurs à gauche coïncident avec les diviseurs à droite, et engendrent M .

(iii) Tout monoïde gaussien répond aux conditions de Ore [17], et se plonge donc dans son groupe de fractions. Nous disons qu'un groupe G est un (*petit*) *groupe gaussien* s'il existe un (petit) monoïde gaussien M tel que G est le groupe de fractions de M .

Les notions de diviseur à gauche et à droite se prolongent au groupe.

Définition 1.5. Supposons que M est un monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Alors, pour a, b dans G , nous disons que a divise b —et écrivons $a \leq b$ —s’il existe des éléments a', a'' dans M vérifiant $b = a'aa''$. Nous disons que a est un *diviseur à gauche* (*resp. diviseur à droite*) de b s’il existe un élément c dans M vérifiant $b = ac$ (*resp.* $b = ca$).

Exemple 1.6. Les groupes de tresses [29] et, plus généralement, tous les groupes d’Artin sphériques, c’est-à-dire associés à un groupe de Coxeter fini, sont des petits groupes gaussiens [12][26], l’élément dit fondamental étant un élément de Garside. Plus généralement, tous les groupes de Garside considérés dans [25] sont des petits groupes gaussiens. Certains groupes de tresses de groupes de réflexions complexes sont des petits groupes gaussiens.

Le chapitre V regroupe la plupart des exemples classiques connus, le chapitre VI et la conclusion contiennent de nombreux autres exemples. Nous étudions également deux exemples dans la section 4 ci-dessous.

Dans un monoïde gaussien, les opérations $\vee, \widetilde{\vee}, \setminus$ et $/$ sont ainsi partout définies. De plus, un monoïde gaussien étant atomique, les relations de division à droite ou à gauche sont bien fondées, et deux éléments a, b admettent un plus grand commun diviseur à droite $a \widetilde{\wedge} b$ (*resp.* un pgcd à gauche $a \wedge b$) qui est le ppcm à gauche de l’ensemble des diviseurs communs à droite de a et b (*resp.* le ppcm à droite de l’ensemble des diviseurs communs à gauche de a et b). Pour tout monoïde gaussien M , les structures symétriques $(M, \vee, \wedge)$ et $(M, \widetilde{\vee}, \widetilde{\wedge})$ sont des treillis.

La propriété suivante traduit essentiellement le lien entre les opérations $\vee, \wedge, \widetilde{\vee}$ et $\widetilde{\wedge}$.

Lemme 1.7. *Supposons que M est un monoïde gaussien. Alors, pour a, b, c, d éléments de M vérifiant $ab = cd$, nous avons*

$$ab = (a \vee c)(b \widetilde{\wedge} d) = (a \wedge c)(b \widetilde{\vee} d) = cd.$$

Démonstration. Nous avons $ab = (a \vee c)g = cd$ pour un certain élément g dans M . Par simplification à gauche, nous obtenons $b = (a \setminus c)g$ et $(c \setminus a)g = d$. En particulier, il existe un élément h dans M vérifiant $b \widetilde{\wedge} d = hg$. Ainsi, h est un diviseur à droite de $a \setminus c$ et de $c \setminus a$. Par définition de l’opération $\setminus$, nous obtenons $h = 1$, soit $ab = (a \vee c)(b \widetilde{\wedge} d) = cd$. L’égalité $ab = (a \wedge c)(b \widetilde{\vee} d) = cd$ est obtenue symétriquement. $\square$

Un grand nombre des résultats de [25] et [23], de même que la plupart des résultats que nous obtiendrons ici, reposent sur les propriétés algébriques des opérations de ppcm et de résidu.

Lemme 1.8. [23] *Supposons que M est un monoïde gaussien. Alors nous avons les identités suivantes:*

$$(ab) \vee (ac) = a(b \vee c), \quad (1.1)$$

$$c \setminus (ab) = (c \setminus a)((a \setminus c) \setminus b), \quad (ab) \setminus c = b \setminus (a \setminus c), \quad (1.2)$$

$$(a \vee b) \setminus c = (a \setminus b) \setminus (a \setminus c) = (b \setminus a) \setminus (b \setminus c), \quad c \setminus (a \vee b) = (c \setminus a) \vee (c \setminus b). \quad (1.3)$$

Le lemme suivant résulte directement des identités du lemme 1.8. Si M est un monoïde gaussien et X, Y des parties de M , nous notons $X \setminus Y$ (*resp.* X/Y) l'ensemble des éléments $a \setminus b$ (*resp.* a/b) de M avec $a \in X$ et $b \in Y$.

Lemme 1.9. [23] *Supposons que M est un monoïde gaussien. Soit D un sous-ensemble de M clos par $\setminus$ (*resp.* par $/$), et J la clôture de D par $\vee$ (*resp.* par $\widetilde{\vee}$). Alors, pour r, s entiers positifs, nous avons $D^s \setminus D^r = D^r$ (*resp.* $D^r/D^s = D^r$) et $J^s \setminus J^r = J^r$ (*resp.* $J^r/J^s = J^r$). En particulier, J est fini si et seulement si D l'est.*

2. Éléments simples et graphe caractéristique

Dans cette section, nous présentons ce que nous appelons le *graphe caractéristique* d'un petit monoïde gaussien.

L'équivalence des définitions de [23] et [25] provient du résultat suivant:

Proposition 2.1. [23] *Supposons que M est un monoïde gaussien, Ω est un élément de M , et J est une partie de M . Alors il y a équivalence entre*

- (i) Ω est un élément de Garside, et J est l'ensemble des diviseurs (à gauche ou à droite) de Ω ;
- (ii) J est une partie génératrice finie de M qui est close par diviseur, ppcm, résidu et pgcd à droite et à gauche, et Ω est le ppcm (à droite ou à gauche) de J .

Définition 2.2. [23] Soit M un petit monoïde gaussien et A l'ensemble de ses atomes. Nous appelons *primitifs à droite* de M les éléments de la clôture P de A par l'opération $\setminus$, et appelons *simples* de M les éléments de la clôture S de P par l'opération $\vee$ —qui est aussi la clôture de A par les opérations $\setminus$ et $\vee$. Le ppcm à droite (et à gauche) des éléments primitifs sera noté Δ et appelé *l'élément de Garside minimal* de M , ou simplement *l'élément de Garside* (article défini) de M .

Si M est un petit monoïde gaussien, alors l'ensemble des atomes de M est la partie génératrice minimale de M , l'ensemble des éléments primitifs à droite de M est la partie génératrice close par $\setminus$ minimale, l'ensemble S des éléments simples de M est la partie génératrice close par $\setminus$ et $\vee$ minimale, et son ppcm est l'élément de Garside de longueur minimale. Avec les notations précédentes, la structure $(S, \vee, \wedge)$ est un treillis fini de minimum 1 et de maximum Δ , de même que la structure symétrique $(S, \widetilde{\vee}, \widetilde{\wedge})$.

Proposition 2.3. [23] *Un petit monoïde gaussien est déterminé par l'ensemble de ses éléments simples et la restriction de l'opération $\setminus$ à ces éléments.*

Proposition 2.4. [23] *Un petit monoïde gaussien est déterminé par son graphe caractéristique, défini comme la restriction aux éléments simples du graphe de Cayley atomique, c'est-à-dire, la famille des triplets (a, x, b) où a et b sont simples et x un atome vérifiant $ax = b$.*

En effaçant les étiquettes du graphe caractéristique, nous obtenons le diagramme de Hasse du treillis des éléments simples. La structure de treillis attachée aux éléments simples sera spécialement exploitée dans le chapitre VI (voir également la conclusion).

Remarque. Lorsque M est le monoïde d'Artin associé à un groupe de Coxeter fini W , les éléments simples de M sont en bijection avec les éléments de W , et le graphe caractéristique de M s'obtient à partir du graphe de Cayley de W en orientant les flèches, c'est-à-dire en supprimant les relations de torsion $a^2 = 1$. Cette proposition ne s'étend pas au cas d'un petit monoïde gaussien général, puisque, comme nous le verrons, tous les sommets du graphe n'ont pas nécessairement le même degré, ce qui exclut, dans ce cas, qu'il soit la projection du graphe de Cayley d'un groupe.

Le treillis des simples dans un petit monoïde gaussien présente des propriétés de symétrie remarquables. Le fait essentiel est que prendre le résidu dans l'élément Δ définit une *dualité* sur l'ensemble des simples. Le résultat suivant est fondamental.

Proposition 2.5. [23] *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit S l'ensemble de ses éléments simples et Δ son élément de Garside.*

- (i) *Pour tout entier $k \geq 0$, S^k est l'ensemble des diviseurs à gauche de Δ^k , et l'ensemble des diviseurs à droite de Δ^k .*
- (ii) *Les applications $\partial : a \mapsto a \backslash \Delta$ et $\tilde{\partial} : a \mapsto \Delta / a$ envoient M dans S . Leurs restrictions à S sont des permutations de S inverses l'une de l'autre.*
- (iii) *Les applications $a \mapsto (a \backslash \Delta) \backslash \Delta$ et $a \mapsto \Delta / (\Delta / a)$ de S dans S se prolongent en des automorphismes ∂^2 et $\tilde{\partial}^2$ de M qui envoient S^k sur lui-même pour tout entier positif k . Tout élément a de M vérifie*

$$a\Delta = \Delta\partial^2(a) \quad \text{et} \quad \Delta a = \tilde{\partial}^2(a)\Delta.$$

Lemme 2.6. [22] *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tous a, b simples dans M , nous avons*

$$a/b = (\tilde{\partial}(a) \wedge \tilde{\partial}(b)) \backslash \tilde{\partial}(b), \tag{2.1}$$

$$a \tilde{\vee} b = \partial(\tilde{\partial}(a) \wedge \tilde{\partial}(b)), \quad \text{et} \quad a \tilde{\wedge} b = \partial(\tilde{\partial}(a) \vee \tilde{\partial}(b)). \tag{2.2}$$

Les formules de dualité (2.1) et (2.2) déterminent les opérations $/$, $\tilde{\vee}$ et $\tilde{\wedge}$ en termes de leurs contreparties $\backslash$, $\vee$ et $\wedge$.

Définition 2.7. Si M est un petit monoïde gaussien, son *exposant* est l'ordre des automorphismes ∂^2 et $\tilde{\partial}^2$ définis dans la proposition 2.5.

Corollaire 2.8. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien non trivial, et A l'ensemble de ses atomes. Alors l'exposant e de M vérifie*

$$1 \leq e \leq \max_{n_1 + \dots + n_p = |A|} \text{ppcm}(n_1, \dots, n_p).$$

3. Présentations des monoïdes gaussiens

Dans [25], une correspondance est établie entre petits monoïdes gaussiens et présentations d'une forme syntaxique particulière. Ce pont entre « éléments du monoïde » et « mots les représentant » permet deux applications fondamentales. D'une part, ce pont va permettre de décider effectivement si une présentation de monoïde donnée est—ou n'est apparemment pas—celle d'un petit monoïde gaussien. D'autre part, étant donnée une présentation de petit monoïde gaussien, associé à un outil combinatoire sur les mots appelé *retournement de mots*, il va permettre de calculer toutes les opérations du monoïde.

Pour tout ensemble X , nous notons X^* l'ensemble des mots sur X , c'est-à-dire le monoïde libre de base X . Si X est une partie génératrice d'un monoïde M , alors, par définition, tout élément a de M admet des décompositions comme produit d'éléments de X : pour tout mot w sur X , nous notons $\bar{w}$ l'image a de w dans M ; nous disons alors que w est une expression de a . Le mot vide est noté ε .

Définition 3.1. [25] Supposons que M est un monoïde gaussien. Soit X une partie génératrice de M . Un *sélecteur* sur X dans M est une application

$$f : X \times X \longrightarrow X^*$$

telle que, pour tous a, b dans X , le mot $f(b, a)$ est une expression de $b \backslash a$ dans M .

Par définition, nous avons $a \backslash a = 1$ pour tout a dans X , donc, si f est un sélecteur pour X dans un monoïde gaussien M , alors $f(a, a)$ est le mot vide ε .

Si X est un alphabet et R une famille de relations sur X , c'est-à-dire une famille de paires de mots sur X , nous noterons $\langle X : R \rangle$ la présentation du monoïde—ou le monoïde lui-même—engendré par X et présenté par les relations de R . Mais $\langle X : R \rangle$ pourra également désigner le groupe correspondant à cette présentation de monoïde, auquel cas le texte lèvera l'ambiguïté éventuelle.

Définition 3.2. Soit X un alphabet non vide. Un *complément* sur X est une application f de $X \times X$ dans X^* telle que $f(a, a)$ est ε pour tout a dans X . Si f est un complément sur X , nous désignons par R_f la famille des relations $af(a, b) = bf(b, a)$ pour $(a, b) \in X^2$.

La première étape dans la correspondance entre petits monoïdes gaussiens et présentations d'une forme syntaxique particulière est:

Proposition 3.3. [25] Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit X une partie génératrice quelconque de M , et f un sélecteur pour X dans M . Alors $\langle X : R_f \rangle$ est une présentation pour M .

Si M est un monoïde gaussien, X une partie génératrice de M , et f un sélecteur pour X dans M , alors toutes les opérations de M se calculent à partir de f de façon effective. En effet, pour chaque complément f sur X , une opération combinatoire sur les mots appelée *retournement de mots* est introduite.

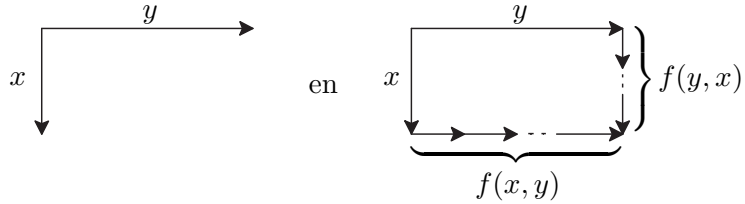
Dans toute la suite, pour tout alphabet X , nous introduisons une copie disjointe notée x^{-1} pour chaque lettre x de X , et nous notons X^{-1} l'ensemble des lettres x^{-1} . Pour tout mot w sur $X \cup X^{-1}$, nous notons w^{-1} le mot obtenu en échangeant chaque lettre x avec la lettre x^{-1} correspondante, et en renversant l'ordre des lettres. Ainsi, si G est un groupe engendré par X et si le mot w est une expression l'élément a de G , alors w^{-1} est une expression de l'inverse a^{-1} de a .

Définition 3.4. [20][25] Soit f un complément sur un alphabet X . Pour w, w' des mots sur $X \cup X^{-1}$, nous disons que w est *f-retournable* en w' , noté $w \curvearrowright_f w'$, si w peut être transformé en w' en un nombre fini d'étapes consistant à remplacer un sous-mot de la forme $x^{-1}y$ avec x, y dans X par le mot $f(x, y)f(y, x)^{-1}$ correspondant. Pour u, v mots sur X , nous définissons $u \setminus_f v$ comme l'unique mot v' sur X tel qu'il existe un mot u' sur X vérifiant $u^{-1}v \curvearrowright_f v'u'^{-1}$, s'il existe, et $u \vee_f v$ comme $u(u \setminus_f v)$.

L'unicité de $u \setminus_f v$ et $u \vee_f v$ provient de:

Proposition 3.5. [20] *Le retournement de mots est confluent.*

A chaque retournement de mots, est associé un graphe planaire (voisin d'un graphe de Cayley) composé de flèches verticales et horizontales étiquetées par des éléments de X , et tel que le retournement élémentaire du mot $x^{-1}y$ en $f(x, y)f(y, x)^{-1}$ se traduit par la fermeture du motif



Le retournement de mots permet de calculer toutes les opérations dans le monoïde:

Proposition 3.6. [25] *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit X une partie génératrice de M , et f un sélecteur pour X dans M . Alors, pour tous mots u, v sur X , le mot $u \setminus_f v$ existe, il est une expression de l'élément $\bar{u} \setminus \bar{v}$, et le mot $u \vee_f v$ est une expression de l'élément $\bar{u} \vee \bar{v}$.*

Considérons maintenant la question de reconnaître quand une présentation donnée par un complément définit un petit monoïde gaussien.

Définition 3.7. [23] Soit f un complément sur un alphabet X . Pour $Y \subset X^*$, f est dit *cohérent en le triplet* (u, v, w) de mots dans Y si nous avons

$$((u \setminus_f v) \setminus_f (u \setminus_f w)) \setminus_f ((v \setminus_f u) \setminus_f (v \setminus_f w)) = \varepsilon,$$

et f est dit *cohérent sur* Y s'il est cohérent en tous les triplets de mots de Y .

Définition 3.8. [23] Soit f un complément sur un alphabet X . Nous disons que f vérifie la condition $(\#)$ s'il existe une partie finie Y de X^* contenant X qui est close par $\setminus_f$ et si, de plus, notant $\hat{Y}$ la clôture de Y par $\vee_f$, il existe un mot Ω dans $\hat{Y}$ tel que, pour tout u dans $\hat{Y}$, nous avons $\Omega \setminus_f u = \varepsilon$ et il existe v dans $\hat{Y}$ vérifiant $(v \setminus_f \Omega) \setminus_f u = u \setminus_f (v \setminus_f \Omega) = \varepsilon$.

Proposition 3.9. [23][25] Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit X une partie génératrice finie de M , et f un sélecteur sur X . Alors f est cohérent sur X^* et il vérifie la condition $(\#)$.

Ces conditions nécessaires sont également suffisantes, et le critère de gaussianité obtenu dans [23] et [25] s'énonce comme suit:

Proposition 3.10. [23][25] Supposons que f est un complément sur un alphabet X , et que f est cohérent sur X^* et vérifie la condition $(\#)$. Alors le monoïde de présentation $\langle X : R_f \rangle$ est un petit monoïde gaussien, et, donc, le groupe $\langle X : R_f \rangle$ est un petit groupe gaussien.

Savoir si un complément f est cohérent est primordial pour l'étude du monoïde de présentation $\langle X : R_f \rangle$. Si f n'est pas cohérent, nous ne savons essentiellement rien dire, alors que si f est cohérent, nous pouvons contrôler la divisibilité et l'égalité en utilisant le retournement de mots et, en particulier, établir assez simplement l'éventuel caractère petit gaussien du monoïde. Cependant, le critère de cohérence sur X^* qui est demandé dans la proposition 3.10 n'est pas effectif. Deux résultats résolvent ce problème dans des cas particuliers.

Proposition 3.11. [22] Supposons que f est un complément sur un alphabet X à deux lettres. Alors f est cohérent sur X^* .

Proposition 3.12. [20][22] Supposons que f est un complément sur X et que le monoïde de présentation $\langle X : R_f \rangle$ est atomique. Alors f est cohérent sur X^* si et seulement si f est cohérent sur X .

Quand les relations R_f préservent la longueur, comme dans le cas des relations de tresses, et, plus généralement, des relations d'Artin associées à une matrice de Coxeter, l'atomicité est triviale. Par contre, il n'existe pas de méthode générale pour déterminer qu'un monoïde de présentation $\langle X : R_f \rangle$ est ou non atomique. Un des principaux résultats de [23] est le critère suivant, qui s'applique dans tous les cas et ne nécessite aucune vérification préalable.

Proposition 3.13. [23] *Supposons que f est un complément sur X et que Y est une partie de X^* qui inclut X et est close par $\setminus_f$. Alors f est cohérent sur X^* si et seulement si f est cohérent sur Y .*

Remarquons qu'il y a toujours cohérence en les triplets (u, v, w) où deux des trois mots u, v, w sont égaux. Ainsi, pour vérifier la cohérence sur un ensemble Y de mots, il est nécessaire et suffisant de vérifier la cohérence en exactement $|Y|(|Y| - 1)(|Y| - 2)$ triplets de mots de Y bien choisis, à savoir les triplets (u, v, w) vérifiant $u \neq v \neq w \neq u$.

Le retournement de mots et sa lecture graphique nous permettront aussi de prouver le caractère non gaussien de certains monoïdes, soit en montrant la non existence d'une partie Y close par $\setminus_f$ (voir la conclusion), soit en montrant la non cohérence de l'opération $\setminus_f$ (voir les sections V.5, V.6).

Remarque. Les conditions mises en jeu dans le critère de la proposition 3.10 sont de type Σ_1^0 , *i.e.*, récursivement énumérables (voir [23]). Nous ne connaissons pas de telles conditions permettant de prouver qu'un complément donné définit un monoïde gaussien (non petit). La condition de cohérence du complément est certes nécessaire, mais non suffisante (sinon, d'après la proposition 3.11, tout complément sur un alphabet à deux lettres définirait un monoïde gaussien, ce qui n'est pas le cas—voir la conclusion). Mentionnons d'ailleurs que nous ne connaissons aucun exemple de monoïde gaussien finiment engendré qui ne soit pas petit. Mentionnons simplement que B_∞ et $\mathbf{N}^\infty$ sont gaussiens, non petits, mais de rang infini.

4. Deux exemples

Nous étudions ici deux exemples de petits groupes gaussiens qui sont différents des groupes d'Artin classiques. Le but de cette section est d'illustrer l'ensemble des notions introduites dans les trois sections précédentes. De nombreux autres exemples sont regroupés dans le chapitre V.

Exemple 4.1. Soit $M_\diamond$ le monoïde présenté par

$$\langle x, y, z : xzxy = yzx^2, yzx^2z = zxyzx, zxyzx = xzxyz \rangle. \quad (4.1)$$

Est-il un petit monoïde gaussien? La présentation (4.1) est associée au complément f défini par $f(x, y) = zxy$, $f(y, x) = zx^2$, $f(y, z) = zx^2z$, $f(z, y) = xyzx$, $f(z, x) = xyzx$, et $f(x, z) = zxyz$, ou bien

$$x \setminus_f y = zxy, y \setminus_f x = zx^2, y \setminus_f z = zx^2z, z \setminus_f y = xyzx, z \setminus_f x = xyzx, x \setminus_f z = zxyz. \quad (4.2)$$

Tout d'abord, $M_\diamond$ est atomique : les relations de (4.1) étant homogènes, pour tout a dans $M_\diamond$, la norme $\|a\|$ est la longueur commune des décompositions de a comme produits des atomes x, y et z . Ainsi, d'après la proposition 3.12, le complément f est cohérent sur $\{x, y, z\}^*$ si et seulement s'il est cohérent sur $\{x, y, z\}$. Il y a six triplets (x_1, x_2, x_3) avec $x_i \in \{x, y, z\}$ et $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$. Nous calculons

$$(x \setminus_f y) \setminus_f (x \setminus_f z) = z \quad \text{et} \quad (y \setminus_f x) \setminus_f (y \setminus_f z) = z,$$

$$(x \setminus_f z) \setminus_f (x \setminus_f y) = \varepsilon \quad \text{et} \quad (z \setminus_f x) \setminus_f (z \setminus_f y) = \varepsilon,$$

$$(y \setminus_f z) \setminus_f (y \setminus_f x) = \varepsilon \quad \text{et} \quad (z \setminus_f y) \setminus_f (z \setminus_f x) = \varepsilon,$$

puis

$$\begin{aligned} ((x \setminus_f y) \setminus_f (x \setminus_f z)) \setminus_f ((y \setminus_f x) \setminus_f (y \setminus_f z)) &= \varepsilon, \\ ((y \setminus_f x) \setminus_f (y \setminus_f z)) \setminus_f ((x \setminus_f y) \setminus_f (x \setminus_f z)) &= \varepsilon, \\ ((x \setminus_f z) \setminus_f (x \setminus_f y)) \setminus_f ((z \setminus_f x) \setminus_f (z \setminus_f y)) &= \varepsilon, \\ ((z \setminus_f x) \setminus_f (z \setminus_f y)) \setminus_f ((x \setminus_f z) \setminus_f (x \setminus_f y)) &= \varepsilon, \\ ((y \setminus_f z) \setminus_f (y \setminus_f x)) \setminus_f ((z \setminus_f y) \setminus_f (z \setminus_f x)) &= \varepsilon, \\ ((z \setminus_f y) \setminus_f (z \setminus_f x)) \setminus_f ((y \setminus_f z) \setminus_f (y \setminus_f x)) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous concluons que f est partout cohérent. Pour calculer la clôture de $\{x, y, z\}$ par l'opération $\setminus_f$, posons

$$Y_0 = \{x, y, z\} \quad \text{et} \quad Y_{i+1} = Y_i \setminus_f Y_i \quad \text{pour } i \geq 0,$$

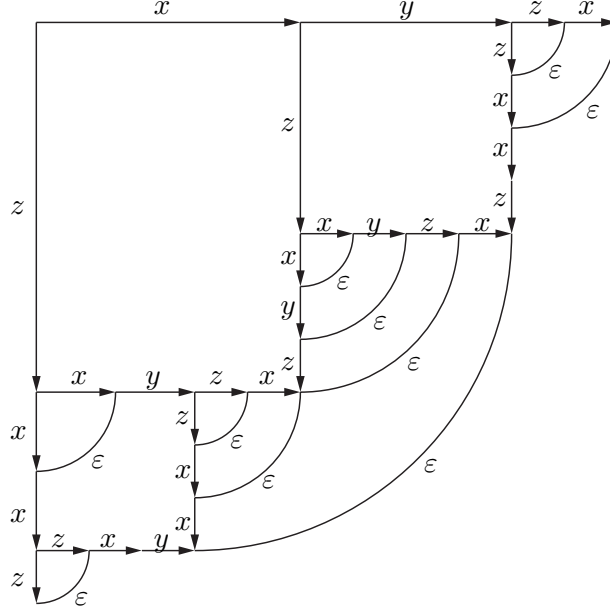
et calculons $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ en espérant trouver un entier i_0 vérifiant $Y_{i_0+1} = Y_{i_0}$. D'après (4.2), nous avons

$$Y_1 = \{ \varepsilon, x, y, z, zxy, zx^2, zx^2z, xyzx, zxyz \}.$$

Ensuite, nous trouvons

$$Y_2 = \{ \varepsilon, x, y, z, zxy, zx^2, zx^2z, xyzx, zxyz, zx, xy, \\ xz, zxyzx, zx^2zx, x^2, yzx, xyzx^2, xyz, x^2z \},$$

avec par exemple $xy = zx^2z \setminus_f xyzx$ et $xz = xyzx \setminus_f zx^2z$, obtenus par le retournement



Puis, toujours en utilisant le retournement de mots, nous calculons

$$Y_3 = \{ \varepsilon, x, y, z, zxy, zx^2, zx^2z, xyzx, zxyz, zx, xy, xz, \\ zxyzx, zx^2zx, x^2, yzx, xyzx^2, xyz, x^2z, xzx, yzxx, yz \};$$

enfin, nous trouvons $Y_4 = Y_3$, et concluons que Y existe et est Y_3 . L'ensemble des éléments de $M_\diamond$ représentés par les mots de Y est représenté sur la figure 1. Continuons la vérification de la condition (#) de la définition 3.8. En posant par exemple $\hat{Y}_0 = Y$ et $\hat{Y}_{i+1} = \hat{Y}_i \vee \hat{Y}_i$ pour $i \geq 0$, nous trouvons que la clôture $\hat{Y}$ de Y par $\vee_f$ est

$$\hat{Y} = \{ \varepsilon, x, y, z, zxy, zx^2, zx^2z, xyzx, zxyz, zx, xy, xz, zxyzx, \\ zx^2zx, x^2, yzx, xyzx^2, xyz, x^2z, xzx, yzxx, yz, x^2zyx, xzxyz, \\ yzx^2z, x^2zxyz, xzxyzx, zxyzx^2, xyzx^2z, yzx^2zx, zx^2zxy \};$$

Nous choisissons par exemple $\Omega = xzxyzx$, et vérifions que, pour tout mot u de $\hat{Y}$, nous avons $\Omega \setminus_f u = \varepsilon$ et qu'il existe un mot v dans $\hat{Y}$ vérifiant $(v \setminus_f \Omega) \setminus_f u =$

$u \setminus_f (v \setminus_f \Omega) = \varepsilon$; par exemple, pour $u = zxy$, une recherche exhaustive parmi les mots de $\widehat{Y}$ fournit le mot $v = zx^2$. La proposition 3.10 permet de conclure que le monoïde $M_\diamond$ est un petit monoïde gaussien : il admet 24 éléments simples dont 23 primitifs à droite, et son graphe caractéristique est représenté sur la figure 2. Remarquons que le ppcm à droite des atomes—à savoir yzx^2z —n'est pas l'élément Δ ; par contre, le ppcm à gauche des atomes est l'élément Δ , à savoir $xzxyzx$.

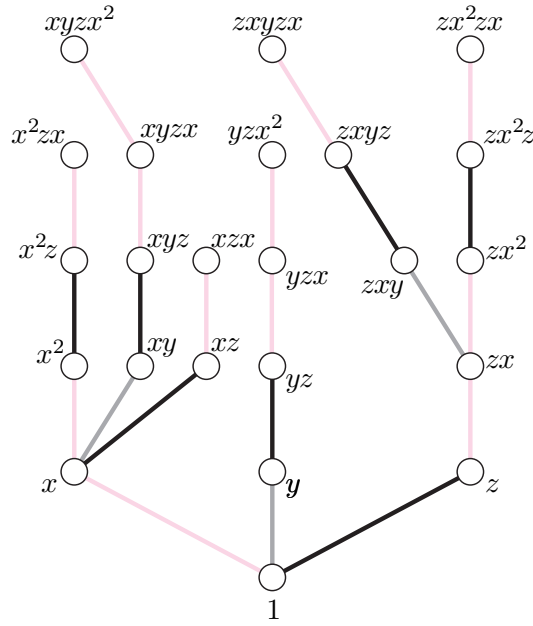


Figure 1. Le demi- $\wedge$ -treillis des primitifs du monoïde $M_\diamond$.

Dans un graphe caractéristique, nous convenons de représenter les primitifs (à droite) par des cercles blancs, et les simples non primitifs par des cercles noirs.

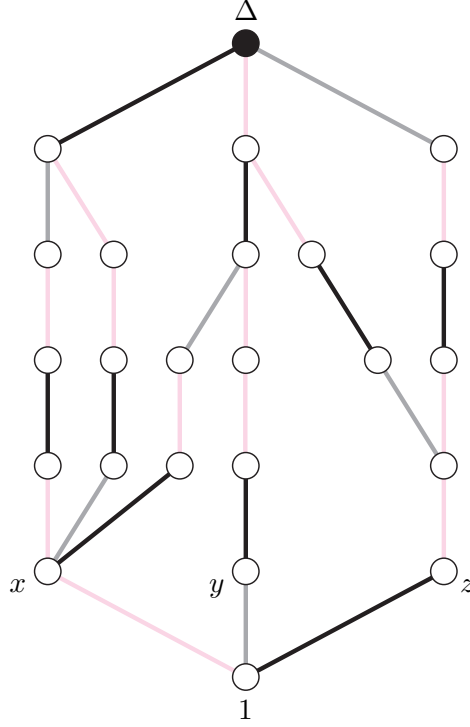


Figure 2. Le graphe caractéristique de M_Δ .

Exemple 4.2. Considérons le monoïde $M_\bullet$ de présentation

$$\langle x, y : xyxyx = yy \rangle. \quad (4.3)$$

La présentation (4.3) est complétée : elle est associée (à droite) au complément f défini par $f(x, y) = yxyx$ et $f(y, x) = y$. D'après la proposition 3.10, montrer que $M_\bullet$ est un petit monoïde gaussien revient à montrer que f satisfait la condition (#). En effet, d'après la proposition 3.11, la condition de cohérence de f est automatiquement satisfaite. La clôture Y de $\{x, y\}$ par $\setminus_f$ existe et est finie :

$$Y = \{ \varepsilon, x, y, xy, yx, xyx, yxy, xyxy, yxyx, yxyxy \}.$$

L'ensemble des éléments de $M_\bullet$ représentés par les mots de l'ensemble Y est représenté sur la figure 3.

La clôture de $\{x, y\}$ par $\setminus_f$ et $\vee_f$ est l'ensemble fini

$$\begin{aligned} \widehat{Y} = \{ \varepsilon, x, y, xy, yx, xyx, yxy, xyxy, xyxyx, yy, \\ yxyx, yxyxy, yxyxyx, yyy, xyxyxy \}. \end{aligned}$$

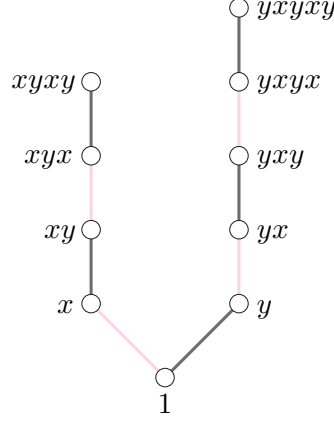


Figure 3. Le demi- $\wedge$ -treillis des primitifs de $M_\bullet$.

Maintenant, choisissant $\Omega = xyxyxy$, nous avons $\Omega \setminus_f u = \varepsilon$ pour tout u de $\hat{Y}$, et nous trouvons

$$\begin{aligned}
 (xyxyxy \setminus_f \Omega) \setminus_f \varepsilon &= \varepsilon = \varepsilon \setminus_f (xyxyxy \setminus_f \Omega), \\
 (xyxyxy \setminus_f \Omega) \setminus_f x &= \varepsilon = x \setminus_f (xyxyxy \setminus_f \Omega), \\
 (xyxyxy \setminus_f \Omega) \setminus_f y &= \varepsilon = y \setminus_f (xyxyxy \setminus_f \Omega), \\
 (xyxy \setminus_f \Omega) \setminus_f (xy) &= \varepsilon = (xy) \setminus_f (xyxy \setminus_f \Omega), \\
 &\vdots \\
 (\varepsilon \setminus_f \Omega) \setminus_f (yyy) &= \varepsilon = (yyy) \setminus_f (\varepsilon \setminus_f \Omega), \\
 (\varepsilon \setminus_f \Omega) \setminus_f (yxyxyx) &= \varepsilon = (yxyxyx) \setminus_f (\varepsilon \setminus_f \Omega),
 \end{aligned}$$

ce qui conclut la vérification de la condition (#) : $M_\bullet$ est un petit monoïde gaussien, il admet 12 éléments simples dont 10 primitifs à droite, et son graphe caractéristique est représenté sur la figure 4. La vérification de la deuxième partie de la condition (#) peut sembler laborieuse, se faisant essentiellement par recherches exhaustives. Dans le cas présent, nous pouvons lui substituer avantageusement deux vérifications différentes. D'une part, il est montré dans [23] qu'il s'agit en fait de vérifier que le monoïde est simplifiable à droite, propriété pour laquelle il n'existe pas de critère combinatoire général applicable à un complément à droite; cependant, si un monoïde admet une présentation à une seule relation $\langle X : u = v \rangle$, il est simplifiable si et seulement si les mots u et v ont des lettres initiales distinctes et des lettres finales distinctes [42], ce qui est le cas de $M_\bullet$. D'autre part, il apparaît que $M_\bullet$ admet une présentation complétée à gauche : elle est associée au complément à gauche $\tilde{f}$ défini par $\tilde{f}(x, y) = y$ et $\tilde{f}(y, x) = xyxy$. D'après [23], si le complément à gauche $\tilde{f}$ est cohérent, $M_\bullet$ est simplifiable à droite.

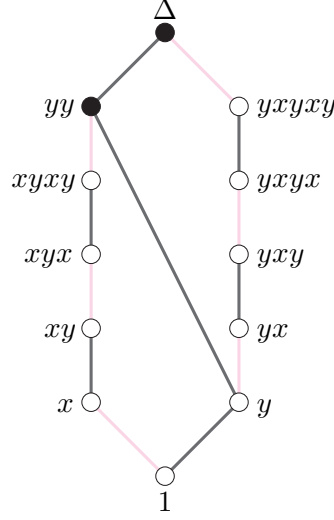


Figure 4. Le graphe caractéristique de $M_\bullet$.

Remarque. En montrant que $M_\bullet$ est associé à un complément cohérent vérifiant $(\#)$, nous avons montré de manière indirecte que $M_\bullet$ est atomique, mais, de manière générale, et en particulier pour les monoïdes gaussiens non petits, la vérification de la condition d'atomicité n'est pas triviale. Il n'existe pas de méthode générale pour prouver l'atomicité d'un monoïde donné par une présentation. Un monoïde M est atomique si et seulement si M admet une application ν de M dans les entiers vérifiant $\nu(a) > 0$ pour tout $a \neq 1$ dans M et $\nu(ab) \geq \nu(a) + \nu(b)$ pour tous a, b dans M —voir [22][25]. Dans les bons cas, il est possible d'exhiber une norme barycentrique, c'est-à-dire une application μ de M dans les entiers vérifiant $\mu(ab) = \mu(a) + \mu(b)$ pour tous a, b dans le monoïde. Par exemple, dans le monoïde de présentation $\langle x, y : xyx = yy \rangle$ (voir l'exemple V.20), une norme barycentrique peut être définie par $\mu(x) = 1$, $\mu(y) = 2$ et $\mu(ab) = \mu(a) + \mu(b)$. Par contre, il n'existe pas de norme du type précédent pour le monoïde $M_\bullet$; en effet, l'égalité $\mu(xyxyx) = \mu(yy)$ impliquerait $3\mu(x) + 2\mu(y) = 2\mu(y)$, d'où $\mu(x) = 0$, contradiction.

L'algorithme de Knuth-Bendix permet, dans certains cas, de prouver l'existence d'une norme (voir [34]). Appliquons l'algorithme de Knuth-Bendix au monoïde $M_\bullet$, et montrons que, dans ce cas, l'algorithme se termine, constituant ainsi une preuve alternative de l'atomicité de $M_\bullet$.

Considérons la réduction $xyxyx \longrightarrow yy$. Une *paire critique* d'un système de réductions $(u_i \rightsquigarrow v_i)_i$ est une paire de réductions élémentaires d'un mot qui est un chevauchement de deux mots u_i et u_j . Ici, la réduction $xyxyx \longrightarrow yy$ admet deux paires critiques, à savoir

$$yyyyx \longleftarrow xyxyxyx \longrightarrow xyxyy,$$

et

$$yyyxyx \leftarrow xyxyxyxyxyx \rightarrow xyxyyy.$$

En clôturant ces paires critiques, nous obtenons le système

$$xyxyx \Rightarrow yy, \quad (R_1)$$

$$xyyy \Rightarrow yyyx. \quad (R_2)$$

La réduction $\Rightarrow$ est confluente. Premièrement, nous montrons qu'elle est noethérienne. Tout mot w sur $\{x, y\}$ peut s'écrire $x^{m_1}y^{m_2}x^{m_3}\dots y^{m_{2k}}x^{m_{2k+1}}$ avec $m_1, m_{2k+1} \geq 0$ et $m_i > 0$ pour $1 < i < 2k + 1$. Maintenant, soit $G(w) = \sum_{i=1}^k (m_{2i} \sum_{j=1}^i m_{2j-1})$. Alors $w_1 \Rightarrow w_2$ implique $G(w_1) > G(w_2)$, ce qui montre que $\Rightarrow$ est noethérienne. Pour montrer que $\Rightarrow$ est artinienne, nous considérons

$$yy \rightarrow xyxyx, \quad (S_1)$$

$$yyyx \rightarrow xyyy, \quad (S_2)$$

et montrons que la réduction $\rightarrow$ est noethérienne. Nous définissons $N(w) = \sum_{i=1}^k E(m_{2i}/3)$ où $E(n)$ est la partie entière de n , et $P(w) = \sum_{i=1}^k d(m_{2i})$ où $d(n)$ est 1 pour $n \equiv 2 \pmod{3}$, et 0 sinon. Soit $f_M(w) = 2N(w) + P(w)$. Alors $w \rightarrow_{S_1} w'$ implique $f_M(w) > f_M(w')$, et $w \rightarrow_{S_2} w'$ implique $f_M(w) = f_M(w')$. Par conséquent, une suite σ de réductions $\rightarrow$ partant d'un mot w contient un nombre fini n_1 de réductions $\rightarrow_{S_1}$, et n_1 est majoré par $f_M(w)$. Alors la longueur maximale λ des mots impliqués dans σ satisfait $\lambda \leq |w| + 3n_1$. Finalement, $w \rightarrow w'$ implique $w >_{\text{lex}(\lambda)} w'$, où $>_{\text{lex}(\lambda)}$ désigne l'ordre lexicographique sur les mots de longueur au plus λ . Ainsi, le nombre de réductions $\rightarrow$ dans σ est fini—avec 2^λ comme borne supérieure—ce qui montre que $\rightarrow$ est noethérienne.

Nous retrouverons le monoïde $M_\bullet$ dans la section VI.3.

I. LES PETITS GROUPES GAUSSIENS

II. Le problème de conjugaison

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de conjugaison, et montrons comment étendre la solution donnée par Elrifai & Morton dans le cas des groupes de tresses [27] au cas des petits groupes gaussiens arbitraires.

Dans la première section, nous établissons un lemme élémentaire, clé du problème. Un algorithme pour le problème de conjugaison est donné dans la section 2. Dans la section 3, nous en décrivons une amélioration qui utilise une opération spéciale de conjugaison appelée *cyclage*; cette opération permet en effet d'obtenir, pour chaque classe de conjugaison, une sous-classe finie non vide distinguée, appelée *classe sommitale*. Dans la section 4, nous montrons pourquoi, en ce qui concerne le cyclage, nous pouvons utiliser indifféremment la *forme Δ -normale* et la *forme normale fractionnaire*. Enfin, dans la section 5, nous établissons une borne sur le nombre de cyclages, et montrons que calculer un élément de la classe sommitale d'un élément donné peut se faire avec une complexité polynomiale.

1. Le lemme clé

Nous établissons ici un résultat élémentaire (le lemme 1.3). Il est techniquement crucial pour le développement de ce chapitre (nous l'utiliserons également dans les chapitres III et IV à venir). Nous introduisons les notions de puissance, copuissance, et écart d'un élément, reconstruisons la forme normale appelée *forme Δ -normale*, et développons la notion d'intervalle, initialement introduite par Elrifai et Morton dans le cas des tresses [27].

Lemme 1.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour a, b dans G et k entier relatif, il y a équivalence entre:*

- (i) *a et b vérifient $a \leq \Delta^k \leq b$ (voir la définition I.1.5);*
- (ii) *a est un diviseur à gauche de Δ^k , et Δ^k est un diviseur à gauche de b ;*
- (iii) *a est un diviseur à droite de Δ^k , et Δ^k est un diviseur à droite de b .*

Démonstration. Supposons $a \leq \Delta^k \leq b$. Alors il existe des éléments a', a'', b', b'' dans M vérifiant $\Delta^k = a'aa''$ et $b = b'\Delta^kb''$. Nous obtenons $\Delta^k = aa''\partial^{2k}(a') = \tilde{\partial}^{2k}(a'')a'a$ et $b = \Delta^k\partial^{2k}(b')b'' = b'\tilde{\partial}^{2k}(b'')\Delta^k$, ce qui implique (ii) et (iii). Les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii) $\Rightarrow$ (i) sont évidentes. $\square$

Lemme 1.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour a, b dans G , $\Delta^{r_1} \leq a \leq \Delta^{s_1}$ et $\Delta^{r_2} \leq b \leq \Delta^{s_2}$ impliquent $\Delta^{r_1+r_2} \leq ab \leq \Delta^{s_1+s_2}$.*

Démonstration. D'après le lemme 1.1, il existe des éléments a', a'', b', b'' dans M vérifiant $a = a'\Delta^{r_1}$, $\Delta^{s_1} = a''a$, $b = \Delta^{r_2}b'$, et $\Delta^{s_2} = bb''$. Nous en déduisons $ab = a'\Delta^{r_1+r_2}b'$ et $\Delta^{s_1+s_2} = a''abb''$, ce qui implique $\Delta^{r_1+r_2} \leq ab \leq \Delta^{s_1+s_2}$. $\square$

Définition 1.3. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour a dans G , la *puissance* et la *copuissance* de a sont respectivement

$$v_{\Delta}^{-}(a) = \max\{r \in \mathbb{Z} ; \Delta^r \leq a\}, \quad \text{et} \quad v_{\Delta}^{+}(a) = \min\{s \in \mathbb{Z} ; a \leq \Delta^s\}.$$

L'écart de a est la différence $v_{\Delta}^{+}(a) - v_{\Delta}^{-}(a)$. L'idée est que $v_{\Delta}^{\pm}$ est une sorte de Δ -valuation. Une notion similaire de puissance est introduite dans [29], et des notions similaires de copuissance et d'écart sont introduites dans [27], où la puissance de a est désignée par $\inf(a)$, sa copuissance par $\sup(a)$, et son écart est appelé longueur canonique.

Le lemme suivant est crucial pour la suite du développement. Il apparaît déjà dans [27] et [29] dans le cas des monoïdes de tresses, mais les arguments alors employés ne sont plus valables dans le cas plus général des petits monoïdes gaussiens. La démonstration donnée ici est originale.

Lemme 1.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour a, b dans M , $\Delta \leq ba$ implique $\Delta \leq b(\Delta \wedge a)$.*

Démonstration. Supposons $\Delta \leq ba$. D'après le lemme 1.1, Δ est un diviseur à gauche de ba . Puisque b est un diviseur à gauche de ba , l'élément $\Delta \vee b$ est un diviseur à gauche de ba . Ainsi, ayant $\Delta \vee b = b(b \setminus \Delta)$ par définition, par simplification à gauche, $b \setminus \Delta$ est un diviseur à gauche de a . D'après la proposition I.2.5(ii), l'élément $b \setminus \Delta$ est simple, il divise donc Δ , et, par conséquent, il est un diviseur à gauche de $\Delta \wedge a$. Finalement, $\Delta \vee b$ est un diviseur à gauche de $b(\Delta \wedge a)$ et, par conséquent, Δ est un diviseur à gauche de $b(\Delta \wedge a)$. $\square$

Remarque. Un argument similaire permet de montrer que $\Delta \leq ba$ implique $\Delta \leq (b \tilde{\wedge} \Delta)(\Delta \wedge a)$.

Munis du lemme 1.4, nous pouvons maintenant établir le résultat suivant, lequel nous permet de définir une forme normale pour les éléments de tout petit monoïde gaussien, puis pour les éléments de tout petit groupe gaussien. Mentionnons que ce résultat apparaît déjà dans [27] dans le cas des tresses—voir aussi [15][26][38].

Lemme 1.5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit a un élément de M et $(a_i)_{i \geq 1}$ la suite d'éléments simples définie par $a_1 = \Delta \wedge a$ et $a_{i+1} = \Delta \wedge ((a_1 \dots a_i) \setminus a)$ pour $i \geq 1$. Alors nous avons $a_j \neq 1$ si et seulement si nous avons $j \leq v_\Delta^+(a)$.*

Démonstration. Puisque M est atomique, il existe un entier k vérifiant $a_k \neq 1$ et $a_j = 1$ pour $j > k$. Par conséquent, l'élément a est $a_1 \dots a_k$ et, d'après le lemme 1.2, il vérifie $v_\Delta^+(a) \leq k$. Nous montrons $k \leq v_\Delta^+(a)$ par récurrence sur k . Pour $k = 0$, nous avons $a = 1$ et $v_\Delta^+(a) = 0$. Supposons $k \geq 1$, c'est-à-dire $a \neq 1$ et $v_\Delta^+(a) \geq 1$. Soit $q = v_\Delta^+(a)$. Il existe un élément b dans M vérifiant $\Delta^q = ba$. D'après le lemme 1.4, nous avons $\Delta \leq ba_1$, c'est-à-dire qu'il existe un élément b' dans M vérifiant $ba_1 = \Delta b'$. Nous en déduisons

$$\Delta^q = ba = ba_1 a_2 \dots a_k = \Delta b' a_2 \dots a_k,$$

puis $\Delta^{q-1} = b' a_2 \dots a_k$ et $a_2 \dots a_k \leq \Delta^{q-1}$. Maintenant, par hypothèse de récurrence, nous avons $v_\Delta^+(a_2 \dots a_k) = k - 1$, d'où $k - 1 \leq v_\Delta^+(a) - 1$. $\square$

Nous définissons une forme normale unique pour les éléments de tout petit groupe gaussien, celle-ci généralise celle introduite par Garside [29] pour les tresses.

Définition 1.6. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour a élément de G , la *forme Δ -normale* de a est l'unique décomposition $\Delta^p a_1 \dots a_\ell$ avec $p = v_\Delta^-(a)$, $a_1 = \Delta \wedge (\Delta^{-p} a)$, $a_{i+1} = \Delta \wedge ((a_1 \dots a_i) \setminus (\Delta^{-p} a))$ pour $i \geq 1$, et $\ell = v_\Delta^+(a) - v_\Delta^-(a)$.

Définition 1.7. [27] Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour tous r, s entiers relatifs avec $r \leq s$, l'intervalle $[r, s]$ est défini comme le sous-ensemble de G composé des éléments a vérifiant $\Delta^r \leq a \leq \Delta^s$. Ainsi nous avons

$$[r, s] = \{a \in G ; r \leq v_\Delta^-(a) \text{ et } v_\Delta^+(a) \leq s\}.$$

Si S est l'ensemble des éléments simples, nous obtenons

$$[r, s] \subseteq \{a \in G ; a = \Delta^r t_{r+1} \dots t_s, t_i \in S\}.$$

En particulier, nous avons la majoration $\text{card}[r, s] \leq (\text{card } S)^{s-r}$.

Lemme 1.8. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors nous avons $[r_1, s_1][r_2, s_2] = [r_1 + r_2, s_1 + s_2]$ dans G .*

Démonstration. D'après le lemme 1.2, nous avons $[r_1, s_1][r_2, s_2] \subseteq [r_1 + r_2, s_1 + s_2]$. Montrons $[r_1 + r_2, s_1 + s_2] \subseteq [r_1, s_1][r_2, s_2]$. Puisque $[r, s]$ est $\Delta^r[0, s - r]$, il suffit de montrer $[0, s_1 + s_2] \subseteq [0, s_1][0, s_2]$. Supposons $a \in [0, s_1 + s_2]$. Alors, d'après le lemme 1.5, nous avons $v_\Delta^+(a) \leq s_1 + s_2$. Soit $(a_i)_{i \geq 1}$ la suite infinie d'éléments simples définie par $a_1 = \Delta \wedge a$ et $a_{i+1} = \Delta \wedge ((a_1 \dots a_i) \setminus a)$ pour $i \geq 1$. Alors, par construction, $a' = a_1 \dots a_{s_1}$ appartient à $[0, s_1]$, et $a'' = a_{s_1+1} \dots a_{s_1+s_2}$ appartient à $[0, s_2]$. $\square$

2. Le problème de conjugaison

Nous résolvons le problème de conjugaison dans les petits groupes gaussiens et montrons comment étendre la solution de Elrifai-Morton proposée dans [27] dans le cas des groupes de tresses.

Définition 2.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour a, b éléments de G , nous dirons que a, b sont *positivement conjugués* s'il existe un élément c dans M vérifiant $a = c^{-1}bc$, et que a, b sont *simplement conjugués* s'il existe un élément simple s vérifiant $a = s^{-1}bs$.

Lemme 2.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Si a, b sont conjugués dans G , alors a, b sont positivement conjugués.*

Démonstration. Il existe un élément c dans G vérifiant $a = c^{-1}bc$. Soit c' l'élément de M vérifiant $c = \Delta^{v_\Delta^-(c)}c'$. D'après la proposition I.2.5, nous avons $b\Delta^e = \Delta^eb$, où e est l'exposant de M (voir la définition I.2.7). Maintenant, il existe des entiers q et r vérifiant $v_\Delta^-(c) = qe + r$ et $0 \leq r < e$. Nous en déduisons

$$a = c'^{-1}\Delta^{-qe-r}b\Delta^{qe+r}c' = c'^{-1}\Delta^{-qe-r}\Delta^{qe}b\Delta^rc' = (\Delta^rc')^{-1}b\Delta^rc'.$$

Puisque r est positif, Δ^rc' appartient à M . $\square$

Lemme 2.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour a, b dans G vérifiant $a = c^{-1}bc$ avec c dans M et $c_1 = \Delta \wedge c$, nous avons $v_\Delta^-(c_1^{-1}bc_1) \geq \min(v_\Delta^-(a), v_\Delta^-(b))$.*

Démonstration. Soit $m = \min(v_\Delta^-(a), v_\Delta^-(b))$. Il existe des éléments a', b' dans M vérifiant $a = \Delta^ma'$ et $b = \Delta^mb'$. Nous trouvons

$$c_1^{-1}bc_1 = c_1^{-1}\Delta\Delta^{m-1}b'c_1 = \partial(c_1)\Delta^{m-1}b'c_1 = \Delta^{m-1}\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1. \quad (2.1)$$

Il existe un élément c' dans M vérifiant $c = c_1 c'$, et nous avons

$$c^{-1}bc = c'^{-1}\Delta^{m-1}\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1c' = \Delta^{m-1}\partial^{2m-2}(c')^{-1}\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1c'.$$

Nous obtenons

$$\partial^{2m-2}(c')^{-1}\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1c' = \Delta a',$$

puis

$$\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1c' = \Delta\partial^{2m}(c')a'.$$

Par conséquent, Δ divise $\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1c'$. Maintenant, d'après le lemme 1.4, Δ divise $\partial^{2m-1}(c_1)b'c_1$, et nous déduisons de (2.1) que Δ^m divise $c_1^{-1}bc_1$. $\square$

Proposition 2.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour a, b éléments conjugués de $[r, s]$, il existe une suite $b = b_0, b_1, \dots, b_k = a$ d'éléments de $[r, s]$ avec, pour $1 \leq i \leq k$, b_{i-1} et b_i simplement conjugués.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2, il existe un élément c dans M vérifiant $a = c^{-1}bc$. Supposons que c soit $c_1 \dots c_k$ avec $c_1 = \Delta \wedge c$ et $c_{i+1} = \Delta \wedge ((c_1 \dots c_i) \setminus c)$. Soient $b_0 = b$ et $b_i = c_i^{-1}b_{i-1}c_i$. Nous allons montrer que b_1 appartient à $[r, s]$. D'une part, le lemme 2.3 donne $\Delta^r \leq b_1$, c'est-à-dire $r \leq v_\Delta^-(b_1)$. D'autre part, nous avons $\Delta^{-s} \leq a^{-1}$, $\Delta^{-s} \leq b^{-1}$, et $a^{-1} = c^{-1}b^{-1}c$. Par conséquent, toujours d'après le lemme 2.3, nous obtenons $\Delta^{-s} \leq c_1^{-1}b^{-1}c_1 = b_1^{-1}$, puis $b_1 \leq \Delta^s$, c'est-à-dire $v_\Delta^+(b_1) \leq s$. Une récurrence sur k complète la démonstration. $\square$

Corollaire 2.5. *Le problème de conjugaison dans les petits groupes gaussiens est décidable.*

Démonstration. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions et a, b des éléments quelconques de G . Pour décider si a et b sont conjugués, nous commençons par déterminer un intervalle $[r, s]$ auquel a et b appartiennent—il suffit de prendre $r = \min(v_\Delta^-(a), v_\Delta^-(b))$ et $s = \max(v_\Delta^+(a), v_\Delta^+(b))$. Soit $\Gamma_0(a)$ le singleton $\{a\}$. Alors, pour $i \geq 1$, la i -ème étape consiste à calculer l'ensemble $\Gamma_i(a)$ des éléments de $[r, s]$ qui sont simplement conjugués à un élément de $\Gamma_{i-1}(a)$. Le processus s'arrête à l'étape i_0 , où i_0 est le plus petit indice vérifiant $\Gamma_{i_0-1}(a) = \Gamma_{i_0}(a)$. Puisque l'intervalle $[r, s]$ est fini, un tel indice i_0 existe, et, en particulier, il est plus petit que $\text{card}[r, s]$. Maintenant, d'après la proposition 2.4, a et b sont conjugués si et seulement si b appartient à $\Gamma_{i_0}(a)$. $\square$

3. Cyclage et classes sommitales

Nous décrivons maintenant une amélioration de la solution précédente. Dans [27], partant de la forme Δ -normale, Elrifai et Morton introduisent deux opérations, appelées cyclage et cyclage inverse, qui envoient toute tresse sur une tresse conjuguée distinguée. Ici, nous considérons des opérations similaires, qui vont nous permettre de montrer que toute classe de conjugaison admet une sous-classe non vide d'éléments ayant à la fois la puissance maximale et la copuissance minimale. Nous verrons qu'au moins un élément de cette sous-classe distinguée peut être trouvé après un nombre fini d'opérations de cyclage (et de cyclage inverse), et que la totalité de la sous-classe distinguée est alors obtenue après un nombre fini d'opérations de conjugaison par un élément simple.

Le cyclage consiste à faire passer le premier élément simple distinct de Δ intervenant dans la forme Δ -normale vers la fin de celle-ci, et le cyclage inverse à faire passer le dernier élément simple vers le début de la forme Δ -normale.

Définition 3.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Le *cyclage* et le *cyclage inverse* sont les applications ϕ_+ et ϕ_- de G dans lui-même définies par

$$\phi_+(a) = \Delta^p a_2 \dots a_\ell \tilde{\partial}^{2p}(a_1), \quad \text{et} \quad \phi_-(a) = \Delta^p \partial^{2p}(a_\ell) a_1 \dots a_{\ell-1},$$

où $\Delta^p a_1 \dots a_\ell$ est la forme Δ -normale de a . En particulier, nous avons $\phi_+(\Delta^p) = \Delta^p = \phi_-(\Delta^p)$.

Lemme 3.2. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fraction. Alors, pour tout a dans G , nous avons

$$v_\Delta^-(a) \leq v_\Delta^-(\phi_\pm(a)) \leq v_\Delta^-(a) + 1, \quad \text{et} \quad v_\Delta^+(a) - 1 \leq v_\Delta^+(\phi_\pm(a)) \leq v_\Delta^+(a).$$

Démonstration. Soit $a = \Delta^p a_1 \dots a_\ell$ la forme Δ -normale de a . Par définition, nous avons $\phi_+(a) = \Delta^p a_2 \dots a_\ell \tilde{\partial}^{2p}(a_1)$ et $\phi_-(a) = \Delta^p \partial^{2p}(a_\ell) a_1 \dots a_{\ell-1}$. Nous obtenons immédiatement $v_\Delta^-(a) \leq v_\Delta^-(\phi_\pm(a))$, et nous déduisons $v_\Delta^+(\phi_\pm(a)) \leq v_\Delta^+(a)$ des égalités

$$\begin{aligned} \phi_+(a) \tilde{\partial}^{2p-1}(a_1) \partial^3(a_\ell) \dots \partial^{2\ell-1}(a_2) \\ = \phi_-(a) \partial(a_{\ell-1}) \dots \partial^{2\ell-3}(a_1) \partial^{2p+2\ell-1}(a_\ell) = \Delta^{p+\ell}. \end{aligned}$$

Finalement, $v_\Delta^-(\phi_\pm(a)) \leq v_\Delta^-(a) + 1$ et $v_\Delta^+(a) - 1 \leq v_\Delta^+(\phi_\pm(a))$ sont des conséquences directes du lemme 1.8. $\square$

Lemme 3.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout a dans M , nous avons $\|a\| = \|\tilde{\partial}^2(a)\| = \|\partial^2(a)\|$.*

Démonstration. D'après la proposition I.2.5, les automorphismes $\tilde{\partial}^2$ et ∂^2 induisent des permutations de l'ensemble des atomes de M . D'autre part, par définition, l'application $\|\cdot\|$ associe à un élément a le nombre maximal d'atomes dans une décomposition de a . $\square$

Le prochain résultat apparaît déjà dans [27] dans le cas des tresses. Le lemme précédent va nous permettre de mener la récurrence nécessaire à sa démonstration.

Proposition 3.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Supposons que a appartienne à G et qu'un conjugué b de a vérifie $v_{\Delta}^-(b) > v_{\Delta}^-(a)$. Alors il existe un entier m vérifiant $v_{\Delta}^-(\phi_+^m(a)) > v_{\Delta}^-(a)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2, il existe un élément d dans M vérifiant $a = d^{-1}bd$, d'où

$$da = bd. \quad (3.1)$$

Nous démontrons le résultat de la proposition en faisant une récurrence sur $\|d\|$. Pour $\|d\| = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons $\|d\| > 0$. Soit $p = v_{\Delta}^-(a)$. Il existe des éléments a', b' dans M vérifiant $a = \Delta^p a'$ et $b = \Delta^p b'$ avec, par hypothèse, $v_{\Delta}^-(b') > 0$. De (3.1), nous déduisons $d\Delta^p a' = \Delta^p b'd$, puis $\partial^{2p}(d)a' = b'd$. Maintenant, d'après $\Delta \leq b' \leq b'd$, nous avons $\Delta \leq \partial^{2p}(d)a'$, et le lemme 1.4 implique $\Delta \leq \partial^{2p}(d)a_1$, où a_1 est $\Delta \wedge a'$. En appliquant l'automorphisme $\tilde{\partial}^{2p}$, nous obtenons $\Delta \leq d\tilde{\partial}^{2p}(a_1)$. Il existe un élément g dans M vérifiant

$$d\tilde{\partial}^{2p}(a_1) = \Delta g. \quad (3.2)$$

En écrivant $\Delta = \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1)\tilde{\partial}^{2p}(a_1)$, nous en déduisons

$$d = \tilde{\partial}^2(g)\tilde{\partial}^{2p+1}(a_1).$$

En particulier, cela implique $\|\tilde{\partial}^2(g)\| < \|d\|$, puisque $a_1 \neq \Delta$ implique $\tilde{\partial}^{2p+1}(a_1) \neq 1$. Maintenant, par définition du cyclage, nous avons

$$\tilde{\partial}^{2p}(a_1)\phi_+(a) = a\tilde{\partial}^{2p}(a_1). \quad (3.3)$$

En rapprochant (3.1), (3.2), et (3.3), nous obtenons

$$b\Delta g = bd\tilde{\partial}^{2p}(a_1) = da\tilde{\partial}^{2p}(a_1) = d\tilde{\partial}^{2p}(a_1)\phi_+(a) = \Delta g\phi_+(a).$$

Nous en déduisons

$$\partial^2(b)g = g\phi_+(a).$$

L'élément $\phi_+(a)$ est conjugué de $\partial^2(b)$ par l'élément g de M et, d'après le lemme 3.3, g vérifie $\|g\| < \|d\|$. Par conséquent, nous avons soit $v_{\Delta}^-(\phi_+(a)) > p$, et c'est terminé, soit $v_{\Delta}^-(\phi_+(a)) = p$, auquel cas nous avons $v_{\Delta}^-(\partial^2(b)) > v_{\Delta}^-(\phi_+(a))$, et, appliquant l'hypothèse de récurrence aux éléments $\partial^2(b)$ et $\phi_+(a)$, il existe un entier n vérifiant $v_{\Delta}^-(\phi_+^n(\phi_+(a))) > v_{\Delta}^-(\phi_+(a))$. $\square$

Lemme 3.5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour tout a dans G de forme Δ -normale $a = \Delta^p a_1 \dots a_\ell$, la forme Δ -normale de a^{-1} est*

$$a^{-1} = \Delta^{-p-\ell} b_1 \dots b_\ell \quad \text{avec} \quad b_i = \tilde{\partial}^{2p+2\ell-2i+1}(a_{\ell-i+1}).$$

Démonstration. Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a_\ell^{-1} \dots a_1^{-1} \Delta^{-p} = \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_\ell) \dots \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_2) \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_1) \Delta^{-p} \\ &= \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_\ell) \dots \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_2) \Delta^{-1-p} \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1) \\ &= \dots = \Delta^{-p-\ell} \tilde{\partial}^{2p+2\ell-1}(a_\ell) \dots \tilde{\partial}^{2p+3}(a_2) \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1). \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons l'égalité

$$\Delta \wedge (\tilde{\partial}^{2p+2i-1}(a_i) \tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1)) = \tilde{\partial}^{2p+2i-1}(a_i),$$

pour $1 \leq i \leq \ell$, par récurrence sur i . Le résultat est trivial pour $i = 1$. Supposons $i > 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \wedge (\tilde{\partial}^{2p+2i-1}(a_i) \tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1)) \\ = \tilde{\partial}^{2p+2i-1}(a_i) (\tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1))). \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1)) \\ &= (\tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1))) \wedge \Delta \\ &= \tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i) \wedge ((\tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}^{2p+1}(a_1)) \wedge \Delta) \\ &\stackrel{(\text{HR})}{=} \tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i) \wedge \tilde{\partial}^{2p+2i-3}(a_{i-1}) \\ &= \tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i \wedge \partial(a_{i-1})) = \tilde{\partial}^{2p+2i-2}(a_i \wedge (a_{i-1} \setminus \Delta)) = \tilde{\partial}^{2p+2i-2}(1) = 1, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Lemme 3.6. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors tout élément a dans G vérifie $(\phi_-(a))^{-1} = \tilde{\partial}^2(\phi_+(a^{-1}))$.*

Démonstration. Soit $a = \Delta^p a_1 \dots a_\ell$ la forme Δ -normale de a et q sa copuissance. D'après le lemme 3.5, la forme Δ -normale de a^{-1} est $a^{-1} = \Delta^{-q} b_1 \dots b_\ell$ avec $b_i = \tilde{\partial}^{2q-2i+1}(a_{\ell-i+1})$. Par conséquent, nous avons $\phi_+(a^{-1}) = \Delta^{-q} b_2 \dots b_\ell \partial^{2q}(b_1)$. De $\phi_-(a) = \Delta^p \partial^{2p}(a_\ell) a_1 \dots a_{\ell-1}$, nous déduisons

$$\phi_-(a) \tilde{\partial}^2(\phi_+(a^{-1})) = \Delta^p \partial^{2p}(a_\ell) a_1 \dots a_{\ell-1} \Delta^{-q} \tilde{\partial}^2(b_2) \dots \tilde{\partial}^2(b_\ell) \partial^{2q-2}(b_1).$$

Maintenant, nous avons, pour $1 \leq i \leq \ell - 1$,

$$\begin{aligned} a_{\ell-i} \Delta^{i-1-q} \tilde{\partial}^2(b_{1+i}) &= a_{\ell-i} \tilde{\partial}^{2+2i-2-2q}(\tilde{\partial}^{2q-2i-1}(a_{q-i})) \Delta^{i-1-q} \\ &= a_{\ell-i} \partial(a_{\ell-i}) \Delta^{i-1-q} = \Delta^{i-q}. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi_-(a) \tilde{\partial}^2(\phi_+(a^{-1})) &= \Delta^p \partial^{2p}(a_\ell) \Delta^{-p-1} \partial^{2q-2}(b_1) \\ &= \Delta^{-1} \tilde{\partial}^2(a_\ell) \partial^{2q-2}(\tilde{\partial}^{2q-1}(a_\ell)) \\ &= \Delta^{-1} \tilde{\partial}^2(a_\ell) \tilde{\partial}^2(\partial(a_\ell)) \\ &= \Delta^{-1} \tilde{\partial}^2(a_\ell \partial(a_\ell)) \\ &= \Delta^{-1} \tilde{\partial}^2(\Delta) = \Delta^{-1} \Delta = 1, \end{aligned}$$

qui est le résultat recherché. $\square$

Nous obtenons le résultat dual de la proposition 3.4.

Proposition 3.7. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Supposons que a appartienne à G et qu'un conjugué b de a vérifie $v_\Delta^+(b) < v_\Delta^+(a)$. Alors il existe un entier m vérifiant $v_\Delta^+(\phi^m(a)) < v_\Delta^+(a)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.4 aux éléments a^{-1} et b^{-1} , et d'utiliser ensuite le lemme 3.6. $\square$

Définition 3.8. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour a dans G , nous désignons par $C(a)$ la classe de conjugaison de a , et définissons la *puissance sommitale*, la *copuissance sommitale*, et l'*écart sommital* de a comme étant, respectivement, la puissance maximale, la copuissance minimale, et l'écart minimal dans la classe $C(a)$.

Proposition 3.9. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour tout a dans G , les éléments de $C(a)$ dont l'écart est l'écart sommital forment une partie finie non vide de $C(a)$.*

Démonstration. Par définition, l'écart d'un élément de $C(a)$ est l'écart sommital si et seulement si sa puissance est la puissance sommitale et sa copuissance la copuissance sommitale. D'après la proposition 3.4, des cyclages répétés sur a produisent (au moins) un des éléments conjugués de a dont la puissance est la puissance sommitale. Notons $\phi_+^*(a)$ l'ensemble des conjugués de a ainsi produits. D'après le corollaire 3.7, des cyclages inverses répétés sur les éléments de $\phi_+^*(a)$ produisent (au moins) un des éléments conjugués des éléments de $\phi_+^*(a)$ —et donc conjugués de a —dont la copuissance est la copuissance sommitale. Notons $\phi_-^*(\phi_+^*(a))$

l'ensemble des conjugués de a ainsi produits. Maintenant, d'après le lemme 3.2, les cyclages inverses ne peuvent faire décroître la puissance, donc la puissance des éléments de $\phi_-^*(\phi_+^*(a))$ est égale à la puissance des éléments de $\phi_+^*(a)$, c'est-à-dire égale à la puissance sommitale. Ainsi, l'écart des éléments de $\phi_-^*(\phi_+^*(a))$ est l'écart sommital. En particulier, $\phi_-^*(\phi_+^*(a))$ est non vide et finie. D'après la proposition 2.4, nous obtenons tous les éléments de $C(a)$ dont l'écart est l'écart sommital en conjuguant les éléments de $\phi_-^*(\phi_+^*(a))$ par des éléments simples, et en ne gardant que ceux dont l'écart est l'écart sommital (voir la démonstration du corollaire 2.5). $\square$

Définition 3.10. Pour a dans G , la *classe sommitale* $C^{\text{som}}(a)$ de a est l'ensemble des éléments de $C(a)$ dont l'écart est l'écart sommital.

Proposition 3.11. Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Soit a, b des éléments de G . Un nombre fini d'opérations de cyclage et cyclage inverse sur a (resp. sur b) produit un élément $\check{a}$ de $C^{\text{som}}(a)$ (resp. un élément $\check{b}$ de $C^{\text{som}}(b)$), puis un nombre fini d'opérations de conjugaison simple sur $\check{a}$ permet d'obtenir $C^{\text{som}}(a)$. Alors a, b sont conjugués dans G si et seulement si $\check{b}$ appartient à $C^{\text{som}}(a)$.

Nous obtenons également des critères simples pour prouver la non-conjugaison. Chacune des conditions suivantes :

- (i) le plus petit intervalle contenant a et celui contenant b sont disjoints,
- (ii) les puissances sommitales de a et b sont différentes,
- (iii) les copuissances sommitales de a et b sont différentes,
- (iv) les écarts sommitaux de a et b sont différents,

implique que a et b ne sont pas conjugués.

4. Formes Δ -normale et normale fractionnaire.

La forme normale que nous avons choisie pour étudier le problème de conjugaison correspond, comme dans [27], à celle définie par Garside dans le cas des tresses, voir [29]. Cette dernière est adéquate dès lors que nous considérons les notions de puissance et copuissance. Nous pouvons tout aussi bien utiliser la forme normale fractionnaire, qui correspond à celle définie par Deligne dans [26] et par Adjan dans [2]—voir aussi [27] [28].

Définition 4.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Pour c dans G , la *forme normale fractionnaire* (à gauche) de c est définie comme étant l'unique décomposition

$$a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q,$$

où $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ sont des éléments simples tous distincts de 1, et où nous avons $a_1 \wedge b_1 = 1$, $a_i \wedge \partial(a_{i-1}) = 1$ pour $2 \leq i \leq p$, et $b_j \wedge \partial(b_{j-1}) = 1$ pour $2 \leq j \leq q$.

Nous avons, entre les deux formes normales, la connection suivante:

Lemme 4.2. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour c dans G de forme normale fractionnaire $a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q$, la forme Δ -normale de c est $\Delta^{-p} c_1 \dots c_{p+q}$ avec

$$c_i = \begin{cases} \tilde{\partial}^{2p-2i+1}(a_{p-i+1}) & \text{pour } 1 \leq i \leq p, \\ b_{i-p} & \text{pour } p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Démonstration. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta^p c &= \Delta^p a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q \\ &= \Delta^p \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_p) \dots \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q \\ &= \tilde{\partial}^{2p-1}(a_p) \dots \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q. \end{aligned}$$

A présent, nous montrons, pour $1 \leq i \leq p$,

$$\Delta \wedge (\tilde{\partial}^{2i-1}(a_i) \dots \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q) = \tilde{\partial}^{2i-1}(a_i),$$

par récurrence sur i . Pour $i = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \wedge (\tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q) &= \tilde{\partial}(a_1)(a_1 \wedge (b_1 \dots b_q)) \\ &= \tilde{\partial}(a_1)((a_1 \wedge (b_1 \dots b_q)) \wedge \Delta) \\ &= \tilde{\partial}(a_1)(a_1 \wedge ((b_1 \dots b_q) \wedge \Delta)) \\ &= \tilde{\partial}(a_1)(a_1 \wedge b_1) = \tilde{\partial}(a_1). \end{aligned}$$

Supposons $i > 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta \wedge (\tilde{\partial}^{2i-1}(a_i) \dots \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q) \\ = \tilde{\partial}^{2i-1}(a_i)(\tilde{\partial}^{2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q)). \end{aligned}$$

A présent, en appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\partial}^{2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}(a_1)b_1 \dots b_q) \\
 &= (\tilde{\partial}^{2i-2}(a_i) \wedge (\tilde{\partial}^{2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}(a_1)b_1 \dots b_q)) \wedge \Delta \\
 &= \tilde{\partial}^{2i-2}(a_i) \wedge ((\tilde{\partial}^{2i-3}(a_{i-1}) \dots \tilde{\partial}(a_1)b_1 \dots b_q) \wedge \Delta) \\
 &\stackrel{(\text{HR})}{=} \tilde{\partial}^{2i-2}(a_i) \wedge \tilde{\partial}^{2i-3}(a_{i-1}) \\
 &= \tilde{\partial}^{2i-2}(a_i \wedge \partial(a_{i-1})) \\
 &= \tilde{\partial}^{2i-2}(a_i \wedge (a_{i-1} \setminus \Delta)) \\
 &= \tilde{\partial}^{2i-2}(1) = 1.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons $c_i = \tilde{\partial}^{2p-2i+1}(a_{p-i+1})$ pour $1 \leq i \leq p$, et $c_i = b_{i-p}$ pour $p+1 \leq i \leq p+q$. $\square$

Nous définissons deux nouvelles opérations de conjugaison relativement à la forme normale fractionnaire.

Définition 4.3. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Le θ -cyclage et le θ -cyclage inverse sont les applications θ_+ et θ_- de G dans lui-même définies par

$$\theta_+(c) = a_{p-1}^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q a_p^{-1}, \quad \text{et} \quad \theta_-(c) = b_q a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_{q-1},$$

avec $c = a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q$ la forme normale fractionnaire de c .

Le résultat suivant montre que cyclage et θ -cyclage sont équivalents.

Lemme 4.4. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour tout c dans G , nous avons

$$\theta_+(c) = \tilde{\partial}^2(\phi_+(c)), \quad \text{et} \quad \theta_-(c) = \phi_-(c).$$

Démonstration. Tout d'abord, en utilisant le lemme 4.2, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \theta_+(c) &= a_{p-1}^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q a_p^{-1} \\
 &= a_{p-1}^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_q \Delta^{-1} \tilde{\partial}(a_p) \\
 &= \Delta^{-p} \tilde{\partial}^{2p-1}(a_{p-1}) \dots \tilde{\partial}^3(a_1) \tilde{\partial}^2(b_1 \dots b_q) \tilde{\partial}(a_p) \\
 &= \tilde{\partial}^2(\Delta^{-p} \tilde{\partial}^{2p-3}(a_{p-1}) \dots \tilde{\partial}(a_1) b_1 \dots b_q \partial(a_p)) \\
 &= \tilde{\partial}^2(\Delta^{-p} c_2 \dots c_{p+q} \partial^{2p}(c_1)) = \tilde{\partial}^2(\phi_+(c)).
 \end{aligned}$$

Ensuite, par définition, nous avons

$$\begin{aligned}\theta_+(c^{-1}) &= \theta_+(b_q^{-1} \dots b_1^{-1} a_1 \dots a_p) \\ &= b_{q-1}^{-1} \dots b_1^{-1} a_1 \dots a_p b_q^{-1} \\ &= (b_q a_p^{-1} \dots a_1^{-1} b_1 \dots b_{q-1})^{-1} = \theta_-(c)^{-1}.\end{aligned}$$

Du lemme 3.6, nous déduisons $\theta_+(c^{-1}) = \tilde{\partial}^2(\phi_+(c^{-1})) = \phi_-(c)^{-1}$. Ainsi, nous obtenons $\theta_-(c) = \phi_-(c)$. $\square$

Corollaire 4.5. *Le θ -cyclage permet de résoudre le problème de conjugaison dans tout petit groupe gaussien.*

5. Une borne sur le nombre de cyclages

Nous concluons ce chapitre en étendant aux petits groupes gaussiens arbitraires le résultat de Birman-Ko-Lee [10] suivant lequel, dans un groupe de tresses, cyclages et cyclages inverses permettent d'obtenir un élément de la classe sommitale d'un élément donné avec une complexité polynomiale.

Dans la section 3, nous avons vu que, dans tout petit groupe gaussien, une suite d'opérations de cyclage sur un élément qui n'est pas de puissance sommitale produit un élément de puissance strictement supérieure (proposition 3.4). Le résultat est que la longueur d'une telle suite est bornée par $\|\Delta\| - 1$. La preuve de Birman-Ko-Lee repose sur le possible contrôle de l'écart de l'un des conjuguants associés à une telle suite d'opérations de cyclage. Les arguments originaux ne fonctionnent plus dans le cas des petits groupes gaussiens arbitraires, et nous devons, en particulier, utiliser le lemme clé de la section 1.

Lemme 5.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Soit $a \in G$ avec $a = \Delta^p a'$ et $p = v_\Delta^-(a)$. Alors a n'est pas de puissance sommitale si et seulement s'il existe un élément h dans M vérifiant $\Delta \leq ha' \tilde{\partial}^{2p}(h^{-1})$.*

Démonstration. Soit $b \in C^{\text{som}}(a)$. D'après le lemme 2.2, nous avons $b = gag^{-1}$ pour un certain g dans M . Maintenant, que a ne soit pas de puissance sommitale est équivalent à $\Delta^{p+1} \leq g\Delta^p a' g^{-1}$, donc à $\Delta \leq \partial^{2p}(g)a' g^{-1}$. Il suffit alors de prendre $h = \partial^{2p}(g)$. $\square$

Définition 5.2. Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Soit $a \in G$ avec $a = \Delta^p a'$ et $p = v_\Delta^-(a)$. Nous désignons par $H(a)$ l'ensemble des éléments h de M vérifiant $\Delta \leq ha' \tilde{\partial}^{2p}(h^{-1})$ avec $\|h\|$ minimal.

Lemme 5.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Alors, pour a dans G , tout élément h dans $H(a)$ vérifie $v_{\Delta}^{-}(h) = 0$.*

Démonstration. Posons $p = v_{\Delta}^{-}(a)$ et $a = \Delta^p a'$ avec $a' \in M$. Soit h un élément de $H(a)$ et $q = v_{\Delta}^{-}(h)$. Alors nous avons $h = \Delta^q d$ pour un certain d dans M , et obtenons

$$da' \tilde{\partial}^{2p}(d^{-1}) = \Delta^{-q} ha' \tilde{\partial}^{2p}(h^{-1} \Delta^q) = \partial^{2q}(ha' \tilde{\partial}^{2p}(h^{-1})).$$

Par conséquent, h appartient à $H(a)$ seulement pour $\|h\| \leq \|d\|$, i.e., seulement pour $v_{\Delta}^{-}(h) = 0$. $\square$

Conséquence du lemme clé de la section 1, le résultat suivant est essentiel pour la suite.

Lemme 5.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour a, b dans M , $v_{\Delta}^{-}(b) = v_{\Delta}^{-}(ba_1)$ implique $v_{\Delta}^{-}(b) = v_{\Delta}^{-}(ba_1) = v_{\Delta}^{-}(ba_1 a_2) = \dots = v_{\Delta}^{-}(ba_1 \dots a_n)$, où $a = a_1 \dots a_n$ est la forme Δ -normale de a .*

Démonstration. Supposons $v_{\Delta}^{-}(b) = v_{\Delta}^{-}(ba_1)$. Nous avons $b = \Delta^{v_{\Delta}^{-}(b)} b'$ pour un certain b' dans M . Nous devons montrer $v_{\Delta}^{-}(ba_1) = v_{\Delta}^{-}(ba_1 a_2)$. D'après le lemme 1.8, nous avons $v_{\Delta}^{-}(ba_1) \leq v_{\Delta}^{-}(ba_1 a_2)$. Supposons $v_{\Delta}^{-}(ba_1) < v_{\Delta}^{-}(ba_1 a_2)$. Alors nous trouvons $\Delta \leq b' a_1 a_2$, et le lemme 1.4 implique $\Delta \leq b' a_1$. Nous en déduisons $\Delta^{v_{\Delta}^{-}(b)+1} \leq ba_1$, contradiction. Une récurrence complète la démonstration. $\square$

Proposition 5.5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Alors, pour tout a dans G de puissance non sommitale, nous avons $v_{\Delta}^{-}(\phi_+^{\|\Delta\|-1}(a)) > v_{\Delta}^{-}(a)$.*

Démonstration. Soit $p = v_{\Delta}^{-}(a)$. D'après le lemme 3.2, pour tout $i \geq 0$, nous avons $p \leq v_{\Delta}^{-}(\phi_+^i(a))$: notons m le plus grand entier vérifiant $v_{\Delta}^{-}(\phi_+^m(a)) = p$. Nous définissons alors les éléments a_i, b_i et h_i par $\phi_+^i(a) = \Delta^p a_i b_i$ avec $a_i = \Delta \wedge (a_i b_i)$, et par $h_i = \tilde{\partial}^{2m+1}(a_m) \dots \tilde{\partial}^{2i+1}(a_i)$ pour $0 \leq i \leq m$. Nous montrons d'abord les deux assertions suivantes:

- (i) $H(a)$ est $\{h_0\}$;
- (ii) pour $1 \leq i \leq m$, $\Delta \wedge h_i$ est un diviseur propre à gauche de $\Delta \wedge h_{i-1}$.

Montrons (i). Pour $0 \leq i \leq m-1$, nous avons

$$\begin{aligned} h_i \tilde{\partial}^{2i}(a_i b_i) \tilde{\partial}^{2p}(h_i)^{-1} &= h_{i+1} \tilde{\partial}^{2i+1}(a_i) \tilde{\partial}^{2i}(a_i) \tilde{\partial}^{2i}(b_i) \tilde{\partial}^{2p+2i+1}(a_i^{-1}) \tilde{\partial}^{2p}(h_{i+1})^{-1} \\ &= h_{i+1} \Delta \tilde{\partial}^{2i}(b_i \tilde{\partial}^{2p}(a_i)) \Delta^{-1} \tilde{\partial}^{2p}(h_{i+1})^{-1} \\ &= h_{i+1} \tilde{\partial}^{2i+2}(a_{i+1} b_{i+1}) \tilde{\partial}^{2p}(h_{i+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$h_0 a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h_0)^{-1} = h_m \tilde{\partial}^{2m}(a_m b_m) \tilde{\partial}^{2p}(h_m)^{-1} = \tilde{\partial}^{2m+2}(b_m \tilde{\partial}^{2p}(a_m)),$$

donc, par hypothèse,

$$\Delta \leq h_0 a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h_0)^{-1}. \quad (5.1)$$

Soit h un élément de $H(a)$. Nous avons $\Delta \leq h a_0 b_0$, d'où, d'après le lemme 1.4, $\Delta \leq h a_0$, et h est $k_1 \tilde{\partial}(a_0)$ pour un certain k_1 dans M . Nous trouvons

$$h a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h)^{-1} = k_1 \Delta b_0 \tilde{\partial}^{2p}(a_0) \Delta^{-1} \tilde{\partial}^{2p}(k_1)^{-1} = k_1 \tilde{\partial}^2(a_1 b_1) \tilde{\partial}^{2p}(k_1)^{-1}.$$

Par récurrence, nous obtenons $h a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h)^{-1} = k_i \tilde{\partial}^{2i}(a_i b_i) \tilde{\partial}^{2p}(k_i)^{-1}$ avec $k_i = k_{i+1} \tilde{\partial}^{2i+1}(a_i)$ pour $1 \leq i \leq m$. Nous trouvons alors $h = k_{m+1} h_0$, d'où $\|h\| \geq \|h_0\|$. L'hypothèse de minimalité de $\|h\|$ et la relation (5.1) impliquent $\|h\| = \|h_0\|$, donc $k_{m+1} = 1$ et $h = h_0$.

Montrons (ii). Pour $1 \leq i \leq m$, puisque h_i est un diviseur à gauche de h_{i-1} , $\Delta \wedge h_i$ est un diviseur à gauche de $\Delta \wedge h_{i-1}$. Nous montrons $\Delta \wedge h_i \neq \Delta \wedge h_{i-1}$ par récurrence sur i avec $1 \leq i \leq m$. Pour $i = 1$, nous devons montrer $\Delta \wedge h_1 \neq \Delta \wedge h_0$. Supposons au contraire $\Delta \wedge h_1 = \Delta \wedge h_0$. Soit $\Delta^0 g_1 \dots g_\ell$ la forme Δ -normale de h_0 . Posons

$$p_i = v_\Delta^-(g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(\partial(g_\ell) \dots \partial^{2i-1}(g_{\ell-i+1}))),$$

pour $0 \leq i \leq \ell$. Tout d'abord, $\Delta \wedge h_1 = \Delta \wedge h_0$ implique

$$p_0 \geq 1. \quad (5.2)$$

En effet, de $h_0 = h_1 \tilde{\partial}(a_0)$, nous déduisons $h_0 a_0 b_0 = h_1 \Delta b_0$, et, $h_1 \wedge \Delta$ étant g_1 , nous obtenons $g_1 \dots g_\ell a_0 b_0 = g_1(g_1 \setminus h_1) \Delta b_0$, soit $g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 = (g_1 \setminus h_1) \Delta b_0$, d'où $v_\Delta^-(g_2 \dots g_\ell a_0 b_0) \geq 1$. Ensuite, l'hypothèse de minimalité de $\|h_0\|$ implique

$$p_{\ell-1} \leq \ell - 1; \quad (5.3)$$

en effet, d'après le lemme 3.5, $\Delta^\ell \leq g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(\partial(g_\ell) \dots \partial^{2\ell-3}(g_2))$ impliquerait $\Delta^\ell \leq g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(g_2 \dots g_\ell)^{-1} \Delta^{\ell-1}$, puis, par simplification à droite, $\Delta \leq g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(g_2 \dots g_\ell)^{-1}$. Enfin, le lemme 1.8 donne

$$p_i \leq p_{i+1} \leq p_i + 1, \quad (5.4)$$

pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. Finalement, en rapprochant les conditions (5.2), (5.3) et (5.4), nous trouvons $p_{i_0} = p_{i_0+1}$ pour un certain $i_0 \leq \ell - 2$, et le lemme 5.4 implique $p_{i_0} = p_{i_0+1} = \dots = p_\ell$. Il vient alors $p_\ell \leq \ell - 1$, soit $v_\Delta^-(g_2 \dots g_\ell a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h_0)^{-1}) \leq -1$, puis, d'après le lemme 1.8, $v_\Delta^-(h_0 a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h_0)^{-1}) \leq 0$, ce qui est une contradiction;

en effet, d'après (i), h_0 est dans $H(a)$, donc vérifie $v_{\Delta}^-(h_0 a_0 b_0 \tilde{\partial}^{2p}(h_0)^{-1}) > 0$ par la définition 5.2. Pour $i > 1$, nous appliquons l'hypothèse de récurrence à $\phi_+(a)$, ce qui complète la démonstration de (ii).

Le point (i) et le lemme 5.3 impliquent que $\Delta \wedge h_0$ divise strictement Δ . Par définition, nous avons $h_m \neq 1$, donc $\Delta \wedge h_m \neq 1$. Finalement, du point (ii), nous déduisons

$$0 < \|\Delta \wedge h_m\| < \|\Delta \wedge h_{m-1}\| < \cdots < \|\Delta \wedge h_1\| < \|\Delta \wedge h_0\| < \|\Delta\|,$$

ce qui implique $m \leq \|\Delta\| - 2$. □

Proposition 5.6. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et que G est son groupe de fractions. Alors, pour tout a dans G de copuissance non sommitale, nous avons $v_{\Delta}^+(\phi_{-}^{\|\Delta\|-1}(a)) < v_{\Delta}^+(a)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 5.5 à l'élément a^{-1} , et d'utiliser ensuite le lemme 3.6. □

Corollaire 5.7. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit G son groupe de fractions. Les opérations de cyclage et de cyclage inverse permettent d'associer, à tout élément a de G , un élément de sa classe sommitale $C^{\text{som}}(a)$, en un nombre d'étapes élémentaires qui est polynomial en $\|a\|$.*

Nous ne connaissons pas de borne non exponentielle sur la complexité de l'algorithme complet, c'est-à-dire l'algorithme qui, à partir d'un élément a donné, détermine tous les éléments de sa classe sommitale $C^{\text{som}}(a)$. Cependant, nous conjecturons:

Conjecture 5.8. *Il existe un algorithme pour le problème de conjugaison dans tout petit groupe gaussien, qui utilise l'approche combinatoire décrite ici, et qui est polynomial en la norme des éléments.*

III. Le centre

Dans ce chapitre, nous décrivons complètement le centre des petits groupes gaussiens. Nous ramenons d'abord l'étude du centre des petits groupes gaussiens à celle du centre des petits monoïdes gaussiens. Puis, comme Brieskorn et Saito dans [12], nous étudions le quasicentre, défini comme l'ensemble des éléments du monoïde qui laissent l'ensemble des atomes stable par conjugaison. Pour cela, nous introduisons une notion de Δ local, et calculons un ensemble générateur minimal du quasicentre de tout petit monoïde gaussien. Le résultat obtenu est:

Proposition. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors les Δ locaux des atomes de M constituent un ensemble générateur minimal de son quasicentre.*

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 1, nous montrons comment ramener l'étude du centre des petits groupes gaussiens à celle du centre et du quasicentre des petits monoïdes gaussiens. Dans la section 2, nous définissons une notion de Δ local (à droite et à gauche) et établissons ses propriétés fondamentales. Le principal résultat du chapitre est démontré dans la section 3. Enfin, dans la section 4, nous donnons une nouvelle caractérisation du Δ local, qui nous permet d'obtenir que ses versions gauche et droite coïncident, et, dans la section 5, nous montrons que le quasicentre de tout petit monoïde gaussien est un monoïde abélien libre.

1. Définition du quasicentre

Dans [12], Brieskorn et Saito étudient le centre des groupes d'Artin sphériques. Pour cela, ils considèrent le quasicentre des monoïdes d'Artin sphériques irréductibles, et montrent qu'il est le sous-monoïde engendré par l'élément Δ . Nous allons également examiner le quasicentre, même si les arguments originaux de Brieskorn et Saito ne s'appliquent plus dans le cadre plus général des petits groupes gaussiens.

Définition 1.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit A l'ensemble de ses atomes et G son groupe de fractions. Le *quasicentre* de M (*resp.* le quasicalcentralisateur de A dans G) est le sous-monoïde $\{b \in M ; Ab = bA\}$ (*resp.* le sous-groupe $\{b \in G ; Ab = bA\}$).

L'étude du centre des petits groupes gaussiens se ramène à l'étude du centre et du quasicentre des petits monoïdes gaussiens. En effet, nous avons:

Lemme 1.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit A l'ensemble de ses atomes et G son groupe de fractions. Alors*

- (i) *le quasicalcentralisateur de A dans G est le groupe de fractions du quasicentre de M ;*
- (ii) *le centre de G est le groupe de fractions du centre de M .*

Démonstration. Soit c dans G et $p = v_{\Delta}^{-}(c)$: nous avons $c = \Delta^p c'$ pour un certain c' dans M (voir la section II.1).

(i) Supposons c dans le quasicalcentralisateur de A dans G . L'élément $\Delta^{|p|}$ de M étant quasicentral d'après la proposition I.2.5, c' l'est aussi. Tout élément dans le quasicalcentralisateur de A dans G est alors le quotient de deux éléments quasicentraux de M .

(ii) Il existe des entiers q, r vérifiant $p = qe + r$ et $r \geq 0$, où e désigne l'exposant de M (voir la définition I.2.7). Supposons c central. L'élément $\Delta^{|q|e}$ de M étant central, $\Delta^r c'$ l'est aussi. Tout élément central de G est alors le quotient de deux éléments centraux de M . $\square$

Le résultat suivant est facile mais essentiel. Nous l'utiliserons sans systématiquement y faire référence.

Lemme 1.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout élément a et tout élément quasicentral b de M , il y a équivalence entre:*

- (i) *a divise b (voir la définition I.1.5);*
- (ii) *a est un diviseur à gauche de b ;*
- (iii) *a est un diviseur à droite de b .*

Démonstration. Supposons (i). Alors il existe deux éléments c, d de M vérifiant $b = cad$. Puisque b est quasicentral, nous avons $cb = bc'$ pour un certain c' dans M . Nous trouvons $cb = bc' = cadc'$, puis, par simplification à gauche, $b = adc'$, ce qui implique (ii). Symétriquement, (i) implique (iii). Le fait que (ii) (*resp.* (iii)) implique (i) est trivial. $\square$

2. Une notion de Δ local

Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Nous allons associer à chaque élément a de M un élément quasical central distingué Δ_a se comportant comme une sorte d'élément de Garside local. Le résultat principal est que la famille de tous les éléments Δ_x pour x atome engendre le quasical centre de M .

Notation. Supposons que M est un monoïde gaussien. Pour $X, Y \subseteq M$, rappelons que $Y \setminus X$ (*resp.* Y/X) désigne l'ensemble des éléments $b \setminus a$ (*resp.* b/a) de M pour a dans X , b dans Y . Nous écrivons $Y \setminus a$ pour $Y \setminus \{a\}$ et $b \setminus X$ pour $\{b\} \setminus X$.

Lemme 2.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout élément a de M , nous avons $M \setminus a = S^q \setminus a$ pour un certain entier q (dépendant de a).*

Démonstration. Soit $a \in M$. Alors a appartient à S^p pour un certain entier p : il suffit de prendre $p = v_{\Delta}^+(a)$ (voir la définition II.1.3). Maintenant, d'après le lemme I.1.9, nous avons $M \setminus S^p = S^p$. En particulier, nous avons $M \setminus a \subseteq S^p$, dont nous déduisons

$$S \setminus a \subseteq S^2 \setminus a \subseteq S^3 \setminus a \subseteq \dots \subseteq S^p.$$

Puisque S est fini, il existe $q \leq \text{card}(S^p)$ vérifiant $S^q \setminus a = S^{q+1} \setminus a$. Montrons par récurrence sur j que, pour tout $j \geq 1$, nous avons $S^q \setminus a = S^{q+j} \setminus a$. Pour $j = 1$, c'est la définition de q . Supposons $j > 1$. Soit $b \in S^{q+j-1}$ et $c \in S$. Par hypothèse de récurrence, il existe d dans S^q vérifiant $d \setminus a = b \setminus a$. Utilisant l'identité (1.2) du lemme I.1.8, nous trouvons $(bc) \setminus a = c \setminus (b \setminus a) = c \setminus (d \setminus a) = (dc) \setminus a$, or $(dc) \setminus a$ appartient à $S^{q+1} \setminus a$, c'est-à-dire à $S^q \setminus a$, ce qui conclut la récurrence. Finalement, nous obtenons $S^q \setminus a = M \setminus a$. $\square$

Définition 2.2. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Pour tout élément a de M , nous posons

$$\Delta_a = \bigvee \{b \setminus a ; b \in M\}.$$

D'après le lemme 2.1, l'élément Δ_a est bien défini et calculable de façon effective pour tout a dans M . Symétriquement, nous définissons $\tilde{\Delta}_a = \bigvee \{a/b ; b \in M\}$. Remarquons que, pour tout a dans M , l'égalité $1 \setminus a = a$ (*resp.* $a/1 = a$) implique que a est un diviseur à gauche de Δ_a (*resp.* un diviseur à droite de $\tilde{\Delta}_a$), et que, ayant $b \setminus 1 = 1 = 1/b$ pour tout b de M , nous obtenons $\Delta_1 = 1 = \tilde{\Delta}_1$.

Par exemple, dans le petit monoïde gaussien $M_0^{(2,2)}$ admettant la présentation $\langle x, y : xy^2xyxy^2x = yxy^2xy \rangle$ (voir la conclusion), nous calculons $S_0 \setminus x \subsetneq S_0^2 \setminus x = M_0^{(2,2)} \setminus x$ et $S_0 \setminus y \subsetneq S_0^2 \setminus y = M_0^{(2,2)} \setminus y$, où S_0 désigne l'ensemble des éléments simples de $M_0^{(2,2)}$. Les ensembles considérés sont représentés sur la figure 1. Nous trouvons $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$. Cet exemple montre que, dans un petit monoïde gaussien M , les ensembles $M \setminus x$ avec x atome ne couvrent pas nécessairement l'ensemble des éléments primitifs de M (comme c'est le cas par exemple, nous le verrons au chapitre V, dans les monoïdes de tresses d'Artin et de Birman-Ko-Lee).

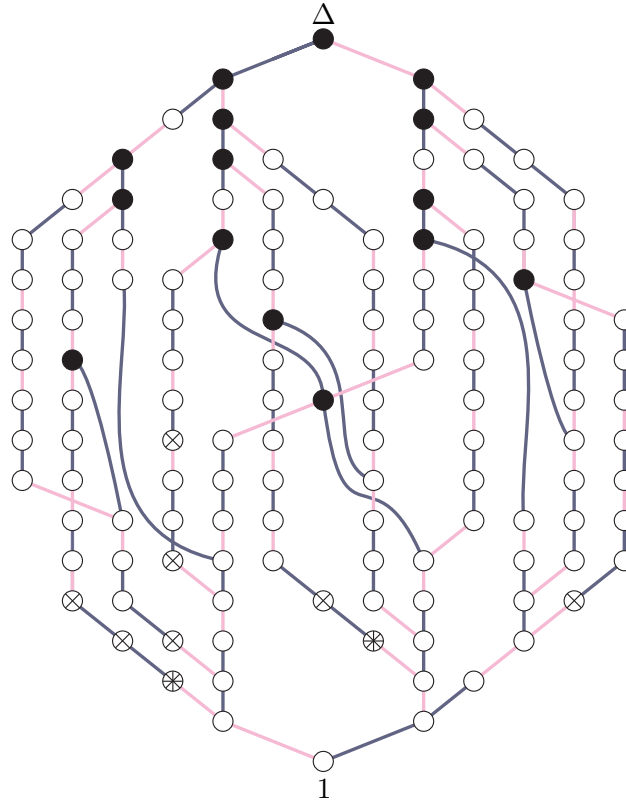


Figure 1. Le treillis des simples du monoïde $M_0^{(2,2)}$ présenté par $\langle x, y : xyxyxyxyx = yxyxyxy \rangle$. Les sommets blancs représentent les éléments primitifs à droite de $M_0^{(2,2)}$, tandis que les sommets noirs représentent les éléments simples non primitifs de $M_0^{(2,2)}$. Les éléments de $M_0^{(2,2)} \setminus x$ (*resp.* de $M_0^{(2,2)} \setminus y$) sont ceux représentés par les sommets blancs non barrés d'une croix 'x' (*resp.* non barrés d'une croix '+').

Nous allons montrer:

Proposition 2.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout a dans M , l'élément Δ_a est quasicentral. Plus précisément, l'application $a \mapsto \Delta_a$ est une surjection de M sur le quasicentre de M .*

La preuve de ce résultat repose sur plusieurs énoncés préliminaires.

Lemme 2.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors tout élément quasicentral a dans M vérifie $\Delta_a = a = \tilde{\Delta}_a$.*

Démonstration. Soit $b \in M$. Puisque a est quasicentral, nous avons $ba = ab'$ pour un certain b' dans M . Par conséquent, ba est un multiple à droite de $a \vee b$ —qui est $b(b \setminus a)$ —et, par simplification à gauche, a est un multiple à droite de $b \setminus a$. Ainsi Δ_a —qui est le ppcm à droite de tous les éléments $b \setminus a$ —est un diviseur à gauche de a . Maintenant, a étant un diviseur à gauche de Δ_a , simplifiabilité et conicité impliquent $\Delta_a = a$. L'égalité $\tilde{\Delta}_a = a$ est obtenue symétriquement. $\square$

Lemme 2.5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout élément a de M , il y a équivalence entre:*

- (i) Δ_a est a ;
- (ii) pour tout b dans M , a est un diviseur à gauche de ba .

Démonstration. Supposons (i). Soit $b \in M$. De $\bigvee(M \setminus a) = a$, nous déduisons que $b \setminus a$ est un diviseur à gauche de a . Par conséquent, $b(b \setminus a)$ est un diviseur à gauche de ba . Maintenant, par définition, $b(b \setminus a)$ est $a(a \setminus b)$, ce qui implique (ii). Réciproquement, supposons (ii). Alors, pour tout b dans M , $a \vee b$ —qui est $b(b \setminus a)$ par définition—est un diviseur à gauche de ba , et donc, par simplification à gauche, $b \setminus a$ est un diviseur à gauche de a . Cela implique que $\bigvee(M \setminus a)$ est un diviseur à gauche de a , et, puisque a est un diviseur à gauche de Δ_a , simplifiabilité et conicité entraînent (i). $\square$

Lemme 2.6. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout a dans M , $\Delta_a = a$ est équivalent à $\tilde{\Delta}_a = a$.*

Démonstration. Soit G le groupe de fractions de M . Nous considérons l'endomorphisme injectif $h_a : b \mapsto a^{-1}ba$ de G . Supposons $\Delta_a = a$. Alors, d'après le lemme 2.5, pour tout b dans M , a est un diviseur à gauche de ba : nous en déduisons $h_a(M) \subseteq M$. Soit S l'ensemble des simples et e l'exposant de M (voir la définition I.2.7). D'après la proposition I.2.5, pour tout c dans S^e , il existe un élément d de S^e vérifiant $\Delta^e = cd$. Nous obtenons $h_a(\Delta^e) = h_a(c)h_a(d)$, puis, Δ^e étant central, $\Delta^e = h_a(c)h_a(d)$, ce qui implique $h_a(c) \in S^e$ (et $h_a(d) \in S^e$).

Puisque, par hypothèse, S est fini, l'endomorphisme injectif h_a induit un automorphisme de S^e . En particulier, $h_a(M)$ contient les atomes de M , et nous obtenons $h_a(M) = M$. L'endomorphisme h_a est alors un automorphisme de M . Par conséquent, pour tout b dans M , a est un diviseur à droite de ab , et, d'après la contrepartie gauche du lemme 2.5, nous en déduisons $\tilde{\Delta}_a = a$. L'implication inverse est obtenue symétriquement. $\square$

Lemme 2.7. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors tout élément a de M vérifiant $\Delta_a = a$ est quasicentral.*

Démonstration. Soit x un atome de M . D'après le lemme 2.5, l'hypothèse $\Delta_a = a$ implique qu'il existe d dans M vérifiant $xa = ad$. Par simplifiabilité à droite, nous avons $d \neq 1$, donc il existe un entier strictement positif n et des atomes $z_1, \dots, z_n$ vérifiant $d = z_1 \dots z_n$. Le lemme 2.6 implique $\tilde{\Delta}_a = a$, et, d'après la contrepartie gauche du lemme 2.5, pour tout atome z_i avec $1 \leq i \leq n$, il existe un élément c_i de M vérifiant $az_i = c_i a$. Par simplifiabilité à gauche, nous avons $c_i \neq 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous obtenons

$$xa = ad = az_1 \dots z_n = c_1 \dots c_n a,$$

d'où, par simplification à droite, $x = c_1 \dots c_n$. Puisque x est un atome, nous devons avoir $n = 1$, *i.e.*, d est un atome. Ainsi, il existe une application f_a des atomes de M dans eux-mêmes vérifiant $xa = af_a(x)$ pour chaque atome x . Par simplifiabilité, f_a est injective, donc surjective : a est quasicentral par définition. $\square$

Démonstration de la proposition 2.3. Montrons que $a \mapsto \Delta_a$ est idempotente. D'après le lemme 2.1, il existe un entier n vérifiant $M \setminus a = S^n \setminus a$ et $M \setminus \Delta_a = S^n \setminus \Delta_a$. Soit $S^n = \{q_1, \dots, q_r\}$. En utilisant le lemme I.1.8, nous trouvons

$$\begin{aligned} \Delta_{\Delta_a} &= (q_1 \setminus ((q_1 \setminus a) \vee \dots \vee (q_r \setminus a))) \vee \dots \vee (q_r \setminus ((q_1 \setminus a) \vee \dots \vee (q_r \setminus a))) \\ &= ((q_1 q_1 \setminus a) \vee \dots \vee (q_r q_1 \setminus a)) \vee \dots \vee ((q_1 q_r \setminus a) \vee \dots \vee (q_r q_r \setminus a)). \end{aligned}$$

Maintenant, un des éléments q_i étant 1, nous obtenons $\Delta_{\Delta_a} = \Delta_a \vee \bigvee (S' \setminus a)$, où S' est un certain sous-ensemble de S^{2n} . Nous en déduisons $\Delta_{\Delta_a} = \Delta_a$ pour tout a dans M . Ainsi, d'après le lemme 2.7, Δ_a est quasicentral pour tout a dans M . $\square$

3. Générateurs minimaux du quasicentre

Nous allons maintenant montrer:

Proposition 3.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit A l'ensemble de ses atomes. Alors le quasicentre de M est engendré par $\{\Delta_x ; x \in A\}$.*

Le lemme suivant est un résultat technique simple qui est nécessaire à la preuve et que nous utiliserons souvent dans la suite.

Lemme 3.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout élément a et tout élément quasiceutral b de M , le fait que a divise b implique que Δ_a et $\tilde{\Delta}_a$ divisent b .*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un élément d de M vérifiant $b = ad$. Puisque b est quasiceutral, pour tout c dans M , il existe un élément c' de M vérifiant $cb = adc'$. En particulier, pour tout c dans M , $c(c \setminus a)$ —qui est $c \vee a$ —est un diviseur à gauche de cb , donc, par simplification à gauche, $c \setminus a$ est un diviseur à gauche de b . Par conséquent, Δ_a divise b par définition. $\square$

Démonstration de la proposition 3.1. Soit b un élément quasiceutral de M . Nous montrons par récurrence sur $\|b\|$ qu'il existe un entier n et des atomes $x_1, \dots, x_n$ de M vérifiant $b = \Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n}$. Pour $\|b\| = 0$, n est 0. Supposons $\|b\| > 0$. Alors il existe un atome x et un élément b' de M vérifiant $b = xb'$. D'après le lemme 3.2, nous avons $b = \Delta_x b''$ pour un certain b'' dans M avec $\|b\| > \|b''\|$. D'après la proposition 2.3, l'élément Δ_x est quasiceutral, donc b'' l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, il existe un entier m et des atomes $y_1, \dots, y_m$ de M de vérifiant $b'' = \Delta_{y_1} \dots \Delta_{y_m}$. Nous obtenons $b = \Delta_x \Delta_{y_1} \dots \Delta_{y_m}$. $\square$

Par exemple, dans le cas du petit monoïde gaussien $M_0^{(2,2)}$ de la section 2 (voir aussi la conclusion), la proposition 3.1 implique que le quasiceutral est engendré par Δ . Puisque son exposant est 1, le centre de $M_0^{(2,2)}$ coïncide avec son quasiceutral.

Nous voulons à présent montrer que l'ensemble générateur $\{\Delta_x ; x \in A\}$ est minimal.

Lemme 3.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour x, y atomes de M , nous avons soit $\Delta_x = \Delta_y$ soit $\Delta_x \wedge \Delta_y = 1$.*

Démonstration. Nous prouvons d'abord que, pour x, y atomes et b élément de M , $\Delta_x = \Delta_y b$ implique $b = 1$. Nous avons $\Delta_x = xd$ pour un certain d dans M . En utilisant le lemme I.1.7, nous obtenons

$$\Delta_x = xd = \Delta_y b = (x \wedge \Delta_y)(d \tilde{\vee} b).$$

Supposons $x \wedge \Delta_y = 1$. Alors nous trouvons $\Delta_x = xd = \Delta_y b = d \tilde{\vee} b = (b/d)d$, d'où, par simplification à droite, $x = b/d$. Par conséquent, x divise $\tilde{\vee}(b/M)$, qui, par définition, est $\tilde{\Delta}_b$. Maintenant, par hypothèse, b est quasiceutral, et le lemme 2.4 implique $\tilde{\Delta}_b = b$. D'après le lemme 3.2, Δ_x divise b , ce qui, par simplifiabilité et conicité, implique $\Delta_y = 1$, contradiction.

Supposons $x \wedge \Delta_y \neq 1$. Alors, par atomicité, x divise Δ_y , et, d'après le lemme 3.2, Δ_x divise Δ_y , ce qui, par simplifiabilité et conicité, implique $b = 1$.

Maintenant, soit x, y des atomes de M . Supposons $\Delta_x \wedge \Delta_y \neq 1$. Alors il existe un atome z de M diviseur à gauche de Δ_x et de Δ_y . D'après le lemme 3.2, Δ_z divise Δ_x et Δ_y , ce qui, d'après le résultat ci-dessus, implique $\Delta_x = \Delta_z = \Delta_y$. $\square$

Proposition 3.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit A l'ensemble de ses atomes. Alors $\{\Delta_x ; x \in A\}$ est l'ensemble générateur minimal du quasicentre de M .*

Démonstration. D'après la proposition 3.1, l'ensemble $\{\Delta_x ; x \in A\}$ engendre le quasicentre de M . Soit x un atome et a, b des éléments quasicentraux de M . Nous devons simplement montrer que $\Delta_x = ab$ implique soit $a = 1$ soit $b = 1$. Supposons $a \neq 1$. Alors nous avons $a = ya'$ pour un certain atome y et un certain élément a' de M . Puisque a est quasicentral, d'après le lemme 3.2, Δ_y est un diviseur à gauche de a , et, par conséquent, Δ_y est un diviseur à gauche de Δ_x . Nous avons $\Delta_y \neq 1$, d'où, d'après le lemme 3.3, $\Delta_y = \Delta_x$. Simplifiabilité et conicité impliquent alors $b = 1$. $\square$

4. Symétrie du Δ local

Nous donnons maintenant une nouvelle caractérisation de la fonction $a \mapsto \Delta_a$. Nous avons vu que tout élément Δ_a est quasicentral, et que, par construction, Δ_a est un multiple à droite de a . Nous montrons que Δ_a est minimal pour cette propriété. Ce nouveau point de vue nous permettra en particulier de montrer que Δ_a et $\tilde{\Delta}_a$ coïncident quel que soit a .

Lemme 4.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour a, b éléments quasicentraux de M , les éléments $a \wedge b$ et $a \tilde{\wedge} b$ sont quasicentraux.*

Démonstration. D'après le lemme 3.2, l'élément $\Delta_{a \wedge b}$ divise a et b . Par conséquent, $\Delta_{a \wedge b}$ est un diviseur à gauche de $a \wedge b$. Maintenant, $a \wedge b$ étant un diviseur à gauche de $\Delta_{a \wedge b}$, nous déduisons $\Delta_{a \wedge b} = a \wedge b$ par simplifiabilité et conicité. D'après le lemme 2.7, $a \wedge b$ est donc quasicentral. Symétriquement, $a \tilde{\wedge} b$ est quasicentral. $\square$

Proposition 4.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit QZ son quasicentre. Alors, pour tout a dans M , nous avons*

$$\Delta_a = \bigwedge (QZ \cap aM) \quad \text{et} \quad \tilde{\Delta}_a = \widetilde{\bigwedge} (QZ \cap Ma).$$

Démonstration. Soit $a \in M$. Nous avons que Δ_a est un multiple à droite de a , et que, d'après la proposition 2.3, Δ_a est quasicentral. Par conséquent, Δ_a appartient à $QZ \cap aM$ et $\bigwedge(QZ \cap aM)$ est donc un diviseur de Δ_a . Maintenant, puisque $QZ \cap aM$ est non vide, $\bigwedge(QZ \cap aM)$ est multiple à droite de a . De plus, d'après le lemme 4.1, $\bigwedge(QZ \cap aM)$ est quasicentral. Ainsi, d'après le lemme 3.2, Δ_a divise $\bigwedge(QZ \cap aM)$. Simplifiabilité et conicité permettent de conclure. L'égalité $\tilde{\Delta}_a = \bigwedge(QZ \cap Ma)$ est obtenue symétriquement. $\square$

Corollaire 4.3. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout a dans M , nous avons $\Delta_a = \tilde{\Delta}_a$.*

Démonstration. Soit $a \in M$. D'après le lemme 1.3, nous avons

$$QZ \cap aM = QZ \cap MaM = QZ \cap Ma.$$

En utilisant la proposition 4.2, nous déduisons $\Delta_a = \bigwedge(QZ \cap MaM)$ et $\tilde{\Delta}_a = \bigwedge(QZ \cap MaM)$. Maintenant, Δ_a appartient à $QZ \cap MaM$, et, par conséquent, $\tilde{\Delta}_a$ est un diviseur à droite de Δ_a . Symétriquement, Δ_a est un diviseur à gauche de $\tilde{\Delta}_a$. Simplifiabilité et conicité permettent de conclure. $\square$

La symétrie du Δ local sera utilisée dans la section IV.2.

5. Structure de treillis du quasicentre

Nous démontrons que le quasicentre de tout petit monoïde gaussien est un sous-monoïde abélien libre.

Lemme 5.1. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour a, b éléments de M , nous avons $\Delta_a \vee \Delta_b = \Delta_{a \vee b}$.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que, pour a, b éléments quasicentraux de M , l'élément $a \vee b$ est quasicentral. Il existe un entier positif n tel que a, b appartiennent à S^n —il suffit de prendre $n = \max(v_\Delta^+(a), v_\Delta^+(b))$ —et, d'après la proposition I.2.5, il existe des éléments a', b' dans S^n vérifiant $\Delta^n = aa' = bb'$. Puisque Δ^n est quasicentral, a' et b' sont quasicentraux. Maintenant, le lemme I.1.7 nous donne $\Delta^n = aa' = bb' = (a \vee b)(a' \tilde{\wedge} b')$. Puisque, d'après le lemme 4.1, $a' \tilde{\wedge} b'$ est quasicentral, nous en déduisons que $a \vee b$ est quasicentral.

Puisque $a \vee b$ divise $\Delta_{a \vee b}$, a divise $\Delta_{a \vee b}$. D'après la proposition 2.3 et le lemme 3.2, Δ_a divise $\Delta_{a \vee b}$, et, symétriquement, Δ_b divise $\Delta_{a \vee b}$. Ainsi, $\Delta_a \vee \Delta_b$ divise $\Delta_{a \vee b}$, et l'égalité découle du résultat ci-dessus et de la proposition 4.2. $\square$

Proposition 5.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors son quasicentre QZ est un monoïde abélien libre, et la fonction $a \mapsto \Delta_a$ est un homomorphisme de demi-treillis surjectif de $(M, \vee)$ sur $(QZ, \vee)$.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des atomes de M . D'après la proposition 3.4, QZ est le sous-monoïde engendré par $\{\Delta_x ; x \in A\}$. Pour montrer que QZ est abélien libre, il suffit de montrer que, pour x, y atomes de A vérifiant $\Delta_x \neq \Delta_y$, nous avons $\Delta_x \setminus \Delta_y = \Delta_y$. Supposons $\Delta_x \neq \Delta_y$. Alors le lemme 3.3 implique $\Delta_x \setminus \Delta_y \neq 1$. Puisque Δ_{Δ_y} est Δ_y (voir la démonstration de la proposition 2.3), $\Delta_x \setminus \Delta_y$ divise Δ_y . Maintenant, d'après le lemme 5.1, l'élément $\Delta_x \setminus \Delta_y$ est quasicentral, et la proposition 3.4 implique $\Delta_x \setminus \Delta_y = \Delta_y$. Le reste de l'assertion découle du lemme 5.1. $\square$

Remarque. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit QZ son quasicentre. La fonction $a \mapsto \Delta_a$ n'est en général pas un homomorphisme de demi-treillis de $(M, \wedge)$ sur $(QZ, \wedge)$. En effet, pour a, b dans M , $\Delta_{a \wedge b}$ divise $\Delta_a \wedge \Delta_b$ (puisque $a \wedge b$ divise Δ_a et Δ_b , $a \wedge b$ divise $\Delta_a \wedge \Delta_b$, qui est quasicentral d'après le lemme 4.1, et, d'après le lemme 3.2, $\Delta_{a \wedge b}$ divise $\Delta_a \wedge \Delta_b$), mais il n'y a pas égalité en général. Nous verrons dans la section IV.2 une condition nécessaire et suffisante pour cela.

IV. Décomposition

Dans le chapitre III, nous avons obtenu une description complète du centre de tout petit groupe gaussien. L'objet de ce chapitre est d'établir le résultat:

Proposition. *Tout petit groupe gaussien est un itéré de produits croisés de petits groupes gaussiens dont le centre est monogène.*

Ce résultat étend naturellement le résultat de décomposition établi par Brieskorn et Saito [12] et par Deligne [26] dans le cas des groupes d'Artin sphériques. Une différence majeure est que le produit n'est plus un produit direct, mais une généralisation de produit semi-direct, appelé produit croisé.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans la section 1, nous définissons un *produit croisé* qui est une généralisation de produit semi-direct, et nous montrons que tout produit croisé de petits monoïdes gaussiens est un petit monoïde gaussien. La notion de petit monoïde gaussien Δ -pur est développée dans la section 2. Nous établissons alors le résultat de décomposition annoncé. Dans la section 3, nous montrons que la notion de Δ -pureté définie pour les petits monoïdes gaussiens dans la section 2 est compatible avec celle d'irréductibilité des monoïdes d'Artin sphériques. Nous étudions un exemple de décomposition d'un petit monoïde gaussien, qui nous amène à discuter de la question des sous-monoïdes paraboliques d'un petit monoïde gaussien.

1. Produit croisé de petits monoïdes gaussiens

Les groupes gaussiens étant des groupes de fractions, nous définissons notre produit pour les monoïdes d'abord.

Définition 1.1. Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et coniques avec un nombre fini d'atomes. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$. Une *famille de fonctions vérifiant les identités de résidu* est définie comme étant une famille $\vec{\Theta}$ de fonctions $\Theta_{ij} : M_i \times M_j \rightarrow M_j$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ telles que, pour tout a dans M_i , la restriction $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ de Θ_{ij} à $\{a\} \times M_j$ soit une bijection de M_j , et vérifiant

$$\Theta_{ij}(ab, c) = \Theta_{ij}(b, \Theta_{ij}(a, c)), \quad (1.1)$$

$$\Theta_{ij}(a, cd) = \Theta_{ij}(a, c) \Theta_{ji}(\Theta_{ji}(c, a), d), \quad (1.2)$$

$$\Theta_{jk}(\Theta_{ij}(a, c), \Theta_{ik}(a, e)) = \Theta_{ik}(\Theta_{ji}(c, a), \Theta_{jk}(c, e)), \quad (1.3)$$

pour a, b dans M_i , c, d dans M_j , e dans M_k avec $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$. Le *produit croisé* $\bigtimes_i^{\vec{\Theta}} M_i$ est défini comme le quotient du produit libre des M_i par la congruence engendrée par tous les couples $(x\Theta_{ij}(x, y), y\Theta_{ji}(y, x))$ avec $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $1 \leq i < j \leq n$. Pour $n = 2$, nous notons le produit bicroisé $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$.

La notion de produit croisé apparaît comme une version adaptée aux monoïdes du produit croisé de groupes défini dans [33] et [50].

Exemple 1.2. Nous dirons qu'une famille $\vec{\Theta}$ est *triviale* si, pour $1 \leq i, j \leq n$, pour tout a dans M_i , la restriction de Θ_{ij} à $\{a\} \times M_j$ est l'identité de M_j : $\vec{\Theta}$ est alors une famille vérifiant les identités de résidu, et le produit croisé $\bigtimes_i^{\vec{\Theta}} M_i$ est le produit direct $M_1 \times \dots \times M_n$.

Lemme 1.3. Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et coniques avec un nombre fini d'atomes. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$. Alors, pour toute famille $\vec{\Theta}$ de fonctions vérifiant les identités de résidu, pour $1 \leq i \neq j \leq n$, pour tout a dans M_i , la restriction de Θ_{ij} à $\{a\} \times A_j$ est une permutation de A_j .

Démonstration. Tout d'abord, en prenant $b = 1$ dans (1.1) et en utilisant la surjectivité de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$, nous trouvons

$$\Theta_{ij}(1, d) = d, \quad (1.4)$$

pour tout d dans M_j . Ensuite, en prenant $c = d = 1$ dans (1.2) et en utilisant (1.4) et la simplifiabilité de M_j , nous obtenons

$$\Theta_{ij}(a, 1) = 1, \quad (1.5)$$

pour tout a dans M_i . Maintenant, la restriction de Θ_{ij} à $\{a\} \times M_j$ est une surjection sur M_j : en particulier, pour tout atome z de A_j , il existe c dans M_j vérifiant $\Theta_{ij}(a, c) = z$. Nous avons $c \in A_j$. En effet, (1.5) implique $c \neq 1$, donc nous avons $c = yc'$ avec $y \in A_j$ et $c' \in M_j$. En appliquant (1.2), nous trouvons $\Theta_{ij}(a, y)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, a), c') = z$. L'injectivité de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ et (1.5) impliquent $\Theta_{ij}(a, y) \neq 1$. Puisque z est un atome, nous obtenons $\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, a), c') = 1$, et, en utilisant l'injectivité de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ et (1.5) à nouveau, nous trouvons $c' = 1$. $\square$

Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et coniques avec un nombre fini d'atomes. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$. Alors toute famille $\tilde{\Theta}$ vérifiant les identités de résidu est déterminée par les permutations induites $\Theta(x, \cdot)$ de A_j pour x dans A_i et $1 \leq i \neq j \leq n$ (voir le lemme 1.3). Mais, réciproquement, toute famille de permutations d'atomes ne se prolonge pas nécessairement en une famille vérifiant les identités de résidu. Par exemple, considérons les petits monoïdes gaussiens $M_0 = \langle x, y : xyx = y^2 \rangle$ et $\mathbf{N} = \langle z : \quad \rangle$ (voir les exemples V.1 et V.20). La famille de permutations $\Theta(x, \cdot) = \Theta(y, \cdot) = \begin{pmatrix} z \\ x \ y \end{pmatrix}$ et $\Theta(z, \cdot) = \begin{pmatrix} x \ y \\ y \ x \end{pmatrix}$ ne se prolonge pas en une famille vérifiant les identités de résidu. En effet, en utilisant (1.2) par exemple, nous trouverions $\Theta(z, y^2) = x^2$ et $\Theta(z, xyx) = yxy$, ce qui contredit $x^2 \neq yxy$ dans M_0 (voir également les exemples 1.5, 1.9, 1.11 et 1.15). Le seul produit bicroisé possible ici est le produit direct, voir la figure 3.

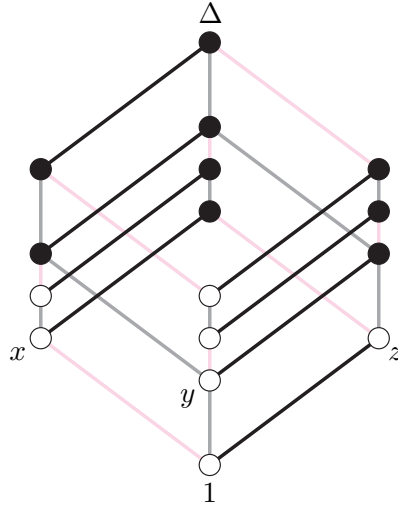


Figure 3. Le graphe caractéristique du monoïde $\langle x, y : xyx = y^2 \rangle \times \langle z : \quad \rangle$.

Définition 1.4. Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et coniques avec un nombre fini d'atomes. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$, et A l'union disjointe $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$. Une *famille de permutations vérifiant les identités de résidu*

est une famille $\vec{\theta} = (\theta_x)_{x \in A}$ telle que, pour tout x de A , θ_x est une permutation de A qui préserve globalement chaque A_j pour $1 \leq j \leq n$, et telle que la famille des fonctions obtenues par prolongement des fonctions θ_x selon (1.1) et (1.2) est une famille de fonctions vérifiant les identités de résidu. Le produit croisé correspondant est alors désigné par $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$. Ce dernier ne dépend pas de la valeur des $\theta_x(y)$ pour x, y dans A_j et $1 \leq j \leq n$, et θ_x peut être systématiquement définie comme l'identité de A_j pour tout x dans A_j et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 1.5. Considérons les petits monoïdes gaussiens $M_1 = \langle x_1, x_2, x_3 : x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1 \rangle$ et $M_2 = \langle y, z : y^3 = z^3 \rangle$. Soit $\vec{\theta}$ la famille de permutations définie par

$$\theta_{x_1} = \theta_{x_2} = \theta_{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 & z & y \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \theta_y = \theta_z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_3 & x_1 & x_2 & y & z \end{pmatrix}.$$

Alors $\vec{\theta}$ est une famille vérifiant les identités de résidu, et le monoïde $M_1 \boxtimes_{\vec{\theta}} M_2$ admet la présentation

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2, x_3, y, z : x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1, y^3 = z^3, x_1 z = y x_3, \\ x_1 y = z x_3, x_2 z = y x_1, x_2 y = z x_1, x_3 y = y x_2, x_3 z = z x_2 \rangle. \end{aligned}$$

Voir aussi l'exemple 1.15.

Plusieurs résultats intermédiaires sont nécessaires à la démonstration du fait que tout produit croisé de petits monoïdes gaussiens est un petit monoïde gaussien.

Lemme 1.6. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et atomiques avec un nombre fini d'atomes. Alors, pour toute famille $\vec{\Theta}$ de fonctions vérifiant les identités de résidu, pour $1 \leq i \neq j \leq n$, pour tout a dans M_i et tout b dans M_j , nous avons $\|\Theta_{ij}(a, b)\| = \|b\|$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur $\|b\|$ que, pour tout a dans M_i et tout b dans M_j , nous avons $\|\Theta_{ij}(a, b)\| \geq \|b\|$. Pour $\|b\| = 0$, le résultat vient de (1.5). Supposons $\|b\| > 0$. Alors il existe un atome x et un élément d de M_j vérifiant $b = xd$ et $\|b\| = 1 + \|d\|$ (voir la définition I.1.3). Le lemme 1.3 implique $\|\Theta_{ij}(a, x)\| = 1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\Theta_{ij}(a, b)\| &= \|\Theta_{ij}(a, xd)\| \stackrel{(1.2)}{=} \|\Theta_{ij}(a, x) \Theta_{ij}(\Theta_{ji}(x, a), d)\| \\ &\geq \|\Theta_{ij}(a, x)\| + \|\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(x, a), d)\| \\ &= 1 + \|\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(x, a), d)\| \\ &\stackrel{(\text{HR})}{\geq} 1 + \|d\| = \|b\|, \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

A présent, pour tout a dans M_i avec $1 \leq i \leq n$, nous notons $\tilde{\Theta}_{ij}(a, \cdot)$ la fonction réciproque de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$. Par définition, nous avons

$$\Theta_{ij}(a, \tilde{\Theta}_{ij}(a, b)) = b = \tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, b)), \quad (1.6)$$

pour a dans M_i , b dans M_j et $1 \leq i \neq j \leq n$. De (1.6), (1.1) et (1.2), nous déduisons les identités

$$\tilde{\Theta}_{ij}(ab, c) = \tilde{\Theta}_{ij}(a, \tilde{\Theta}_{ij}(b, c)), \quad (1.7)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}(a, cd) = \tilde{\Theta}_{ij}(a, c) \tilde{\Theta}_{ij}(\Theta_{ji}(\tilde{\Theta}_{ij}(a, c), a), d), \quad (1.8)$$

pour a, b dans M_i , c, d dans M_j et $1 \leq i \neq j \leq n$. Une récurrence analogue à la précédente donne $\|\tilde{\Theta}_{ij}(a, c)\| \geq \|c\|$ pour tout a dans M_i , tout c dans M_j et $1 \leq i \neq j \leq n$. Nous obtenons alors

$$\|\Theta_{ij}(a, b)\| \geq \|b\| = \|\tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, b))\| \geq \|\Theta_{ij}(a, b)\|,$$

ce qui implique $\|\Theta_{ij}(a, b)\| = \|b\|$. $\square$

Lemme 1.7. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et atomiques avec un nombre fini d’atomes. Alors, pour toute famille $\tilde{\Theta}$ de fonctions vérifiant les identités de résidu, pour $1 \leq i \neq j \leq n$, pour tout a dans M_i et tout b dans M_j , nous avons $a\Theta_{ij}(a, b) = b\Theta_{ji}(b, a)$.*

Démonstration. Faisons une récurrence sur $\|a\|\|b\|$. Pour $\|a\|\|b\| = 0$, le résultat découle de (1.4) et (1.5). Supposons $\|a\|\|b\| > 0$. Nous avons $a = xc$ et $b = yd$ avec x atome et c élément de M_i , y atome et d élément de M_j . En utilisant le lemme 1.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} a\Theta_{ij}(a, b) &= xc\Theta_{ij}(xc, yd) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} xc\Theta_{ij}(c, \Theta_{ij}(x, yd)) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} xc\Theta_{ij}(c, \Theta_{ij}(x, y)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d)) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} xc\Theta_{ij}(c, \Theta_{ij}(x, y))\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c), \Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d)) \\ &\stackrel{(\text{HR})}{=} x\Theta_{ij}(x, y)\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c), \Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d)) \\ &\stackrel{(\text{HR})}{=} x\Theta_{ij}(x, y)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d)\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d), \Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} y\Theta_{ji}(y, x)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d)\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d), \Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c)) \\ &\stackrel{(\text{HR})}{=} yd\Theta_{ji}(d, \Theta_{ji}(y, x))\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(y, x), d), \Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c)) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} yd\Theta_{ji}(d, \Theta_{ji}(y, x)\Theta_{ji}(\Theta_{ij}(x, y), c)) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} yd\Theta_{ji}(d, \Theta_{ji}(y, xc)) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} yd\Theta_{ji}(yd, xc) = b\Theta_{ji}(b, a), \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence (voir la figure 2). $\square$

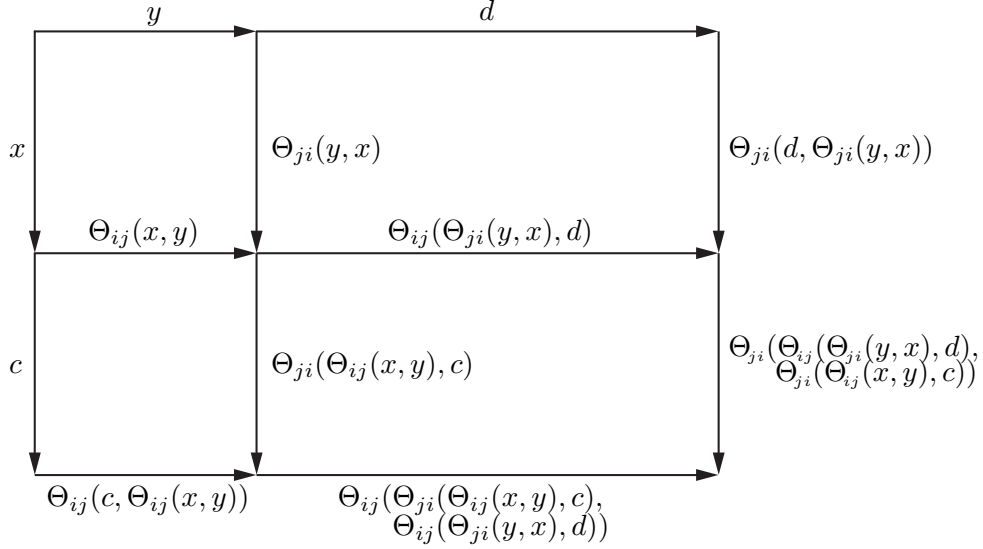


Figure 2. Démonstration du lemme 1.7.

Lemme 1.8. Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens—ou, plus généralement, des monoïdes simplifiables et atomiques avec un nombre fini d’atomes. Alors, pour toute famille $\tilde{\Theta}$ de fonctions vérifiant les identités de résidu, $\boxtimes_i^{\tilde{\Theta}} M_i$ est en bijection avec $M_1 \times \dots \times M_n$. En particulier, $\boxtimes_i^{\tilde{\Theta}} M_i$ est simplifiable.

Démonstration. Par définition, tout élément de $\boxtimes_i^{\tilde{\Theta}} M_i$ admet une décomposition en produit d’éléments de $M_1, \dots, M_n$. Nous devons montrer qu’une telle décomposition est unique, le reste de l’assertion devenant clair. Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, pour tout a dans M_i , nous désignons par $\tilde{\Theta}_{ij}(a, \cdot)$ la bijection réciproque de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ (voir la démonstration du lemme 1.6). Le lemme 1.7 implique alors

$$ab = \tilde{\Theta}_{ij}(a, b) \Theta_{ji}(\tilde{\Theta}_{ij}(a, b), a), \quad (1.9)$$

pour tout $a \in M_i, b \in M_j$ et $1 \leq i \neq j \leq n$. L’application de (1.9) sur un segment d’une décomposition donne une autre décomposition (du même élément): nous appelons cela *une transformation élémentaire*, et, réciproquement, nous passons d’une décomposition à une autre en composant un nombre fini de telles transformations élémentaires. Soit a un élément de $\boxtimes_i^{\tilde{\Theta}} M_i$. Une décomposition β de a est dite *courte* si β est de la forme $\beta = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ avec $a_{i_k} \in M_{i_k}$ et $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$; dans ce cas, $(i_1, \dots, i_n)$ est appelé le *support* de β . Supposons que β, γ sont des décompositions courtes de a . Alors les identités (1.1), (1.2), (1.4) et (1.5) implique qu’il existe (au moins) une suite finie σ de transformations élémentaires

$$\sigma : \beta = \alpha_0 \longrightarrow \alpha_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \alpha_p = \gamma,$$

telle que, pour $0 \leq j \leq p$, α_j est une décomposition courte. Ceci établit une correspondance bijective entre une telle séquence et la permutation associée aux supports. Pour montrer que la façon de transformer β en γ n'importe pas, il suffit de considérer le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ comme le groupe engendré par les transpositions $\tau_i = (i, i+1)$ avec $1 \leq i \leq n-1$ soumises aux relations suivantes

$$\tau_i^2 = 1, \quad (1.10)$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{for } |i-j| > 1, \quad (1.11)$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}. \quad (1.12)$$

Les vérifications qui correspondent aux relations (1.10) et (1.11) sont immédiates. Nous traitons ici le cas correspondant à la relation (1.12). Fixons (p, q, r) avec $1 \leq p \neq q \neq r \leq n$, et considérons un élément a dans $\boxtimes_i^{\vec{\Theta}} M_i$ avec une décomposition $a = a_r a_q a_p$ pour $a_i \in M_i$. En appliquant (1.9), nous pouvons obtenir une décomposition de a comme $b_p b_q b_r$ avec $b_i \in M_i$. Nous devons montrer que les éléments b_p, b_q et b_r ainsi obtenus ne dépendent pas de la stratégie d'application de (1.9). En appliquant (1.9) d'abord $a_r a_q$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_r a_q a_p &= [\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q)][\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r)][a_p] \\ &= [\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q)][\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p)] \\ &\quad [\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p), \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r)))] \\ &= [\tilde{\Theta}_{qp}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p))] \\ &\quad [\Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p)), \tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q))] \\ &\quad [\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p), \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r))], \end{aligned}$$

alors que, en appliquant (1.9) d'abord à $a_q a_p$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_r a_q a_p &= [a_r][\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)][\Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q)] \\ &= [\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p))][\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r)][\Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q)] \\ &= [\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p))] \\ &\quad [\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r), \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q))] \\ &\quad [\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r), \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q), \\ &\quad \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r))] \end{aligned}$$

Nous montrons que les égalités (E_p) , (E_q) , (E_r) sont des conséquences de l'identité (1.3), ce qui répondra à la question:

$$\tilde{\Theta}_{qp}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p)) = \tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)) \quad (E_p)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p)), \tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q)) \\ &= \tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r), \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q)) \end{aligned} \quad (E_q)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r), a_p), \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q), a_r)) \\ &= \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r), \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p), a_q), \\ & \quad \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)), a_r)). \end{aligned} \quad (E_r)$$

Soit $b_q = \tilde{\Theta}_{rq}(a_r, a_q)$ et $d_p = \tilde{\Theta}_{qp}(a_q, a_p)$. Nous trouvons

$$\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), d_p))) = \tilde{\Theta}_{rp}(a_r, d_p) \quad (E'_p)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), d_p))), b_q) \\ &= \tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, d_p), a_r), \Theta_{pq}(d_p, \Theta_{rq}(a_r, b_q))) \end{aligned} \quad (E'_q)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), d_p)), \Theta_{qr}(b_q, a_r)) \\ &= \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, d_p), a_r), \Theta_{pq}(d_p, \Theta_{rq}(a_r, b_q))), \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(a_r, d_p), a_r)) \end{aligned} \quad (E'_r)$$

Soit $e_p = \tilde{\Theta}_{rp}(a_r, d_p)$. Nous trouvons

$$\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p)))) = e_p \quad (E''_p)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p))))), b_q) \\ &= \tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q))) \end{aligned} \quad (E''_q)$$

$$\begin{aligned} & \Theta_{pr}(\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p))), \Theta_{qr}(b_q, a_r)) \\ &= \Theta_{qr}(\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q))), \Theta_{pr}(e_p, a_r)) \end{aligned} \quad (E''_r)$$

En appliquant $\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \cdot)$ puis $\Theta_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \cdot)$ à (E''_p) , nous obtenons

$$\Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p)) = \Theta_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(b_q, e_p)).$$

Ensuite, en appliquant $\Theta_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \cdot)$ à (E''_q) , nous trouvons

$$\begin{aligned} & \Theta_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p))))), b_q)) \\ &= \Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q)). \end{aligned} \quad (E'''_q)$$

Maintenant, en appliquant $\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \cdot)$ puis $\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \cdot)$ à

$$\Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p)) = \Theta_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(b_q, e_p)),$$

nous trouvons

$$\tilde{\Theta}_{qp}(b_q, \tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p)))) = e_p,$$

et (E_q''') devient

$$\Theta_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(e_p, b_q)) = \Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q)).$$

Finalement, pour (E_r'') , en appliquant $\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \cdot)$ à

$$\Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p)) = \Theta_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(b_q, e_p)),$$

nous trouvons

$$\tilde{\Theta}_{rp}(\Theta_{qr}(b_q, a_r), \Theta_{qp}(\Theta_{rq}(a_r, b_q), \Theta_{rp}(a_r, e_p))) = \Theta_{qp}(b_q, e_p),$$

et, en appliquant $\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \cdot)$ à

$$\Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q)) = \Theta_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(e_p, b_q)),$$

nous trouvons

$$\tilde{\Theta}_{rq}(\Theta_{pr}(e_p, a_r), \Theta_{pq}(\Theta_{rp}(a_r, e_p), \Theta_{rq}(a_r, b_q))) = \Theta_{pq}(e_p, b_q).$$

En remplaçant dans (E_r'') , nous obtenons

$$\Theta_{pr}(\Theta_{qp}(b_q, e_p), \Theta_{qr}(b_q, a_r)) = \Theta_{qr}(\Theta_{pq}(e_p, b_q), \Theta_{pr}(e_p, a_r)),$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Exemple 1.9. Considérons les petits monoïdes gaussiens (isomorphes) $\langle x_i, y_i : x_i y_i = y_i x_i \rangle$ pour $i = 1, 2, 3$, et la famille $\vec{\theta}$ constituée des permutations $\theta_{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 & y_2 & x_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$, $\theta_{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & y_3 & x_3 \end{pmatrix}$ et $\theta_{y_1} = \theta_{y_2} = \theta_{x_3} = \theta_{y_3} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{\theta}$ se prolonge en une famille de fonctions $\vec{\Theta}$ selon (1.1) et (1.2), mais ne vérifie pas l'identité (1.3). Remarquons que les trois produits bicroisés sous-jacents sont eux pourtant bien définis.

Ce que nous avons vu dans la première partie de cette section est valable pour des monoïdes simplifiables et coniques et/ou atomiques avec un nombre fini d'atomes. Nous allons à présent nous concentrer sur le cas spécifique des petits monoïdes gaussiens.

Lemme 1.10. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$. Alors, pour toute famille $\vec{\theta}$ de permutations vérifiant les identités de résidu, pour $1 \leq i \neq j \leq n$, la fonction $(x, y) \mapsto (\theta_y(x), \theta_x(y))$ est une permutation de $A_i \times A_j$.*

Démonstration. Fixons (i, j) avec $1 \leq i \neq j \leq n$. Supposons (x_1, x_2) dans $A_i \times A_j$ tel qu'il existe (y_1, y_2) et (z_1, z_2) dans $A_i \times A_j$ vérifiant

$$(\theta_{y_2}(y_1), \theta_{y_1}(y_2)) = (x_1, x_2) = (\theta_{z_2}(z_1), \theta_{z_1}(z_2)).$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} y_2 x_1 = y_1 x_2, \\ z_2 x_1 = z_1 x_2, \end{cases}$$

puis, le monoïde M_i étant gaussien,

$$\begin{cases} (z_1/y_1)y_2 x_1 = (z_1/y_1)y_1 x_2, \\ (y_1/z_1)z_2 x_1 = (y_1/z_1)z_1 x_2, \end{cases}$$

d'où

$$(z_1/y_1)y_2 x_1 = (y_1/z_1)z_2 x_1.$$

Le lemme 1.8 implique $z_1/y_1 = y_1/z_1$ et $y_2 = z_2$, or $z_1/y_1 = y_1/z_1$ entraîne $z_1/y_1 = y_1/z_1 = 1$, soit $y_1 = z_1$, ce qui prouve l'injectivité de la fonction $(x, y) \mapsto (\theta_y(x), \theta_x(y))$. L'ensemble $A_i \times A_j$ étant fini, la fonction $(x, y) \mapsto (\theta_y(x), \theta_x(y))$ est par conséquent une permutation de $A_i \times A_j$. $\square$

Exemple 1.11. Considérons les petits monoïdes gaussiens (isomorphes) $\langle x_1, y_1 : x_1 y_1 = y_1 x_1 \rangle$ et $\langle x_2, y_2 : x_2 y_2 = y_2 x_2 \rangle$, et la famille $\vec{\theta}$ constituée des permutations $\theta_{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \theta_{x_2}$, $\theta_{y_1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 & y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ et $\theta_{y_2} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ y_1 & x_1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Alors la fonction $(x, y) \mapsto (\theta_y(x), \theta_x(y))$ n'est pas une permutation de $\{x_1, y_1\} \times \{x_2, y_2\}$. D'après le lemme 1.10, $\vec{\theta}$ n'est pas une famille vérifiant les identités de résidu. Effectivement, par un calcul direct, notant $\vec{\Theta}$ la famille de fonctions associée à $\vec{\theta}$, nous trouverions $\Theta_{21}(y_2, y_1 x_1) = x_1^2$ et $\Theta_{21}(y_2, x_1 y_1) = y_1 x_1$, contradiction.

Lemme 1.12. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens. Alors, pour toute famille $\vec{\Theta}$ de fonctions vérifiant les identités de résidu, pour tout a dans M_i , tous c, d dans M_j avec $1 \leq i \neq j \leq n$, nous avons $\Theta_{ij}(a, c \vee d) = \Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d)$.*

Démonstration. Puisque $\vee$ est symétrique, en appliquant (1.2), nous trouvons

$$\Theta_{ij}(a, c \vee d) = \Theta_{ij}(a, c)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(c, a), c \setminus d) = \Theta_{ij}(a, d)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(d, a), d \setminus c).$$

Ainsi, dans M_j il existe un élément h vérifiant

$$\Theta_{ij}(a, c \vee d) = (\Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d))h.$$

Notons $\tilde{\Theta}_{ij}(a, \cdot)$ la fonction réciproque de $\Theta_{ij}(a, \cdot)$. Puisque $\vee$ est symétrique, en appliquant (1.8), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d)) \\ &= \tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, c))\tilde{\Theta}_{ij}(\Theta_{ji}(\tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, c)), a), \Theta_{ij}(a, c) \setminus \Theta_{ij}(a, d)) \\ &= c\tilde{\Theta}_{ij}(\Theta_{ji}(c, a), \Theta_{ij}(a, c) \setminus \Theta_{ij}(a, d)) \\ &= d\tilde{\Theta}_{ij}(\Theta_{ji}(d, a), \Theta_{ij}(a, d) \setminus \Theta_{ij}(a, c)). \end{aligned}$$

Ainsi, dans M_j il existe un élément h' vérifiant

$$\tilde{\Theta}_{ij}(a, \Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d)) = (c \vee d)h',$$

soit

$$\Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d) = \Theta_{ij}(a, (c \vee d)h'),$$

puis, en appliquant (1.2) de nouveau,

$$\Theta_{ij}(a, c) \vee \Theta_{ij}(a, d) = \Theta_{ij}(a, c \vee d)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(c \vee d, a), h').$$

La simplifiabilité et la conicité de M_j permettent de conclure. $\square$

Proposition 1.13. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens. Alors, pour toute famille $\vec{\theta}$ de permutations vérifiant les identités de résidu, le monoïde $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ est un petit monoïde gaussien, et le treillis des éléments simples de $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ est produit des treillis des éléments simples de $M_1, \dots, M_n$.*

Démonstration. Soit A_i l'ensemble des atomes de M_i pour $1 \leq i \leq n$, et soit A l'union disjointe $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$. D'après la proposition I.3.3, pour $1 \leq i \leq n$, il existe une fonction $g_i : A_i^2 \rightarrow A_i^*$ telle que M_i admet la présentation

$$\langle A_i : \{xg_i(x, y) = yg_i(y, x)\} \rangle.$$

Alors, par définition, $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ admet la présentation

$$\langle A : \{xg(x, y) = yg(y, x)\} \rangle,$$

où g est définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} g_j(x, y) & \text{pour } (x, y) \in A_j^2 \text{ avec } 1 \leq j \leq n, \\ \theta_x(y) & \text{pour } (x, y) \in A_j \times A_k \text{ avec } 1 \leq j \neq k \leq n. \end{cases}$$

Nous définissons l'opération $\setminus_g$ comme dans la définition I.3.4. Nous allons utiliser le critère de gaussianité de la proposition I.3.10. Pour cela, il nous faut démontrer les trois points suivants:

- (i) la clôture de A par $\setminus_g$ existe et est finie;
- (ii) g est cohérent (voir la définition I.3.7);
- (iii) g vérifie la condition (#) (voir la définition I.3.8).

Nous montrerons ensuite

- (iv) le treillis des éléments simples de $\boxtimes_i^{\bar{\theta}} M_i$ est produit des treillis des éléments simples de $M_1, \dots, M_n$.

(i) D'après la proposition I.3.9, pour $1 \leq i \leq n$, g_i vérifie la condition (#) de la définition I.3.8. Pour $1 \leq i \leq n$, notons Y_i la clôture de A_i par $\setminus_{g_i}$. Nous allons montrer que la clôture de A par $\setminus_g$ existe et qu'elle est la réunion disjointe $Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$. Définissons $Y^{(0)} = A$ et $Y^{(i)} = \{u \setminus_g v ; u, v \in Y^{(i-1)}\}$ pour $i > 0$. Nous montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \geq 0$, $Y^{(k)}$ existe et est inclus dans $Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$. Pour $k = 0$, nous avons $A_i \subseteq Y_i$ pour $1 \leq i \leq n$, et A —qui est $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ par définition—est inclus dans $Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$. Supposons $k > 0$. Soit u, v des mots de $Y^{(k-1)}$. Par hypothèse de récurrence, nous avons $u \in Y_r$ et $v \in Y_s$ pour certains entiers r, s avec $1 \leq r, s \leq n$. Nous montrons par récurrence sur $|w|$ que, pour tout mot w de A^* , $w \setminus_g Y_s$ existe et est inclus dans Y_s . Pour $|w| = 0$, nous avons $\varepsilon \setminus_g v = v \in Y_s$ pour tout mot v de Y_s . Supposons $|w| > 0$. Alors nous avons $w = xw'$ avec $x \in A$ et $w' \in A^*$. Alors nous obtenons par retournement de mots

$$w \setminus_g v = (xw') \setminus_g v = w' \setminus_g (x \setminus_g v),$$

pour tout mot v de Y_s . Montrons alors par récurrence sur $|v|$ que, pour tout v de Y_s , $z \setminus_g v$ existe et est dans Y_s pour tout z de A . Pour $|v| = 0$, nous avons $z \setminus_g \varepsilon = \varepsilon$. Supposons $|v| > 0$. Nous avons $v = yv'$ avec y dans A_s et, puisque v' est $y \setminus_g v$ et Y_s est clos par $\setminus_g$, v' dans Y_s . Par retournement de mots, nous trouvons

$$z \setminus_g v = z \setminus_g (yv') = (z \setminus_g y)((y \setminus_g z) \setminus_g v'),$$

donc, par hypothèse de récurrence, $z \setminus_g v$ existe et est dans Y_s . Par hypothèse de récurrence, $w \setminus_g v$ existe et est dans Y_s pour tout mot v de Y_s , ce qui conclut les deux récurrences. Maintenant, puisque $Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$ est fini, la clôture de A par $\setminus_g$ est fini, et $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$ s'ensuit.

(ii) Remarquons tout d'abord que le monoïde $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ est atomique; en effet, d'après le lemme 1.8, tout élément a dans $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ admet une unique décomposition de la forme $a = a_1 \dots a_n$ avec a_i dans M_i pour $1 \leq i \leq n$, et la norme $\|a\|$ de a est la somme des normes $\|a_i\|$. Par conséquent, la proposition I.3.12 assure que g est cohérent sur A^* si et seulement s'il l'est sur A . D'après la proposition I.3.9, g est cohérent sur A_i^3 pour $1 \leq i \leq n$, et, d'après l'identité (1.3), g est cohérent sur $A_i \times A_j \times A_k$ pour $1 \leq i \neq j \neq k \neq i \leq n$. Il nous reste à considérer les trois cas génériques suivants.

Premièrement, supposons $(x, y, z) \in A_j^2 \times A_k$ avec $j \neq k$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} & ((x \setminus_g y) \setminus_g (x \setminus_g z)) \setminus_g ((y \setminus_g x) \setminus_g (y \setminus_g z)) \\ &= (g_j(x, y) \setminus_g \theta_x(z)) \setminus_g (g_j(y, x) \setminus_g \theta_y(z)) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} ((x g_j(x, y)) \setminus_g z) \setminus_g ((y g_j(y, x)) \setminus_g z) \\ &= ((x \vee_g y) \setminus_g z) \setminus_g ((y \vee_g x) \setminus_g z) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, g est cohérent en tout (x, y, z) de $A_j^2 \times A_k$ avec $j \neq k$.

Deuxièmement, supposons $(x, y, z) \in A_j \times A_k^2$ avec $j \neq k$. Alors, d'après le lemme 1.12, nous avons

$$\begin{aligned} & ((x \setminus_g y) \setminus_g (x \setminus_g z)) \setminus_g ((y \setminus_g x) \setminus_g (y \setminus_g z)) \\ &= (\theta_x(y) \setminus_g \theta_x(z)) \setminus_g (\theta_y(x) \setminus_g g_k(y, z)) \\ &= (\theta_x(y) g_k(\theta_x(y), \theta_x(z))) \setminus_g (\theta_x(y) (\theta_y(x) \setminus_g g_k(y, z))) \\ &\stackrel{(1.2)}{=} (\theta_x(y) g_k(\theta_x(y), \theta_x(z))) \setminus_g (x \setminus_g (y g_k(y, z))) \\ &= (\theta_x(y) \vee_g \theta_x(z)) \setminus_g (x \setminus_g (y \vee_g z)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, g est cohérent en tout (x, y, z) de $A_j \times A_k^2$.

Troisièmement, supposons $(x, y, z) \in A_j \times A_k \times A_j$ avec $j \neq k$. Comme pour le cas précédent, nous trouvons $((x \setminus_g y) \setminus_g (x \setminus_g z)) \setminus_g ((y \setminus_g x) \setminus_g (y \setminus_g z)) = (y \setminus_g (x \vee_g z)) \setminus_g (\theta_y(x) \vee_g \theta_y(z)) = \varepsilon$. Ainsi, g est cohérent en tout (x, y, z) de $A_j \times A_k \times A_j$, et, finalement, g est cohérent en tout (x, y, z) de A^3 .

(iii) Pour $1 \leq i \leq n$, fixons un mot Ω_i représentant l'élément Δ de M_i . Nous allons montrer que le mot $\Omega = \Omega_1 \dots \Omega_n$ est un mot de la clôture $\widehat{Y}$ de Y par $\vee_g$ tel que, pour tout u dans $\widehat{Y}$, on ait $\Omega \setminus_g u = \varepsilon$ et il existe v dans $\widehat{Y}$ vérifiant $u \setminus_g (v \setminus_g \Omega) = (v \setminus_g \Omega) \setminus_g u = \varepsilon$. Soit u un mot dans $\widehat{Y}$. Tout d'abord, u s'écrit $u = (u_{1,1} \dots u_{1,n}) \dots (u_{s,1} \dots u_{s,n})$ pour un certain entier $s \leq |u|$ avec $u_{j,i} \in \widehat{Y}_i$ pour $1 \leq j \leq s$ et $1 \leq i \leq n$. Pour $s = 1$, en notant u_i pour $u_{1,i}$,

nous avons

$$\begin{aligned}
\Omega \setminus_g u &= (\Omega_1 \dots \Omega_n) \setminus_g (u_1 \dots u_n) \\
&= (\Omega_2 \dots \Omega_n) \setminus_g (\Omega_1 \setminus_g (u_1 \dots u_n)) \\
&= (\Omega_2 \dots \Omega_n) \setminus_g ((\Omega_1 \setminus_g u_1)((u_1 \setminus_g \Omega_1) \setminus_g (u_2 \dots u_n))) \\
&= (\Omega_2 \dots \Omega_n) \setminus_g ((u_1 \setminus_g \Omega_1) \setminus_g (u_2 \dots u_n)) \\
&= (\Omega_2 \dots \Omega_n) \setminus_g (v_2 \dots v_n),
\end{aligned}$$

avec $u'_1 = u_1 \setminus_g \Omega_1$, $u'_i = u_i \setminus_g u'_{i-1}$ et $v_i = u'_{i-1} \setminus_g u_i$ pour $2 \leq i \leq n$. Par récurrence sur n puis sur s , nous obtenons $\Omega \setminus_g u = \varepsilon$. Maintenant, montrons par récurrence sur n qu'il existe un mot v dans $\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_n$ vérifiant $u \setminus_g (v \setminus_g \Omega) = (v \setminus_g \Omega) \setminus_g u = \varepsilon$. Pour $n = 1$, c'est trivial. Supposons $n > 1$, il existe v_n dans $\hat{Y}_n$ vérifiant $u_n \setminus_g (v_n \setminus_g \Omega_n) = (v_n \setminus_g \Omega_n) \setminus_g u_n = \varepsilon$. D'après le lemme 1.10, il existe v'_n dans $\hat{Y}_n$ et u' dans $\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-1}$ vérifiant $v'_n \setminus_g u' = u_1 \dots u_{n-1}$ et $u' \setminus_g v'_n = v_n$. Alors nous pouvons prendre $v = v' v'_n$ où v' est un mot dans $\hat{Y}_1 \dots \hat{Y}_{n-1}$ vérifiant $u' \setminus_g (v' \setminus_g (\Omega_1 \dots \Omega_{n-1})) = (v' \setminus_g (\Omega_1 \dots \Omega_{n-1})) \setminus_g u' = \varepsilon$. La condition (#) est donc bien vérifiée.

Le monoïde $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ est donc petit gaussien.

(iv) Rappelons que, si $(X_i, \wedge_i, \vee_i)$ avec $1 \leq i \leq r$ sont des treillis, leur produit (cartésien) est le treillis $(X_1 \times \dots \times X_r, \wedge, \vee)$, où $\wedge$ et $\vee$ sont définis par $(a_1, \dots, a_r) \wedge (b_1, \dots, b_r) = (a_1 \wedge_1 b_1, \dots, a_r \wedge_r b_r)$ et $(a_1, \dots, a_r) \vee (b_1, \dots, b_r) = (a_1 \vee_1 b_1, \dots, a_r \vee_r b_r)$ pour a_i, b_i dans X_i et $1 \leq i \leq r$, voir [7]. Ici, pour $1 \leq i \leq n$, A_i désigne l'ensemble des atomes de M_i , P_i la clôture de A_i par $\setminus$, et S_i la clôture de P_i par $\vee$, i.e., par définition, l'ensemble des éléments simples de M_i . Nous considérons l'homomorphisme de treillis φ de $S_1 \times \dots \times S_n$ dans S défini par $\varphi(1, \dots, 1, a_j, 1, \dots, 1) = a_j$ pour $a_j \in S_j$ et $1 \leq j \leq n$. Observons que tout élément de S qui peut s'écrire comme le ppcm à droite d'éléments dans $S_1, \dots, S_n$ peut aussi s'écrire comme le produit d'éléments dans $S_1, \dots, S_n$. En effet, une récurrence sur n donne $a_1 \vee \dots \vee a_n = a'_1 \dots a'_n$ avec $a'_1 = 1$ et $a'_i = (a'_1 \dots a'_{i-1}) \setminus a_i$ pour $i > 1$. Maintenant, $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \varphi(b_1, \dots, b_n)$ implique $a'_1 \dots a'_n = b'_1 \dots b'_n$, soit, d'après le lemme 1.8, $a'_i = b'_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Nous montrons par récurrence sur n que, pour $1 \leq i \leq n$, nous avons $a_i = b_i$. Le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons $n > 1$. Par hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\Theta_{(i-1)i}(a_{i-1}, \Theta_{(i-2)i}(a_{i-2}, \dots (\Theta_{2i}(a_2, \Theta_{1i}(a_1, a_i)) \dots)) \\
&= \Theta_{(i-1)i}(a_{i-1}, \Theta_{(i-2)i}(a_{i-2}, \dots (\Theta_{2i}(a_2, \Theta_{1i}(a_1, b_i)) \dots))
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la surjectivité de $\Theta_{(i-1)i}(a_{i-1}, \cdot)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\Theta_{(i-2)i}(a_{i-2}, \dots (\Theta_{2i}(a_2, \Theta_{1i}(a_1, a_i)) \dots) \\
&= \Theta_{(i-2)i}(a_{i-2}, \dots (\Theta_{2i}(a_2, \Theta_{1i}(a_1, b_i)) \dots),
\end{aligned}$$

puis, par surjectivité de $\Theta_{(i-2)i}(a_{i-2}, \cdot)$ et ainsi de suite, nous obtenons finalement $a_i = b_i$, ce qui conclut la récurrence et prouve l'injectivité de φ . Soit P la clôture de A par $\setminus$. De $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$ établi en (i), nous déduisons $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_n$. Par définition, pour tout a dans S , il existe un entier m et des éléments $b_1, \dots, b_m$ de P vérifiant $a = b_1 \vee \dots \vee b_m$, et nous avons $a = \varphi(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_i = \bigvee (P_i \cap \{b_1, \dots, b_m\})$ pour $1 \leq i \leq n$, ce qui signifie que φ est surjective. $\square$

Corollaire 1.14. *Supposons que $M_1, \dots, M_n$ sont des petits monoïdes gaussiens. Alors, pour toute famille $\vec{\theta}$ vérifiant les identités de résidu, le nombre de simples dans $\boxtimes_i^{\vec{\theta}} M_i$ est le produit des nombres de simples dans $M_1, \dots, M_n$.*

Exemple 1.15. Considérons à nouveau les petits monoïdes gaussiens M_1, M_2 et la famille de permutations $\vec{\theta}$ de l'exemple 1.5. Soit $\vec{\theta}'$ constituée des permutations

$$\theta'_{x_1} = \theta'_{x_2} = \theta'_{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 & y & z \end{pmatrix}, \quad \theta'_y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_3 & x_1 & x_2 & y & z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta'_z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_2 & x_3 & x_1 & y & z \end{pmatrix},$$

et $\vec{\theta}''$ des permutations $\theta''_{x_1} = \theta''_{x_2} = \theta''_{x_3} = \theta_{x_1}$, $\theta''_y = \theta'_y$ et $\theta''_z = \theta'_z$. Les monoïdes $M_1 \rtimes_{\vec{\theta}} M_2$ et $M_1 \rtimes_{\vec{\theta}'} M_2$ sont petits gaussiens, mais le monoïde $M_1 \rtimes_{\vec{\theta}''} M_2$ n'est pas gaussien, puisque, par exemple, $(x_2 \setminus y) \setminus (x_2 \setminus x_1) \neq (y \setminus x_2) \setminus (y \setminus x_1)$ contredit le lemme I.1.8. La figure 4 représente le graphe caractéristique du monoïde $M_1 \rtimes_{\vec{\theta}} M_2$.

2. Petits monoïdes gaussiens Δ -purs

Nous introduisons une notion de petit monoïde gaussien Δ -pur, qui généralise celle de monoïde d'Artin sphérique irréductible. D'une part, nous montrons que le résultat de Brieskorn, Saito [12] et de Deligne [26] établi dans le cas particulier des groupes d'Artin sphériques s'étend au cas des petits groupes gaussiens quelconques : le centre de tout petit groupe gaussien Δ -pur est un sous-groupe monogène engendré par une puissance de l'élément Δ . D'autre part, nous démontrons que tout petit monoïde gaussien est un itéré de produits croisés de petits monoïdes gaussiens Δ -purs.

Définition 2.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Pour a, b dans M , nous écrivons $a \hat{\sim} b$ pour $\Delta_a = \Delta_b$. Nous disons que M est Δ -pur si tous ses atomes sont $\hat{\sim}$ -équivalents.

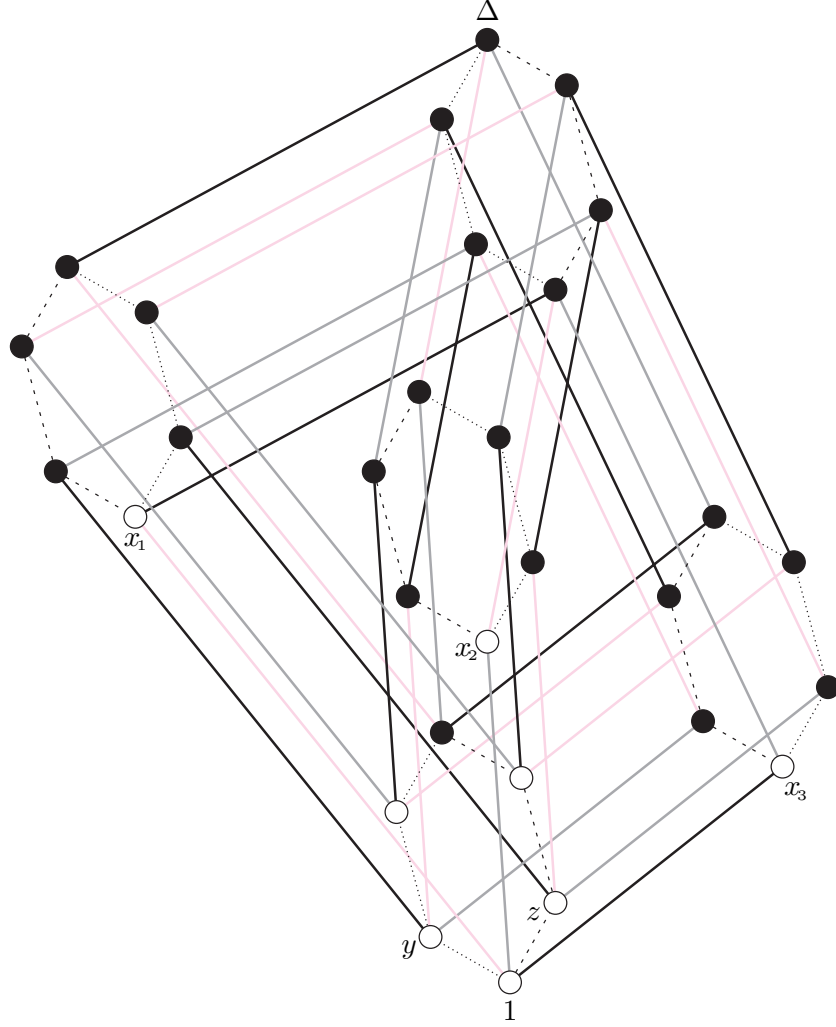


Figure 4. Le graphe caractéristique du monoïde $M_1 \bowtie_{\vec{\theta}} M_2$ avec $M_1 = \langle x_1, x_2, x_3 : x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1 \rangle$, $M_2 = \langle y, z : y^3 = z^3 \rangle$, $\theta_{x_1} = \theta_{x_2} = \theta_{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 & z & y \end{pmatrix}$, et $\theta_y = \theta_z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & y & z \\ x_3 & x_1 & x_2 & y & z \end{pmatrix}$.

Nous obtenons:

Proposition 2.2. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien Δ -pur. Soit A l'ensemble de ses atomes, Δ son élément de Garside, e son exposant, et G son groupe de fractions.*

- (i) *Le quasicentre de M (resp. le quasicentralisateur de A dans G) est le sous-monoïde (resp. sous-groupe) engendré par Δ .*
- (ii) *Le centre de M (resp. le centre de G) est le sous-monoïde (resp. sous-groupe) engendré par Δ^e .*

Démonstration. Soit A l'ensemble des atomes de M . D'après le lemme III.1.2 et la proposition III.3.1, il suffit de montrer $\{\Delta_x ; x \in A\} = \{\Delta\}$. Soit d l'unique élément de $\{\Delta_x ; x \in A\}$. D'après la proposition I.2.5, Δ est quasicentral, et, d'après la proposition III.3.4, Δ est une puissance de d . Soit

$$D = \bigcup_{x \in A} M \setminus x.$$

Par hypothèse, d est le ppcm à droite de D . Soit $a, b \in D$. Par définition, nous avons $a = c \setminus z$ pour un certain c dans M et un certain atome z . En utilisant le lemme I.1.8, nous trouvons $b \setminus a = b \setminus (c \setminus z) = (cb) \setminus z$, ce qui prouve que D est clos par $\setminus$. Puisque D inclut A , D inclut la clôture P de A par $\setminus$, et, par conséquent, Δ —qui est le ppcm à droite de P —divise d . Simplifiabilité et conicité permettent de conclure. $\square$

Notre but est maintenant de montrer que tout petit monoïde gaussien est un itéré de produits croisés de petits monoïdes gaussiens Δ -purs.

Définition 2.3. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit A l'ensemble de ses atomes. Un sous-ensemble A_1 de A est dit *saturé par $\hat{\approx}$* si, pour tout atome x de A_1 et tout atome y de A , $x \hat{\approx} y$ implique $y \in A_1$.

Proposition 2.4. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour tout ensemble A_1 d'atomes de M saturé par $\hat{\approx}$, le sous-monoïde de M engendré par A_1 est un petit monoïde gaussien.*

Démonstration. Soit M_1 le sous-monoïde de M engendré par A_1 . Tout d'abord, M_1 hérite de la simplifiabilité et de la conicité de M . A présent, il s'agit de montrer $M \setminus M_1 = M_1$ et $\bigvee M_1 = M_1 = \widetilde{\bigvee} M_1$. Nous montrons par récurrence sur $\|a\|$ que, pour tout a dans M_1 , l'ensemble $M \setminus a$ est inclus dans M_1 . Pour $\|a\| = 0$, nous avons $M \setminus 1 = \{1\}$. Supposons $\|a\| > 0$. Alors nous avons $a = xa'$ pour un certain atome x de A_1 et un certain a' dans M_1 . Nous prétendons que Δ_x appartient

à M_1 : soit y un atome de A_1 diviseur de Δ_x , alors, d'après le lemme III.3.2, Δ_y divise Δ_x , et, d'après le lemme III.3.3, nous avons $x \hat{\simeq} y$, d'où $y \in A_1$. Soit $b \in M$. En utilisant le lemme I.1.8, nous obtenons

$$b \setminus a = b \setminus (xa') = (b \setminus x)((x \setminus b) \setminus a').$$

L'élément $b \setminus x$ appartient à M_1 puisqu'il divise Δ_x , et, par hypothèse de récurrence, l'élément $(x \setminus b) \setminus a'$ appartient à M_1 . Par conséquent, $b \setminus a$ appartient à M_1 . Nous devons montrer $\bigvee M_1 = M_1 = \bigvee \tilde{M}_1$. Soit $c, d \in M_1$. De $c \vee d = c(c \setminus d)$ et $M \setminus M_1 = M_1$, nous déduisons $c \vee d \in M_1$. Symétriquement, nous avons $c \tilde{\vee} d \in M_1$. Ainsi, toute paire d'éléments de M_1 admet un ppcm à droite et à gauche dans M_1 . Finalement, M_1 est un petit monoïde gaussien puisque la clôture de A_1 par $\setminus$ est incluse dans la clôture de A par $\setminus$. $\square$

Maintenant, nous devons étudier la nature des relations entre les atomes x, y qui vérifient $x \hat{\not\sim} y$. Bien que très simple, le lemme suivant est techniquement crucial.

Lemme 2.5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien.*

- (i) *Pour x, y atomes distincts de M , nous avons $y \setminus x \hat{\simeq} x$.*
- (ii) *Pour x atome et b élément de M , $b \hat{\simeq} x$ entraîne $c \hat{\simeq} x$ pour tout diviseur c de b non égal à 1.*

Démonstration. (i) Puisque Δ_x est $\bigvee(M \setminus x)$, l'élément $y \setminus x$ est un diviseur à gauche de Δ_x , et, d'après le lemme III.3.2, $\Delta_{y \setminus x}$ est un diviseur à gauche de Δ_x . Puisque y est un atome distinct de x , $y \setminus x$ est non trivial, et la proposition III.3.4 implique $\Delta_{y \setminus x} = \Delta_x$.

(ii) Soit $c \neq 1$ un diviseur de b dans M . Puisque b divise Δ_b , qui est Δ_x par hypothèse, c divise Δ_x . Les lemmes III.3.2 et III.3.3 impliquent alors $\Delta_c = \Delta_x$. $\square$

Lemme 2.6. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour A_1, A_2 ensembles disjoints d'atomes saturés par $\hat{\simeq}$, l'application $x_1 \mapsto x_2 \setminus x_1$ est une permutation de A_1 pour tout atome x_2 de A_2 .*

Démonstration. Le résultat est conséquence des deux assertions suivantes:

- (i) pour x, y atomes de M vérifiant $x \hat{\not\sim} y$, les éléments $y \setminus x$ et $x \setminus y$ sont des atomes de M , et vérifient $y \setminus x \hat{\simeq} x$ et $x \setminus y \hat{\simeq} y$;
- (ii) pour x, y_1, y_2 atomes de M vérifiant $x \hat{\not\sim} y_1, x \hat{\not\sim} y_2$ et $y_1 \neq y_2$, les atomes $x \setminus y_1$ et $x \setminus y_2$ sont distincts.

Montrons (i). Soit x, y des atomes de M vérifiant $x \hat{\not\sim} y$. Nous avons donc $x \neq y$, et l'atomicité implique $x \setminus y \neq 1$ et $y \setminus x \neq 1$. Par conséquent, il existe des atomes x', y' et des éléments a, b de M vérifiant $x \vee y = xay' = ybx'$, soit, d'après le lemme I.1.7,

$$x \vee y = xay' = ybx' = (xa \wedge yb)(y' \tilde{\vee} x').$$

Supposons $xa \wedge yb \neq 1$. Soit z un atome de M divisant $xa \wedge yb$ à gauche. Puisque $y \vee (xa \wedge yb)$ est un diviseur à gauche de yb , nous avons $z \neq x$. Par conséquent, $x \vee z$ étant un diviseur à gauche de $x \vee y$, $x \setminus z$ est un diviseur à gauche non trivial de $x \setminus y$, et le lemme 2.5 implique $z \hat{\simeq} x \setminus z \hat{\simeq} x \setminus y \hat{\simeq} y$. Symétriquement, nous trouvons $z \hat{\simeq} y \setminus z \hat{\simeq} y \setminus x \hat{\simeq} x$, ce qui contredit l'hypothèse $x \not\hat{\simeq} y$. Nous obtenons ainsi

$$x \vee y = xay' = ybx' = y' \tilde{\vee} x'.$$

D'après le lemme 2.5(i), $x \setminus y = ay'$ et $y \setminus x = bx'$ impliquent

$$ay' \hat{\simeq} y \quad \text{et} \quad bx' \hat{\simeq} x,$$

tandis que $x'/y' = xa$ et $y'/x' = yb$ impliquent $xa \hat{\simeq} x'$ et $yb \hat{\simeq} y'$, soit, en utilisant le lemme 2.5(ii),

$$xa \hat{\simeq} x \quad \text{et} \quad yb \hat{\simeq} y.$$

Toujours d'après le lemme 2.5(ii), $ay' \hat{\simeq} y$ et $xa \hat{\simeq} x$ impliquent $a = 1$, alors que $bx' \hat{\simeq} x$ et $yb \hat{\simeq} y$ impliquent $b = 1$.

Montrons (ii). Supposons $x \setminus y_1 = x \setminus y_2$. Alors nous avons $y_1(y_1 \setminus x) = y_2(y_2 \setminus x)$. En particulier, $y_1 \setminus y_2$ est un diviseur à gauche de $y_1 \setminus x$. Maintenant, d'après (i), $y_1 \setminus x$ est un atome. Les atomes y_1, y_2 étant distincts, $y_1 \setminus y_2$ n'est pas 1, et nous en déduisons $y_1 \setminus x = y_1 \setminus y_2$, ce qui, d'après le lemme 2.5(i), implique $y_2 \hat{\simeq} x$, contradiction. $\square$

Remarque. Dans un petit monoïde gaussien, le ppcm à gauche de deux atomes n'est pas nécessairement le ppcm à droite de deux atomes, et inversement. Par exemple, dans le monoïde $M_\diamond$ de l'exemple I.4.1, il n'existe pas d'atomes z_1, z_2 vérifiant $z_1 \vee z_2 = y \tilde{\vee} z$.

Proposition 2.7. *Tout petit monoïde gaussien est un itéré de produits croisés de petits monoïdes gaussiens Δ -purs.*

Démonstration. Supposons que M est un petit monoïde gaussien, A l'ensemble de ses atomes, et $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ une partition telle que, pour $1 \leq i \leq n$, A_i est un sous-ensemble minimal non vide de A saturé par $\hat{\simeq}$. Pour $1 \leq i \leq n$, M_i (resp. $\overline{M}_i$) désigne le sous-monoïde engendré par A_i (resp. par $A \setminus A_i$). Alors, pour $1 \leq i \leq n$, d'après le lemme 2.4, M_i et $\overline{M}_i$ sont des petits monoïdes gaussiens, et, d'après le lemme 2.6, il existe une famille $\vec{\theta}^{(i)}$ de permutations vérifiant les identités de résidu telle que nous ayons $M = M_i \bowtie_{\vec{\theta}^{(i)}} \overline{M}_i$. Nous trouvons

$$M = \bigotimes_i^{\vec{\theta}} M_i \quad \text{avec} \quad \vec{\theta} = \bigsqcup_i \{\theta_x^{(i)} ; x \in A_i\}.$$

Excepté pour $n = 1$, les petits monoïdes gaussiens M_i ne sont pas nécessairement Δ -purs (voir l'exemple 3.2 ci-dessous). Mais une itération du procédé ci-contre conduit à une décomposition de M comme itéré de produits croisés de petits monoïdes gaussiens Δ -purs. En effet, puisque le nombre d'atomes décroît strictement à chaque étape, une telle itération est nécessairement finie. $\square$

Corollaire 2.8. *Tout petit monoïde gaussien à deux générateurs est Δ -pur, excepté le monoïde abélien libre de rang 2.*

Revenons sur la remarque suivant la proposition III.5.2. Soit M un petit monoïde gaussien, et QZ est son quasicentre. Nous avons mentionné que la fonction $a \mapsto \Delta_a$ n'était en général pas un homomorphisme de demi-treillis de $(M, \wedge)$ sur $(QZ, \wedge)$. En fait, $a \mapsto \Delta_a$ est un homomorphisme de demi-treillis de $(M, \wedge)$ sur $(QZ, \wedge)$ si et seulement si M est un monoïde abélien libre. En effet, pour des atomes distincts x, y de M vérifiant $x \hat{=} y$, nous avons $\Delta_{x \wedge y} = \Delta_1 = 1$ et $\Delta_x \wedge \Delta_y = \Delta_x \neq 1$. Par conséquent, si $a \mapsto \Delta_a$ est un homomorphisme de demi-treillis de $(M, \wedge)$ sur $(QZ, \wedge)$, alors nous avons $x \hat{\neq} y$ pour tous x, y atomes de M , et, suivant la démonstration de la proposition 2.7, nous déduisons que M est abélien libre. L'implication réciproque est triviale.

3. Remarques et exemples

Dans cette section, nous montrons que la notion de Δ -pureté définie pour les petits monoïdes gaussiens dans la section 2 est compatible avec celle d'irréductibilité des monoïdes d'Artin sphériques. Nous étudions un exemple de décomposition d'un petit monoïde gaussien, qui nous amène à discuter de la question des sous-monoïdes paraboliques d'un petit monoïde gaussien.

Supposons que M est un monoïde d'Artin avec un ensemble X d'atomes et une matrice de Coxeter $(m_{xy})_{x,y \in X}$ (voir la section V.1). Le graphe de Coxeter de M est défini comme étant le graphe non orienté dont les sommets sont les atomes, avec une arête entre les sommets x et y pour $m_{xy} \geq 3$, m_{xy} étiquetant l'arête correspondante [11][12][26]. Par définition, M est irréductible si son graphe de Coxeter est connexe.

Proposition 3.1. *Supposons que M est un monoïde d'Artin sphérique. Alors M est irréductible si et seulement si M est Δ -pur.*

Démonstration. Soit Γ le graphe de Coxeter de M . Tout d'abord, nous montrons que, pour tous atomes x, y appartenant à une même composante connexe de Γ , nous avons $x \hat{=} y$. Nous pouvons supposer x et y distincts. Alors il existe un entier strictement positif n et des atomes distincts $x = z_0, \dots, z_n = y$ de M tels que, pour $0 \leq i \leq n$, z_i et z_{i+1} sont connectés dans Γ . Utilisons une récurrence sur n pour montrer que x et y vérifient $x \hat{=} y$. Supposons $n = 1$. Alors il existe un entier $m_{xy} \geq 3$ vérifiant

$$x \setminus y = \Pi_{m_{xy}-1}(yx), \quad \text{et} \quad y \setminus x = \Pi_{m_{xy}-1}(xy),$$

où $\Pi_k(w)$ désigne le préfixe de longueur k du mot w^∞ . En particulier, x divise $x \setminus y$, et y divise $y \setminus x$. Ainsi, par définition, x divise Δ_y , et y divise Δ_x . D'après le lemme 3.2, par simplifiabilité et conicité, nous en déduisons $\Delta_x = \Delta_y$, c'est-à-dire $x \hat{=} y$. Supposons maintenant $n > 1$. Alors nous avons $x \hat{=} z_1$ et, par hypothèse de récurrence, $z_1 \hat{=} y$, d'où $x \hat{=} y$. Cela montre que, si M est irréductible, alors il est Δ -pur.

Réciproquement, supposons que M n'est pas irréductible. Alors M est le produit direct de deux monoïdes d'Artin sphériques non triviaux. Par conséquent, le quasicentre de M n'est pas monogène, et, d'après la proposition n, M n'est pas Δ -pur. $\square$

Poursuivons à présent avec une illustration de la décomposition mentionnée dans la proposition 2.7.

Exemple 3.2. Nous considérons ici un des *monoïdes hypercubes* $\mathcal{H}_n^+$ considérés par Garside dans [29] (voir également la section V.4). Pour $n > 2$, les monoïdes $\mathcal{H}_n^+$ ne sont pas des monoïdes d'Artin. Soit $\mathcal{H}_3^+$ le monoïde admettant la présentation

$$\langle x_1, x_2, x_3 : x_1x_2 = x_2x_3, x_1x_3 = x_3x_1, x_2x_1 = x_3x_2 \rangle. \quad (3.1)$$

Alors $\mathcal{H}_3^+$ est un petit monoïde gaussien, et son graphe caractéristique est représenté sur la figure 5. Nous calculons dans $\mathcal{H}_3^+$

$$\Delta_{x_1} = \Delta_{x_3} = x_1x_3, \quad \text{et} \quad \Delta_{x_2} = x_2,$$

et déduisons que le quasicentre (*resp.* le centre) de $\mathcal{H}_3^+$ est engendré par x_1x_3 et x_2 (*resp.* par x_1x_3 et x_2^2). En particulier, le monoïde $\mathcal{H}_3^+$ n'est pas Δ -pur : nous avons $\mathcal{H}_3^+ = M_1 \bowtie_{\bar{\theta}} M_2$ avec $M_1 = \langle x_1, x_3 : x_1x_3 = x_3x_1 \rangle$, $M_2 = \langle x_2 : \rangle$, et

$$\theta_{x_1} = \theta_{x_3} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \theta_{x_2} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, M_2 est Δ -pur, mais M_1 ne l'est pas : nous avons $M_1 = \langle x_1 : \rangle \times \langle x_3 : \rangle$. Nous obtenons ainsi $\mathcal{H}_3^+ = (\langle x_1 : \rangle \times \langle x_3 : \rangle) \bowtie_{\bar{\theta}} \langle x_2 : \rangle$. D'après la proposition 1.13, le treillis des éléments simples dans $\mathcal{H}_3^+$ est isomorphe au treillis des éléments simples dans $\mathbf{N}^3$ le monoïde abélien libre de rang 3.

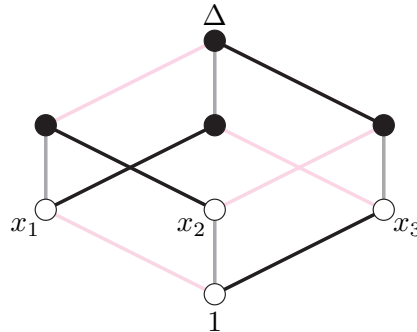


Figure 5. Le graphe caractéristique de $\mathcal{H}_3^+$.

Pour conclure ce chapitre, revenons sur la question des sous-monoïdes paraboliques des petits monoïdes gaussiens. Nous savons que tout sous-monoïde parabolique d'un monoïde d'Artin sphérique est un monoïde d'Artin sphérique [39]. Il est naturel de se demander si tout sous-monoïde d'un petit monoïde gaussien engendré par des atomes est lui-même un petit monoïde gaussien—voir proposition 2.4. L'exemple du monoïde $\mathcal{H}_3^+$ permet d'apporter une réponse négative. Le sous-monoïde M_∞ de $\mathcal{H}_3^+$ engendré par $\{x_1, x_2\}$ n'est pas un petit monoïde gaussien. En effet, l'élément x_2^2 est central dans M_∞ , mais ne peut être un multiple de x_1 , et la proposition III.3.1 ne marche pas. Le monoïde M_∞ admet en fait la présentation infinie

$$\langle x_1, x_2 : x_1 x_2 x_1^k x_2 = x_2 x_1^k x_2 x_1, k \in \mathbf{N} \rangle. \quad (3.2)$$

Remarquons que si, pour tout $q \geq 0$, M_q désigne le monoïde

$$\langle x_1, x_2 : x_1 x_2 x_1^k x_2 = x_2 x_1^k x_2 x_1, 0 \leq k \leq q \rangle, \quad (3.3)$$

alors M_q n'est toujours pas gaussien, mais, pour $q > 0$, les atomes x_1 et x_2 admettent $q+1$ plus petits communs multiples, et M_q admet un élément Ω dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident et engendrent M_q : Ω est (quasi)central et multiple des $q+1$ plus petits communs multiples de x_1 et x_2 . La figure 6 montre le graphe de Cayley de $M_1 = \langle x_1, x_2 : x_1 x_2^2 = x_2^2 x_1, x_1 x_2 x_1 x_2 = x_2 x_1 x_2 x_1 \rangle$ restreint aux diviseurs de Ω .

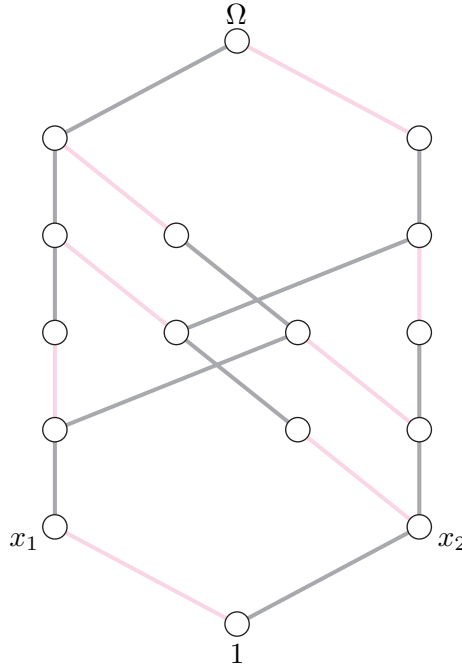


Figure 6. Le monoïde M_1 n'est pas gaussien.

Remarque. Exceptée la propriété de calculabilité effective de la fonction $a \mapsto \Delta_a$, les résultats des chapitres III et IV semblent pouvoir s'étendre au cadre plus général des monoïdes quasi-gaussiens admettant un élément dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident, engendrent le monoïde mais ne sont pas nécessairement en nombre fini, voir la section V.8.

La discussion précédente—en particulier l'exemple du monoïde M_1 —montre au contraire que l'extension des résultats de ces deux derniers chapitres au cas où nous ne supposons plus l'unicité des ppcm n'est visiblement pas triviale.

IV. DÉCOMPOSITION

V. Exemples et contre-exemples

Dans ce chapitre, nous dressons un inventaire des petits monoïdes gaussiens rencontrés dans la littérature, et, pour chacun, nous décrivons l'élément de Garside, les éléments simples, le centre, le groupe de fractions, et représentons le graphe caractéristique.

1. Monoïdes d'Artin sphériques

Soit X un ensemble fini. Une *matrice de Coxeter* sur X est une matrice $(m_{xy})_{x,y \in X}$ vérifiant:

- (i) $m_{xx} = 1$ pour $x \in X$;
- (ii) $m_{xy} = m_{yx} \in \{m \in \mathbf{N} ; m \geq 2\} \cup \{\infty\}$ pour $x \neq y \in X$.

Soit $m = (m_{xy})_{x,y \in X}$ une matrice de Coxeter. Le *monoïde d'Artin* $A^+(m)$ associé à m est le monoïde

$$\langle X : \Pi_{m_{xy}}(xy) = \Pi_{m_{xy}}(yx) \text{ pour } x, y \in X \text{ avec } m_{xy} \neq \infty \rangle, \quad (1.1)$$

où $\Pi_\ell(w)$ désigne le préfixe de longueur ℓ du mot w^∞ . Le *groupe d'Artin* $A(m)$ associé à m est le groupe admettant la présentation (1.1), et le groupe de Coxeter $W(m)$ associé à m est le groupe

$$\langle X : \Pi_{m_{xy}}(xy) = \Pi_{m_{xy}}(yx) \text{ pour } x, y \in X \text{ avec } m_{xy} \neq \infty, x^2 = 1 \text{ pour } x \in X \rangle$$

Le monoïde $A^+(m)$ et le groupe $A(m)$ sont dits *sphériques* si le groupe de Coxeter $W(m)$ est fini.

D'après [12], un monoïde d'Artin est gaussien si et seulement s'il est sphérique, auquel cas il est petit. L'ensemble des éléments simples d'un monoïde d'Artin sphérique $A^+(m)$ est $\{\tau(w) : w \in W\}$ et son élément de Garside est $\Delta = \tau(w_0)$, où w_0 est l'élément de longueur maximale dans W , et τ est la section naturelle de la projection canonique de $A(m)$ sur $W(m)$ définie comme suit. Soit $w \in W$. Nous choisissons une expression réduite $w = x_1 \dots x_r$ de w , et envoyons w sur l'élément $x_1 \dots x_r$ de $A^+(m)$. D'après la solution de Tits du problème de mots dans les groupes de Coxeter [51], cette définition ne dépend pas du choix de l'expression réduite de w .

Exemple 1. Monoïdes abéliens libres.

Les monoïdes abéliens libres sont les exemples les plus simples de monoïdes d'Artin sphériques. Une présentation pour le monoïde abélien libre à n générateurs $\mathbf{N}^n$ est

$$\langle x_1, \dots, x_n : x_i x_j = x_j x_i, 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Le seul monoïde gaussien à un générateur est le monoïde libre à un générateur. De plus, il est petit, et ses deux éléments simples sont primitifs. En effet, soit M un monoïde gaussien à un générateur, et soit x ce générateur. Une relation non triviale pour M est de la forme $x^p = x^q$ avec p et q entiers positifs distincts. Si p et q sont non nuls, cela contredit l'hypothèse de simplifiabilité. Si p ou q est nul, l'hypothèse de conicité n'est pas respectée. Par conséquent, M est libre. Enfin, vérifions que M est petit : nous avons

$$x \backslash x = 1, \quad x \backslash 1 = x, \quad 1 \backslash 1 = 1, \quad \text{et} \quad 1 \backslash x = 1,$$

ce qui signifie que la clôture de $\{x\}$ par $\backslash$ est $\{1, x\}$. En particulier, l'élément de Garside est x . Le graphe caractéristique du monoïde libre de rang 1 est représenté sur la figure 1.



Figure 1. Le graphe caractéristique du (petit) monoïde gaussien à un atome.

D'après la proposition IV.1.13, le treillis des éléments simples de $\mathbf{N}^n$ est alors isomorphe au treillis C_2^n , où C_2 est la chaîne à deux éléments. Le monoïde $\mathbf{N}^n$ admet 2^n éléments simples dont $n + 1$ primitifs.

Mentionnons ici que, pour tout entier n , le treillis des éléments simples de $\mathbf{N}^n$ est isomorphe à celui des éléments simples du monoïde hypercube de Garside $\mathcal{H}_n^+$ (voir l'exemple 12 ci-dessous). Le graphe caractéristique du monoïde abélien libre à 4 générateurs est représenté sur la figure 2.

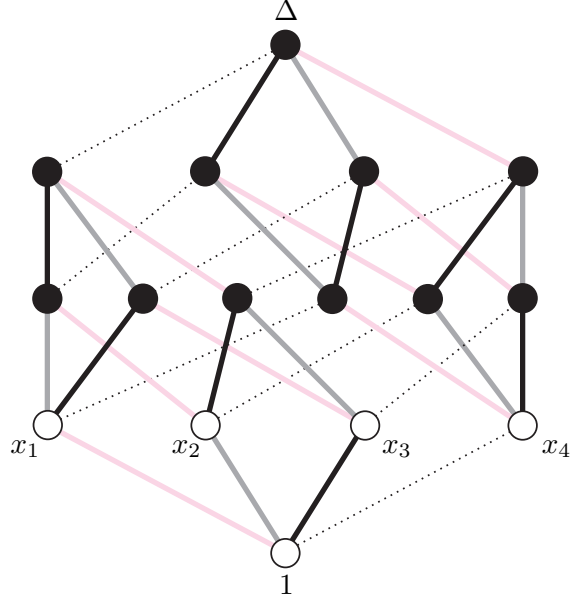


Figure 2. Le graphe caractéristique du monoïde $\mathbf{N}^4$.

Exemple 2. Monoïdes d'Artin de type A.

Le monoïde B_3^+ des tresses à 3 brins—également noté $A^+(A_2)$ —admet pour présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle.$$

Ce monoïde admet 6 éléments simples dont 5 primitifs. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 3.

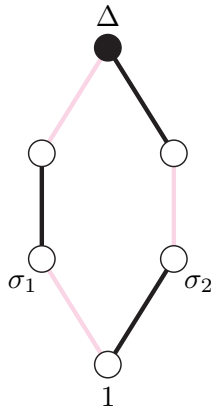


Figure 3. Le graphe caractéristique du monoïde B_3^+ .

Le monoïde B_4^+ des tresses à 4 brins—également noté $A^+(A_3)$ —admet pour présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle.$$

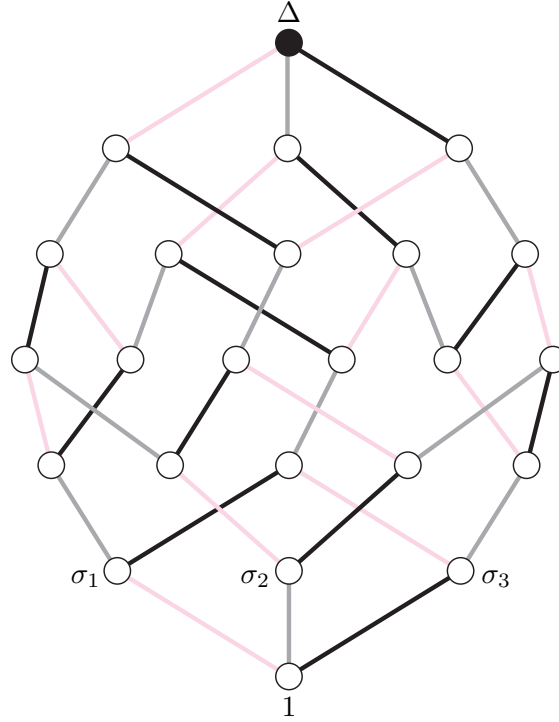


Figure 4. Le graphe caractéristique du monoïde B_4^+ .

Ce monoïde admet 24 éléments simples dont 23 primitifs. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 4, il apparaissait déjà dans [29] comme graphe de Cayley de Δ_4 .

Pour $n > 2$, les monoïdes B_n^+ admettent $n!$ éléments simples dont $n! - 1$ primitifs, et ils sont d'exposant 2.

Exemple 3. Monoïdes d'Artin de type B .

Le monoïde $A^+(B_3)$ admet la présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle.$$

Ce monoïde admet 48 éléments simples dont 47 primitifs. Il est d'exposant 1. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 5.

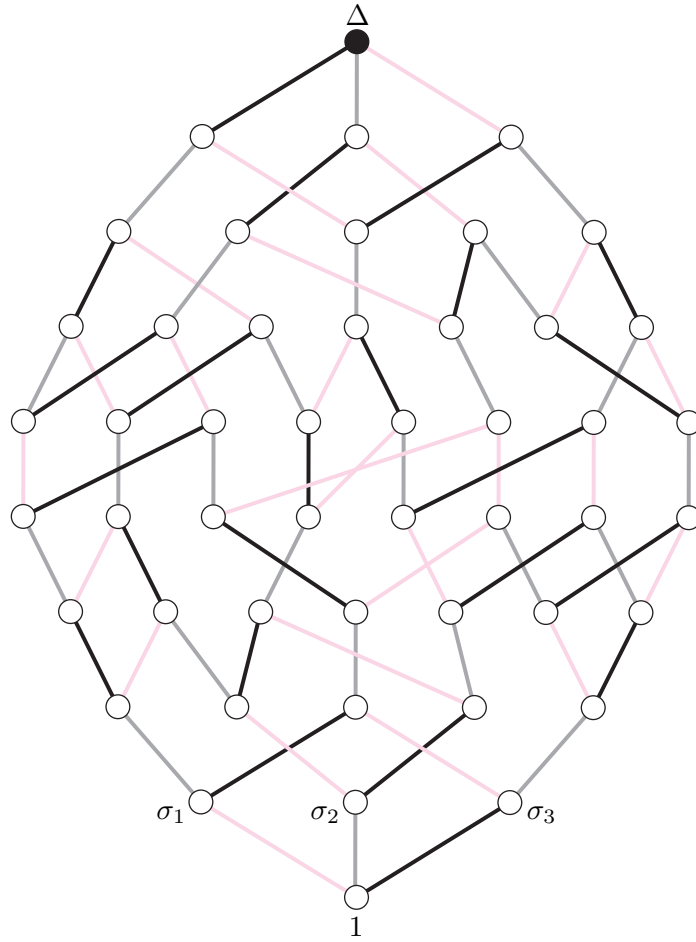


Figure 5. Le graphe caractéristique du monoïde $A^+(B_3)$.

Exemple 4. Monoïdes d'Artin de type D .

Le monoïde $A^+(D_4)$ admet pour présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_4 = \sigma_4\sigma_1, \\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_2\sigma_4\sigma_2 = \sigma_4\sigma_2\sigma_4, \sigma_3\sigma_4 = \sigma_4\sigma_3 \rangle.$$

L'élément de Garside de $A^+(D_4)$ est $\Delta = \overline{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}^3$, son exposant est 1. Ce monoïde admet 192 éléments simples dont 191 primitifs.

Exemple 5. Le monoïde d'Artin de type H_3 .

Il admet pour présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 \rangle.$$

Ce monoïde admet 120 éléments simples dont 119 primitifs. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 7.

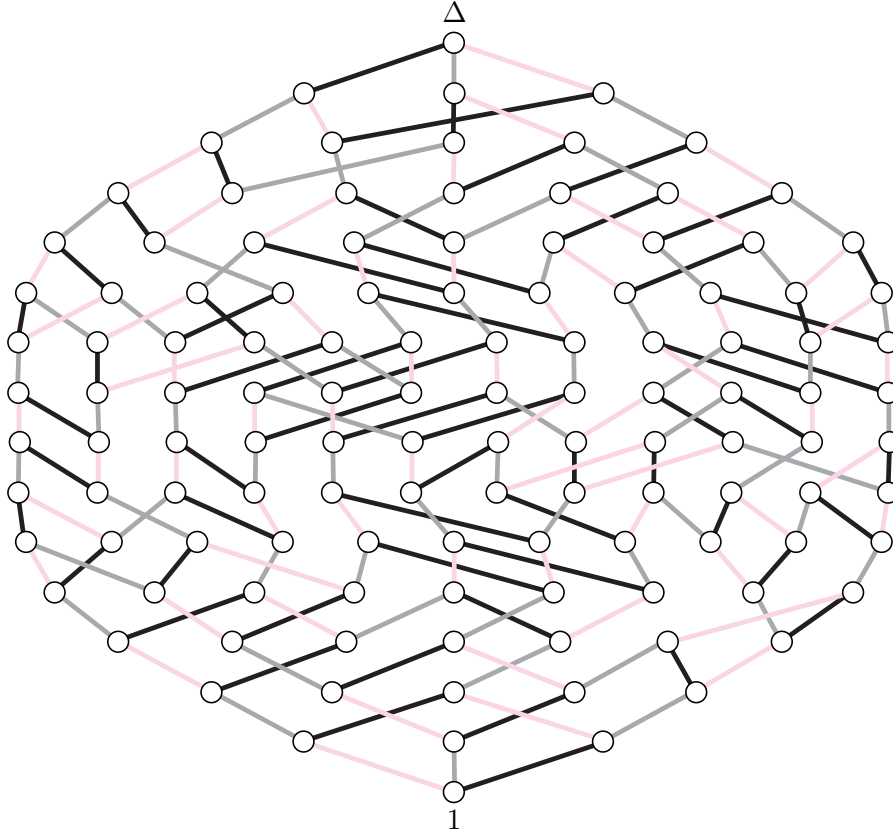


Figure 7. Le graphe caractéristique du monoïde $A^+(H_3)$.

Exemple 6. Monoïdes d'Artin de type $I_2(m)$.

Pour $m \geq 2$, le monoïde $A^+(I_2(m))$ admet la présentation

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 : \Pi_m(\sigma_1\sigma_2) = \Pi_m(\sigma_2\sigma_1) \rangle, \quad (1.2)$$

où $\Pi_\ell(w)$ est le préfixe de longueur ℓ du mot w^∞ . Ce monoïde admet $2m$ éléments simples dont $2m-1$ éléments primitifs. Mentionnons que $A^+(I_2(m))$ est isomorphe au monoïde $\text{fus}^+ \llbracket m^2 \rrbracket$, et que son exposant est $\frac{2}{m \wedge 2}$ (voir le chapitre VI).

Le groupe $A(I_2(m))$ —groupe de fractions de $A^+(I_2(m))$ —admet une autre présentation, qui donne des algorithmes de meilleure complexité pour répondre aux problèmes de mots et de conjugaison. Considérons les m nouveaux générateurs suivants:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sigma_1, \\ \tau_2 &= \sigma_2, \\ \tau_3 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}, \\ &\vdots \\ \tau_m &= \Pi_{m-1}(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} \end{aligned}$$

Alors le groupe $A(I_2(m))$ admet la présentation

$$\langle \tau_1, \dots, \tau_m : \tau_1\tau_m = \tau_2\tau_1 = \tau_3\tau_2 = \dots = \tau_{m-1}\tau_{m-2} = \tau_m\tau_{m-1} \rangle. \quad (1.3)$$

En effet, soit $\equiv_1, \equiv_2$ les congruences de groupe engendrées respectivement par $\{(\Pi_m(\sigma_1\sigma_2), \Pi_m(\sigma_2\sigma_1))\}$ et par $\{(\tau_1\tau_m, \tau_2\tau_1)\} \cup \{(\tau_j\tau_{j-1}, \tau_{j+1}\tau_j), 1 < j < m\}$. Pour $2 \leq i \leq m$ et $\alpha \in \{1, 2\}$, nous avons

$$\tau_i\tau_{i-1} = \Pi_{i-1}(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{i-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1}\Pi_{i-2}(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{i-3}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} \equiv_\alpha \sigma_2\sigma_1. \quad (1.4)$$

Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned} \tau_1\tau_m &= \sigma_1\Pi_{m-1}(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} = \Pi_m(\sigma_1\sigma_2)\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} \\ &\equiv_1 \Pi_m(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} \equiv_1 \sigma_2\sigma_1, \end{aligned}$$

et, par conséquent, d'après (1.4), chacun des mots $\tau_1\tau_m, \tau_2\tau_1, \dots, \tau_m\tau_{m-1}$ est $\equiv_1$ -équivalent au mot $\sigma_2\sigma_1$, ce qui implique que $\equiv_1$ contient $\equiv_2$. Deuxièmement, d'après (1.4), $\tau_1\tau_m \equiv_2 \tau_2\tau_1$ implique

$$\sigma_1\Pi_{m-1}(\sigma_2\sigma_1)\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)^{-1} \equiv_2 \sigma_2\sigma_1.$$

En multipliant par $\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1)$ à droite, nous trouvons

$$\sigma_1\Pi_{m-1}(\sigma_2\sigma_1) \equiv_2 \sigma_2\sigma_1\Pi_{m-2}(\sigma_2\sigma_1),$$

d'où $\Pi_m(\sigma_1\sigma_2) \equiv_2 \Pi_m(\sigma_2\sigma_1)$, ce qui signifie que $\equiv_2$ contient $\equiv_1$.

Le monoïde $BKL^+(I_2(m))$ admettant la présentation (1.3) est un petit monoïde gaussien : il est isomorphe au monoïde $\text{fus}^+[\![2^m]\!]$ et son exposant est $\frac{m}{2 \wedge m}$ (voir le chapitre VI). Il admet $m + 2$ éléments simples dont $m + 1$ primitifs.

2. Monoïdes de tresses de Birman-Ko-Lee

Dans [9], Birman, Ko & Lee proposent une présentation alternative du groupe de tresses :

$$\langle a_{ts}, n \geq t > s \geq 1 : a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts} \text{ pour } (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0 \\ a_{ts}a_{sr} = a_{sr}a_{tr} = a_{tr}a_{ts} \text{ pour } t > s > r \rangle$$

est une présentation du groupe de tresses à n brins. Les nouveaux générateurs sont des conjugués des générateurs classiques d'Artin :

$$a_{ts} = (\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{t-1}\sigma_{t-2}\dots\sigma_{s+1})^{-1}.$$

Cette présentation est celle d'un monoïde que nous désignerons par B_n^{BKL+} —ou par $BKL^+(A_{n-1})$. Pour tout n , B_n^{BKL+} est un petit monoïde gaussien; en effet, comme observé dans [25], le monoïde B_n^{BKL+} admet la présentation complétée

$$\langle a_{ts}, n \geq t > s \geq 1 : a_{ts}a_{rq} = a_{rq}a_{ts} \text{ pour } (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0, \\ a_{ts}a_{sr} = a_{sr}a_{tr} = a_{tr}a_{ts} \text{ pour } t > s > r, \\ a_{ts}a_{tr}a_{sq} = a_{rq}a_{tq}a_{rs} \text{ pour } t > r > s > q, \\ a_{ts}a_{tq}a_{rs} = a_{rq}a_{rt}a_{qs} \text{ pour } r > t > q > s \rangle,$$

et la vérification systématique de la cohérence du complément associé constitue la majeure partie de [9].

Exemple 7. Les monoïdes B_3^{BKL+} et B_4^{BKL+} sont isomorphes aux monoïdes de tresses de Sergiescu (voir [45]) associés aux graphes planaires complets à 3 et 4 sommets. Le monoïde B_3^{BKL+} est isomorphe au monoïde $\text{fus}^+[\![2^3]\!]$ (voir le chapitre VI). Le graphe caractéristique du monoïde B_4^{BKL+} est représenté sur la figure 8.

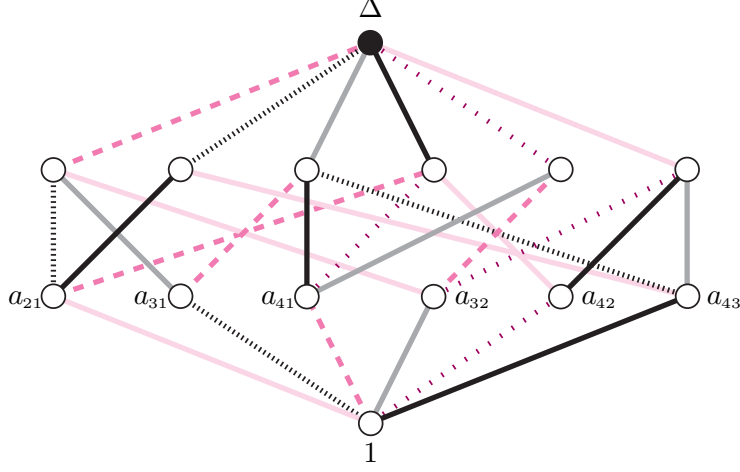


Figure 8. Le graphe caractéristique du monoïde B_4^{BKL+} .

L'élément de Garside de B_n^{BKL+} est

$$\Delta = a_{n(n-1)} a_{(n-1)(n-2)} \cdots a_{21},$$

et, pour $n > 2$, B_n^{BKL+} est d'exposant n . Mentionnons que le nombre d'éléments simples (*resp.* primitifs) dans B_n^{BKL+} est le n -ième nombre de Catalan $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ qui est plus petit que 4^n (*resp.* est $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!} - 1$).

Remarque. Un monoïde de Sergiescu pour le groupe B_5 est de rang au plus 9—correspondant au nombre maximal d'arêtes pour un graphe simple planaire à 5 sommets. Le rang du monoïde B_5^{BKL+} est 10, donc B_5^{BKL+} n'est pas un monoïde de Sergiescu (de même que les monoïdes B_n^{BKL+} pour $n > 5$).

Les résultats [25, proposition 9.2] et [6, proposition 2.26] fournissent des *monoïdes de Birman-Ko-Lee* pour les groupes d'Artin de type B. Pour $n = 2$, nous reconnaissons le monoïde de Birman-Ko-Lee $BKL^+(I_2(4))$ du groupe $A(I_2(4))$ donné dans l'exemple 6. Pour $n = 3$, nous obtenons le petit monoïde gaussien $BKL^+(B_3)$ dont une présentation est donnée par le diagramme de la figure 9, où $b_{i_1 \dots i_p}$ désigne l'atome de $BKL^+(B_3)$ correspondant à l'élément $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p} (\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{p-1}})^{-1}$ de $A(B_3)$ avec $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les atomes de $A^+(B_3)$ (voir l'exemple 3), les relations étant de la forme $b_{w_1} b_{w_2} = b_{w_2} b_{w_3} = \dots = b_{w_s} b_{w_1}$ pour $b_{w_1}, \dots, b_{w_s}$ les sommets sur un même cercle décrits dans le sens horaire. Le graphe caractéristique de $BKL^+(B_3)$ est représenté sur la figure 10. Nous conjecturons que le nombre d'éléments simples de norme k dans $BKL^+(B_n)$ est égal au carré du nombre de graphes à n sommets avec k sommets dans un bloc bipartite distingué pour $k = 0 \dots n$, voir [47, séquence A028657].

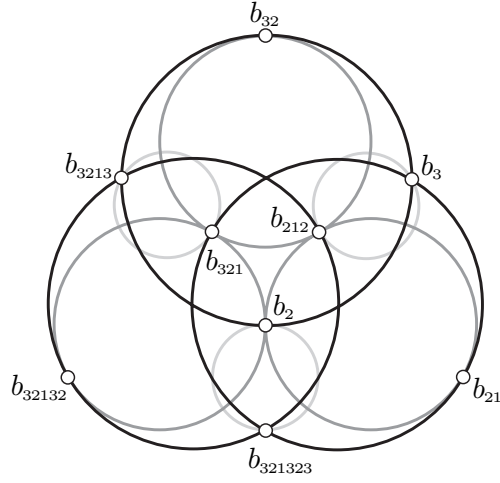


Figure 9. Diagramme pour le monoïde de Birman-Ko-Lee $BKL^+(B_3)$.

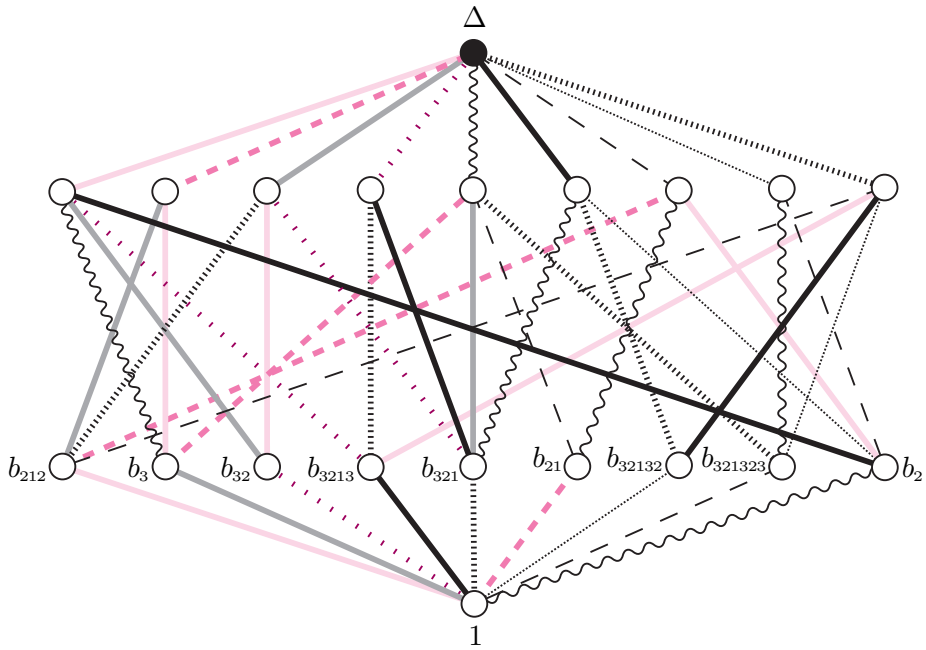


Figure 10. Le graphe caractéristique du monoïde $BKL^+(B_3)$.

Question. Existe-t-il des monoïdes « à la Birman-Ko-Lee » pour les groupes d'Artin sphériques autres que ceux des types A , B et $I_2(m)$?

3. Monoïdes hypercubes de Garside

Dans [29], Garside propose des exemples de groupes analogues aux groupes de tresses : nous y retrouvons les groupes d'Artin de type B_3 et H_3 , mais également une famille de groupes qui ne sont pas des groupes d'Artin.

Exemple 8. Les groupes $\mathcal{H}_n$ —originellement désignés par C_n —sont définis, pour $p > 0$, par

$$\mathcal{H}_{2p-1} = \langle x_1, \dots, x_{2p-1} : x_i x_{2p-i} = x_{2p-i} x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 2p-1, \\ x_i x_j = x_j x_{2p-i} \text{ pour } i < j < 2p-i \rangle,$$

et

$$\mathcal{H}_{2p} = \langle x_1, \dots, x_{2p} : x_i x_{2p-i+1} = x_{2p-i+1} x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 2p, \\ x_i x_j = x_j x_{2p-i+1} \text{ pour } i < j < 2p-i+1 \rangle.$$

Les *monoïdes hypercubes de Garside* $\mathcal{H}_n^+$ admettant les présentations précédentes sont des petits monoïdes gaussiens. Pour $n > 1$, ils constituent des exemples de petits monoïdes gaussiens qui ne sont pas Δ -purs (voir le chapitre IV). En effet, dans $\mathcal{H}_{2p-1}^+$, nous avons $M \setminus x_i = \{1, x_i, x_{2p-i}\}$, d'où $\Delta_{x_i} = x_i x_{2p-i} = \Delta_{x_{2p-i}}$ pour $1 \leq i < p$, et $M \setminus x_p = \{1, x_p\}$, d'où $\Delta_{x_p} = x_p$. Nous obtenons la décomposition $\mathcal{H}_{2p-1}^+ = \bigstar_{i=1}^{\vec{\theta}} M_i$ avec $M_i = \langle x_i : \rangle \times \langle x_{2p-i} : \rangle$ pour $1 \leq i < p$ et $M_p = \langle x_p : \rangle$, et avec $\vec{\theta}$ constituée des permutations

$$\theta_{x_i} = \theta_{x_{2p-i}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_p & \dots & x_{2p-i-1} & x_{2p-i} & x_{2p-i+1} & \dots & x_{2p-2} & x_{2p-1} \\ x_{2p-1} & x_{2p-2} & \dots & x_{2p-i+1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_p & \dots & x_{2p-i-1} & x_{2p-i} & x_{i-1} & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

pour $1 \leq i \leq p$. De même, $\mathcal{H}_{2p}^+$ est $\bigstar_{1 \leq i \leq p}^{\vec{\theta}} (\langle x_i : \rangle \times \langle x_{2p-i+1} : \rangle)$ avec $\vec{\theta}$ constituée des permutations

$$\theta_{x_i} = \theta_{x_{2p-i+1}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{2p-i} & x_{2p-i+1} & x_{2p-i+2} & \dots & x_{2p-1} & x_{2p} \\ x_{2p} & x_{2p-1} & \dots & x_{2p-i+2} & x_i & x_{i+1} & \dots & x_{2p-i} & x_{2p-i+1} & x_{i-1} & \dots & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

pour $1 \leq i \leq p$. En particulier, la proposition IV.1.13 implique que, pour tout entier n , le treillis des simples de $\mathcal{H}_n^+$ est isomorphe à celui des éléments simples de $\mathbf{N}^n$ (voir l'exemple 1), c'est-à-dire au treillis hypercube C_2^n . Voir également l'exemple IV.3.2 pour une étude détaillée du monoïde $\mathcal{H}_3^+$.

4. Monoïdes de noeud

Comme mentionné dans [25], les groupes de noeud torique sont des petits groupes gaussiens.

Exemple 9. Monoïdes de noeud torique.

Pour tous $p, q > 1$ premiers entre eux, le groupe $T_{p,q}$ du noeud (p, q) -torique admet la présentation (de monoïde)

$$\langle x, y : x^p = y^q \rangle,$$

voir [43], et le monoïde $T_{p,q}^+$ admettant cette même présentation est un petit monoïde gaussien. Tout groupe de noeud torique est un petit groupe gaussien [25].

Exemple 10. Monoïdes de Wirtinger de noeud torique.

Pour toute projection de noeud $\mathfrak{p}$, nous appelons *monoïde de Wirtinger associé à $\mathfrak{p}$* le monoïde $T_{\mathfrak{p}}^{w+}$ engendré par les générateurs de Wirtinger avec les relations positives associées, voir [14]. Notons que tout monoïde de Wirtinger est atomique et simplifiable.

Pour tous entiers $r, s > 1$ premiers entre eux, nous notons $\mathfrak{p}_{r,s}$ la projection standard du noeud (r, s) -torique, c'est-à-dire le diagramme de la clôture du diagramme correspondant au mot de tresse $(\sigma_1 \dots \sigma_{r-1})^s$, où les σ_i désignent les générateurs standard (voir [14] et la figure 11). Pour tout $s > 1$ impair, le monoïde $T_{\mathfrak{p}_{2,s}}^{w+}$ est un petit monoïde gaussien isomorphe au monoïde $\text{fus}^+[\mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z}]$ (voir le chapitre VI). En particulier, pour tout $s > 1$ impair, le groupe du noeud $(2, s)$ -torique est isomorphe au groupe $A(I_2(s))$ (voir l'exemple 6).



Figure 11. La projection standard $\mathfrak{p}_{2,5}$ du noeud $(2, 5)$ -torique.

Par contre, le monoïde $T_{\mathfrak{p}_{3,2}}^{w+}$ n'est pas gaussien; il admet une présentation de la forme

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1x_2 = x_2x_3 = x_3x_1, x_2x_4 = x_3x_2 = x_4x_3 \rangle,$$

et, en particulier, les éléments x_2 et x_3 n'admettent pas un unique ppcm (ni à droite, ni à gauche). Remarquons néanmoins que $T_{\mathfrak{p}_{3,2}}^{w+}$ admet un élément Ω dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident et engendrent $T_{\mathfrak{p}_{3,2}}^{w+}$, à savoir $\Omega = x_1x_2^2$. La figure 12 représente le graphe de Cayley de $T_{\mathfrak{p}_{3,2}}^{w+}$ restreint aux diviseurs de Ω .

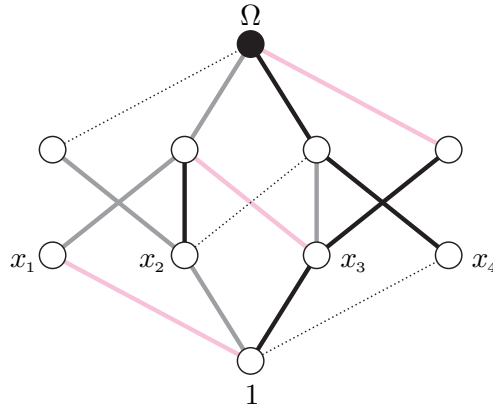


Figure 12. Le monoïde $T_{\mathfrak{p}_{3,2}}^{w+}$ n'est pas gaussien.

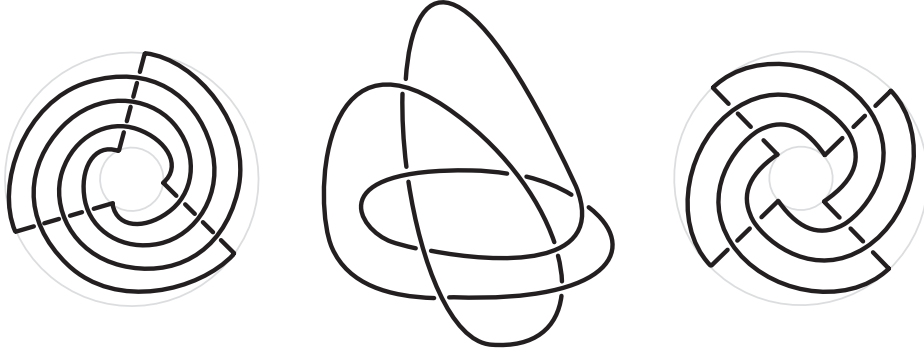


Figure 13. Trois projections du nœud (3,4)-torique : $\mathfrak{p}_{4,3}$, 8_{19} et $\mathfrak{p}_{3,4}$.

Le monoïde $T_{\mathfrak{p}_{3,4}}^{w+}$ est un petit monoïde gaussien; en effet, il est isomorphe au monoïde

$$\langle x_1, \dots, x_8 : x_1x_7 = x_7x_2 = x_6x_1, x_2x_5 = x_5x_3 = x_3x_6, \\ x_1x_4 = x_3x_1 = x_8x_3, x_4x_7 = x_5x_8 = x_7x_5 \rangle,$$

dont une présentation complétée est

$$\begin{aligned} \langle x_1, \dots, x_8 : & x_1x_4x_7 = x_2x_5x_1, x_1x_4 = x_3x_1, x_1x_4x_7 = x_4x_7x_3, \\ & x_1x_4x_7 = x_5x_1x_4, x_1x_7 = x_6x_1, x_1x_7 = x_7x_2, x_1x_4 = x_8x_3, x_2x_5 = x_3x_6, \\ & x_2x_5x_1 = x_4x_7x_3, x_2x_5 = x_5x_3, x_2x_5x_1 = x_6x_1x_5, x_2x_5x_1 = x_7x_2x_5, \\ & x_2x_5x_1 = x_8x_3x_7, x_3x_1x_7 = x_4x_7x_3, x_3x_6 = x_5x_3, x_3x_1x_7 = x_6x_1x_5, \\ & x_3x_1x_7 = x_7x_2x_5, x_3x_1 = x_8x_3, x_4x_7 = x_5x_8, x_4x_7x_3 = x_6x_1x_5, \\ & x_4x_7 = x_7x_5, x_4x_7x_3 = x_8x_3x_7, x_5x_1x_4 = x_6x_1x_5, x_5x_8 = x_7x_5, \\ & x_5x_1x_4 = x_8x_3x_7, x_6x_1 = x_7x_2, x_6x_1x_5 = x_8x_3x_7, x_7x_2x_5 = x_8x_3x_7 \rangle. \end{aligned}$$

La vérification de la cohérence en 336 triplets d'atomes bien choisis permet d'affirmer que la présentation ci-dessus est cohérente (voir la section I.3). L'élément $\Delta^4 = \overline{x_1x_4x_7}^{-4}$ engendre le centre de $T_{\mathfrak{p}_{3,4}}^{w+}$ (voir le chapitre III). Le graphe caractéristique de $T_{\mathfrak{p}_{3,4}}^{w+}$ est représenté sur la figure 14.

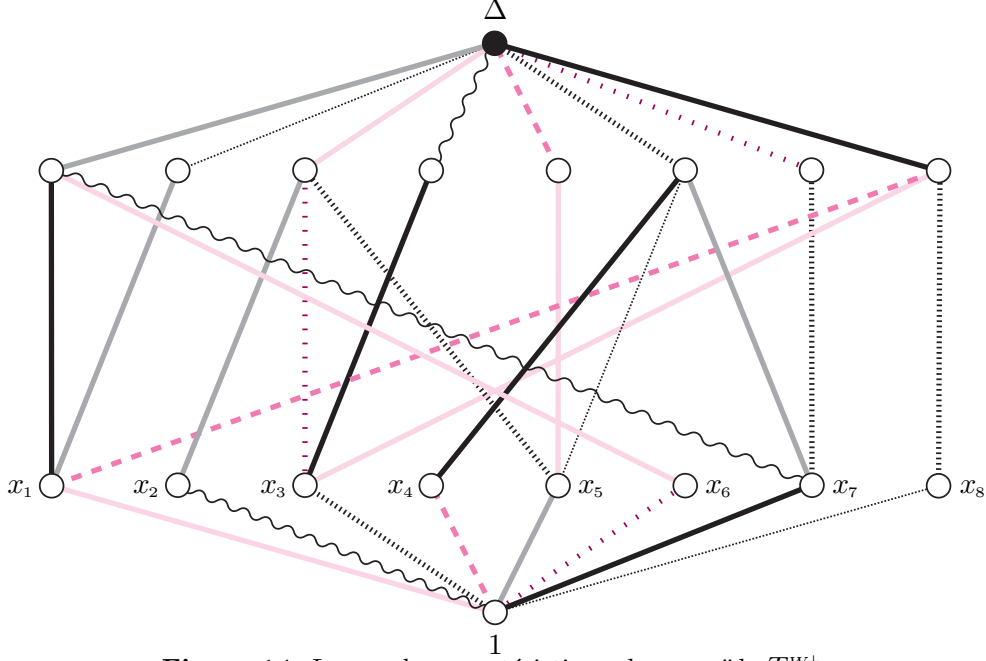


Figure 14. Le graphe caractéristique du monoïde $T_{\mathfrak{p}_{3,4}}^{w+}$.

Par contre, les monoïdes de Wirtinger $T_{\mathfrak{p}_{4,3}}^{w+}$ et $T_{8_{19}}^{w+}$ —associés aux projections $\mathfrak{p}_{4,3}$ et 8_{19} du nœud $(3,4)$ -torique représentées sur la figure 13—ne sont pas gaussiens.

Un théorème de Burde et Zieschang [14, théorème 6.1] affirme qu'un nœud non trivial dont le groupe a un centre non trivial est un nœud torique. En rapprochant ce résultat de la proposition III.3.1, nous déduisons que seuls les nœuds toriques—et le nœud trivial—ont un groupe qui est un petit groupe gaussien.

5. Monoïdes de tresses d'un groupe de réflexions complexe

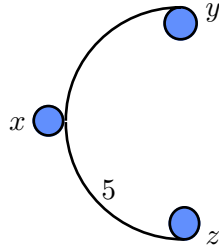
Soit k un corps. Si V est un k -espace vectoriel de dimension finie, un endomorphisme s de V est une *réflexion* si l'espace propre $\ker(s - \text{Id})$ est un hyperplan. Par définition, un groupe de réflexions de V est un sous-groupe fini de $\text{GL}(V)$ qui admet un système de générateurs constitué de réflexions. Quand $k = \mathbf{Q}$, les groupes de réflexions sont les groupes de Weyl finis. Quand $k = \mathbf{R}$, ce sont les groupes de Coxeter finis. Les *groupes de réflexions complexes* sont les groupes de réflexions des $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels. Il est possible de définir des groupes de tresses qui généralisent les groupes d'Artin associés aux groupes de Coxeter [13].

Exemple 11. Monoïdes de type fuseau.

Comme observé dans [25], le groupe de tresses des groupes G_7, G_{11}, G_{19} et le groupe de tresses de G_{22} —voir [13]—sont des petits groupes gaussiens. En effet, ils sont respectivement isomorphes aux groupes de fractions des monoïdes $\text{fus}^+[[3^3]]$ et $\text{fus}^+[[5^3]]$ (voir le chapitre VI). De la même façon, le groupe de tresses du groupe G_{12} est isomorphe au petit groupe gaussien $\text{fus}[[4^3]]$.

Exemple 12. Le monoïde de tresses de G_{15} .

Considérons le diagramme du groupe de tresses du groupe de réflexions complexe G_{15} (voir [13]):



Le groupe de tresses associé à ce diagramme admet la présentation

$$\langle x, y, z : xyz = yzx, zxyzy = xyzzy \rangle.$$

Le monoïde admettant cette même présentation est un petit monoïde gaussien. Il admet 16 éléments simples dont 15 primitifs, son exposant est 1, et son centre est engendré par $\Delta = \overline{xyzyz}$. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 15. Mentionnons que le groupe de tresses de G_{15} est isomorphe au groupe de tresses de G_7, G_{11}, G_{19} [13].

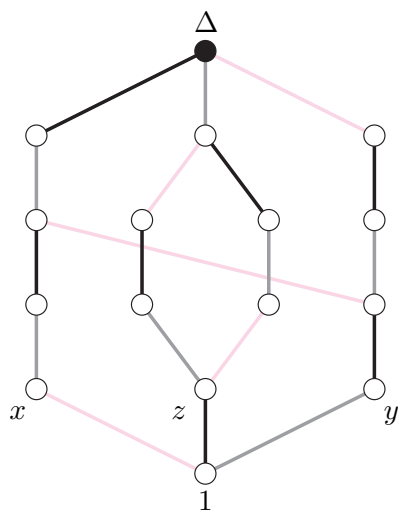
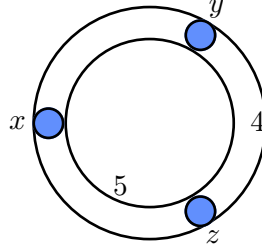


Figure 15. Le graphe caractéristique du monoïde de tresses de G_{15} .

Exemple 13. Le monoïde de tresses de G_{13} . Considérons le diagramme du groupe de tresses du groupe de réflexions complexe G_{13} (voir [13]):



Le groupe de tresses associé à ce diagramme admet la présentation

$$\langle x, y, z : xzxyz = yzxyx, yzxy = zxyz, zxyzx = xyzxy \rangle.$$

Le monoïde admettant cette même présentation est un petit monoïde gaussien. Il admet 90 éléments simples dont 82 primitifs, son exposant est 1, et son centre est engendré par $\Delta = \overline{xyz}^3$. Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 16. Mentionnons que le groupe de tresses de G_{13} est isomorphe au groupe $I_2(6)$, isomorphe au groupe $\text{fus} \llbracket 2^6 \rrbracket$ (voir l'exemple 6 et le chapitre VI).

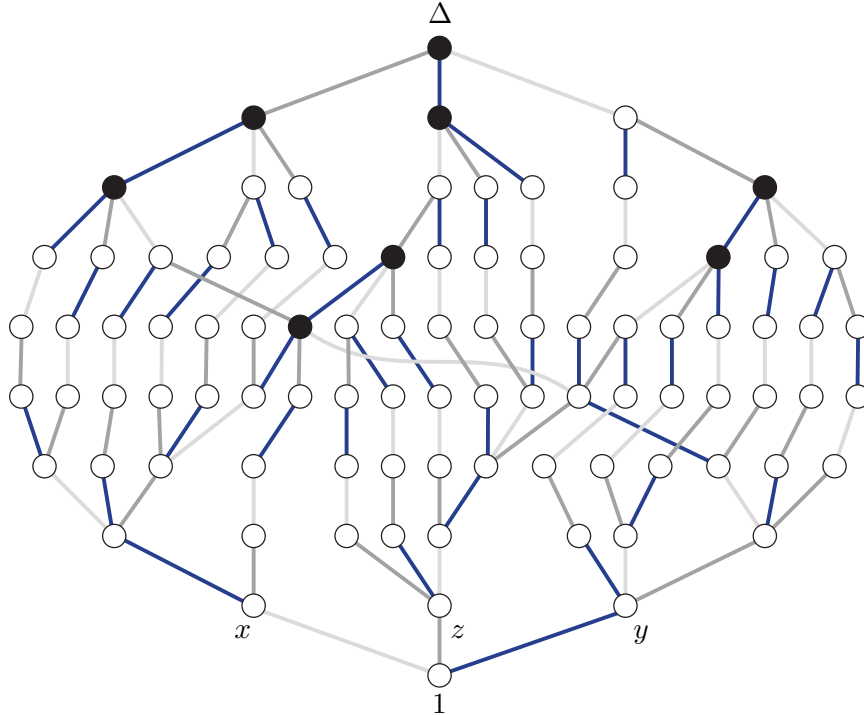
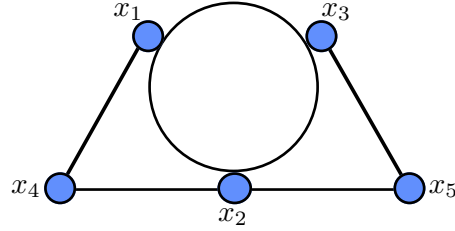


Figure 16. Le graphe caractéristique du monoïde de tresses de G_{13} .

Exemple 14. Le monoïde de tresses du lapin? Dans [13], il est conjecturé que le diagramme



donne une présentation du groupe de tresses du groupe de réflexions complexe G_{31} . Le monoïde M_{31} admettant la présentation correspondante

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : & x_1x_3x_2 = x_3x_2x_1 = x_2x_1x_3, \ x_1x_5 = x_5x_1, \ x_3x_4 = x_4x_3, \\ & x_4x_5 = x_5x_4, \ x_1x_4x_1 = x_4x_1x_4, \ x_2x_4x_2 = x_4x_2x_4, \\ & x_2x_5x_2 = x_5x_2x_5, \ x_3x_5x_3 = x_5x_3x_5 \rangle \end{aligned}$$

n'est pas un monoïde gaussien. En effet, dans [18], Corran montre que le monoïde M_{31} ne se plonge pas dans le groupe de même présentation. Le complément f défini par cette présentation complétée n'est pas cohérent : nous avons par exemple

$$\begin{aligned} & ((x_5 \setminus_f x_2) \setminus_f (x_5 \setminus_f x_1)) \setminus_f ((x_2 \setminus_f x_5) \setminus_f (x_2 \setminus_f x_1)) \\ & = ((x_5x_2) \setminus_f (x_1x_3)) \setminus_f ((x_2x_5) \setminus_f (x_1)) \\ & = (x_1x_3x_5x_2) \setminus_f (x_1x_3x_5) = x_2 \neq \varepsilon. \end{aligned}$$

6. Monoïdes de Sossinski-Vershinin

Dans [48] et [53], Sossinski et Vershinin considèrent les groupes B_n^g des tresses à n brins sur un bretzel de genre g . Le groupe B_n^g admet la présentation

$$\begin{aligned} \langle \tau_1, \dots, \tau_g, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \tau_j \sigma_i = \sigma_i \tau_j \text{ pour } i > 1, \\ \tau_j \sigma_1 \tau_j \sigma_1 = \sigma_1 \tau_j \sigma_1 \tau_j, \\ \tau_j \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \text{ pour } 1 \leq j < g \text{ et } 1 \leq \ell \leq g - j \rangle. \end{aligned}$$

Le groupe B_n^g est le sous-groupe du groupe B_n des tresses à n brins dont les g premiers brins restent non tressés.

Exemple 15. Monoïdes de Sossinski-Vershinin.

Désignons par B_n^{g+} le monoïde

$$\begin{aligned} \langle \tau_1, \dots, \tau_g, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \tau_j \sigma_i = \sigma_i \tau_j \text{ pour } i > 1, \\ \tau_j \sigma_1 \tau_j \sigma_1 = \sigma_1 \tau_j \sigma_1 \tau_j, \\ (\tau_j \tau_{j+\ell}) \sigma_1 (\tau_j \tau_{j+\ell}) \sigma_1 = \sigma_1 (\tau_j \tau_{j+\ell}) \sigma_1 (\tau_j \tau_{j+\ell}) \text{ pour } 1 \leq j < g \\ \text{et } 1 \leq \ell \leq g - j \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que la présentation de B_n^{g+} donne une présentation (de monoïde) pour le groupe B_n^g . De $\tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} \sigma_1 = \sigma_1 \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell}$, nous déduisons $\sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 = \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell}^{-1}$. En remplaçant dans le mot de gauche de $\tau_j \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j$, nous trouvons alors $\tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell}^{-1} = \sigma_1^{-1} \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j$, et s'ensuit $\sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} = \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1$ (1). En multipliant (1) à gauche par τ_j et à droite par σ_1 , nous obtenons $\tau_j \sigma_1 \tau_j (\tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} \sigma_1) = \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1^2$, puis $(\tau_j \sigma_1 \tau_j \sigma_1) \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} = \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1^2$, puis $\sigma_1 \tau_j \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_{j+\ell} = \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1^2$ (2). En utilisant (1) dans le mot de gauche de (2), nous obtenons finalement, après simplification à droite par σ_1 , la relation $\sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} = \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1 \tau_j \tau_{j+\ell} \sigma_1$.

Question. Le monoïde B_n^{g+} se plonge-t-il dans le groupe B_n^g ? Les générateurs τ_i admettent-ils des multiples communs dans B_n^{g+} ? Le monoïde B_n^{g+} admet-il un élément de Garside?

7. Présentations non standard du groupe B_3

Nous présentons une famille infinie de monoïdes dont le groupe de fractions est le groupe des tresses à 3 brins; parmi eux, deux seulement sont des petits monoïdes gaussiens.

Pour tout entier k positif, nous désignons par $M_{B,k}$ le monoïde

$$\langle x, y : xyx = yx^k y \rangle.$$

Pour tout entier k positif, le monoïde $M_{B,k}$ admet le groupe des tresses B_3 pour groupe de fractions. En effet, nous observons d'abord que la condition d'Adjan est vérifiée—voir [1],[42]. Le monoïde $M_{B,k}$ se plonge donc dans son groupe de fraction. Maintenant, l'application

$$\begin{aligned} \{\sigma_1, \sigma_2\} &\longrightarrow \{x, y\}^* \\ \sigma_1 &\longmapsto x \\ \sigma_2 &\longmapsto yx^{k-1} \end{aligned}$$

se prolonge en un homomorphisme injectif du groupe $\langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ dans le groupe $\langle x, y : xyx = yx^k y \rangle$, et cet homomorphisme est clairement surjectif.

Exemple 16. Les monoïdes $M_{B,0}$ et $M_{B,1}$.

Admettant seulement huit simples, le monoïde $M_{B,0}$ est le plus petit exemple des petits monoïdes gaussiens dont l'élément de Garside n'est pas le ppcm des atomes (chronologiquement, c'est le premier observé). Son graphe caractéristique est représenté sur la figure 20. Le monoïde $M_{B,1}$ est le monoïde B_3^+ , monoïde d'Artin du groupe B_3 , voir l'exemple 2. Les monoïdes $M_{B,0}$ et $M_{B,1}$ sont les seuls—parmi les monoïdes $M_{B,k}$ —qui soient des petits monoïdes gaussiens.

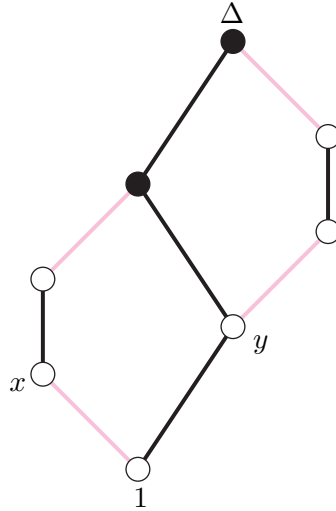


Figure 20. Le graphe caractéristique du monoïde $M_{B,0}$.

Définissons ici deux nouvelles classes de monoïdes, chacune d'elles contenant strictement tous les petits monoïdes gaussiens.

Définition. (i) Un monoïde M est *quasi-gaussien* si M est conique, simplifiable, et si deux éléments quelconques de M admettent un ppcm à droite et à gauche et un pgcd à droite et à gauche.

(ii) Supposons que M est quasi-gaussien. Nous disons que M est un *sphérique* si M contient un élément de Garside (toujours défini comme un élément Δ de M dont les diviseurs à gauche et droite coïncident et engendrent M , voir la section I.1).

(iii) Tout monoïde quasi-gaussien satisfait aux conditions de Ore [17], et se plonge donc dans son groupe de fractions. Nous dirons qu'un groupe G est un *groupe quasi-gaussien* (*resp. quasi-gaussien sphérique*) s'il existe un monoïde quasi-gaussien M (*resp. quasi-gaussien sphérique*) tel que G est le groupe de fractions de M .

Exemple 17. Le monoïde $M_{B,2}$.

Le monoïde $M_{B,2} = \langle x, y : xyx = yx^2y \rangle$ constitue un exemple de monoïde qui n'est pas noethérien, mais qui pourtant possède quelques-unes des bonnes propriétés des petits monoïdes gaussiens.

En posant $a_\ell = \overline{y^{\ell+2}xyx}$ pour tout entier $\ell \geq 0$, nous trouvons

$$a_{\ell+1}y = \overline{(y^{\ell+3}xyx)y} = \overline{y^{\ell+2}(yxy)xy} = \overline{y^{\ell+2}x(yxy)} = a_\ell,$$

pour tout $\ell \geq 0$, ce qui témoigne du caractère non noethérien du monoïde $M_{B,2}$. Le complément f associé à la présentation $\langle x, y : xyx = yxxy \rangle$ est défini par $f(x, y) = yx$ et $f(y, x) = xxy$. D'une part, d'après la proposition I.3.11, f est cohérent. D'autre part, $u \setminus_f v$ existe pour tous mots u, v de $\{x, y\}^*$: en effet, la clôture (infinie) de $\{x, y\}$ par $\setminus_f$ existe et est un ensemble de mots dont l'ensemble des images dans $M_{B,2}$ est :

$$\begin{aligned} P = \{ & 1, x, xx, xxx, xxy, xxy, xxyxy, xxyxyxy, xy, xyxy, xyxyxy, xxyxyyy^i, \\ & xxyxyyy^i x, xxyxyyy^i xx, xxyxyyy^i xy, xxyyy^i, xxyyy^i x, xxyyy^i xx, \\ & xxyyy^i xy, xxyyy^i, xxyyy^i x, xxyyy^i xx, xxyyy^i xy, xxyyy^i, \\ & xxyyy^i xxyyy^i xx, xxyyy^i xy, y, yx, yxx, yxxx, yxxx, yxy, yxyxy, yxyyy^i, \\ & yxyyy^i, yxyyy^i xx, yxyyy^i xy, yyy^i, yyy^i x, yyy^i xx, yyy^i xy, \quad i \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Mentionnons que les éléments de P —qui seraient les "primitifs" de $M_{B,2}$ —ne possèdent pas toujours un unique représentant comme produit d'atomes, mais les

motS donnés ci-dessus sont deux à deux non équivalents. L'ensemble infini P admet un ppcm à droite, à savoir $\Delta = (x \vee y)^3$ —voir la figure 21.

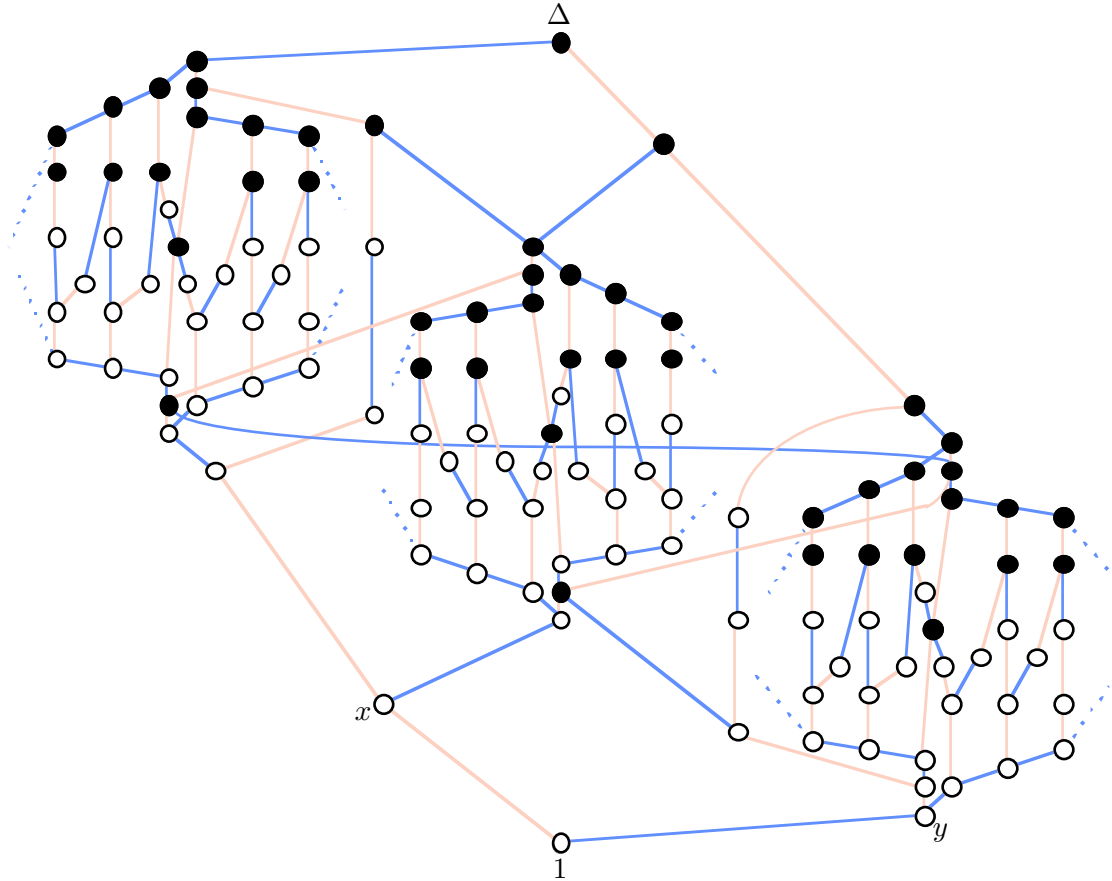


Figure 21. Le graphe caractéristique du monoïde $M_{B,2}$.

Plus généralement, les monoïdes $M_{B,k}$ sont quasi-gaussiens pour $k \geq 0$. Cependant, comme annoncé, seuls $M_{B,0}$ et $M_{B,1}$ sont gaussiens, puisque, pour $k \geq 2$, les monoïdes $M_{B,k}$ ne sont pas noethériens. Tous admettent un élément de Garside.

Il existe bien d'autres exemples de monoïdes quasi-gaussiens qui ne soient pas gaussiens : le monoïde $\langle x, y : xy^2x = y^2 \rangle$ est un monoïde quasi-gaussien sphérique. Remarquer que le groupe de fractions de ce dernier est isomorphe au petit groupe gaussien $\langle z, t : z^2 = t^4 \rangle$.

Question. Existe-il des groupes quasi-gaussiens (sphériques ou non) qui ne soient pas gaussiens?

VI. Treillis de type fuseau

Nous ne connaissons pas de description intrinsèque des treillis associés à un petit monoïde gaussien. Dans ce chapitre, nous considérons les petits monoïdes gaussiens dont le treillis des éléments simples a la forme d'un fuseau. Nous décrivons en terme de présentation l'ensemble de ces monoïdes, et montrons

Proposition. *Tout petit monoïde gaussien est la projection d'un petit monoïde gaussien dont le treillis des simples est de type fuseau.*

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 1, nous définissons les *monoïdes de type fuseau*. La section 2 est consacrée à la complète description en terme de présentation des monoïdes de type fuseau. Dans la section 3, nous établissons la proposition principale et étudions finalement plusieurs exemples.

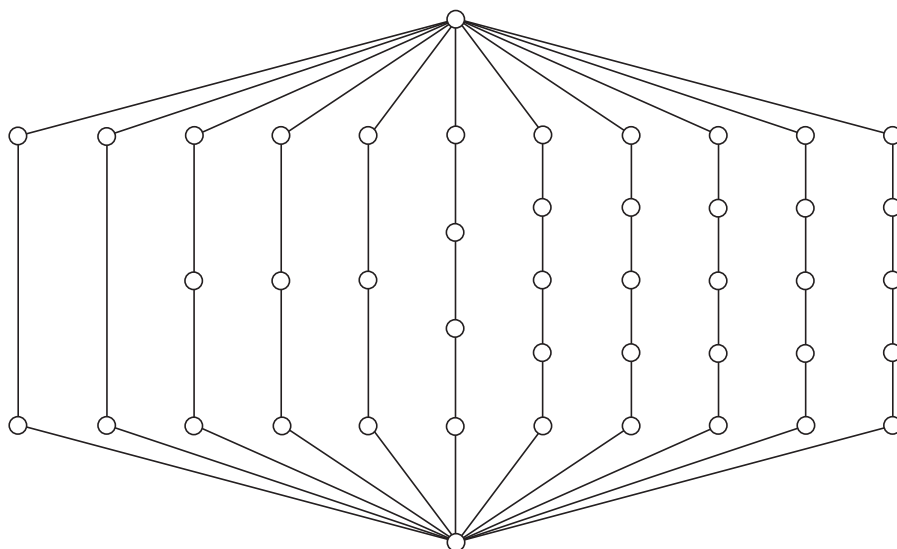
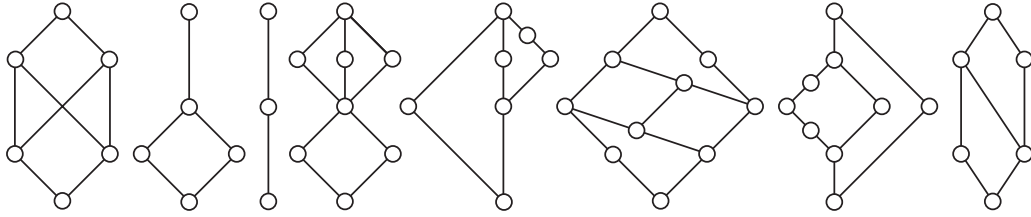


Figure 1. Un treillis de type fuseau.

1. Définition et exemples

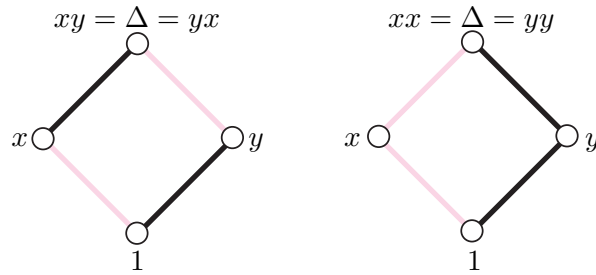
A chaque petit monoïde gaussien est associé un treillis fini, à savoir le treillis de ses éléments simples (voir la section I.2). Il est facile de voir que, d'une part, un treillis quelconque donné n'est pas nécessairement le treillis des simples d'un petit monoïde gaussien, et que, d'autre part, les treillis des simples de deux petits monoïdes gaussiens non isomorphes peuvent être isomorphes.

Exemple 1.1. Les diagrammes de Hasse suivants ne sont pas ceux de treillis des simples de petits monoïdes gaussiens :



En effet, le premier diagramme n'est simplement pas le diagramme d'un treillis. Les deuxième, quatrième et sixième diagrammes ne sont pas filtrants. La chaîne à 3 éléments (troisième diagramme) ne peut être le treillis des simples d'un petit monoïde gaussien, puisque le seul monoïde gaussien à un générateur est le monoïde libre de rang 1 (voir l'exemple V.1). Sur le cinquième diagramme, le maximum a trois prédécesseurs immédiats, alors que le minimum n'a que deux successeurs immédiats, ce qui interdit que ce diagramme soit celui du treillis des diviseurs d'un élément Δ , dont les diviseurs à gauche et à droite coïncident par définition. Les deux diagrammes de droite sont autoduaux et filtrant, cependant un étiquetage systématique permet de montrer qu'ils ne peuvent être les treillis des simples de petits monoïdes gaussiens. Cela étant, nous ne connaissons pas d'algorithme efficace qui décide si un treillis fini donné est ou non le treillis des simples d'un petit monoïde gaussien.

Exemple 1.2. Les monoïdes $\langle x, y : xy = yx \rangle$ et $\langle x, y : xx = yy \rangle$ sont petits gaussiens (voir les exemples V.1 et V.9). Ils ne sont pas isomorphes : le premier est abélien, le second non. Leurs éléments simples admettent le même treillis, en l'occurrence le treillis carré C_2^2 :



Il existe une famille de treillis dont tous se trouvent être le treillis des simples d'au moins un petit monoïde gaussien.

Définition 1.3. Un treillis fini $(S, \wedge, \vee, 0, 1)$ est *de type fuseau* s'il n'est pas une chaîne de hauteur supérieure ou égale à 2 et si tout couple (a, b) d'éléments de S vérifie

$$(a \wedge b, a \vee b) \in \{(a, b), (b, a), (0, 1)\}.$$

Nous appelons *monoïde de type fuseau* tout petit monoïde gaussien dont le treillis des éléments simples est de type fuseau.

Exemple 1.4. Les monoïdes d'Artin sphériques à deux atomes, et plus généralement les monoïdes de Garside à deux atomes [25], sont de type fuseau. Les monoïdes $BKL^+(I_2(m))$ de l'exemple V.6 sont de type fuseau. Les petits monoïdes gaussiens de l'exemple V.11 sont de type fuseau également.

2. Présentations des monoïdes de type fuseau

Nous allons voir que tout treillis de type fuseau est le treillis des simples d'au moins un petit monoïde gaussien. Notre objectif est de déterminer, pour chaque treillis de type fuseau, tous les monoïdes auxquels il est associé. Ainsi, nous aurons obtenu une description complète (en terme de présentation) de la classe des monoïdes de type fuseau.

Tout d'abord, nous choisissons un codage des treillis de type fuseau.

Définition 2.1. Soit T un treillis de type fuseau, n le nombre des hauteurs possibles des chaînes maximales de T , et $h_1, \dots, h_n$ ces hauteurs. Pour $1 \leq i \leq n$, nous désignons par m_i le nombre de chaînes maximales distinctes de hauteur h_i dans T . Le *symbole* du treillis T est la suite

$$(h_1^{m_1} \cdot h_2^{m_2} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n}).$$

En particulier, les entiers h_i et m_i sont strictement positifs pour $1 \leq i \leq n$. Afin d'obtenir unicité du symbole, nous imposons l'ordre lexicographique croissant sur les paires (h_i, m_i) .

Exemple 2.2. Le symbole du treillis de la figure 1 est $(3^2 \cdot 4^3 \cdot 5 \cdot 7^5)$.

Définition 2.3. Soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ un alphabet non vide et $(w_1, \dots, w_n)$ une suite de mots non vides sur cet alphabet. Nous disons que la suite $(w_1, \dots, w_n)$ est une *partition croissante* de $\{x_1, \dots, x_m\}$ si nous avons $w_1 \dots w_n = x_1 \dots x_m$ et $|w_1| \leq \dots \leq |w_n|$.

Notation. Pour $w = x_1 \dots x_m$ et $1 \leq j \leq m$, nous désignons par $\Pi_h^j(w)$ le préfixe de longueur h du mot $(x_j x_{j+1} \dots x_m x_1 \dots x_{j-1})^\infty$.

Le fait essentiel est que, dans un monoïde de type fuseau, tout simple autre que son élément de Garside Δ admet une unique décomposition en produit d'atomes. Aussi, si u est un mot sur les atomes représentant un élément simple non trivial, nous pouvons, sans confusion possible, noter $\partial(u)$ le mot représentant l'élément simple $\partial(\bar{u})$, où $\bar{u}$ désigne l'élément représenté par u .

Nous allons à présent déterminer tous les monoïdes de type fuseau correspondant à un symbole de treillis donné. D'après la proposition I.3.3, un petit monoïde gaussien admet une présentation associée à un sélecteur. De la remarque ci-dessus, nous déduisons alors que pour obtenir une présentation d'un monoïde de type fuseau, il suffit de déterminer l'ensemble $\text{Mots}(\Delta)$ des mots sur les atomes représentant son élément de Garside.

Proposition 2.4. *Supposons que M est un monoïde de type fuseau et que le symbole du treillis de ses simples est (h^m) avec $h, m > 1$. Alors il existe un alphabet $\{x_1, \dots, x_m\}$, un entier k et une partition croissante $(u_1, \dots, u_k)$ de $\{x_1, \dots, x_m\}$ de sorte que M soit isomorphe au monoïde*

$$\langle x_1, \dots, x_m : \Pi_h^1(u_1) = \dots = \Pi_h^{|u_1|}(u_1) = \dots = \Pi_h^1(u_k) = \dots = \Pi_h^{|u_k|}(u_k) \rangle.$$

Démonstration. Nous construisons inductivement la suite de mots $(u_1, \dots, u_k)$. Supposons que $(u_1, \dots, u_{i-1})$ avec $i \leq k$ ait été définie de sorte que nous ayons

$$\Delta = \overline{\Pi_h^1(u_1)} = \dots = \overline{\Pi_h^{|u_1|}(u_1)} = \dots = \overline{\Pi_h^1(u_{i-1})} = \dots = \overline{\Pi_h^{|u_{i-1}|}(u_{i-1})}.$$

Construisons alors le mot u_i . Soit x un atome n'apparaissant pas dans le mot $u_1 \dots u_{i-1}$, soit w le mot $x\partial(x)$, et v le mot $\partial(x)$. Nous définissons les mots $w^{(j)}$ pour $1 \leq j \leq h$ par

$$\begin{cases} w^{(1)} = w, \\ w^{(j)} = x^{(j)} v^{(j)} \partial^2(x^{(1)} \dots x^{(j-1)}) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq h. \end{cases}$$

avec $(v^{(j)})_{1 \leq j \leq h}$ la suite de mots et $(x^{(j)})_{1 \leq j \leq h}$ la suite d'atomes définies par:

$$\begin{cases} v^{(1)} = v, \\ x^{(1)} = x, \\ v^{(j-1)} = x^{(j)} v^{(j)} \quad \text{pour } 2 \leq j \leq h. \end{cases}$$

Le mot w étant de longueur h , par construction, le mot $v^{(h)}$ est vide, et, de proche en proche, nous obtenons

$$\begin{aligned} w^{(h)} &= x^{(h)} \partial^2(x^{(1)} \dots x^{(h-1)}), \\ &\vdots \\ w^{(h-j+1)} &= x^{(h-j+1)} \dots x^{(h)} \partial^2(x^{(1)} \dots x^{(h-j)}), \\ &\vdots \\ w^{(2)} &= x^{(2)} \dots x^{(h)} \partial^2(x^{(1)}), \\ w^{(1)} &= x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(h)}. \end{aligned}$$

Les mots $w^{(1)}, \dots, w^{(h)}$ sont les h premiers mots de la suite (infinie) de mots $(w^{(j)})_{j \geq 1}$ définie par

$$w^{(j)} = \partial^{2E(j/h)}(x^{(j[h])} \dots x^{(h)}) \partial^{2(E(j/h)+1)}(x^{(1)} \dots x^{(j[h]-1)}),$$

où $E(p)$ désigne la partie entière de p , et où $j[h]$ est le représentant modulo h de j dans l'intervalle $[1, h]$. Cette suite est périodique, et il existe un plus petit entier $\ell(w)$ vérifiant $w^{(\ell(w))} = w$. Finalement, nous trouvons $x^{(j)} = \partial^{2E(j/h)}(x^{(j[h])})$, et déduisons $u_i = x^{(1)} \dots x^{(\ell(w)-1)}$, ce qui termine la récurrence. $\square$

Proposition 2.5. *Supposons que M est un monoïde de type fuseau et que le symbole du treillis de ses simples est $(h_1^{m_1} \dots h_n^{m_n})$ avec $h_i > 1$ pour $1 \leq i \leq n$ et $m_1 + \dots + m_n > 1$. Alors, pour chaque entier i avec $1 \leq i \leq n$, il existe un alphabet $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}\}$, un entier k_i et une partition croissante $(u_{i,1}, \dots, u_{i,k_i})$ de $\{x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}\}$ de sorte que M soit isomorphe au monoïde*

$$\begin{aligned} \langle x_{1,1}, \dots, x_{n,m_n} : \Pi_{h_1}^1(u_{1,1}) &= \dots = \Pi_{h_1}^{|u_{1,1}|}(u_{1,1}) = \dots = \Pi_{h_1}^1(u_{1,k_1}) \\ &= \dots = \Pi_{h_1}^{|u_{1,k_1}|}(u_{1,k_1}) \\ &= \dots = \Pi_{h_n}^1(u_{n,1}) = \dots = \Pi_{h_n}^{|u_{n,1}|}(u_{n,1}) \\ &= \dots = \Pi_{h_n}^1(u_{n,k_n}) = \dots = \Pi_{h_n}^{|u_{n,k_n}|}(u_{n,k_n}) \rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Démonstration. Désignons par $\text{Mots}_h(\Delta)$ l'ensemble des mots de longueur h représentant Δ . Nous montrons que, pour tout entier i avec $1 \leq i \leq n$, un mot de $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$ ne contient que des lettres qui sont initiales de mots de $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$. Il suffira alors d'appliquer la proposition 2.4 à chaque composante $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$ de $\text{Mots}(\Delta)$.

Soit i un entier fixé entre 1 et n , soit w un mot de $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$, soit x sa lettre initiale, et soit v le mot vérifiant $w = xv$. Nous définissons alors la suite finie

de mots $(w^{(j)})_{1 \leq j \leq h_i}$ comme dans la démonstration précédente. Tous les mots de $(w^{(j)})_{1 \leq j \leq h_i}$ sont dans $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$. Par construction, le mot $v^{(h_i)}$ est vide, et, de proche en proche, nous obtenons

$$w^{(h_i)} = x^{(h_i)} \partial^2(x^{(1)} \dots x^{(h_i-1)}), \quad \dots, \quad w^{(1)} = x^{(1)} x^{(2)} \dots x^{(h_i)}.$$

Nous en déduisons que le mot w est exclusivement composé de lettres qui sont initiales de mots de $\text{Mots}_{h_i}(\Delta)$. $\square$

Nous retrouvons ainsi les monoïdes de Garside de [25, exemple 6].

Désignons par $\mu(m)$ le nombre de partitions de l'entier m . D'après la proposition I.2.4, deux petits monoïdes gaussiens sont isomorphes si et seulement si leurs graphes caractéristiques sont isomorphes. Nous obtenons

Corollaire 2.6. *Soit T un treillis de type fuseau de symbole $(h_1^{m_1} \dots h_n^{m_n})$. Alors il existe, à isomorphisme près, exactement $\prod_{i=1}^n \mu(m_i)$ monoïdes de type fuseau dont le treillis des éléments simples est T .*

Définition 2.7. Le monoïde admettant la présentation (2.1) est désigné par

$$\text{fus}^+ \llbracket h_1^{|u_{1,1}|} \dots h_1^{|u_{1,k_1}|} \cdot h_2^{|u_{2,1}|} \dots h_n^{|u_{n,k_n}|} \rrbracket,$$

et son groupe de fractions par $\text{fus} \llbracket h_1^{|u_{1,1}|} \dots h_1^{|u_{1,k_1}|} \cdot h_2^{|u_{2,1}|} \dots h_n^{|u_{n,k_n}|} \rrbracket$.

Exemple 2.8. Considérons à nouveau le treillis de la figure 1. Son symbole étant $(3^2 \cdot 4^3 \cdot 5 \cdot 7^5)$, il est le treillis des simples de $\mu(2)\mu(3)\mu(1)\mu(5) = 42$ petits monoïdes gaussiens, à isomorphisme près. Parmi eux, le monoïde

$$\text{fus}^+ \llbracket 3^2 \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 7^3 \rrbracket$$

admet la présentation

$$\begin{aligned} & \langle x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,1}, x_{5,1}, x_{5,2}, x_{6,1}, x_{6,2}, x_{6,3} : \\ & \quad x_{1,1}x_{1,2}x_{1,1} = x_{1,2}x_{1,1}x_{1,2} = x_{2,1}^4 = x_{3,1}x_{3,2}x_{3,1}x_{3,2} \\ & \quad = x_{3,2}x_{3,1}x_{3,2}x_{3,1} = x_{4,1}^5 = x_{5,1}x_{5,2}x_{5,1}x_{5,2}x_{5,1}x_{5,2}x_{5,1} \\ & \quad = x_{5,2}x_{5,1}x_{5,2}x_{5,1}x_{5,2}x_{5,1}x_{5,2} = x_{6,1}x_{6,2}x_{6,3}x_{6,1}x_{6,2}x_{6,3}x_{6,1} \\ & \quad = x_{6,2}x_{6,3}x_{6,1}x_{6,2}x_{6,3}x_{6,1}x_{6,2} = x_{6,3}x_{6,1}x_{6,2}x_{6,3}x_{6,1}x_{6,2}x_{6,3} \rangle. \end{aligned}$$

Nous relierons le code d'un monoïde de type fuseau à son exposant.

Lemme 2.9. *L'exposant du monoïde $\text{fus}^+[\![h^m]\!]$ est*

$$e = \frac{m}{\text{pgcd}(h, m)}.$$

Démonstration. Par définition, le monoïde $\text{fus}^+[\![h^m]\!]$ admet la présentation

$$\langle x_{1,1}, \dots, x_{1,m} : \Pi_h^1(x_{1,1} \dots x_{1,m}) = \Pi_h^2(x_{1,1} \dots x_{1,m}) = \dots = \Pi_h^m(x_{1,1} \dots x_{1,m}) \rangle.$$

Pour $1 \leq j \leq m$, nous écrivons x_j au lieu de $x_{1,j}$. Comme précédemment, $j[m]$ est l'entier représentant j modulo m dans l'intervalle $[1, m]$. Par définition, pour tout entier j , le mot

$$x_{j[m]}x_{j+1[m]} \dots x_{j+h-1[m]}$$

représente Δ . Soit j un entier avec $1 \leq j \leq m$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x_j \Delta &= x_j(x_{j+1[m]} \dots x_{j+h-1[m]}x_{j+h[m]}) \\ &= (x_jx_{j+1[m]} \dots x_{j+h-1[m]})x_{j+h[m]} \\ &= \Delta x_{j+h[m]}, \end{aligned}$$

ce qui implique $\partial^2(x_j) = x_{j+h[m]}$ pour tout entier j avec $1 \leq j \leq m$. Une récurrence immédiate donne

$$\partial^{2p}(x_j) = x_{j+ph[m]},$$

pour p et j entiers avec $1 \leq j \leq m$. Soit e l'exposant de $\text{fus}^+[\![h^m]\!]$. Alors e est le plus petit entier positif satisfaisant $j = j + eh[m]$ pour tout entier j avec $1 \leq j \leq m$. Par conséquent, e est le plus petit entier positif tel qu'il existe un entier p satisfaisant $eh = pm$. Nous en déduisons $e = m/\text{pgcd}(h, m)$. $\square$

Nous obtenons:

Proposition 2.10. *L'exposant du monoïde $\text{fus}^+[\![h_1^{m_1} \dots h_n^{m_n}]\!]$ est*

$$e = \text{ppcm} \left(\frac{m_1}{\text{pgcd}(h_1, m_1)}, \dots, \frac{m_n}{\text{pgcd}(h_n, m_n)} \right).$$

Exemple 2.11. Les exposants possibles pour les monoïdes admettant un treillis des simples isomorphe à celui de la figure 1 sont 30, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, et 1. L'exposant de $\text{fus}^+[\![3^2 \cdot 4 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 7^3]\!]$ est 6.

3. Projections des monoïdes de type fuseau

Nous montrons ici que tout petit monoïde gaussien est la projection d'un monoïde de type fuseau. Etant donné un petit monoïde gaussien, l'idée est de peigner le treillis de ses éléments simples afin d'obtenir un treillis de type fuseau.

Rappelons que, si M est un petit monoïde gaussien d'ensemble d'atomes A , l'ensemble des mots sur A qui représentent Δ est désigné par $\text{Mots}(\Delta)$.

Définition 3.1. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Pour tout mot w de $\text{Mots}(\Delta)$, nous définissons $\vec{w}$ comme la sous-suite période de la suite infinie $(w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \dots)$ définie par

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= w, \\ w^{(j)} &= v^{(j-1)} \partial^2(y^{(j-1)}) \quad \text{pour } j \geq 2, \end{aligned}$$

où $y^{(j-1)}$ est la lettre initiale du mot $w^{(j-1)}$ et $v^{(j-1)}$ le mot vérifiant $w^{(j-1)} = y^{(j-1)}v^{(j-1)}$. D'après la proposition I.2.5, l'automorphisme ∂^2 induit une permutation des atomes, donc la suite ci-contre est bien définie.

Par construction, pour tout mot w de $\text{Mots}(\Delta)$, les mots apparaissant dans $\vec{w}$ appartiennent à $\text{Mots}(\Delta)$ et ont même longueur. Maintenant, la suite $\vec{w}$ est finie : il existe un entier p satisfaisant $w^{(n+1)} = w$ et, par conséquent, satisfaisant $w^{(pi+j)} = w^{(j)}$ pour i et j entiers positifs quelconques.

Définition 3.2. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Pour tout mot w dans $\text{Mots}(\Delta)$, nous désignons par $h(\vec{w})$ la longueur commune des mots de la suite $\vec{w}$, et par $m(\vec{w})$ la longueur de la suite $\vec{w}$.

Nous obtenons des partitions de l'ensemble $\text{Mots}(\Delta)$:

Définition 3.3. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Pour $w_1, \dots, w_n$ des mots dans $\text{Mots}(\Delta)$, la suite $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ est une *partition croissante* de $\text{Mots}(\Delta)$ —ce que nous notons $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n) \models \text{Mots}(\Delta)$ —si les suites $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ sont disjointes, si $\text{Mots}(\Delta)$ est la réunion des mots des suites $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$, et si nous avons $(h(\vec{w}_i), m(\vec{w}_i)) \leq_{\text{Lex}} (h(\vec{w}_{i+1}), m(\vec{w}_{i+1}))$ pour $1 \leq i \leq n-1$, où $\leq_{\text{Lex}}$ désigne l'ordre lexicographique.

Lemme 3.4. Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors, pour toute partition croissante $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ de $\text{Mots}(\Delta)$, la suite d'entiers

$$(h(\vec{w}_1), m(\vec{w}_1), \dots, h(\vec{w}_n), m(\vec{w}_n))$$

ne dépend que de la classe d'isomorphisme de M .

Définition 3.5. Supposons que M est un petit monoïde gaussien, et A est l'ensemble de ses atomes. Nous appelons le *code* de M la suite $\llbracket h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \rrbracket$ associée à M comme dans le lemme 3.4. Fixons alors l'alphabet

$$X = \{x_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i}.$$

Pour toute partition croissante $p = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ de $\text{Mots}(\Delta)$, l'application de X vers A qui, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m_i$, à $x_{i,j}$ associe $y^{(j)}$, où $y^{(j)}$ est la lettre initiale du j -ième mot de $\vec{w}_i$, se prolonge en un homomorphisme de monoïde

$$\begin{aligned} \pi_p : X^* &\longrightarrow A^* \\ x_{i,j} &\longmapsto y^{(j)}, \end{aligned}$$

et, par construction, l'homomorphisme π_p est surjectif.

Proposition 3.6. Supposons que M est un petit monoïde gaussien, A est l'ensemble de ses atomes, et $\llbracket h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \rrbracket$ est son code. Alors, pour toute partition croissante $p = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ de $\text{Mots}(\Delta)$, l'homomorphisme π_p de X^* sur A^* induit un homomorphisme surjectif de $\text{fus}^+ \llbracket h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \rrbracket$ sur M .

Démonstration. Soit M_F le monoïde $\text{fus}^+ \llbracket h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_n^{m_n} \rrbracket$, et Δ, Δ_F les éléments de Garside respectifs de M et M_F . Par définition, M_F est le monoïde quotient de X^* par la congruence engendrée par les paires (u_i, u_j) avec u_i, u_j mots sur X représentant de Δ_F . Maintenant, pour tout mot u sur X représentant Δ_F , $\pi(u)$ est un mot sur A représentant Δ . En effet, supposons que u soit un mot sur X représentant Δ_F , alors il existe des entiers i, j avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, et satisfaisant $u = \Pi_{h_i}(x_{i,j}, \dots, x_{i,m_i}, x_{i,1}, \dots, x_{i,j-1})$. Nous obtenons

$$\pi(u) = \Pi_{h_i}(\pi(x_{i,j}), \dots, \pi(x_{i,m_i}), \pi(x_{i,1}), \dots, \pi(x_{i,j-1})).$$

Par définition, la lettre $\pi(x_{i,j})$ est l'initiale de $w_i^{(j)}$, la lettre $\pi(x_{i,j+1})$ est l'initiale de $w_i^{(j+1)}$, i.e., la seconde lettre de $w_i^{(j)}$, et ainsi de suite. Finalement, nous en déduisons

$$\Pi_{h_i}(\pi(x_{i,j}), \dots, \pi(x_{i,m_i}), \pi(x_{i,1}), \dots, \pi(x_{i,j-1})) = w_i^{(j)},$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

Exemple 3.7. Considérons le petit monoïde gaussien $M_\bullet$ admettant la présentation

$$\langle x, y : xyxyx = yy \rangle,$$

et déjà étudié dans la section I.4. Nous avons

$$\text{Mots}(\Delta) = \{xyxyxy, yxyxyx, yyy\},$$

et, par exemple, obtenons $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \models \text{Mots}(\Delta)$ avec

$$\vec{w}_1 = (yyy), \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = (xyxyxy, yxyxyx).$$

Le code de $M_\bullet$ est $\llbracket 3^1 \cdot 6^2 \rrbracket$. D'après la proposition 3.6, l'application de $\{x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}\}$ vers $\{x, y\}$ définie par

$$x_{1,1} \mapsto y, \quad x_{2,1} \mapsto x, \quad \text{et} \quad x_{2,2} \mapsto y$$

se prolonge en un homomorphisme surjectif du monoïde $\text{fus}^+ \llbracket 3 \cdot 6^2 \rrbracket$ sur $M_\bullet$.

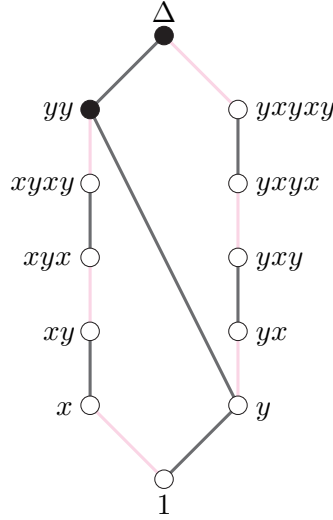


Figure 3. Le graphe caractéristique de $M_\bullet$.

Exemple 3.8. Considérons le monoïde de tresses d'Artin B_4^+ dont une présentation est

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \rangle.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \text{Mots}(\Delta) = \{ & \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2, \\ & \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3, \\ & \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2, \\ & \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \}. \end{aligned}$$

Soit w_1 le mot $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 = (& \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3, \\ & \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1, \\ & \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2). \end{aligned}$$

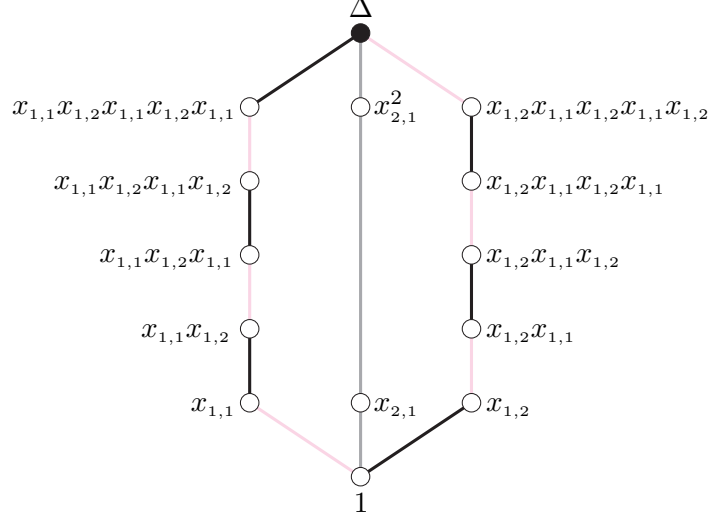


Figure 4. Le graphe caractéristique de $\text{fus}^+[[3 \cdot 6^2]]$.

Maintenant, soit w_2 le mot $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2$, nous trouvons

$$\vec{w}_2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1).$$

Nous déduisons $(\vec{w}_2, \vec{w}_1) \models \text{Mots}(\Delta)$. Le code de B_4^+ est alors $[[6^4 \cdot 6^{12}]]$. L'application de $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,4}, x_{2,1}, \dots, x_{2,12}\}$ vers $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ définie par

$$\begin{aligned} x_{1,1} &\mapsto \sigma_1, & x_{1,2} &\mapsto \sigma_2, & x_{1,3} &\mapsto \sigma_3, & x_{1,4} &\mapsto \sigma_2 \\ x_{2,1} &\mapsto \sigma_1, & x_{2,2} &\mapsto \sigma_2, & x_{2,3} &\mapsto \sigma_1, & x_{2,4} &\mapsto \sigma_3, \\ x_{2,5} &\mapsto \sigma_2, & x_{2,6} &\mapsto \sigma_1, & x_{2,7} &\mapsto \sigma_3, & x_{2,8} &\mapsto \sigma_2, \\ x_{2,9} &\mapsto \sigma_3, & x_{2,10} &\mapsto \sigma_1, & x_{2,11} &\mapsto \sigma_2, & x_{2,12} &\mapsto \sigma_3 \end{aligned}$$

se prolonge en un homomorphisme surjectif de $\text{fus}^+[[6^4 \cdot 6^{12}]]$ sur B_4^+ .

Remarque. Dans le cas du monoïde B_4^+ , nous pouvons modifier la définition de $\vec{w}$ en prenant pour $y^{(j-1)}$ le préfixe de longueur 2 du mot $w^{(j-1)}$. Nous vérifions alors que l'application de $\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, \dots, x_{3,12}\}$ vers $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^*$ définie par

$$\begin{aligned} x_{1,1} &\mapsto \sigma_2\sigma_1, & x_{1,2} &\mapsto \sigma_2\sigma_3, & x_{2,1} &\mapsto \sigma_1\sigma_2, & x_{2,2} &\mapsto \sigma_3\sigma_2 \\ x_{3,1} &\mapsto \sigma_1\sigma_2, & x_{3,2} &\mapsto \sigma_1\sigma_3, & x_{3,3} &\mapsto \sigma_2\sigma_1, & x_{3,4} &\mapsto \sigma_3\sigma_2, \\ x_{3,5} &\mapsto \sigma_3\sigma_1, & x_{3,6} &\mapsto \sigma_2\sigma_3, & x_{3,7} &\mapsto \sigma_1\sigma_2, & x_{3,8} &\mapsto \sigma_3\sigma_1, \\ x_{3,9} &\mapsto \sigma_2\sigma_1, & x_{3,10} &\mapsto \sigma_3\sigma_2, & x_{3,11} &\mapsto \sigma_1\sigma_3, & x_{3,12} &\mapsto \sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

se prolonge en un homomorphisme surjectif de $\text{fus}^+[[3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{12}]]$ sur B_4^+ . Notons que le monoïde $\text{fus}^+[[3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^{12}]]$ se plonge dans le monoïde $\text{fus}^+[[6^4 \cdot 6^{12}]]$.

VI. TREILLIS DE TYPE FUSEAU

Conclusion

Les résultats des chapitres III et IV sont une étape dans le projet de classification des petits groupes gaussiens, ou dans celui, plus ambitieux, de classification des petits monoïdes gaussiens. Pour conclure, nous proposons plusieurs directions de recherche, soutenues et illustrées par certains résultats partiels et travaux expérimentaux concernant les petits monoïdes gaussiens à deux atomes.

Les petits monoïdes gaussiens à un seul atome sont triviaux : ils sont tous isomorphes au monoïde libre de rang un (voir l'exemple V.1). Par contre, les petits monoïdes gaussiens à deux atomes sont nombreux, et une classification exhaustive reste hors de portée. Par exemple, les monoïdes $\langle x, y : xyxyxyxyx = yxyxyx \rangle$, $\langle x, y : xyx^2yx^3yx^2yx = yx^2yx^2y \rangle$ et $\langle x, y : (xyx^{91})^{23}yx = (yx^{91})^5y \rangle$ sont des petits monoïdes gaussiens à deux atomes. Les graphes caractéristiques des deux premiers sont représentés sur les figures 5 et 6, le troisième admet 40 378 simples, soit 58 de plus que B_8^+ !

Bien qu'il existe un grand nombre de petits monoïdes gaussiens à deux atomes, il semble cependant que nous ayons

Conjecture 1. *Les petits groupes gaussiens à deux atomes sont, à isomorphisme près, les groupes d'Artin de type diédral $\langle x, y : \Pi_m(xy) = \Pi_m(yx) \rangle$ et les groupes $\langle x, y : x^p = y^q \rangle$ pour $m, p, q > 1$.*

Mentionnons que ce rapport monoïde-groupe qui semble clair dans le cas diatomique, ne l'est déjà plus dans le cas triatomique Δ -pur, et, jusqu'à présent, nous ne pouvons formuler de conjecture précise à ce sujet. Nous voudrions ici amorcer une étude des petits monoïdes gaussiens à deux atomes en énonçant plusieurs résultats et conjectures qui, quoique partiels, laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche dans la voie d'une classification proprement dite. Nous commençons par distinguer trois sous-classes disjointes de la classe des petits monoïdes gaussiens à deux atomes. Nous discutons ensuite de la forme des treillis des simples des petits monoïdes gaussiens en général, puis de ceux à deux atomes en particulier. Nous décrivons finalement plusieurs familles d'exemples, en commentant les résultats obtenus et les conjectures énoncées.

Le type d'un petit monoïde gaussien à deux atomes

Supposons que M est un petit monoïde gaussien, soit A l'ensemble de ses atomes, nous appelons *degré à droite* de M le nombre d'atomes diviseurs à gauche de $\partial(\vee A)$, et *degré à gauche* le nombre d'atomes diviseurs à droite de $\partial(\widetilde{\vee} A)$. Nous disons qu'un petit monoïde gaussien à n atomes, de degré à droite d et de degré à gauche $\widetilde{d}$ est un *monoïde de type* $(n, \widetilde{d}, d)$, et un *monoïde de type* (n, d) si nous avons $d = \widetilde{d}$. Nous avons $0 \leq \widetilde{d}, d \leq n$ par définition.

Les monoïdes d'Artin sphériques et, plus généralement, les monoïdes de Garside définis dans [25] sont tous de degré nul : dans ces monoïdes, l'élément Δ est le ppcm—à gauche et à droite—des atomes. Par contre, le monoïde de tresses du groupe de réflexions complexe G_{13} de l'exemple V.13 est un monoïde de type $(3, 2)$, et le monoïde $M_\diamond$ de l'exemple I.4.1 est de type $(3, 0, 1)$.

Lemme 2. *Tout monoïde gaussien à deux atomes est de type $(2, 0)$, $(2, 1)$ ou $(2, 2)$.*

Démonstration. Supposons que M est un monoïde gaussien à deux atomes. Soit x, y ses atomes. Commençons par montrer $x \vee y = x \widetilde{\vee} y$. La condition d'atomicité implique que chacun des éléments $x \setminus y$ et $y \setminus x$ admet une unique décomposition en produit de x et y ; en effet, dans le cas contraire, nous aurions $x \setminus y = axc = ayd$ pour certains a, c, d dans M , soit, d'après le lemme I.1.7, $x \setminus y = a(x \vee y)(c \widetilde{\wedge} d)$, entraînant $\|x \setminus y\| \geq \|ax\| + \|x \setminus y\| + \|c \widetilde{\wedge} d\|$, puis $\|ax\| = 0$, contradiction. Les uniques décompositions de $x \setminus y$ et $y \setminus x$ ont par définition des lettres finales distinctes. Par conséquent, $x \widetilde{\vee} y$ est un diviseur à droite de $x \vee y$. Symétriquement, $x \vee y$ est un diviseur à gauche de $x \widetilde{\vee} y$, et simplifiabilité et conicité impliquent $x \vee y = x \widetilde{\vee} y$. Maintenant, par définition, nous avons $d, \widetilde{d} \in \{0, 1, 2\}$. De $x \vee y = x \widetilde{\vee} y$, nous déduisons que $d = 0$ est équivalent à $\widetilde{d} = 0$, et que $d = 2$ est équivalent à $\widetilde{d} = 2$: nous obtenons $d = \widetilde{d}$. $\square$

Dans un petit monoïde gaussien à deux atomes, la permutation des deux atomes induite par l'automorphisme ∂^2 est soit l'identité, soit la transposition, et, par conséquent, l'exposant est soit 1, soit 2 (voir la définition I.2.7). Nous relierons ici les notions d'exposant et de type.

Tout d'abord, les monoïdes de type $(2, 0)$ sont bien connus:

Proposition 3. *Les monoïdes de type $(2, 0)$ sont, à isomorphisme près, les monoïdes d'Artin de type diédral $\langle x, y : \Pi_m(xy) = \Pi_m(yx) \rangle$ et les monoïdes $\langle x, y : x^p = y^q \rangle$ pour $m, p, q > 1$.*

Démonstration. Le treillis des éléments simples d'un monoïde de type $(2, 0)$ est de type fuseau, et le résultat est un cas particulier de la proposition VI.2.4. $\square$

Comme mentionné dans les sections V.1 et VI.2, les monoïdes $\langle x, y : \Pi_m(xy) = \Pi_m(yx) \rangle$ avec $m > 1$ sont d'exposant 1 ou 2 suivant que m est respectivement pair ou impair, et les monoïdes $\langle x, y : x^p = y^q \rangle$ avec $p, q > 1$, i.e., les monoïdes $\text{fus}^+ \llbracket p \cdot q \rrbracket$, sont d'exposant 1.

Proposition 4. *Tout monoïde de type (2,1) ou (2,2) est d'exposant 1.*

Démonstration. Supposons que M est un petit monoïde gaussien à deux atomes et d'exposant 2. Nous montrons que M est isomorphe au monoïde $A(I_2(2k+1))$ pour un certain $k > 0$, donc de type (2,0).

Soit x, y les atomes de M . Pour tout mot w sur $\{x, y\}$, désignons par $\widehat{w}$ le mot obtenu à partir de w en échangeant les lettres x et y . L'exposant de M étant 2, pour tout mot w sur $\{x, y\}$, le mot $\widehat{w}$ représente l'élément $\partial^2(\overline{w})$. D'après la proposition I.3.3, M admet une présentation de la forme $\langle x, y : u = v \rangle$, où u, v sont des mots sur $\{x, y\}$. Nous avons

$$\partial^2(\overline{u}) = \partial^2(\overline{x} \vee \overline{y}) = \partial^2(\overline{x}) \vee \partial^2(\overline{y}) = \overline{y} \vee \overline{x} = \overline{u},$$

et obtenons $\widehat{u} \equiv u$, où $\equiv$ désigne la congruence sur $\{x, y\}$ engendrée par (u, v) . Par conséquent, le mot u est soit $\widehat{u}$, soit $\widehat{v}$. Puisque $u = \widehat{u}$ implique $u = \varepsilon$, nous déduisons $u = \widehat{v}$. A présent, il suffit de considérer les trois cas suivants. Premièrement, supposons que nous ayons $u = x^p$ ou $u = (xy)^p$. Alors l'exposant de M est 1, contradiction. Deuxièmement, supposons que nous ayons $u = (xy)^p x$. Alors M est le monoïde $A(I_2(2p+1))$, qui, nous l'avons vu, est un petit monoïde gaussien d'exposant 2. Troisièmement, supposons que u commence par $(xy)^p y$ ou par $(xy)^p x x$ avec $p > 0$. Alors, selon le critère de la section I.2, M ne peut être gaussien—voir les figures 1 et 2. A symétrie près, tous les cas ont été traités. $\square$

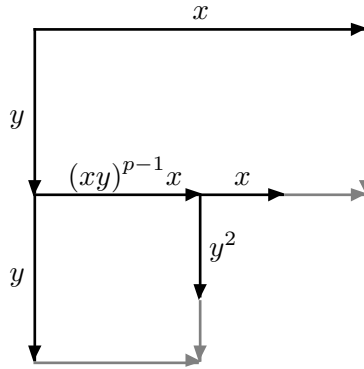


Figure 1. Non convergence dans le cas $u = (xy)^p y \dots$ and $v = (yx)^p x \dots$

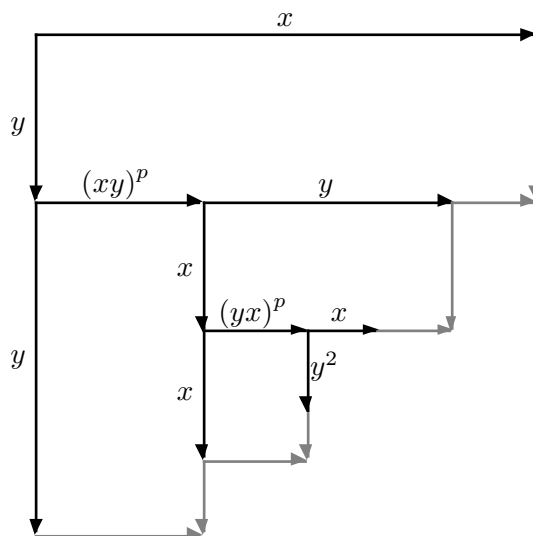


Figure 2. Non convergence dans le cas $u = (xy)^p xx \dots$ et $v = (yx)^p yy \dots$

Ce résultat nous permet d'établir une nouvelle caractérisation du degré d'un petit monoïde gaussien à deux atomes.

Soit w, w' deux mots. Nous disons que w' est un *conjugué cyclique* de w s'il existe deux mots u, v vérifiant $w = uv$ et $w' = vu$. Rappelons que, si M est un petit monoïde gaussien d'ensemble d'atomes A , l'ensemble des mots sur A qui représentent son élément de Garside est désigné par $\text{Mots}(\Delta)$. Conséquence directe de la proposition I.2.5, le résultat suivant est valable quel que soit le nombre d'atomes.

Lemme 5. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors M est d'exposant 1 si et seulement si $\text{Mots}(\Delta)$ est clos par conjugaison cyclique.*

Rappelons que le *degré* $d^o(a)$ d'un élément a dans un treillis fini est $d_-^o(a) + d_+^o(a)$, où $d_-^o(a)$ (*resp.* $d_+^o(a)$) désigne le nombre de prédécesseurs (*resp.* successeurs) immédiats de a .

Proposition 6. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien à deux atomes. Soit s la somme des degrés de ses atomes dans le treillis de ses éléments simples. Alors M est de type $(2, s-4)$.*

Démonstration. Soit x, y les atomes de M . Supposons M de type (2,1) ou (2,2). D'après la proposition 4, M est d'exposant 1, et, d'après le lemme 5, $\text{Mots}(\Delta)$ est clos par conjugaison cyclique. Supposons $s = 4$. Alors nous avons $d^+_s(x) =$

$d_+^o(y) = d_-^o(x) = d_-^o(y) = 1$ dans le treillis des simples de M , et il existe une application $\tau : \{x, y\} \rightarrow \{x, y\}$ vérifiant $\text{Mots}(\Delta) = x\tau(x)W_1 \sqcup y\tau(y)W_2$ pour certains ensembles W_1, W_2 de mots sur $\{x, y\}$. Soit w un mot de W_1 . Puisque $\text{Mots}(\Delta)$ est clos par conjugaison cyclique, w est $\tau^2(x)\tau^3(x) \dots \tau^{|w|+1}(x)$. Alors W_1 est un singleton; en effet, supposons $w' \in W_1$, alors w' est $\tau^2(x)\tau^3(x) \dots \tau^{|w'|+1}(x)$, mais la simplifiabilité implique

$$\tau^{\min(|w|, |w'|)+1}(x) \dots \tau^{\max(|w|, |w'|)+1}(x) = 1,$$

et la conicité $|w| = |w'|$, d'où $w = w'$. Symétriquement, W_2 est un singleton, et le degré de M est 0, contradiction. A présent, puisque s est au plus égal à 6, il suffit de montrer que M est de type (2,2) si et seulement si s est 6. Soit $\delta = x \vee y$. Alors M est de type (2,2) si et seulement si δx et δy sont simples, si et seulement si $x\delta$ et $y\delta$ sont simples, si et seulement si x^2 , xy , yx et y^2 sont simples, si et seulement si s est 6. $\square$

Sur le treillis des petits monoïdes gaussiens

Nous avons vu que la classe des petits monoïdes gaussiens à deux atomes est la réunion de trois sous-classes disjointes—types (2,0), (2,1) et (2,2)—(lemme 2), et que les monoïdes de type (2,0) sont bien connus (proposition 3). Nous voudrions à présent examiner la classes des monoïdes de type (2,1), et, pour cela, tirer profit de ce que nous savons (ou de ce que nous conjecturons) de la géométrie du treillis des simples des petits monoïdes gaussiens en général, puis des monoïdes de type (2,1) en particulier.

Rappelons ici quelques notions de base de la théorie des treillis [30]. Soit $(L, \vee, \wedge)$ un treillis. Pour tout sous-ensemble non-vide K de L , $(K, \vee, \wedge)$ est un *sous-treillis* de $(L, \vee, \wedge)$ si K est clos par $\vee$ et $\wedge$. Soit $K_\lambda, \lambda \in \Lambda$, des sous-treillis de L , l'intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ est close par $\vee$ et $\wedge$; ainsi, pour tout sous-ensemble non vide H de L , il existe un plus petit sous-ensemble $[H]_L$ de L contenant H et clos par $\vee$ et $\wedge$. Le sous-treillis $([H]_L, \vee, \wedge)$ est appelé le *sous-treillis de L engendré par H* . Un sous-treillis K de L est un *idéal* (*resp.* un *filtre*) si $\gamma \in K$ et $\alpha \in L$ implique $\alpha \wedge \gamma \in K$ (*resp.* implique $\alpha \vee \gamma \in K$). Pour tout élément α de L , nous désignons par $\text{Min}(\alpha, L)$ (*resp.* par $\text{Maj}(\alpha, L)$) l'idéal (*resp.* le filtre) de L engendré par α .

Soit $(L, \leq)$ un treillis fini. Alors $(L, \leq)^\sim$ désigne le treillis dual $(L, \geq)$; L est *autodual* si L est isomorphe à son dual $L^\sim$, ou, de façon équivalente, si, pour tout $\alpha \in L$, il existe $\beta \in L$ vérifiant $\text{Min}(\alpha, L) \cong \text{Maj}(\beta, L)^\sim$; L est *filtrant* si, pour tout $\alpha \in L$, il existe $\beta \in L$ vérifiant $\text{Min}(\alpha, L) \cong \text{Maj}(\beta, L)$; L est *vertébré* si L a deux atomes $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et si le filtre $\text{Maj}(\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2, L)$ est une chaîne, la longueur de cette chaîne est alors appelée *hauteur* du treillis. Un sous-treillis F de L est une *face* si F est $\text{Maj}(\alpha_1 \wedge \alpha_2, \text{Min}(\alpha_1 \vee \alpha_2, L))$ pour certains α_1, α_2 dans L successeurs immédiats de $\alpha_1 \wedge \alpha_2$; L est *sans imbrication* si aucune face de L ne contient de face propre.

Lemme 7. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Alors le treillis des simples de M est filtrant.*

Démonstration. Soit $(S, \vee, \wedge)$ le treillis des simples de M . D'après la proposition I.2.5, pour tout simple a dans M , la fonction $b \mapsto \tilde{\partial}(a)b$ induit un homomorphisme surjectif de treillis entre les idéaux $\text{Min}(a, S)$ et $\text{Maj}(\tilde{\partial}(a), S)$. La simplifiabilité de M implique que cet homomorphisme de treillis est injectif. $\square$

Lemme 8. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien à deux atomes. Alors le treillis des simples de M est sans imbrication.*

Démonstration. Soit x, y les atomes de M et $(S, \vee, \wedge)$ le treillis des simples de M . Soit F_1, F_2 les faces $\text{Maj}(a_i \wedge b_i, \text{Min}(a_i \vee b_i, S))$ avec a_i, b_i successeurs immédiats de $a_i \wedge b_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Notons $g_i = a_i \wedge b_i$ et $h_i = a_i \vee b_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Supposons $F_1 \subseteq F_2$. Alors nous avons $g_2 \setminus h_2 = (g_2 \setminus g_1)(g_1 \setminus h_1)(h_1 \setminus h_2)$, d'où $x \vee y = (g_2 \setminus g_1)(x \vee y)(h_1 \setminus h_2)$, puis $x \vee y = (g_2 \setminus g_1)^n(x \vee y)(h_1 \setminus h_2)^n$ pour tout $n \geq 0$. L'atomicité de M implique alors $g_2 \setminus g_1 = h_1 \setminus h_2 = 1$, soit $F_1 = F_2$. $\square$

Le lemme 2 et les résultats de travaux expérimentaux nous invitent à énoncer :

Conjecture 9. *Le treillis des simples de tout petit monoïde gaussien à deux atomes est autodual.*

Soit $(S, \vee, \wedge)$ le treillis des simples d'un petit monoïde gaussien à deux atomes M . Selon la conjecture 9, $(S, \vee, \wedge)$ serait antiisomorphe à lui-même, *i.e.*, il existerait un isomorphisme ψ entre les treillis $(S, \vee, \wedge)$ et $(S, \wedge, \vee)$. D'après le lemme I.2.6, ∂ est un isomorphisme entre $(S, \wedge, \vee)$ et $(S, \tilde{\vee}, \tilde{\wedge})$. Par conséquent, ψ existe si et seulement s'il existe un isomorphisme $\partial \circ \psi$ entre $(S, \vee, \wedge)$ et $(S, \tilde{\vee}, \tilde{\wedge})$. Auquel cas, $\partial \circ \psi$ induit un antiautomorphisme involutif du monoïde M . Réciproquement, tout antiautomorphisme involutif de M induit un isomorphisme entre les treillis $(S, \vee, \wedge)$ et $(S, \tilde{\vee}, \tilde{\wedge})$. La conjecture 9 est alors équivalente à :

Conjecture 10. *Tout petit monoïde gaussien à deux atomes est antiautomorphe.*

La conjecture 10 est conséquence de la conjecture 1, les monoïdes de type fuseau étant tous antiautomorphes (voir le chapitre VI). Le monoïde $M_\diamond$ étudié dans la section I.4 est un exemple typique de petit monoïde gaussien qui n'est pas antiautomorphe; pour tout $n \geq 3$, $M_\diamond \times \mathbf{N}^{n-3}$ est un petit monoïde gaussien de rang n qui n'est pas antiautomorphe.

Sur le treillis des monoïdes de type (2,1)

Nous avons établi ou conjecturé plusieurs propriétés du treillis des simples des petits monoïdes gaussiens. Nous nous concentrons maintenant sur le treillis des simples des monoïdes de type (2,1).

Le fait que le treillis des simples d'un monoïde de type (2,1) soit vertébré reste hypothétique; il est toutefois la conséquence d'une conjecture fondamentale que nous faisons sur les petits monoïdes gaussiens de rang quelconque, et qui est vérifiée par tous les exemples que nous connaissons, en particulier, par tous les exemples du chapitre V.

Conjecture 11. *Supposons que M est un petit monoïde gaussien. Soit $\delta, \tilde{\delta}$ les ppcm à droite et à gauche de ses atomes et Δ son élément de Garside. Alors il existe deux entiers positifs uniques $\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}}$ vérifiant $\delta^{\mathbf{c}} < \Delta \leq \delta^{\mathbf{c}+1}$ et $\tilde{\delta}^{\tilde{\mathbf{c}}} < \Delta \leq \tilde{\delta}^{\tilde{\mathbf{c}}+1}$.*

Remarquons d'une part que $\delta \leq \Delta$ est toujours vrai par définition de Δ . D'autre part, Δ étant quasicentral (voir le chapitre III), $\delta^{\mathbf{c}} \leq \Delta$ implique que $\delta^{\mathbf{c}}$ est un diviseur à droite et à gauche de Δ , et $\Delta \leq \delta^{\mathbf{c}+1}$ implique que Δ est un diviseur à droite et à gauche de $\delta^{\mathbf{c}+1}$. Enfin, si un tel entier $\mathbf{c}$ existe, il est unique, puisque $\delta^{\mathbf{c}} < \Delta \leq \delta^{\mathbf{c}+1}$ et $\delta^{\mathbf{c}'} < \Delta \leq \delta^{\mathbf{c}'+1}$ implique $\mathbf{c} < \mathbf{c}' + 1$ et $\mathbf{c}' < \mathbf{c} + 1$ par simplifiabilité et conicité, puis $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$. Par exemple, dans le monoïde de $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1x_2x_3^2 = x_2x_3^2x_4 = x_3^2x_4x_1, x_3x_4x_1x_2 = x_4x_1x_2x_3 \rangle$, nous avons $\delta = x_3^2x_4x_1x_2 = \tilde{\delta}$ et $\Delta = \delta^2x_3^2$, soit $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} = 2$, alors que dans le monoïde $M_{\diamond}$ de l'exemple I.4.1, nous avons $\mathbf{c} = 1$ et $\tilde{\mathbf{c}} = 0$.

Lemme 12. *Supposons que M est un monoïde de type (2,1). Alors, si la conjecture 11 est vraie, le treillis des simples de M est vertébré de hauteur au moins 2.*

Démonstration. Soit δ le ppcm des atomes (voir la démonstration du lemme 2) et Δ l'élément de Garside de M . Supposons la conjecture 11 vraie. Le degré de M étant 1, δ divise strictement Δ , mais δ^2 ne peut diviser Δ , et nous obtenons $\mathbf{c} = 1$. Alors, puisque Δ est quasicentral, $\Delta \leq \delta^2$ implique $\delta^2 = \Delta a$ pour un certain a dans M . Par simplification à gauche, nous obtenons $\delta = (\delta \backslash \Delta)a$. Le degré de M étant 1, a n'est ni 1 ni δ , ce qui entraîne que $\delta \backslash \Delta$ admet une unique décomposition en produit d'atomes $z_{i_1} \dots z_{i_h}$ avec $h > 0$. Le filtre du treillis des simples de M engendré par δ est alors la chaîne constituée des $h + 1$ éléments $\delta, \delta z_{i_1}, \delta z_{i_1} z_{i_2}, \dots, \delta z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{h-1}}, \Delta$. $\square$

Lemme 13. *Supposons que L est un treillis fini diatomique, autodual, filtrant et vertébré. Alors, pour tous α, β dans L avec $\alpha \leq \beta$, nous avons $d_-^o(\alpha) + d_+^o(\beta) \leq 3$.*

Démonstration. Puisque L est diatomique, autodual et filtrant, tout élément α de L vérifie $d_-^o(\alpha) \leq 2$ et $d_+^o(\alpha) \leq 2$. Ainsi, pour tous α, β dans L , nous avons $d_-^o(\alpha) + d_+^o(\beta) \leq 4$. Maintenant, supposons $\alpha \leq \beta$ et $d_-^o(\alpha) = d_+^o(\beta) = 2$.

Soit $\gamma = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ où α_1, α_2 sont les deux prédécesseurs immédiats de α . Puisque L est filtrant, il existe un élément γ' dans L vérifiant $\text{Min}(\gamma', L) \cong \text{Maj}(\gamma, L)$. Par conséquent, notant $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ les atomes de L , $\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$ est plus petit que γ' , et l'hypothèse $d_+^o(\beta) = 2$ contredit le fait que L soit vertébré. $\square$

Le résultat suivant encourage l'utilisation de la géométrie du treillis des simples en vue d'obtenir à terme une description de la classe des monoïdes de type $(2,1)$. Nous appelons *profil* d'un treillis fini donné le treillis dont le diagramme de Hasse est celui obtenu en gommant le maximum de sommets α avec $d_+^o(\alpha) = d_-^o(\alpha) = 1$ (le résultat est unique). Pour $h > 0$, nous désignons par $\mathcal{P}_h$ l'ensemble des profils de hauteur h des treillis à deux atomes, autoduaux, filtrants, vertébrés et sans imbrication.

Proposition 14. *L'ensemble $\mathcal{P}_1$ est le singleton composé du treillis carré C_2^2 (C_2 désigne la chaîne à deux éléments) et, pour tout $h > 0$, l'ensemble $\mathcal{P}_h$ est fini. Il existe un algorithme qui, pour tout $h > 0$, construit $\mathcal{P}_{h+1}$ à partir de $\mathcal{P}_h$.*

Nous ne reproduisons pas ici la démonstration de ce résultat, ni ne détaillons l'algorithme en question (le point essentiel est que, pour $h > 1$, tout profil de $\mathcal{P}_h$ a exactement un de ses deux idéaux maximaux dans $\mathcal{P}_{h-1}$). La figure 3 représente simplement le résultat de l'algorithme sur les profils de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, et $\mathcal{P}_3$ successivement.

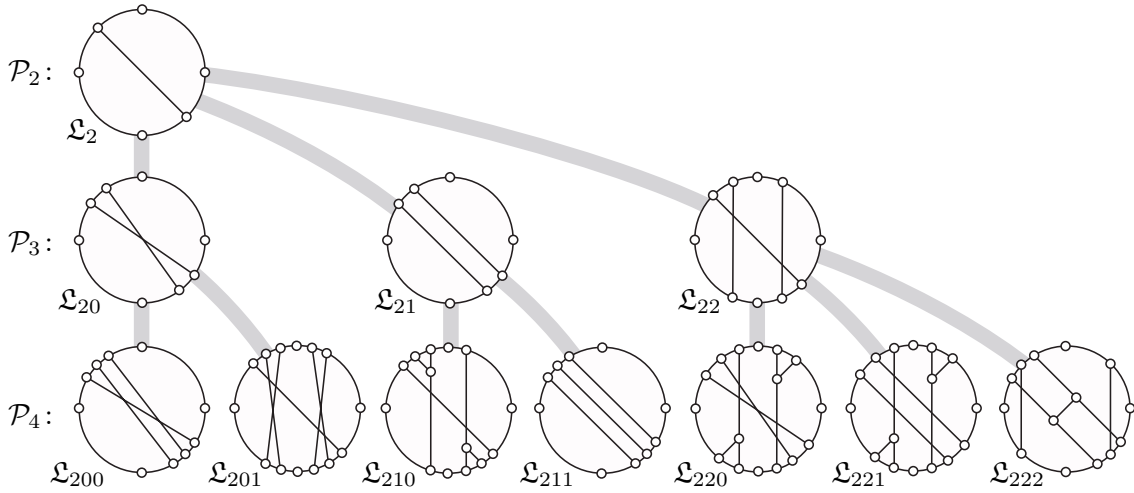


Figure 3. Les profils des ensembles $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{P}_4$.

Question 15. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}_h$?

Les monoïdes de type (2,1)

Etant donné un profil $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{P}_h$ avec $h > 1$, nous recherchons la famille $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L})$ des petits monoïdes gaussiens antiautomorphes dont le profil du treillis des simples est $\mathfrak{L}$. Le principe est le suivant. La géométrie de $\mathfrak{L}$ d'une part, le fait que le treillis des simples d'un petit monoïde gaussien antiautomorphe est autodual et filtrant d'autre part, et enfin les lemmes 5 et 6 imposent un certain nombre de contraintes sur $\text{Mots}(\Delta)$, l'ensemble des mots représentant l'élément de Garside. Des résultats standard de combinatoire des mots [35] permettent *a priori* de satisfaire ces contraintes. Il reste alors à vérifier que les présentations obtenues définissent bien des petits monoïdes gaussiens, auquel cas des monoïdes de type (2,1) antiautomorphes. Ce principe est simple mais non algorithmique. Aussi, nous ne prétendons pas obtenir une méthode permettant de déterminer toutes les présentations de monoïdes de type (2,1) antiautomorphes, que la conjecture 11 soit vraie ou non. Néanmoins, les quatre exemples de la figure 4 montrent qu'un tel procédé fonctionne en pratique (nous ne reproduisons pas ici le détail des calculs).

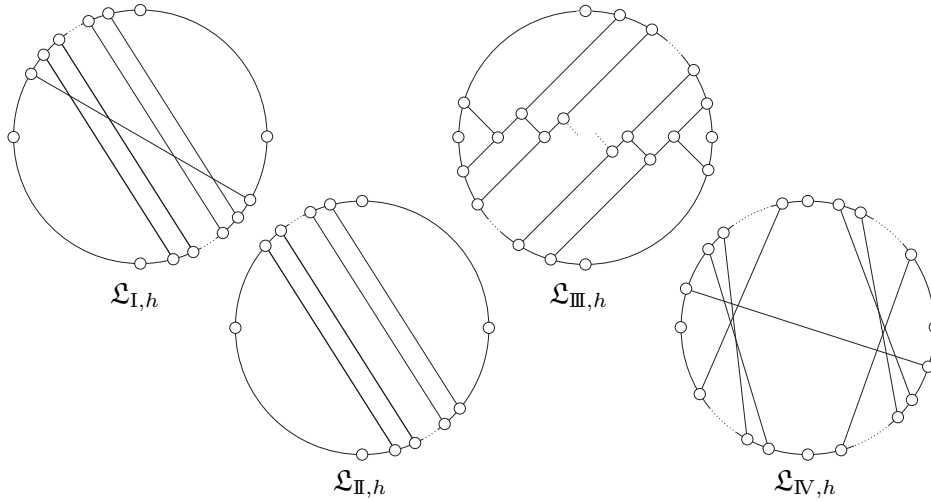


Figure 4. Quatre profils choisis dans $\mathcal{P}_h$.

Un petit monoïde gaussien antiautomorphe dont le profil du treillis des simples est, respectivement,

- (i) $\mathfrak{L}_{I,h}$ avec $h > 1$,
- (ii) $\mathfrak{L}_{II,h}$ avec $h > 2$,
- (iii) $\mathfrak{L}_{III,h}$ avec $h > 2$,

est isomorphe à un des petits monoïdes gaussiens

- (i) $\langle x, y : (xy^{h-1})^p x = y^q \rangle$ avec $p > 0$, $q \geq h$,
- (ii) $\langle x, y : x(y^h x)^p y = y(xy^h)^p x \rangle$ avec $p > 0$,
- (iii') $\langle x, y : (xyx^{h-2})^r xyx = (yx^{h-2})^s y \rangle$ avec $r, s \geq 0$,

ou (iii'') $\langle x, y : xy(x^{h-2}yx^{h-1}y)^m = (yx^{h-1}yx^{h-2})^m yx \rangle$ avec $m \geq 0$,

et son groupe de fractions est alors isomorphe à

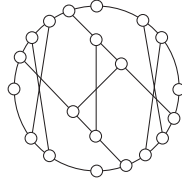
CONCLUSION

- (i) $\langle z, t : z^{p+1} = t^{q+h-1} \rangle$ (avec $z \rightsquigarrow xy^{h-1}$ et $t \rightsquigarrow y$),
- (ii) $\langle z, t : (zt)^{p+1} = (tz)^{p+1} \rangle$ (avec $z \rightsquigarrow xy^{h-1}$ et $t \rightsquigarrow y$),
- (iii') $\langle z, t : z^{r+2} = t^{s+2} \rangle$ (avec $z \rightsquigarrow xyx^{h-2}$ et $t \rightsquigarrow yx^{h-2}$),
- (iii'') $\langle z, t : (zt)^{m+1} = (tz)^{m+1} \rangle$ (avec $z \rightsquigarrow yx^{h-2}$ et $t \rightsquigarrow yx^{h-2}$).

Pour $h > 3$, $\mathfrak{L}_{IV,h}$ n'est le profil du treillis des simples d'aucun petit monoïde gaussien antiautomorphe : $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{IV,h})$ est vide pour tout $h > 3$.

A ce stade, il est naturel de se demander si les familles $\bigcup_{h>1} \mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{I,h})$, $\bigcup_{h>2} \mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{II,h})$ et $\bigcup_{h>2} \mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{III,h})$ décrites ci-dessus constituent une description exhaustive des monoïdes de type (2,1) antiautomorphes. La réponse est négative. Par exemple, le monoïde M_* de présentation $\langle x, y : xy^2xyxyxy = yxyxyxy^2x \rangle$ est un monoïde de type (2,1) antiautomorphe mais n'appartient à aucune des trois familles précédentes : le profil du treillis des simples de M_* est le profil noté $\mathfrak{L}_{210}$ de la figure 3.

Parallèlement, le fait qu'il existe des profils dans $\bigcup_{h>1} \mathcal{P}_h$ ne correspondant à aucun monoïde de type (2,1) antiautomorphe est un signe encourageant. Cependant, notre démarche se voit rapidement stoppée par le fait suivant. Si, pour tout profil $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{P}_h$, nous notons $\mathcal{P}^\oplus(\mathfrak{L})$ l'ensemble des profils de $\mathcal{P}_{h+1}$ obtenus à partir de $\mathfrak{L}$ par l'algorithme de la proposition 14, alors $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}) \neq \emptyset$ n'implique pas $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}^\oplus) \neq \emptyset$ pour tout $\mathfrak{L}^\oplus$ de $\mathcal{P}^\oplus(\mathfrak{L})$. En effet, par exemple, bien qu'appartenant à $\mathcal{P}^\oplus(\mathfrak{L}_{IV,4})$, le profil $\mathfrak{L}_{2011}$



est le profil du treillis des simples des petits monoïdes gaussiens antiautomorphes $\langle x, y : (xy^2)^{2\ell+h(\ell+1)}x = ((yxy)^{2\ell}y)^q(yxy)^{2\ell} \rangle$ avec $\ell, q > 0$ et $h \geq 0$ (voir la figure 5). L'espoir serait maintenant d'observer de nouvelles propriétés du treillis des simples des monoïdes de type (2,1), jusqu'à pouvoir contrer la faille décrite ci-dessus. Nous pourrions alors imaginer déterminer plusieurs familles de la même façon que pour les familles $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_I)$, $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{II})$ et $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}_{III})$, puis exhiber un certain nombre de profils $\mathfrak{L}$ vérifiant $\mathcal{M}_A(\mathfrak{L}) = \emptyset$, contrôlant ainsi toutes leurs descendance.

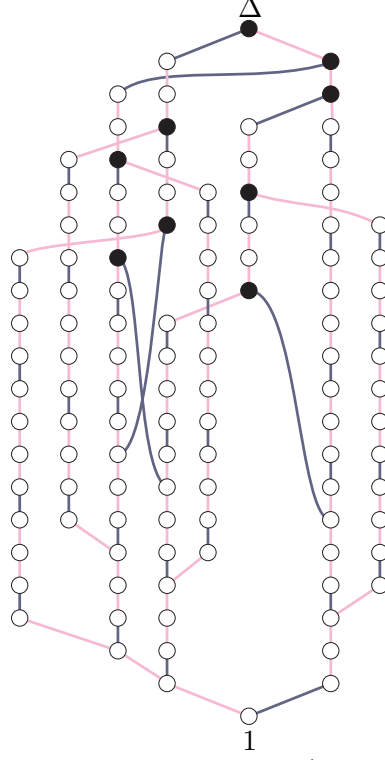


Figure 5. Le graphe caractéristique du monoïde $\langle x, y : xyx^2yx^3yx^2yx = yx^2yx^2y \rangle$.

Les monoïdes de type (2,2)

Pour terminer, intéressons nous aux monoïdes de type (2,2). Pour tout $k \geq 0$, le monoïde $M_k^{(2,2)}$ présenté par

$$\langle x, y : xy^2x \cdot (yx)^k y \cdot xy^2x = (yx)^k y \cdot xy^2x \cdot (yx)^k y \rangle$$

est de type (2,2). Mentionnons qu'en utilisant le critère de plongement de [22], nous obtenons que, pour tout $k \geq 0$, l'application $\sigma_1 \mapsto xy^2x, \sigma_2 \mapsto (yx)^k y$ définit un plongement de B_3^+ dans $M_k^{(2,2)}$. Une propriété remarquable de ces monoïdes est que l'élément Δ est le carré du ppcm des atomes, ce qui correspond au cas extrémal pour la conjecture 11. Le graphe caractéristique du monoïde $M_0^{(2,2)}$ est par exemple représenté sur la figure 6.

Les groupes de fractions des monoïdes $M_k^{(2,2)}$ avec $k \geq 0$ sont tous isomorphes au groupe $\langle z, t : z^3 = t^4 \rangle$ du nœud (3,4)-torique (voir la section V.5) : il suffit de prendre $z \rightsquigarrow xy^2(xy)^{k+1}$ et $t \rightsquigarrow y(xy)^{k+1}$, i.e., $x \rightsquigarrow (zt^{-1})^{k+2}t^{-1}$ et $y \rightsquigarrow t(tz^{-1})^{k+1}$. Remarquons que le nœud (3,4)-torique est le plus petit nœud torique dont le groupe n'est pas isomorphe à un groupe d'Artin de type diédral (voir l'exemple V.6 et la section V.5).

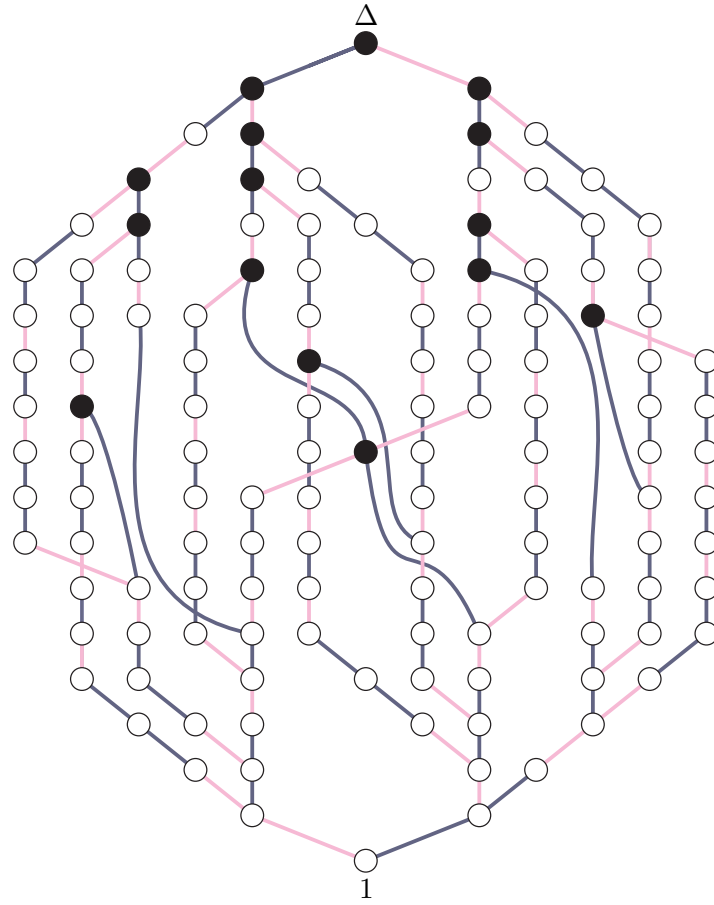


Figure 6. Le graphe caractéristique du monoïde $\langle x, y : xyxyxyxyx = xyxyxy \rangle$.

Plus généralement, pour tout $p \geq 3$, les monoïdes $M_{p,k}^{(2,2)}$ avec $k \geq 0$ définis par

$$\langle x, y : (xy^2(xy)^{k+1})^{p-2}xy(yx)^{k+1} = (y(xy)^{k+1})^2 \rangle$$

sont des petits monoïdes gaussiens de type (2,2) dont les groupes de fractions sont isomorphes au groupe fus $\llbracket 4 \cdot p \rrbracket$. Existe-il des monoïdes de type (2,2) dont le groupe de fractions est isomorphe à un groupe d'Artin de type diédral?

Ces exemples et résultats préliminaires montrent que les petits monoïdes gaussiens à deux générateurs forment une famille très riche contenant de nombreux exemples encore mystérieux. En même temps, les groupes correspondants sont des groupes assez simples. Cette situation est-elle générale ou spécifique au cas diatomique? Nous laisserons la question ouverte.

Bibliographie

- [1] S. I. ADJAN, *Defining relations and algorithmic problems for groups and semi-groups*, Proc. Steklov Inst. Math. **85** (1966).
- [2] —, *Fragments of the word Delta in a braid group*, Mat. Zam. Acad. Sci. SSSR **36-1** (1984) 25–34; translated Math. Notes of the Acad. Sci. USSR; **36-1** (1984) 505–510.
- [3] G. BAUMSLAG & C.F. MILLER III (EDS), *Algorithms and classification in combinatorial group theory*, MSRI Publications 23, Springer Verlag (1992).
- [4] G. BAUMSLAG & T. TAYLOR, *The centre of groups with one defining relator*, Math. Ann. **175** (1968) 315–319.
- [5] D. BESSIS, *Sur les groupes de réflexions complexes*, thèse de Doctorat, Université Paris VII (1998).
- [6] D. BESSIS, F. DIGNE & J. MICHEL, *Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid*, prépublication (2000).
- [7] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, Third Edition, Colloq. Publ. 25, American Math. Soc., Providence (1967).
- [8] J. BIRMAN, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of Math. Studies **82** (1975) Princeton Univ. Press.
- [9] J. BIRMAN, K. H. KO & S. J. LEE, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Advances in Math. **139** (1998) 322–353.
- [10] —, *The infimum, supremum and geodesic length of a braid conjugacy class*, prépublication (2000).
- [11] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris (1968).
- [12] E. BRIESKORN & K. SAITO, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972) 245–271.
- [13] M. BROUÉ, G. MALLE & R. ROUQUIER, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. **500** (1998) 127–190.
- [14] G. BURDE & H. ZIESCHANG, *Knots*, de Gruyter, Berlin; 1985.

- [15] R. CHARNEY, *Artin groupe of finite type are biautomatic*, Math. Ann. **292-4** (1992) 671–683.
- [16] —, *Geodesic automation and growth funtions for Artin groups of finite type*, Math. Ann. **301-2** (1995) 307–324.
- [17] A. H. CLIFFORD & G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, vol. 1, AMS Surveys **7** (1961).
- [18] R. CORRAN, *On monoids related to braid groups*, PhD Thesis, University of Sydney (2000).
- [19] H. S. M. COXETER & W. O. J. MOSER, *Generators and relations for discrete groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 14. Springer-Verlag.
- [20] P. DEHORNOY, *Groups with a complemented presentation*, J. Pure Appl. Algebra **116** (1997) 115–137.
- [21] —, *Gaussian groups are torsion free*, J. of Algebra **210** (1998) 291–297.
- [22] —, *On completeness of word reversing*, Discrete Math., à paraître (1998).
- [23] —, *Petits groupes gaussiens*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (2001) à parître.
- [24] —, *Braids and Self-Distributivity*, Progress in Math., Birkhäuser, à paraître.
- [25] P. DEHORNOY & L. PARIS, *Gaussian groups and Garside groups, two generalizations of Artin groups*, Proc. London Math. Soc. **79-3** (1999) 569–604.
- [26] P. DELIGNE, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972) 273–302.
- [27] E. A. ELRIFAI & H. R. MORTON, *Algorithms for positive braids*, Quart. J. Math. Oxford **45** (1994) 479–497.
- [28] D. B. A. EPSTEIN & *al.*, *Word processing in groups*, Jones & Barlett Publ. (1992).
- [29] F. A. GARSIDE, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford **20** (1969) 235–254.
- [30] G. GRÄTZER, *General lattice theory*, Second Edition, Birkhäuser Verlag, Basel (1998).
- [31] P. J. HIGGINS, *Techniques of semigroup theory*, Oxford Science Publications, Oxford University Press (1992).
- [32] E. S. KANG, K. H. KO & S. J. LEE, *Band-generator presentation for the 4-braid group*, Topology Appl. **78** (1997) 39–60.
- [33] CH. KASSEL, *Quantum groups*, Graduate Texts in Math. vol. 155, Springer, New York (1995).
- [34] D. E. KNUTH & P. B. BENDIX, *Simple word problems in universal algebra*, J. Leech, editor, Computational problem in abstract algebras, Pergamon Press (1970) 263–297.

- [35] M. LOTHAIRE, *Combinatorics on words*, Encyclopedia of mathematics and its applications vol. 17, Addison-Wesley (1983).
- [36] R. C. LYNDON & P. E. SCHUPP, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag (1977).
- [37] W. MAGNUS, A. KARRASS & D. SOLITAR, *Combinatorial group theory*, Interscience, New York (1966).
- [38] J. MICHEL, *A note on words in braid monoids*, J. Algebra **215** (1999) 366–377.
- [39] L. PARIS, *Parabolic subgroups of Artin groups*, J. Algebra **196** (1997) 369–399.
- [40] M. PICANTIN, *The conjugacy problem in small Gaussian groups*, Comm. in Algebra **29-3** (2001) 1021–1038.
- [41] —, *The center of thin Gaussian groups*, J. of Algebra (2001) to appear.
- [42] J. H. REMMERS, *On the geometry of semigroup presentations*, Advances in Math. **36** (1980) 283–296.
- [43] D. ROLFSEN, *Knots and links*, Publish or Perish, Inc (1976).
- [44] K. SAITO & T. TAKEBAYASHI, *Extended affine root systems III: elliptic Weyl groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997) 301–329.
- [45] V. SERGIESCU, *Graphes planaires et présentations des groupes de tresses*, Math. Z. **214** (1993) 477–490.
- [46] H. SIBERT, *Extraction de racines dans les petits groupes gaussiens*, mémoire de DEA, Université de Caen (2000).
- [47] N. J. A. SLOANE, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, publiée électroniquement sur <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [48] A. B. SOSSINSKI, *Preparation theorems for isotopy invariants of links in 3-manifolds*, Lect. Notes in Math. **1510** (1992) 352–362.
- [49] T. TAKEBAYASHI, *Defining relations of Weyl groups for extended affine root systems $A_\ell^{(1,1)}$, $B_\ell^{(1,1)}$, $C_\ell^{(1,1)}$, $D_\ell^{(1,1)}$* , J. Algebra **168** (1994) 810–827.
- [50] M. TAKEUCHI, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Comm. in Algebra **9** (1981) 841–882.
- [51] J. TITS, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1967-68) (Academic Press, London, 1969) 175–185.
- [52] W. THURSTON, *Finite state algorithms for the braid group*, notes en circulation (1988).
- [53] V. V. VERSHININ, *Braids groups and loop spaces*, Russian Math. Surveys **54** (1999) 273–350.

BIBLIOGRAPHIE

$\|a\|$, 10
 $\backslash, /, \vee, \widetilde{\vee}$, 10
 $\wedge, \widetilde{\wedge}$, 11
 $\leq$, 11
 Δ , 13
 $\partial, \widetilde{\partial}, \partial^2, \widetilde{\partial}^2$, 14
 $\overline{w}$, 15
 $\langle X : R \rangle$, 15
 $\curvearrowright_f, \backslash_f, \vee_f$, 16
 $v_{\Delta}^-, v_{\Delta}^+$, 28
 $[r, s]$, 29
 ϕ_+, ϕ_- , 32
 $C(a)$, 35
 $C^{som}(a)$, 36
 θ_+, θ_- , 38
 $H(a)$, 39
 $\Delta_a, \widetilde{\Delta}_a$, 45
 $\boxtimes$, 54
 $\vec{\Theta}, \Theta_{ij}$, 54
 $\vec{\theta}, \theta_x$, 56
 $\vec{\Theta}_{ij}$, 57
 Π_m , 77
Mots, 104
 Π_m^j , 104
 fus_+ , fus, 106
Min, Maj, 117
 $\mathcal{P}_h$, 119

A

Artin (monoïde, groupe), 77
antiautomorphe (monoïde, groupe), 118
autodual (treillis), 118
atome, 10
atomique (monoïde), 10

B

Birman-Ko-Lee (monoïde), 86
bretzel, 96

C

centre, 43
classe sommitale, 36
code (monoïde), 109
cohérence, cohérent, 17
complément, 15
complémentée (présentation), 15
complexe (groupe de réflexions), 92
condition ($\#$), 17
conditions de Ore, 10
conique (monoïde), 10
conjugaison cyclique (mot), 115
conjugaison positive, simple, 30
copuissance, 30
— sommitale, 35
courte (décomposition), 58
Coxeter (groupe), 77
croissante (partition), 109
cyclage, inverse, 32
— (θ -), inverse, 38

D

Δ (élément), 13
 Δ local, 45
 Δ -normale (forme), 37
 Δ -pur (monoïde), 67
décomposition (monoïde), 53
— courte (élément), 58
degré (monoïde), 113
— (élément d'un treillis), 116
diagramme (présentation), 87, 93
diviseur, 9, 11

E

écart, 30
 — sommital, 35
 élément de Garside, 10, 13
 élément primitif, simple, 13
 élémentaire (transformation), 58
 exposant (monoïde), 14

F

face (treillis), 117
 famille de fonctions, 54
 famille de permutations, 55
 filtre, filtrant (treillis), 117
 forme Δ -normale, 29
 forme normale fractionnaire, 37
 fractions (groupe), 10
 fractionnaire (forme normale), 37
 fuseau (type), 103

G

Garside (élément), 10, 13
 — (monoïde, groupe), 11, 114
 — (monoïde hypercube), 88
 gaussien (monoïde, groupe), 10
 graphe
 — caractéristique, 13
 — de Cayley, 13
 groupe (voir monoïde)

H

hypercube (monoïde), 88

I

idéal (treillis), 117
 identités de résidu, 54
 imbrication (treillis), 117
 intervalle, 29

K

Knuth-Bendix (algorithme), 24

L

local (Δ), 45

M

monoïde
 — d'Artin sphérique, 77
 — de Birman-Ko-Lee, 86
 — de Garside, 11, 114
 — du lapin, 95
 — d'un nœud torique, 89
 — de tresses, 77, 84, 86, 92, 96, 97
 — de type fuseau, 103
 — de Sossinski-Vershinin, 96
 — de Wirtinger, 89
 — hypercube de Garside, 88
 — non standard pour B_3 , 97
 mots (retournement), 16
 — (conjugaison), 115
 multiple (élément), 9

N

nœud torique, 89
 norme, 10
 normale (Δ -), 29
 — (fractionnaire), 37

O

Ore (conditions), 10

P

parabolique (sous-monoïde), 74
 partition croissante, 109
 petit (monoïde), 10
 pgcd, 9, 11
 positive (conjugaison), 30
 ppcm, 9, 10
 présentation complémentée, 15
 primitif (élément), 13
 produit (treillis), 66
 produit croisé (monoïde, groupe), 53
 projection (nœud), 89,
 — (monoïde), 108,
 puissance, 30
 — sommitale, 35

Q

quasicentralisateur, 44
 quasicentre, 44
 quasi-gaussien, 98

R

réflexions (groupe), 92
 résidu (identités), 54
 — (opération), 10
 retournement de mots, 16

S

sans imbrication (treillis), 117
 saturé, 69
 sélecteur, 15
 sous-treillis, 117
 simple (conjugaison), 30
 — (élément), 13
 sommital (écart), 35
 sommitale (classe), 36
 — (puissance, copuissance), 35
 sphérique (monoïde d'Artin), 77
 — (monoïde quasi-gaussien), 98
 support, 58
 symbole (treillis), 103

T

θ -cyclage, inverse, 38
 torique (nœud), 89
 transformation élémentaire, 58
 treillis des simples, 13
 treillis de type fuseau, 103
 tresses (monoïde), 77, 84, 86, 92, 96, 97
 type fuseau, 103
 type $(n, \tilde{d}, d)$ ou (n, d) , 113

V

vertébré (treillis), 117

W

Wirtinger (monoïde), 89